КВАНТ
ЖУРНАЛ

1981

1 - 12

НОМЕР
1

Квант
1
1981
Основан в 1970 году
НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР
ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:
М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

В НОМЕРЕ:

2 К нашим читателям

Ученые обращаются к молодежи

3 *А. П. Александров.* Речь на XVIII съезде Всесоюзного Ленинского Коммунистического Союза Молодежи *

* * *

6 *Л. Ашкинази.* Как получают сильные постоянные магнитные поля
11 *А. Битман, Е. Гик.* ЭВМ за шахматной доской

Лаборатория «Кванта»

19 *А. Колмаков, Р. Смирнов.* Необычные свойства обычной струи

Математический кружок

21 *Л. Курляндчик.* Приближение к экстремуму

Задачник «Кванта»

26 Задачи М661—М665; Ф673—Ф677
28 Решения задач М611—М615; Ф618—Ф622

«Квант» для младших школьников

33 Задачи
34 *С. Дворянинов.* Узоры и... арифметика

По страницам школьных учебников

37 *М. Гельфанд, В. Берман.* Десять задач на применение производной

Практикум абитуриента

40 *А. Егоров.* Показательные уравнения
43 *Л. Баканина.* Задачи о спутниках

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1980 году

46 Московский инженерно-физический институт

Искусство программирования

49 *Ю. Первин.* Зачем и как детей учат программированию?
53 Заочная школа программирования. Урок 12.

Информация

56 Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу
57 Заочная физико-техническая школа
59 Новый прием на малый мехмат

Рецензии, библиография

60 *В. Лешковцев.* Путешествие в мир кристаллов
61 **Шахматная страничка**
62 **Ответы, указания, решения**
Шахматный конкурс *(3-я с. обложки)*
Наша обложка *(18)*

На первой странице обложки — фотография кристаллов (фото В. Германа и Ю. Никерина). Мир кристаллов необычайно красив и разнообразен. И столь же разнообразны применения кристаллов в науке, технике. Кристаллам посвящено множество научных и научно-популярных книг. О двух таких книгах рассказывается в этом номере журнала (см. с. 60)

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1981

К нашим читателям

Подписавшись на наш журнал, вы уже сделали свой выбор, и нам не надо агитировать вас заниматься физикой или математикой. Тема нашего с вами разговора иная.

1981 год — знаменательный. Это первый год новой, одиннадцатой, пятилетки. Он является также годом XXVI съезда нашей великой Коммунистической партии. Съезд наметит новые рубежи в развитии нашей Родины, поставит перед всем народом новые задачи на пути строительства коммунистического общества.

XXV съезд КПСС ориентировал всех нас на борьбу за повышение эффективности и качества различных форм труда. Ваш труд — это ваша учеба. Учиться можно по-разному. Учение становится радостным, когда школьник овладевает навыками умственного труда. Тогда каждый день он наталкивается на открытия — математические, физические, астрономические... И в этом смысле он уподобляется ученым. Ученые открывают то, что еще никому не известно. Школьник открывает то, чего еще не успел узнать, хотя науке это уже известно. Решая задачи, овладевая новыми понятиями и законами, вы занимаетесь настоящим научным трудом. Ведь и ученым прежде всего приходится узнавать, что уже сделано другими в интересующей их области, и только потом они могут двигаться дальше.

Приветствуя первых читателей нашего журнала, Президент Академии наук СССР академик М. В. Келдыш писал в нем в январе 1970 года: «...мне хотелось бы пожелать юным математикам и физикам, всем читателям «Кванта» больших успехов в учебе, в работе, в приобретении и совершенствовании своих знаний». Содействовать приобретению и совершенствованию ваших знаний — главная задача журнала. Мы хотим, чтобы те из вас, кто уже успел полюбить физику или математику, нашли в «Кванте» материал для самостоятельных размышлений, для развития своего ума и способностей. Мы также хотели бы помочь остальным школьникам заинтересоваться нашими науками.

В этом году на страницах «Кванта» вы познакомитесь с размышлениями крупнейших советских физиков и математиков о нашей школе, о роли молодежи в развитии науки. В конце прошлого года к 60-летию выступления В. И. Ленина на III съезде комсомола, издательство «Наука» выпустило интересный сборник статей под названием «Ленин. Наука. Молодежь». К сожалению, эту книгу трудно раздобыть и немногие из вас смогут с ней познакомиться. Поэтому мы решили поместить на страницах нашего журнала некоторые статьи из этой книги. Цикл этих статей открывается речью Президента Академии наук СССР академика А. П. Александрова на XVIII съезде ВЛКСМ.

Не скроем от вас, что мы сами не всем довольны в нашем журнале. Некоторые из публикуемых нами статей излишне трудны, суховаты, мы редко рассказываем о нерешенных проблемах науки, в журнале мало юмора. Мы стремимся повысить эффективность и качество нашего журнала, сделать его статьи интереснее, живее, доступнее (конечно, не снижая их научного уровня).

В стремлении улучшить журнал «Квант» нам очень нужны помощь и советы наших читателей. Поэтому мы обращаемся к вам — пишите нам в редакцию о том, что вам нравится и не нравится в нашем журнале, о чем бы вы хотели в нем прочитать, какие вопросы из области математики, физики, астрономии и космонавтики вас волнуют. Мы ждем ваших писем.

Желаем вам больших успехов в текущем учебном году.

Президент Академии наук СССР
академик А. П. АЛЕКСАНДРОВ

Речь на XVIII съезде Всесоюзного Ленинского Коммунистического Союза Молодежи

Дорогие товарищи! Позвольте мне прежде всего передать вам сердечный привет от штаба советской науки — Академии наук Союза ССР. В своей речи на съезде ВЛКСМ товарищ Леонид Ильич Брежнев сказал, что в целом коммунисты старшего поколения могут быть довольны советской молодежью наших дней. Это, товарищи, очень значащие слова. Мы действительно довольны нашей советской молодежью.

Мне уже много лет — 75 минуло. Приходилось работать вместе с молодежью в самых разнообразных направлениях деятельности и в самых различных условиях. Это было и в мирное время, это было и в войну, это было и в сложнейший послевоенный период, когда начиналась работа в области атомной техники, атомной энергетики. Во всех этих случаях старшему поколению всем сердцем помогала молодежь. На них, молодых ученых, легла наибольшая тяжесть всех этих работ. На самые сложные, трудные участки с большой охотой шла молодежь. И она самоотверженно выполняла то, что надо было выполнить. Вот поэтому я считаю, что мы можем быть абсолютно довольны нашей молодежью. И мы, ученые, с большим удовлетворением приветствуем XVIII съезд комсомола.

Перепечатывается с небольшими сокращениями.

Товарищи! Мы живем уже 33 года без войны, и это ваше великое счастье, и вы за это так же, как и мы, люди старшего возраста, должны быть глубоко признательны нашей Коммунистической партии, которая направляет огромные усилия на благородное дело мира.

Я должен сказать, что Леонид Ильич, который провел всю войну в самых ее тяжелых местах, который видел и пережил все то, что принесла война нашему народу, особенно ясно чувствует необходимость сохранения мира, он особенно большие усилия вкладывает в то, чтобы наша страна могла развиваться дальше в мирных условиях. А это, товарищи, непросто. Ведь как-никак после Октябрьской революции, а особенно после окончания второй мировой войны все усиливается противостояние стран социалистического содружества и лагеря капитализма. Стоит только появиться у нас какому-то слабому месту, как на него моментально обращают внимание наши враги. Конечно, все это накладывает на нас и на вас, молодых, громадную ответственность. Мы не должны допускать, чтобы в нашем едином фронте были какие-то слабые места, которые могут быть использованы для идеологических диверсий против нас, для усиления напряженности и военной конфронтации.

Товарищи! Вы знаете, что использование ядерного оружия в Хиросиме и Нагасаки не вынуждалось военными обстоятельствами. Это была демонстрация так называемой политики с «позиции силы» для того, чтобы заставить нашу страну так или иначе капитулировать перед этим новым видом оружия. Вы знаете, что вскоре после окончания войны начали создаваться вокруг нашей страны военные базы. Я помню тот период, когда за рубежом рисовались карты, на которых показывались самолеты, вылетающие с военных баз, их маршруты лежали к нашим городам, они несли ядерные бомбы. И вот тогда, товарищи, наша молодежь вместе с нашими учеными, которыми руководил крупнейший наш ученый и патриот, прекрасный, самоотверженный и преданный Родине человек, академик Игорь Васильевич Курчатов, решила труднейшую научную и техническую задачу — создала наш ядерный щит. Под его руководством были развернуты работы по созданию ядерной техники, и наша страна решила эту сложнейшую задачу в те же сроки, которые требовались США, привлекшим к этой работе крупнейших ученых мира.

Много юношей и девушек, только что вернувшихся с войны, принимало участие в этой важной работе. Надо сказать, что тогда эти коллективы не чувствовали, что война кончилась, настолько велика была напряженность работы. Все понимали, что своевременное окончание этих работ может спасти мир от ядерной войны. И вот тогда молодежь показала себя в этом новом для нее направлении. Ведь пришлось всему выучиться, чему раньше не учили,— и ядерной физике, и всем сложнейшим вопросам атомной техники. Просто этих наук еще не было в то время. Все приходилось создавать и открывать, учиться и учить. И вот эти задачи, товарищи, с большой помощью, с огромным участием нашей молодежи были вовремя решены.

В то время на Западе писали, что Советский Союз может создать ядерное оружие, вероятно, к 1954 году, а примерно на 1952 год намечалось развертывание против нашей страны ядерной войны, но у нас создали ядерное оружие уже в 1949 году благодаря этому самоотверженному труду. Я напомню вам, товарищи: Игорь Васильевич Курчатов докладывал тогда на сессии Верховного Совета СССР относительно участия молодежи в этих работах. Это действительно был героический подвиг нашей научной молодежи.

Товарищи! Мы живем в напряженной обстановке. Мы, люди Земли, начинаем чувствовать, что ресурсы нашей планеты не безграничны.

что нам надо заботиться об их сохранении на возможно долгий промежуток времени. Наука нам дает для этого многое. Мы можем компенсировать нефть ядерной энергетикой, которая работает сейчас, а еще больше будет работать в будущем веке. Наука делает огромные шаги в изменении техники сегодняшнего дня, в изменении технологии. Вам всем приходится работать в тех или других отраслях, и вы лично чувствуете постоянный научно-технический прогресс. Вы прекрасно знаете, что именно от инициативы в труде, от творческого подхода, от широты кругозора каждого из вас, в сущности, зависит и успех вашей работы. Не только напряженный труд, но и обдумывание этого труда, планирование этого труда, создание новой техники в этом труде — это то, что мы должны делать каждый день. Если мы чему-то когда-то научились и успокоились на этом, то мы безнадежно и быстро устареем. Нам предстоит неизбежно учиться каждый год и каждый день, учиться работать все в новых направлениях и с новым оборудованием, с новой технологией или перекраивать старую технологию, чтобы двигаться вперед. Тут у нас огромное поле деятельности, товарищи. И здесь творческая молодежь может сделать огромнейший вклад в развитие всего нашего хозяйства, техники, обороны — всего, что нужно нашей стране...

Так вот, товарищи, чем шире у вас будет кругозор, чем больше вы будете присматриваться к окружающему, читать, изучать, тем больших успехов вы сможете добиться в вашем труде, тем больше будет развиваться ваше творчество, ваша инициатива...

Товарищи! Творческий Труд — это наибольшее счастье, которое может получить человек от жизни. Наибольшее удовлетворение получаешь тогда, когда в результате своего труда видишь, как меняется наука, как меняется техника, видишь заводы, которые создавались при твоем участии, а иногда и новые отрасли, как это случилось со мной при развитии атомной энергетики. Это огромная радость — удовлетворение своим трудом. Я желаю вам всем, каждому из вас в отдельности, испытать такую радость творчества к тому времени, когда вы доживете до моего возраста. А этого я вам всем желаю!

Товарищи! Жить в нашей стране — большое счастье. Достаточно человеку родиться, и о нем заботятся родители, государство. Его учат бесплатно, работа ему обеспечена. Нет нынче таких обстоятельств, при которых нужно было бы думать о том, куда он денется после того, как окончит школу или вуз. Это все в нашей стране обеспечено. Это великое счастье, товарищи! Я ведь еще помню, когда были у нас биржи труда, когда была безработица. Теперь этому даже трудно поверить. Наша страна — замечательная страна. Наша партия хорошо ведет нашу страну, отлично ведет. Я считаю, что вам случилось жить в очень счастливое время. И вы должны за это сердечно благодарить нашу партию, наше правительство, нашу Советскую страну. Желаю вам успехов!

Л. Ашкинази

Как получают сильные постоянные магнитные поля

Магнитные поля применяются практически во всех областях физики, в том числе для исследования свойств веществ, для получения сверхнизких температур, в экспериментах с элементарными частицами. Магнитные поля необходимы для работы установок термоядерного синтеза и МГД-генераторов — новых методов получения энергии, которые в ближайшем будущем, возможно, станут энергетической базой нашей цивилизации.

Каковы, с точки зрения этих применений, важнейшие характеристики магнитных полей и методов их получения? Прежде всего, это величина индукции магнитного поля. Для применений, связанных с энергетикой, обычно должна быть достигнута вполне определенная и довольно большая величина индукции — порядка 10 Тл, иначе соответствующая установка не будет работать или будет иметь очень маленький КПД. Для применений, связанных с исследованием свойств вещества, желательно получение возможно больших полей — ведь чем шире диапазон изменения любой величины, тем больше шансов найти нечто новое. Для исследований элементарных частиц обычно нужны величины полей того же порядка, что и для энергетики.

Вторая важнейшая характеристика — объем пространства, в котором получается поле. Тут цель одна — чем больше, тем лучше. В энергетических установках увеличение объема, в котором создается сильное поле, увеличивает КПД. В этой области «интересные» объемы $1 \div 100$ м^3. Чем больше объем, занимаемый сильным полем, тем выше точность и чувствительность измерений в исследовательских установках. Если искомые события наблюдаются не часто, как, например, пролет редкой космической частицы через пузырьковую камеру, расширение объема магнитного поля увеличивает вероятность наблюдения события. Для исследования элементарных частиц желательно создание полей в объемах $1 \div 10$ м^3. При исследованиях свойств вещества, когда стремятся получить максимально возможные поля, приходится довольствоваться куда более скромными объемами — порядка $1 \div 10^3$ см^3.

Кроме того, существенны постоянство индукции поля в пределах какого-то объема (однородность) и постоянство индукции поля во времени (стабильность). Однако эти вопросы не являются обычно «ключевыми». Для энергетических применений еще важно, какая мощность нужна для создания искомого поля, так как эта мощность «вычитается» из мощности, вырабатываемой установкой, и тем самым уменьшает ее КПД.

И все же основными параметрами, зачастую определяющими результаты, полученные в различных областях применения, являются индукция поля и объем пространства, в котором оно создано.

Как же получают сильные магнитные поля?

Основой всех методов получения сильных постоянных магнитных полей являются большие токи

Из эксперимента известно, что индукция B магнитного поля, возникающего вокруг проводника с током I, пропорциональна току и магнитной проницаемости среды μ и зависит от формы проводников и расстояния до них r. В частности, для прямого провода бесконечной длины

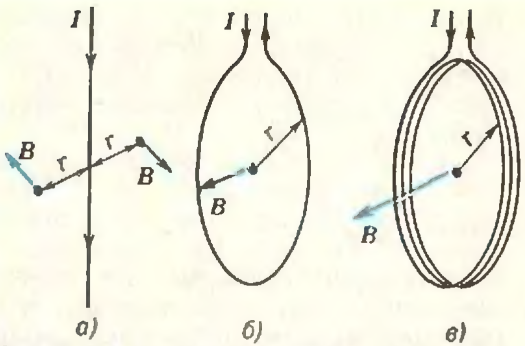


Рис. 1. Магнитное поле прямого провода (*а*), кругового витка (*б*), соленоида (*в*).

(рис. 1, *а*) $B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r}$; для кольцевого витка (рис. 1, *б*) $B = \frac{\mu\mu_0 I}{2r}$, то есть в π раз больше. Поэтому для получения сильных полей применяют кольцевые витки, а точнее — соленоид из кольцевых витков, так как поля отдельных витков суммируются (рис. 1, *в*).

Будем считать, что $\mu = 1$. Катушки на ферромагнитных сердечниках ($\mu \gg 1$) мы не рассматриваем, так как из-за насыщения ферромагнетиков такие катушки не применяют для получения сильных полей.

Итак, чем больше поле и чем больше объем, в котором надо его получить, тем больший для этого потребуется ток. Однако, когда с помощью тока создают магнитное поле, имеют место два «побочных» эффекта, которые и определяют сложности получения больших полей.

Во-первых, на элемент провода длиной dl с током I, находящийся в поле с индукцией B, действует сила F, равная по модулю

$$F = BIdl \sin \alpha, \qquad (1)$$

где α — угол между вектором $\vec{B}$ и направлением тока. Следовательно, на провод с током будут действовать силы, пропорциональные силе тока и индукции поля, создаваемого всем соленоидом. Эти силы будут увеличиваться с увеличением поля и размеров области, в которой его надо получить.

Во-вторых, при протекании тока I по проводнику с сопротивлением R выделяется мощность

$$P = I^2 R. \qquad (2)$$

Эта мощность пропорциональна I^2, и, следовательно, она будет увеличиваться с увеличением индукции создаваемого поля. Расширение области, в которой получают поле, также будет сопровождаться увеличением выделяющейся мощности.

Таким образом, при попытках создать большие магнитные поля следует ожидать двух неприятностей: соленоиды будут разваливаться и расплавляться. И основные проблемы, стоящие на пути получения сильных магнитных полей,— это проблема прочности и проблема теплоотвода. Как же решаются эти проблемы?

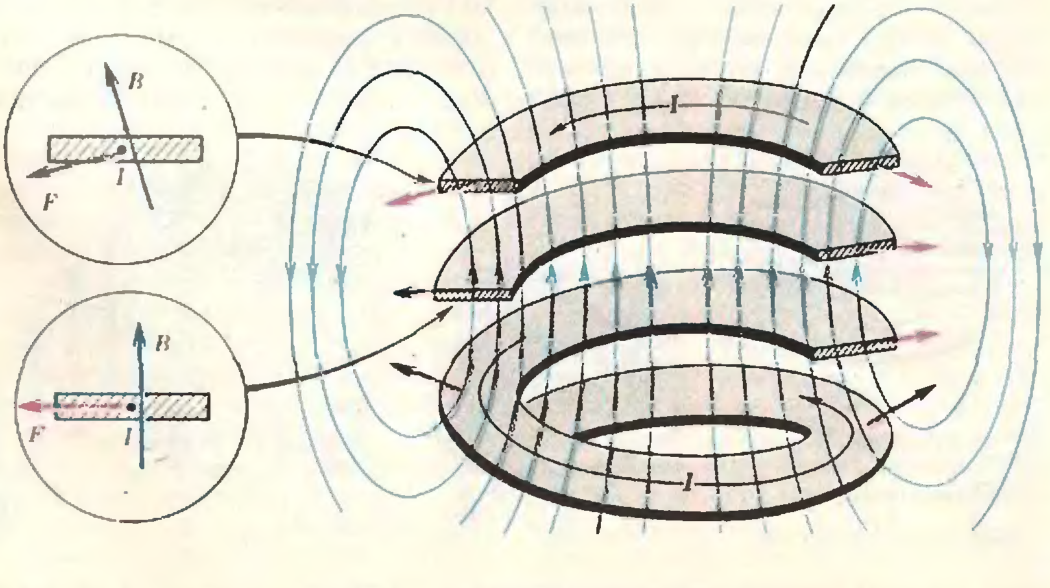


Рис. 2. Силы, действующие со стороны магнитного поля на соленоид.

Проблема прочности

На рисунке 2 показан соленоид, витки которого сделаны из металлической ленты (скоро мы узнаем, почему их делают именно из ленты, а не из провода круглого сечения). Силы, действующие со стороны магнитного поля, стремятся разорвать соленоид в плоскости витков и, кроме того, прижимают крайние витки к средним. Для борьбы с разрывающими силами соленоид помещают в прочную наружную оболочку, которая и воспринимает разрывающие усилия. Для борьбы со сжимающими силами между витками прокладывают изоляцию, имеющую высокую прочность на сжатие, например слюду или керамику. Но и прочность изоляции, и прочность оболочки не беспредельны. Другой путь борьбы с разрушением в больших полях — так называемые «малосиловые» соленоиды. Витки в таких соленоидах располагаются так, чтобы угол между вектором $\vec{B}$ и направлением тока был по возможности меньше — тогда силы уменьшаются (см. (1)). Однако сделать совсем «бессиловой» соленоид не удается.

Силы, действующие со стороны магнитного поля, ограничивают возможные величины индукции поля. Так, в объеме ~ 100 см^3 практически нельзя получить поле больше 20 Тл с использованием медного соленоида. Если обмотка сделана из медных сплавов повышенной прочности (медь + цирконий, медь + кадмий и др.), индукция поля в объеме 100 см^3 может достигать 40 Тл. Однако сплавы меди имеют большее (в 1,5—2 раза) сопротивление, чем медь. А это усложняет (см. (2)) и без того непростую проблему теплоотвода.

Теплоотвод

Из всех жидкостей, которые можно применить для охлаждения, наибольшую теплоемкость имеет вода; поэтому, как правило, для охлаждения применяют именно ее. Было бы наиболее просто вместо медного провода намотать соленоид медной трубкой и пропускать внутри трубки воду для охлаждения, а по самой трубке — ток. Так и делали когда-то; так делают и сейчас, но только в тех случаях, когда тепло, которое нужно отвести от соленоида, невелико. Длинная и тонкая трубка создает большое сопротивление текущей воде, и прокачать через такой соленоид большое количество воды не удается.

Между тем, чтобы отвести от соленоида тепловую мощность, скажем, 5 МВт с помощью воды из водопроводной магистрали (температура воды 10÷15°С), надо прокачивать сквозь соленоид 1000 л воды в минуту, и эта вода будет выходить из соленоида нагретой почти до кипения. Поток воды не должен ни на мгновение ослабевать — иначе температура воды дойдет до 100°С, вода закипит, теплоотвод ухудшится (теплопроводность пара мала) и соленоид разрушится. Поэтому путь для воды должен быть короче и шире, чтобы сопротивление течению

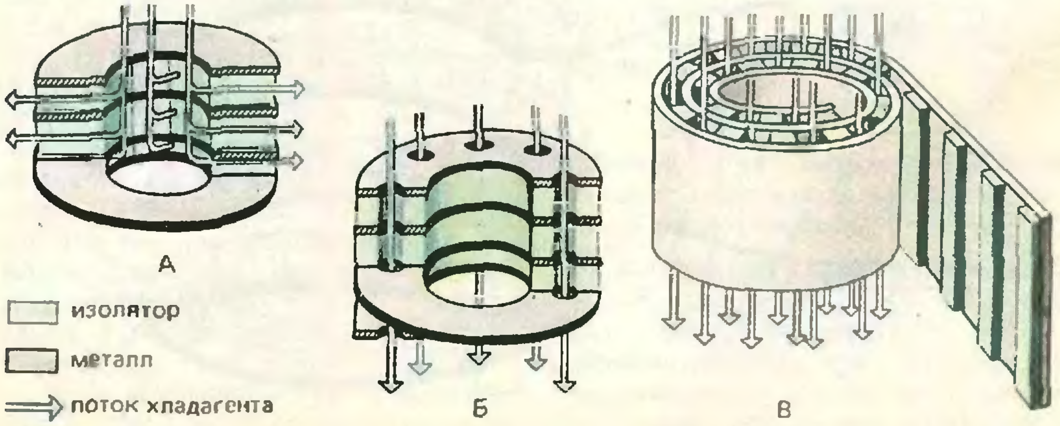


Рис. 3. Основные системы охлаждения соленоидов.

воды было мало, а поток ее соответственно велик. Значит, вода не должна течь параллельно току. Не заставить ли их течь перпендикулярно? Ток будет течь по окружностям, а вода — по радиусам либо параллельно оси соленоида. На этой идее основаны три основные конструкции соленоидов, показанные на рисунке 3.

В конструкции А вода течет вдоль оси соленоида и между витками, по радиусам; в конструкциях Б и В — параллельно оси соленоида либо сквозь витки (Б), либо между ними (В). (Конструкция В выглядит непривычно; чтобы вы лучше ее себе представили, соленоид нарисован «незаконченным» — последний виток еще не намотан.)

Мы уже говорили, что обмотку соленоида делают из медной ленты, а не из обычного, круглого в сечении, провода. Делается это для более эффективного охлаждения. Ведь тепло отводится с поверхности проводника, и чем больше площадь поверхности, тем лучше теплоотвод. С точки зрения охлаждения ленту следует делать как можно тоньше. Однако очень тонкой она быть не может — такой соленоид сложен в изготовлении и слишком велико будет его сопротивление (вспомните, что $R \sim \frac{1}{S}$, где S — площадь сечения проводника). Для более эффективного охлаждения желательно было бы сделать как можно больше отверстий для протекания воды. Но это привело бы к уменьшению прочности соленоида, к увеличению его сопротивления.

При изготовлении соленоида учитываются все «за» и «против» и создается оптимальная конструкция. Получаемые на таком соленоиде поля определяются прочностью материала, его электро- и теплопроводностью, а также тем, насколько точно произведены расчеты оптимальных параметров конструкции.

Размеры трех конструкций, показанных на рисунке 3, были оптимизированы для получения максимально возможного поля, но результаты, достигнутые на них, оказались различными. На соленоиде типа А было получено поле $B = 5$ Тл (тепловые потери $P = 0{,}6$ МВт); на соленоиде типа В получено после $B = 13$ Тл ($P = 2$ МВт); на соленоиде типа Б автором этой конструкции Ф. Биттером в 1939 году было достигнуто значение индукции $B = 10$ Тл ($P = 1$ МВт). В настоящее время на соленоидах типа Б получают поля в $30 \div 40$ Тл. (Все данные приведены для соленоидов с внутренним диаметром 3 см.)

Криогенные соленоиды

Посмотрим еще раз на формулу (2). Выделяющаяся в соленоиде мощность пропорциональна сопротивлению (именно поэтому соленоиды делают из меди). С уменьшением сопротивления соленоида уменьшаются тепловые потери. Один из способов уменьшения сопротивления — охлаждение обмотки с помощью криогенных жидкостей — сжиженных газов. Медный соленоид, охлаждаемый жидким азотом ($T = 78$ К) или жидким водородом ($T = 21$ К), уменьшает свое сопротивление в 8 и 100 раз соответственно; во столько же раз уменьшается отводимая мощность.

Сопротивление различных металлов при понижении температуры уменьшается в разной степени, и металл, имеющий при температуре 300 К сопротивление большее, чем у меди, может при низкой температуре быть более электропроводным, чем медь. В частности, при $T = 21$ К наименьшее среди всех металлов сопротивление имеет алюминий, и оно почти в 10 раз меньше сопротивления меди при этой же температуре. Таким образом, охладив медный соленоид до 78 К или 21 К, можно уменьшить выделение в нем тепла в 8 или 100 раз, а заменив при 21 К медь на алюминий — еще в 10 раз.

В охлаждаемых жидкими газами соленоидах тепло отводится не за счет нагрева протекающей по соленоиду воды, а за счет испарения сжиженных газов. Но теплота испарения сжиженных газов во много раз меньше, чем теплоемкость воды (при нагреве ее от 10 до 90°С). И для отвода одного и того же количества тепла необходима гораздо большая масса жидкого газа, чем масса воды.

Так что у криогенных соленоидов есть важный недостаток — большой расход сравнительно дорогого хладагента.

В результате криогенные соленоиды широкого распространения не получили, тем более что у них появились еще более холодные конкуренты:

Сверхпроводящие соленоиды

У многих металлов и сплавов при охлаждении до определенной температуры (критической) сопротивление становится равным нулю. В таком состоянии эти металлы и сплавы называют сверхпроводниками. Если сделать из такого материала обмотку соленоида и охладить соленоид до температуры ниже критической, то его сопротивление станет равным нулю. Этим решается проблема теплоотвода — ведь если равно нулю сопротивление, то равна нулю и выделяющаяся мощность. Проблема прочности остается, поэтому «рекордных» полей сверхпроводящие соленоиды не создают. Но зато они легче и меньше по размерам, чем медные водоохлаждаемые. По сравнению с криогенными сверхпроводящие соленоиды требуют в сотни раз меньшего расхода хладагента. (Вообще говоря, сверхпроводящие соленоиды тоже можно было бы назвать криогенными — ведь они охлаждаются теми же жидкими газами, но по традиции криогенными называют только не сверхпроводящие соленоиды).

Казалось бы, с помощью сверхпроводящих соленоидов можно получать громадные поля. Однако это не так — индукция поля в сверхпроводящем соленоиде ограничена некоторым критическим значением $B_{кр}$. При этом критическом значении поля исчезает сверхпроводимость. Значения $B_{кр}$ различны для разных металлов и сплавов. Наиболее широко применяется сейчас в качестве материала сверхпроводящих соленоидов соединение Nb_3Sn. Для него $B_{кр} = 30$ Тл (при 4,2 К). Но и такое поле с помощью сверхпроводящего соленоида из Nb_3Sn получить не удалось. Практически с помощью соленоидов из Nb_3Sn получают пока поля $B \leqslant 20$ Тл.

Важный вклад, внесенный в технику сильных магнитных полей сверхпроводящими соленоидами, состоит в том, что поля $B = 10 \div 15$ Тл стали доступны большинству физических лабораторий. Например, сверхпроводящий соленоид, о котором только что шла речь, занимает место со всем относящимся к нему оборудованием несколько квадратных метров и расходует ≈ 10 л жидкого гелия в сутки, а соответствующий медный водоохлаждаемый соленоид требует строительства специальной насосной станции.

Область применения сверхпроводящих соленоидов расширится, если будут найдены сверхпроводящие соединения с большими значениями $B_{кр}$.

И в заключение упомянем еще об одной возможности получения сильных магнитных полей. Вспомним, что ограничивает достигаемые значения индукции поля: перегрев соленоида и его механическое разрушение. Однако и разогрев до плавления, и разрушение не происходят мгновенно (по льду можно бежать, даже когда он такой тонкий, что сломается, если остановиться). Поэтому в течение малого промежутка времени по соленоиду можно пропускать такой большой ток, которого он «не выдержал» был при длительной работе. В таком импульсном режиме на короткий промежуток времени могут быть получены гораздо бо́льшие магнитные поля, чем при работе в стационарном режиме.

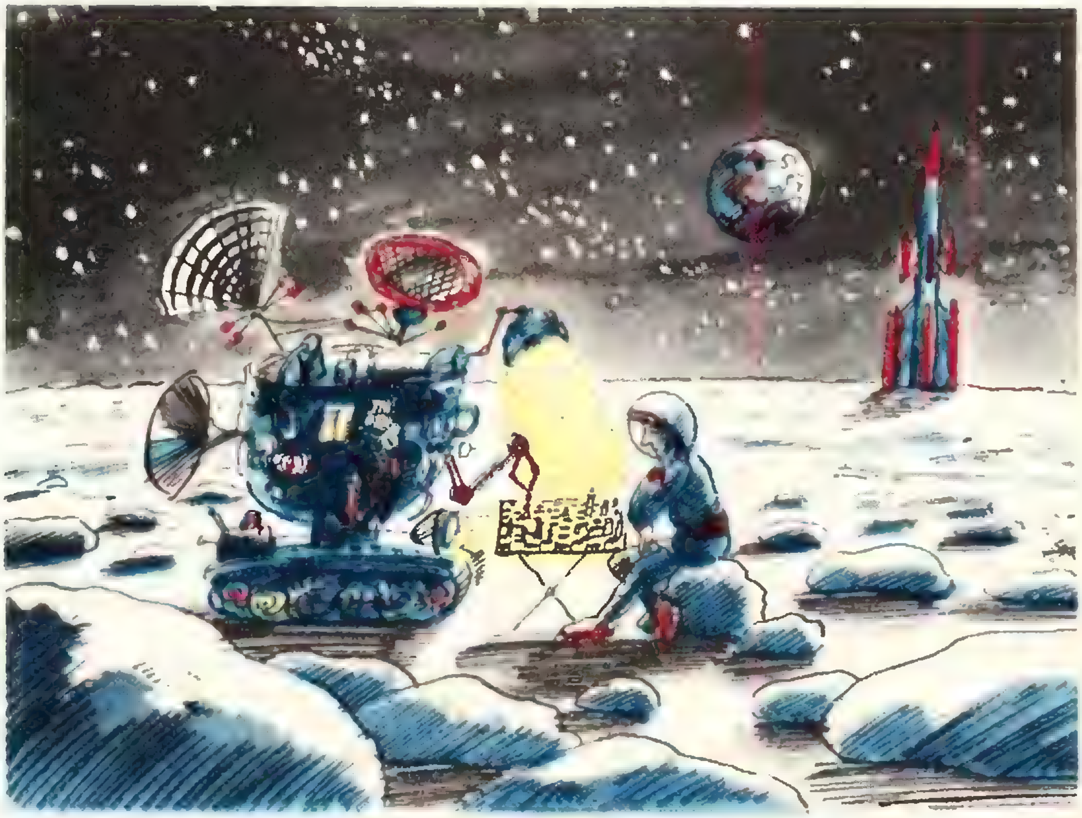
Упражнения

1. На соленоиде получают поле с индукцией $B_1 = 10$ Тл, и при этом отводимая тепловая мощность $P_1 = 1$ МВт. Можно ли на этом соленоиде получить поле $B_2 = 25$ Тл? Производительность водопроводной магистрали $V = 50$ м^3/ч, температура воды в магистрали 10°C, и температура воды на выходе из соленоида не должна превышать 90°C.

2. Тепловая мощность, выделяющаяся на медном соленоиде, равна 5 МВт. Какова должна быть производительность водопроводной магистрали для охлаждения соленоида? Температура воды в магистрали 10°C, температура воды на выходе из соленоида не более 90°C.

Каков должен быть расход хладагента, если для охлаждения использовать жидкий азот? Теплота испарения жидкого азота 70 Дж/см^3. Сколько жидкого водорода надо прокачивать через систему охлаждения, если соленоид сделан из алюминия?

Индукция поля во всех трех случаях одна и та же.



А. Битман, Е. Гик

ЭВМ за шахматной доской

В экономике, в задачах управления, в долгосрочном планировании, иными словами в так называемых *больших системах*, выбор достаточно хорошего решения представляет трудную задачу. Дело в том, что решение приходится принимать в ограниченное время, в сложной, меняющейся ситуации, зависящей от большого числа факторов, не поддающихся однозначной оценке и механическому учету. Здесь уже невозможно обойтись без современных технических средств, способных взять на себя часть интеллектуальной работы.

Смысл современной автоматизации и состоит в передаче ЭВМ таких функций, как восприятие обстановки, переработка больших объемов информации, способность сопоставлять и оценивать различные ситуации, делать логические выводы.

Для того чтобы ЭВМ могла решать все эти задачи, необходимо их формализовать, затем разработать достаточно эффективные алгоритмы (то есть такие, чтобы решение могло быть получено) и, наконец, реализовать эти алгоритмы в виде программы для ЭВМ.

Вот тут-то нам на помощь и приходят... шахматы. Они представляют собой очень удобную модель «большой системы». Действительно, в шахматах легко сформулировать конечную и многие промежуточные цели, но невозможно дать точного рецепта для их достижения. Выбор хода в шахматной партии — это и есть принятие решения в описанной выше сложной ситуации. Вот почему ученые многих стран, работающие над проблемой искусственного интеллекта, избрали именно шахматы в качестве отличной модели для своих исследований.

Научить машину играть в шахматы — дело не слишком трудное. Достаточно выбрать некоторый способ кодирования полей шахматной доски и фигур, а затем написать программу, которая определяла бы в данной позиции все допустимые правилами игры ходы. Делая любой из этих ходов, машина, тем самым, играла бы в шахматы. Нетрудно представить себе качество такой игры! А вот научить машину *хорошо* играть в шахматы — задача исключительно трудная. Чтобы ее решить, надо научиться находить лучший, по возможности, ход в предъявленной позиции. Как построить алгоритм, отыскивающий такой ход? При этом важно, чтобы алгоритм обеспечивал решение поставленной задачи не теоретически, а реально, то есть позволял выбирать ход в разумное время. Чтобы подойти к решению этой проблемы, нам придется ввести некоторые термины и понятия, используемые в общей теории игр.

Некоторые сведения из теории игр

Шахматы относятся к разряду конечных игр с полной информацией. В этом отношении они ничем не отличаются, скажем, от простейшей игры в крестики-нолики на доске 3×3. Для таких игр теоретически почти все известно, их структура абсолютно ясна. В каждой позиции существует лучший ход (возможно, не единственный). Последовательность лучших ходов за обе стороны приводит эту воображаемую партию к однозначному результату. В этом смысле говорят, что исход игры в любой позиции, в том числе и начальной, является предопределенным. Но если в крестиках-ноликах борьба при наилучшей игре сторон завершается ничьей, то в шахматах вопрос о том, как именно предопределена начальная позиция, по-видимому, останется открытым.

Доказательство того, что исход игры в любой шахматной позиции предопределен, было впервые дано итальянским математиком Цермело в 1913 году. Мы приведем его здесь, поскольку оно необходимо для понимания дальнейшего.

Обозначим исходную (не обязательно начальную) шахматную позицию через P_0 (рис. 1), пусть в ней будет ход белых (позициям с ходом белых соответствуют белые кружки, а позициям с ходом черных — черные). Произведем все возможные ходы белых из P_0, из каждой полученной позиции — все возможные ходы черных и т. д. Графически эта процедура представляет собой так называемое *дерево игры*, начатой в P_0 (*корень* дерева).

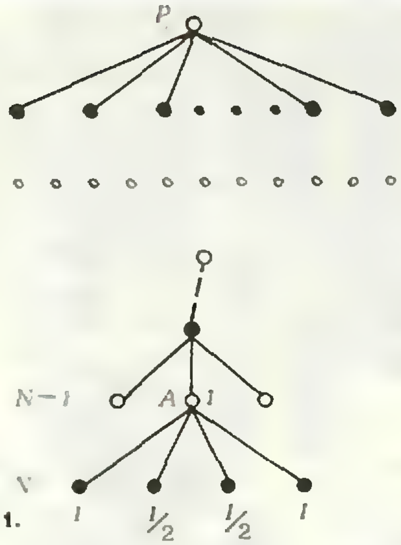


Рис. 1.

Позиции, в которых уже нельзя сделать ход (то есть на доске стоит мат или пат), назовем *заключительными*. Введем для них естественные оценки: 1 — выигрыш белых, $^1/_2$ — ничья, 0 — выигрыш черных. Если некоторая позиция вдоль ветки повторилась, то ее также будем считать заключительной и припишем ей оценку $^1/_2$. Поскольку число шахматных позиций конечно, любая партия через конечное число ходов придет к заключительной позиции.

Пусть максимальная длина партии, начатой из P_0, равна N ходам (под ходом понимается ход только одной из сторон). Рассмотрим все партии длины N за ход до конца. На рисунке 1 нижние точки соответствуют заключительным позициям (N-й уровень). Покажем, что оценки можно по простым правилам перенести с N-го уровня на $(N-1)$-й. Пусть A — позиция, из которой все ходы ведут в заключительные позиции. Поскольку их оценки нам известны, можно установить и оценку позиции A. Если в ней ход белых (как на рисунке 1), то ее оценка равна максимальной из оценок заключительных позиций, в которые можно попасть из A. Если же в A ход черных, то вместо максимальной оценки следует взять минимальную. В нашем случае из A белые могут сделать 4 хода. Два из них ведут к ничьей, два к выигрышу. Оценка позиции A равна 1.

После описанной процедуры все позиции дерева игры $(N-1)$-го уровня будут оценены. Действительно, некоторые из этих позиций с самого начала были заключительными и уже имели оценку, остальные получили ее по указанному правилу. Теперь можно удалить из дерева игры все позиции N-го уровня и проделать описанную процедуру над новым, чуть подрезанным деревом. В результате окажутся оцененными все позиции $(N-2)$-го уровня и т. д.

Таким образом, всякий раз позиции с ходом белых приписывается максимальная из оценок позиций, в которые можно попасть из нее, а позиции с ходом черных — минимальная. Такая процедура называется *минимаксной* или *минимаксом*. Применив минимакс в последний раз, то есть на N-м шагу, мы найдем оценку исходной позиции P_0, а заодно и лучший ход из нее. Этим доказательство заканчивается.

Отметим, что процедура минимакса лежит в основе большинства играющих программ. Только при этом в качестве заключительных рассматриваются позиции, получаемые из анализируемой за некоторое, не слишком большое число ходов.

На основе метода Цермело можно составить алгоритм, точно решающий нашу задачу,— выбрать лучший ход в позиции. Однако с точки зрения получения результата это будет абсолютно нереальный алгоритм. Машина никогда не сделает хода, поскольку обход полного дерева игры и при нынешнем уровне техники, и в обозримом будущем окажется для нее делом явно непосильным.

Общий подход к созданию шахматных программ

В 1950 году известный американский математик К. Шеннон опубликовал статью, в которой дал общий подход к построению шахматных программ. Прежде всего он ввел понятие *оценочной функции*, сопоставляющей каждой шахматной позиции определенное число (оценку). Далее он предложил вести перебор вариантов до некоторой фиксированной глубины, а возникающие при этом концевые позиции оценивать с помощью оценочной функции. Лучший ход определяется после этого по правилам минимаксной процедуры.

Шеннон указал на две возможные схемы перебора. По первой схеме в процессе построения усеченного дерева игры рассматриваются все ходы, допустимые по правилам игры. Во второй схеме предусматривается перебор лишь тех ходов, которые по некоторым соображениям признаются разумными. При реализации первой схемы трудно достичь большой глубины расчета, так как дерево перебора катастрофически быстро растет. Во втором случае возникают проблемы, связанные с определением «разумности» ходов.

В качестве оценочной функции Шеннон предложил использовать многочлен вида $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i p_i$, где k — число признаков позиции, α_i — «вес» признака, а p_i равно 1 или 0 в зависимости от наличия или отсутствия данного признака в позиции. С помощью оценочной функции можно учесть материальное соотношение сил, а также позиционные факторы: слабые пешки, владение центром, открытые линии, подвижность фигур и т. д.

Возникает вопрос: а нельзя ли придумать столь мощную оценочную функцию (не обязательно указанного вида), которая бы позволяла определить исход игры в любой предложенной позиции? С помощью такой функции можно было бы безошибочно играть в шахматы, не производя утомительного перебора. Лучшим всегда будет ход, который ведет в позицию с максимальной оценкой*).

---

*) Строго говоря, для оптимальной игры следует еще учитывать, во сколько ходов выигрывается позиция. Для этого достаточно в теореме Цермело заключительным выигранным позициям приписывать оценки $\pm 1/n$, а ничейным — 0 (n — длина ветви, ведущей в данную позицию).

То, что такая оценочная функция в принципе существует следует из теоремы Цермело. Значения этой функции могут быть заданы в виде таблицы, левый столбец которой представляет собой набор всех шахматных позиций, а правый — их оценок (1, 0, 1, 2). Однако эта таблица будет столь же необозримой, как и полное дерево шахматной игры. Разумеется, нас интересует не табличная оценочная функция, а такая, которая использует в качестве аргументов статические признаки позиции. Доказать это невозможно, но, скорее всего, идеальная оценочная функция, основанная на простых и явных признаках позиции, будет такой же громоздкой, как и табличная функция. Компактную функцию построить, по-видимому, можно, но тогда уже и признаки должны быть слишком «умными».

Трудности, возникающие при создании хорошей оценочной функции, носят вполне закономерный характер и отражают сложность шахматной игры. Высказанные соображения показывают, что бесспереборная игра в шахматы вряд ли возможна. В качестве иллюстрации рассмотрим следующий пример.

В позиции на рисунке 2 материальный перевес на стороне белых, но оба их слона находятся под боем, и нетрудно убедиться, что окончание ничейно. Немного изменим позицию, добавив черным пешку на с5. Как будто положение черных от этого может только улучшиться, однако теперь они проигрывают: 1. h7+! Кр:h7 2. Са4! Л:b2+ 3. Сс2+! Л:с2+ 4. Крf3, и собственная пешка мешает черной ладье вернуться на последнюю горизонталь. Роковая роль пешки с5 выявилась только в процессе перебора вариантов. А теперь представьте себе оценочную функцию, которая могла бы во всем этом разобраться, то есть предпочесть (за белых) вторую позицию первой!

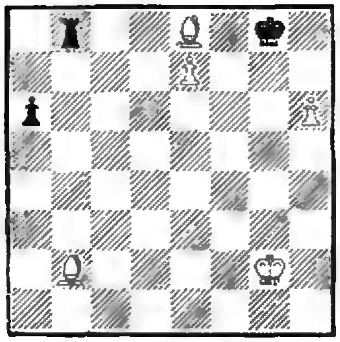


Рис. 2.

Оценочные функции, используемые в реальных шахматных программах, состоят обычно из двух компонентов — материальной и позиционной. Подсчет материальной составляющей несложен и производится в соответствии с принятой у шахматистов шкалой относительной ценности фигур. Что касается позиционной составляющей, то можно рассматривать различные позиционные оценки, и, как показывает практика, разумное варьирование весов признаков не сказывается на силе игры машины. Гораздо важнее сам факт учета того или иного позиционного фактора.

Обычно при создании программ учитываются такие факторы, как подвижность фигур, владение центром и открытыми линиями, безопасность короля, а в пешечной структуре — фаланги, опорные пункты, проходные, сдвоенные и изолированные пешки и т. д. Рассмотрим один из факторов — владение центром. Вот как трактует его оценочная функция советской программы «Каисса»: центром с точки зрения белых считаются поля е4, d4, е5, d5, е6, d6; пешка или легкая фигура, стоящая в центре, дает 20 условных единиц; удар пешкой или фигурой на центральное поле ценится в 10 единиц. Для уточнения масштаба добавим, что подвижность фигуры определяется числом полей, которые она бьет, причем за каждое поле прибавляется одно очко.

В различных стадиях шахматной партии (дебют, миттельшпиль, эндшпиль) оценка некоторых позиционных факторов может существенно меняться. В соответствии с этим сильнейшие программы имеют настраиваемую оценочную функцию, то есть функцию, для которой набор признаков и их весов определяется самой программой в зависимости от обстановки на доске. В частности, у «Каиссы» таких состояний четыре — три предназначены для трех стадий партии, а четвертое используется для матования короля противника при подавляющем материальном перевесе.

Современные методы шахматного программирования

Любая шахматная программа так или иначе реализует некоторую переборную схему. В этом разделе мы рассмотрим методы и алгоритмы, которые являются общими для большинства работающих шахматных программ.

1°. Метод граней и оценок Наиболее мощный метод сокращения перебора — это метод граней и оценок, используемый в настоящее время во всех играющих программах. Остановимся на нем подробнее. Для этого выделим из дерева игры некоторый фрагмент, схематически изображенный на рисунке 3.

Пусть белые в позиции A уже изучили ход AB (то есть ход, ведущий из позиции A в позицию B). При этом соответствующее поддерево с вершиной B в результате минимакса дало позиции B оценку $+20$*). Это означает, что, пробуя другие ходы из A при спуске вниз по дереву, белые уже никогда не согласятся на оценку, меньшую или равную 20 (поскольку эту оценку им обеспечивает ход AB).

Оценка $+20$ является гарантированной оценкой позиции A (для белых), или, иначе, ее нижней гранью. При движении вниз по дереву гарантированные оценки всякий раз переносятся в соответствующие позиции через один уровень.

Пусть теперь белые, продолжая перебор, попробовали ход AC, а черные ответили ходом CD. При вершине D пока что была записана ее оценка, равная $+20$, перенесенная из A. Если теперь оценка, принесенная снизу в позицию D, окажется не больше 20, это будет означать следующее:

1. Ход AC не лучше, чем AB (при правильном ответе черных CD оценка белых будет не выше, чем при ходе AB). Будем называть ход AC *плохим*.

2. Ход CD опровергает ход AC (в указанном смысле). Будем называть его *закрывающим*.

3. Другие ходы черных из позиции C можно не рассматривать.

В этом случае говорят, что произошло *отсечение*, и ходы CE и CF уже не изучаются.

Важно отметить, что в описанном методе большое значение имеет порядок рассмотрения ходов. Предположим, что сначала пробовались ходы CE и CF и только потом CD. Если бы ни один из ходов CE и CF не оказался закрывающим, то мы только зря потеряли бы время на перебор ненужных вариантов.

Допустим, что нижняя грань позиции C равна $+30$. Это означает, что в дальнейшем переборе будут рассматриваться только те позиции, оценки которых заключены в интервале $]20, 30[$.

Пусть оценка позиции D, принесенная снизу, оказалась равной 25. Тогда ход CD назовем *улучшающим*, гарантированная оценка позиции C станет равной 25, черные продолжат перебор ходом CE и будут вести его в границах $]20, 25[$.

Улучшающий ход сужает границы и тем самым увеличивает вероятность последующих отсечений. Ходы CE и CF могут еще более улучшить оценку для черных или даже оказаться закрывающими.

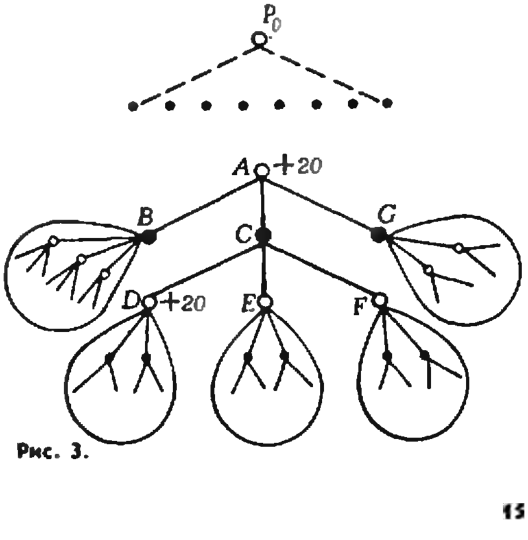


Рис. 3.

---

*) Здесь и в дальнейшем оценка понимается с точки зрения белых (для черных оценка этой позиции равна — 20)

В любом случае перебор сокращается, если самый лучший ход пробуется первым.

Наконец, если оценка позиции D окажется не меньше 30, то ход CD будет плохим. Черные продолжат перебор ходом CE в прежних границах. В случае, когда все ходы из вершины C окажутся плохими, уже ход белых AC станет закрывающим, и черные должны будут сменить ход, приведший в позицию A.

В рассмотренном примере границы были получены непосредственно из перебора как минимаксные оценки. Однако, когда мы только начинаем перебор, никаких границ еще нет или их можно считать бесконечными. В этом случае, дойдя впервые до заключительной позиции, программа будет мириться даже с потерей ферзя. Лучший ход, в конце концов, будет найден, но ценой рассмотрения огромного количества бессмысленных вариантов.

Чтобы этого избежать, обычно в начале перебора устанавливают некоторые априорные границы. Их можно получить разными путями, например проведя неглубокий перебор или с помощью некоторого форсированного варианта (см. ниже). Важно лишь, чтобы исходные границы оказались более или менее достоверными.

В том случае, если мы не угадали с границами и оценка, полученная в результате перебора, в них не попала, приходится сдвигать границы в соответствующую сторону и повторять перебор. Повторение обязательно, если перебор вывел нас на нижнюю границу — все ходы в установленных границах «проигрывают». Сдвиг границ необходим здесь, чтобы выбрать меньшее из зол. Если же оценка оказалась равной верхней границе и при этом «выигрывающий» ход (выводящий на эту границу) единственный, то он и будет лучшим, хотя его истинная сила нам точно неизвестна. Сдвиг границ вправо и повторный перебор понадобятся только при наличии выигрывающих ходов-конкурентов.

Описанный алгоритм обычно называют α—β-процедурой, имея в виду обозначение граней $]\alpha, \beta[$. Эффективность этого алгоритма целиком зависит от качества упорядочения ходов в переборе. Так, если лучшие ходы пробуются первыми, то возникающие отсечения позволяют ограничиться рассмотрением всего около $\sqrt{n}$ позиций, где n — полный объем дерева перебора.

2°. Форсированный вариант. Когда мы говорили об оценочной функции, то отмечали, что она учитывает лишь статические свойства позиции и поэтому ей можно доверять только в относительно спокойных ситуациях, в которых ни одна из сторон не может ближайшими ходами изменить материальное соотношение сил в свою пользу. Если же чисто механически обрывать расчет при достижении предельной глубины перебора, то может оказаться, что сторона, имеющая право хода, выигрывает фигуру или даже объявляет мат.

Чтобы избежать этих очевидных ошибок, были придуманы различные эвристические методы, позволяющие более эффективно использовать оценочную функцию. Одним из таких методов является «форсированный вариант» или сокращенно ФВ. Реализованный в виде подпрограммы ФВ используется основной программой в различные моменты игры и с различными целями, но основным его назначением является получение достоверной оценки для конечных позиций дерева перебора.

ФВ представляет собой некоторую переборную схему со своими правилами отбора ходов-кандидатов и со своей эвристикой. Допустимыми ходами в ФВ являются взятия, превращения, шахи и ответы на шахи, то есть ходы, которые могут существенно изменить ситуацию на доске. Перебор ведется в некоторых заранее установленных границах. Основная идея ФВ заключается в следующем: сторона, имеющая право хода и не находящаяся под шахом, может оценить возникшую позицию и присвоить ей эту статическую оценку. Отсюда сразу следует, что в ФВ разумно рассмат-

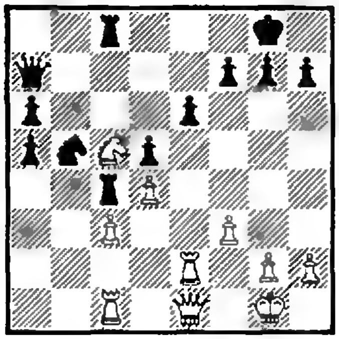


Рис. 4. Боголюбов-Капабланка (Нью-Йорк, 1924).

ривать не все взятия, а только те, которые сохраняют материал как минимум на уровне своей нижней границы.

Если иметь в виду сотрудничество человека и машины, то уже знание результата ФВ в данной позиции во многом помогло бы шахматисту. Зачастую неочевидные комбинации проходят в русле чистого форсированного варианта. Рассмотрим пример из партии известных гроссмейстеров прошлого (рис. 4).

Черные в этой позиции сыграли: 1...К:d4!, и после 2. cd Л8:c5! Боголюбов сдался, так как на 3. dc решает 3...Ф:c5+ и 4...Л:c1. Программа, использующая ФВ, нашла бы эту комбинацию даже при глубине расчета на один полуход.

Впервые ФВ был программно реализован в 1962 году в одной из ранних версий «Каиссы». В настоящее время им активно пользуются многие шахматные программы.

3°. *Порядок рассмотрения ходов в позиции.* Остановимся теперь на тех методах, которые позволяют добиться качественного упорядочения ходов в позициях дерева перебора. Как было показано выше, этот вопрос имеет решающее значение для времени работы шахматной программы.

Ходы из корня дерева должны быть упорядочены наиболее аккуратно. Это будет способствовать возникновению максимальных отсечений в процессе перебора. Для этой цели после каждого из этих ходов применяется ФВ, который и приносит оценку хода.

На более глубоких уровнях перебора средства для диагностики качества хода более разнообразны. Если можно взять незащищенную фигуру или съесть слабой фигурой сильную, то такие ходы-кандидаты рассматриваются в первую очередь. Это так называемые выгодные взятия. В число первых попадают также отступления фигур при нападении на них (правило «напал-ушел»). Эффективным оказывается взятие фигуры противника, только что сделавшей ход. При прочих равных условиях выгоднее начать с ходов на небитые поля и т. д.

Все эти соображения служат для априорной оценки хода. Они безусловно полезны, хотя и несколько абстрактны. На помощь приходит «служба лучших ходов», позволяющая учитывать динамику позиции. В этой справочной службе запоминаются те ходы, которые оказывались лучшими (то есть закрывающими или улучшающими) на различных уровнях в ходе перебора. Эти ходы предлагаются затем в качестве ходов-кандидатов во вновь возникающих позициях. Интересно, что, когда «Каисса» впервые использовала «службу лучших ходов», время работы машины сократилось более чем в 10 раз.

В заключение следует отметить, что многие интересные проблемы остались нами не рассмотренными. Кроме того, не надо думать, что описанные в этой статье идеи и методы, используемые при программировании шахматной игры, являются единственно возможными. Так, экс-чемпион мира, доктор технических наук М. М. Ботвинник, который в настоящее время занимается вопросами программирования шахмат, идет по иному пути*). Будущее покажет, какой из путей решения этой задачи окажется более плодотворным.

---

*) См. книгу М. М. Ботвинника «От шахматиста к машине» (М., «Физкультура и спорт», 1979).

ПОЛУОКТАЭДРЫ... И ДРАПИРОВКА ПОТОЛКОВ

Перекрытия многих современных зданий (вокзалов, кафе) выполнены в виде стержневой системы, геометрической основой которой служит «плотная упаковка» тетраэдров и полуоктаэдров (см. «Квант», 1976, № 9, с. 25). Верхняя плоскость одного из вариантов такой стержневой системы (рис. 1) — квадратная решетка: к каждому квадрату прикреплены четыре стержня, образующие вместе с этим квадратом полуоктаэдр. Верхняя поверхность системы обычно покрывается листовыми материалами, играющими роль крыши или перекрытия между этажами. Нижняя же часть решетки оставляется пустой, представляя зрителю, сидящему в зале, ажурный стержневой узор.

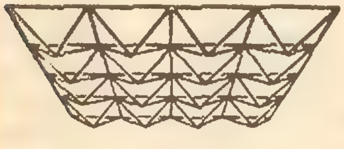
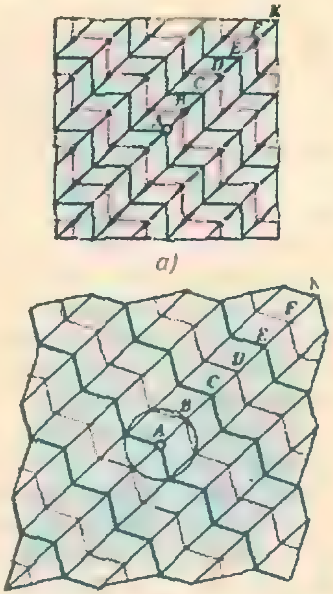


Рис. 1.

Однако такую решетку легко обогатить, покрыв ее треугольными гранями. Примером такой орнаментации является потолок в главном зале Ленинградского вокзала в Москве. Этот потолок покрыт жесткими кусками листового материала. Но такие потолки можно драпировать и цельным куском материала.



а)

б)

Рис. 2.

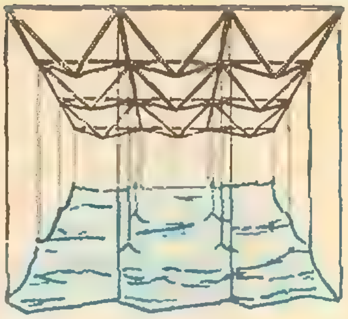


Рис. 3.

Как это можно сделать?

На полу расстелим неразрезанную драпировку (ткань, полиэтиленовую пленку и т. п.). В местах, отвечающим вершинам узора, показанного на рисунке 2б, пришьем (приклеим) крючки. Протягивая от этих крючков нити к соответствующим вершинам потолочной решетки (рис. 2а), можно «мгновенно» поднять на потолок всю драпировку (рис. 3). Она образует орнаментацию, показанную на второй странице обложки.

Задача. Каково соотношение площади потолка и площади драпировки натянутой на систему полуоктаэдров, описанную выше (см. рис. 2а, б)?

В. Гамаюнов

Магическая спираль

В квадрате 5×5 можно расположить двадцать пять последовательных чисел 1, 2, ..., 25 так, чтобы их суммы по столбцам, строкам и диагоналям квадрата равнялись числу 65. Такой квадрат называется магическим квадратом пятого порядка. Пятицветный рисунок на четвертой странице обложки является его модификацией.

Суммы чисел, расположенных вдоль пяти прямых, выходящих из центра спирали, равны одной и той же константе 65 ($4+23+17+11+10=16+15+9+3+22=\ldots$). Этой же константе равны и все пять сумм чисел, расположенных на концентрических окружностях ($8+16+4+12+25=2+15+23+6+19=21+9+17+5+13=\ldots$). Кроме того, если какое-либо число на одной из прямых, кроме среднего, сложить с четырьмя числами, расположенными на концах одноцветных с ним диаметрально противоположных полос, мы снова получим магическую сумму 65 (например, $14+(6+17)+(5+23)=20+(6+4)+(12+23)=2+(24+10)+(18+11)=8+(5+11)+(24+17)$). Тем самым мы получаем еще двадцать магических комбинаций. Еще пять комбинаций получаются так: надо к среднему (на прямой) числу прибавить две пары чисел, расположенных диаметрально противоположно этой прямой, соответственно, на внутренней и внешней окружностях ($21+(4+12)+(18+10)=13+(16+4)+(22+10)=5+(16+8)+(22+14)=17+(8+25)+(14+1)=9+(12+25)+(18+11)$).

Магическая сумма 65 получается также при сложении пяти чисел, расположенных в вершинах и в центре вогнутых четырехугольников ($4+15+17+6+23$, $23+9+11+5+17$, $17+3+10+24+11$, $16+2+9+23+15$, ...). Но, пожалуй, самым интересным является то обстоятельство, что магическая сумма получается и при сложении чисел «по спирали» — если двигаться вдоль полос от периферии к центру и обратно: $1+24+17+15+8=8+19+5+11+22=22+20+13+6+4=4+15+21+7+18=\ldots$ Перемещаясь таким образом, мы все время будем получать магическую сумму из пяти чисел и в конце концов возвратимся к исходному числу, то есть к единице (при этом каждый набор оказывается составленным из разноцветных чисел).

Е. Кривошеев

А. Колмаков, Р. Смирнов

Необычные свойства обычной струи

Оказывается, много интересного и неожиданного можно увидеть, наблюдая за самой обыкновенной струей воды из водопроводного крана. Вот несколько примеров проведенных нами опытов и наблюдений. Надеемся, они заинтересуют и вас тоже.

1. Рябь на поверхности струи

Откройте водопроводный кран так, чтобы из него вытекала тонкая спокойная струя воды. Возьмите спицу (или иголку) диаметром 1—2 мм и введите ее в струю на расстоянии 5—7 см от крана (рис. 1). Вы увидите, что на небольшом участке над спицей поверхность струи станет волнистой, образуется рябь*). Обратите внимание на расстояния между горбами волны — чем дальше от спицы, тем они больше.

Что будет, если перемещать спицу вниз или вверх по струе? По мере опускания спицы рябь станет все более и более мелкой, наконец глаз вообще перестанет ее различать. А если спицу поднести к самому основанию струи, ряби не будет, но струя немного искривится.

2. Струя, обвивающая спицу

Поместите в струю спицу, как показано на рисунке 2. Смачивая спицу, струя будет стекать по ней. Теперь аккуратно поверните спицу вокруг ее оси — струя, как бы следуя за спицей, обовьется вокруг нее (см. рис. 2,*а*). Продолжая вращать спицу, нам удавалось получать два—три оборота струи (см. рис. 2,*б*).

3. Падение струи на стекло

Любопытную картину можно наблюдать, когда тонкая струя воды попадает на горизонтальную твердую поверхность, например, как в наших опытах, на стекло (рис. 3). Вокруг точки падения струи вода образует две отчетливо различающиеся зоны. Ближайшая к месту падения тонкая прозрачная зона представляет собой круг и кажется неподвижной.

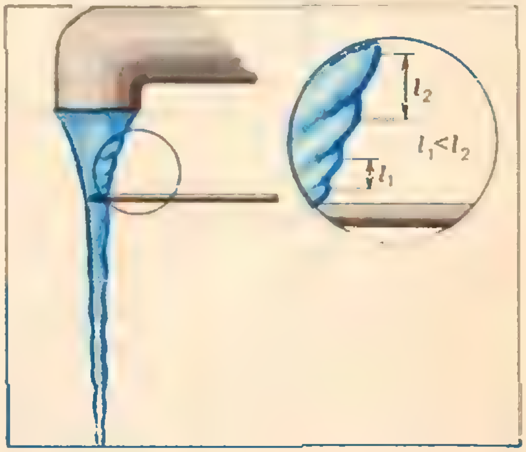


Рис. 1.

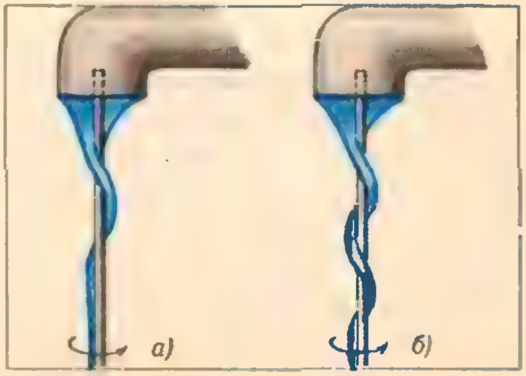


Рис. 2.

---

*) Объяснение этого явления вы можете найти, например, в статье Е. Кузнецова и А. Рубенчика «О волнах на море и ряби на лужах» («Квант», 1980, № 9) или в статье С. Соскина «Капиллярные волны в струе» («Квант», 1976, № 10).

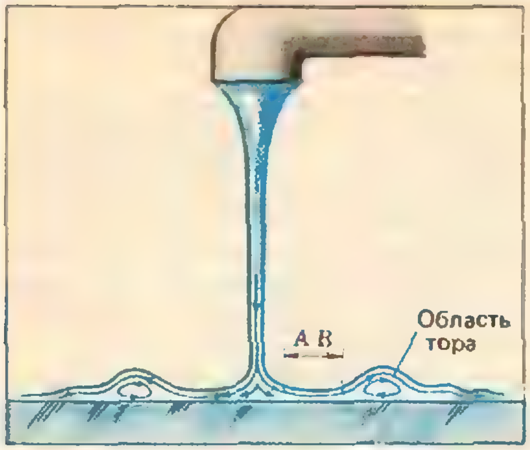


Рис. 3.

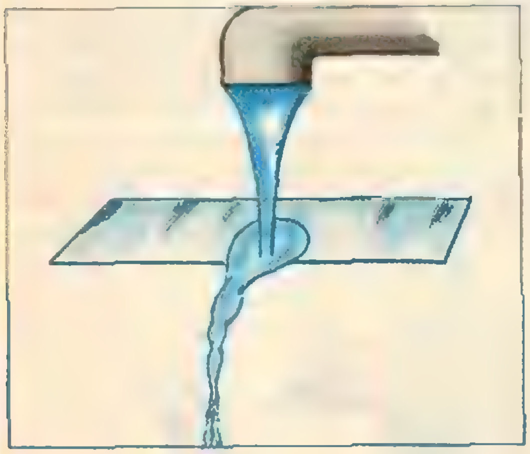


Рис. 4.

Следом за ней располагается вторая зона: она гораздо толще первой и имеет форму тора.

Интересно распределение скоростей воды в этих зонах. Наберите в пипетку немного чернил и осторожно капните их в воду в область *AB* на рисунке 3. Очень быстро чернила будут отнесены водой в область тора, где движение жидкости заметно замедляется и образуются вихри.

4. Струя и наклонная плоскость

Стекло, с которым вы проводили предыдущий опыт, слегка наклоните так, чтобы вода стекала с него. Потоки из областей тора, встретившись, дружно устремляются вниз, а поток из первой зоны, имеющий большую скорость, стремится обогнать их и огибает боковые потоки сверху и снизу. В результате стекающая струя принимает вид своеобразной плоской цепочки (рис. 4).

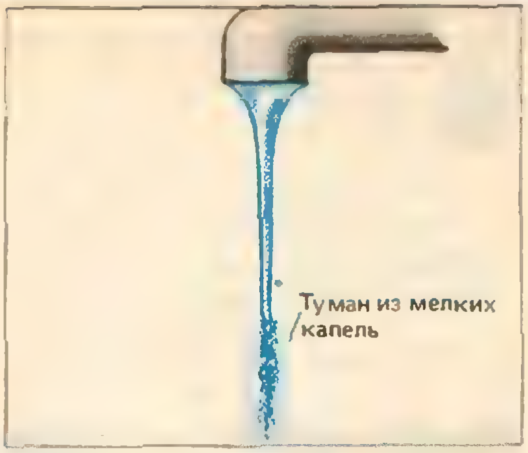


Рис. 5.

5. Образование капельного тумана

Возьмите тонкую трубку (диаметром 3—5 мм) и с ее помощью получите тонкую струю желательно холодной воды. Понаблюдайте за струей, и вы увидите, что в своей нижней части она как бы разрушается и при этом становится мутной. Это вызвано тем, что там струя действительно перестает быть монолитной, она распадается на отдельные капли. Вследствие рассеяния света глаз не воспринимает падение отдельных капель, поэтому разрушенный участок струи и кажется непрозрачным (рис. 5).

Интересно, что, помимо сравнительно больших капель, по бокам распавшейся струи возникает своеобразный туман из очень мелких капель. Иногда они образуют вполне устойчивую конфигурацию. Глядя на струю сверху, можно увидеть явно выраженную винтовую линию. Если же смотреть на струю сбоку, сразу бросается в глаза ее синусоидальное очертание.

Л. Курляндчик

Приближение к экстремуму

Понятие производной, которое вы изучаете в школе, дает простой способ нахождения наибольших и наименьших значений функций $y=f(x)$ от одной переменной x. Однако в задачах приходится порой находить наибольшее или наименьшее значения выражений, зависящих от нескольких переменных. Способы, связанные с применением производной, здесь значительно сложнее и в школе не изучаются, поэтому большую ценность приобретают элементарные методы решения таких задач. Об одном из таких методов, предложенном в 1884 году немецким математиком Р. Штурмом, пойдет речь в статье.

Начнем с двух задач.

Задача 1. *Какой из n-угольников, вписанных в данный круг, имеет наибольшую площадь?*

Задача 2. *Сумма n чисел равна 1. При каких значениях этих чисел сумма их квадратов принимает наименьшее возможное значение?*

На рисунке 1 изображен вписанный в круг треугольник ABC, причем $|AB|>|BC|$. Посмотрим, что произойдет с площадью этого треугольника, если, не изменяя положения точек A и C, переместить точку B по дуге AC так, чтобы длины сторон AB и BC сблизились, то есть уменьшилась их разность. Пусть точка B' на дуге AC такова, что $|AB'|=|CB|$. Чтобы сблизить длины сторон AB и BC, нужно заменить точку B любой точкой дуги BB'. При этом длина высоты BH треугольника ABC увеличится и, следовательно, увеличится его площадь.

Это наблюдение показывает, что неправильный n-угольник не является решением задачи 1. Действительно, если $[AB]$ и $[BC]$ — неравные соседние стороны этого n-угольника (рис. 2), то, заменив вершину B какой-либо точкой дуги BB', мы увеличим площадь треугольника ABC и получим вписанный n-угольник большей площади.

Переходя к задаче 2, выясним, что произойдет с суммой квадратов двух чисел, если сблизить эти числа, не изменяя их суммы. Пусть a, b — данные числа, $a<b$, и пусть $0<\varepsilon<b-a$. Тогда

$$(a+\varepsilon)^2+(b-\varepsilon)^2=a^2+b^2-2\varepsilon(b-a-\varepsilon)<a^2+b^2.$$

Мы видим, что сумма квадратов уменьшилась. Это наблюдение показывает, что набор n чисел (с суммой 1), среди которых есть два неравных числа, не является решением задачи 2. Действительно, сблизив неравные числа, мы, не изменив суммы всех чисел, уменьшим сумму их квадратов.

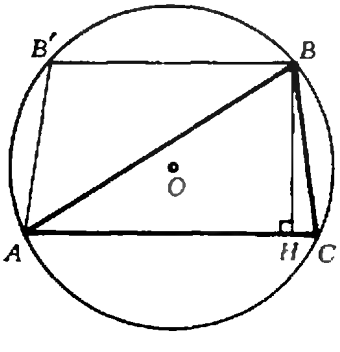


Рис. 1.

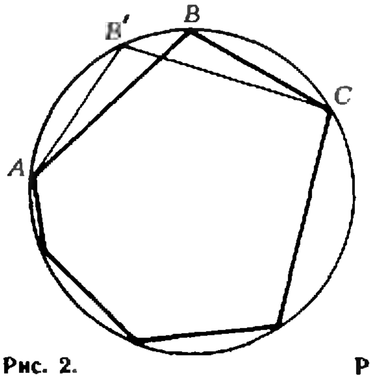


Рис. 2.

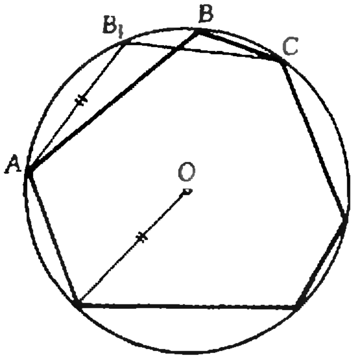


Рис. 3.

Может показаться, что задачи 1 и 2 решены: решением задачи 1 является правильный n-угольник, вписанный в данный круг, а решением задачи 2 является набор чисел $(1/n, 1/n, \ldots, 1/n)$. На самом деле пока доказано лишь, что ни один n-угольник, отличный от правильного, не является решением задачи 1 и ни один набор n чисел, отличный от $(1/n, 1/n, \ldots, 1/n)$, не является решением задачи 2. Но остается неисследованной еще одна логическая возможность: никакой n-угольник не является решением задачи 1, никакой набор n чисел не является решением задачи 2. Доказательство существования математического объекта с заданными свойствами часто оказывается довольно трудным. Но решение любой задачи упрощается, если известен возможный ответ, а именно так обстоит дело в задачах 1 и 2.

Решение задачи 1.

Докажем, что *площадь любого вписанного в данный круг n-угольника не больше площади вписанного в этот круг правильного n-угольника.* (Это как раз означает, что правильный n-угольник является решением задачи 1; в предыдущем рассуждении мы установили лишь то, что *неправильный n-угольник не является решением.*)

Заметим, что, если заменить вершину B вписанного n-угольника точкой B' (рис. 2), получится вписанный n-угольник той же площади, отличающийся от исходного многоугольника порядком следования двух соседних сторон. Произведя такую операцию нужное число раз, мы можем поменять местами любые две стороны вписанного n-угольника, не изменив его площадь.

Пусть P — вписанный в данный круг n-угольник, отличный от правильного. Наименьшая сторона этого n-угольника стягивает дугу, угловая величина которой меньше, чем $360°/n$, а наибольшая сторона стягивает дугу, большую, чем $360°/n$. Переставим стороны n-угольника так, чтобы наибольшая и наименьшая стороны оказались рядом. На рисунке 3 это стороны AB и BC. Отложим на дуге AC дугу AB_1, угловая величина которой равна $360°/n$. Заменив вершину B точкой B_1, мы получим вписанный n-угольник P_1, площадь которого больше площади n-угольника P.

При этом в многоугольнике P_1 есть, по крайней мере, одна сторона, стягивающая дугу величины $360°/n$, то есть равная стороне правильного вписанного n-угольника. Если многоугольник P_1 не является правильным, то, проделав с ним описанную операцию, мы придем к вписанному n-угольнику P_2 большей площади, в котором еще, по крайней мере, одна сторона равна стороне правильного вписанного n-угольника. Через конечное число шагов мы придем к правильному вписанному n-угольнику, и площадь его, тем самым, больше площади многоугольника P.

Решение задачи 2.

Пусть сумма чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равна 1. Если не все эти числа равны между собой, то наименьшее из них меньше $1/n$, а наибольшее больше $1/n$. Пусть $a_1 < 1/n$, $a_2 > 1/n$. Заменив число a_1 на $1/n$, а число a_2 на $a_1 + a_2 - 1/n$, мы «сблизим» a_1 и a_2, не изменив их суммы и, следовательно, уменьшим сумму квадратов. Таким образом, мы получим новый набор чисел с суммой 1, и сумма квадратов чисел этого набора меньше суммы квадратов чисел исходного набора. При этом в новом наборе есть, по крайней мере, одно число, равное $1/n$. Если в этом наборе не все числа равны $1/n$, то, проделав с ним описанную операцию, мы придем к набору с суммой 1, но еще меньшей суммой квадратов, в котором еще, по крайней мере, одно число равно $1/n$. Через конечное число шагов мы придем к набору $(1/n, 1/n, \ldots, 1/n)$ с суммой квадратов, меньшей, чем в исходном наборе. Таким образом, *набор чисел $(1/n, 1/n, \ldots, 1/n)$ является решением задачи 2.*

Если для произвольного числа S среди наборов n чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ с суммой S искать такой, в котором сумма квадратов членов минимальна, то проделанные рассуждения привели бы нас к набору $\left(\frac{S}{n}, \frac{S}{n}, \ldots, \frac{S}{n}\right)$. Таким образом, для произвольных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ справедливо неравенство

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2 \geqslant n\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^2,$$

то есть

$$\boxed{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n} \geqslant \left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^2}$$

среднее арифметическое квадратов нескольких чисел не меньше квадрата среднего арифметического этих чисел. При этом, равенство имеет место в том и только в том случае, если $a_1=a_2=\ldots=a_n$ (докажите это самостоятельно).

Вы, конечно, заметили, что внешне несходные задачи 1 и 2 решены, по существу, одним и тем же методом. В обеих задачах требовалось найти экстремальное значение функции, зависящей от большого числа переменных. При этом поиск экстремума удалось разбить на последовательные этапы, на каждом из которых мы следили за изменением не всех этих переменных, а лишь двух из них, связанных при этом дополнительным условием. В задаче 1 мы следили за поведением площади n-угольника при изменении удачным образом выбранных соседних сторон, в задаче 2 мы рассматривали, как изменяется сумма квадратов n чисел при изменении только двух из них.

Такой метод поиска экстремума функций нескольких переменных — он и называется *методом Штурма* — будет применен и в остальных задачах этой статьи.

Сделаем три заготовки.

Выясним сперва, что происходит с произведением чисел a и b, где $b>a>0$, если эти числа сближаются, а их сумма остается постоянной. Пусть $0<\varepsilon<b-a$; тогда

$$(a+\varepsilon)(b-\varepsilon)=ab+\varepsilon(b-a-\varepsilon)>ab.$$

Мы доказали, что

I. *При сближении двух чисел с постоянной суммой их произведение растет.*

Несколько труднее выяснить, что происходит с суммой степеней a^k+b^k, где $k\geqslant 2$ — натуральное число, при сближении чисел a и b, $b>a>0$, если сумма $a+b$ остается постоянной.

Пусть $\varepsilon>0$. Сравним a^k+b^k и $(a+\varepsilon)^k+(b-\varepsilon)^k$. Проще всего произвести это сравнение, исследовав функцию $f(\varepsilon)=(a+\varepsilon)^k+(b-\varepsilon)^k$ с помощью производной.

Очевидно, $f'(\varepsilon)=k((a+\varepsilon)^{k-1}-(b-\varepsilon)^{k-1})$. Значит, при $a+\varepsilon<b-\varepsilon$, то есть при $\varepsilon<(b-a)/2$, производная $f'(\varepsilon)$ отрицательна и, следовательно, на промежутке $[0;(b-a)/2[$ функция f убывает. Далее, $f(0)=a^k+b^k$; значит, при $0<\varepsilon<(b-a)/2$

$$a^k+b^k>(a+\varepsilon)^k+(b-\varepsilon)^k.$$

(Это неравенство верно и при всех $\varepsilon\in\,]0;b-a[$, так как график функции f симметричен относительно прямой $\varepsilon=(b-a)/2$.)

Таким образом,

II. *Сумма k-х степеней двух положительных чисел с постоянной суммой ($k\geqslant 2$) убывает при сближении этих чисел.*

Пусть теперь положительные числа a и b сближаются таким образом, что не изменяется их произведение. Выясним, что при этом происходит с суммой $a+b$. Пусть $a<b$. Умножая a на некоторое число $\lambda>1$, разделим b на λ, чтобы не изменить произведения. Сравним $a+b$ и $\lambda a+\frac{b}{\lambda}$:

$$(a+b)-\left(\lambda a+\frac{b}{\lambda}\right)=(1-\lambda)\left(a-\frac{b}{\lambda}\right).$$

Поэтому, при $\lambda\in\left]1;\frac{b}{a}\right[$, $a+b>\lambda a+\frac{b}{\lambda}$, так что

III. *При сближении двух положительных чисел с фиксированным произведением их сумма уменьшается.*

Заготовка I позволяет легко доказать знаменитое *неравенство Коши* о среднем арифметическом и среднем геометрическом n чисел:

Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа и среди них есть хотя бы два неравных, то их среднее арифметическое A больше их среднего геометрического Γ

$$\boxed{\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}>\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}$$

Действительно, если не все данные числа равны между собой, то наименьшее из них меньше A, а наибольшее — больше A. Пусть, скажем, $a_1<A$, $a_2>A$. Заменив a_1 на A, а a_2 на a_1+a_2-A, мы, сохранив сумму этих чисел, сблизим их. При этом среднее арифметическое A не изменится, а среднее геометрическое $Г$ увеличится (см. заготовку I). Если в новом наборе чисел есть неравные, то проделаем ту же операцию. Так как на каждом шаге увеличивается количество чисел, равных A, через конечное число шагов все числа станут равными, и мы придем к набору, для которого среднее арифметическое равно среднему геометрическому. Так как при этом на каждом шаге росло среднее геометрическое и не изменялось среднее арифметическое, в исходном наборе чисел среднее арифметическое больше среднего геометрического.

Упражнение 1. Используя заготовку I, выясните, на какие 25 натуральных слагаемых $n_1, n_2, \ldots, n_{25}$ следует разбить число 1981, чтобы произведение $n_1!n_2!\ldots n_{25}!$ было наименьшим.

Упражнение 2. Используя заготовку II, докажите для положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и натурального числа k неравенство

$$\frac{a_1^k+a_2^k+\ldots+a_n^k}{n} \geqslant \left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^k.$$

Используя заготовку III, мы докажем теперь неравенство, которое носит имя знаменитого ученого XVIII века Христиана Гюйгенса: *если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — положительные числа, то*

$$\boxed{(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) \geqslant \geqslant (1+\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n})^n}$$

При сближении положительных чисел a и b с фиксированным произведением сумма $a+b$ уменьшается, значит, уменьшается и произведение $(1+a)(1+b)$, равное $1+ab+a+b$.

Положим $Г=\sqrt[n]{x_1\ x_2\ldots\ x_n}$. Если среди чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ есть неравные, то наименьшее из них меньше $Г$, а наибольшее — больше $Г$. Пусть $x_1<Г$, $x_2>Г$. Заменим x_1 на $Г$, а x_2 на $\frac{x_1x_2}{Г}$. При этом x_1 и x_2 сблизятся с сохранением произведения, и поэтому левая часть неравенства Гюйгенса уменьшится. Продолжая таким образом, мы придем к набору равных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, для которого левая часть неравенства равна правой. Тем самым неравенство Гюйгенса доказано.

Во всех рассмотренных задачах интересовавшее нас экстремальное значение функции нескольких переменных достигалось в ситуации, когда все переменные принимали равные значения. Именно поэтому при поиске этих экстремумов мы применяли метод «выравнивания» значений переменных.

В следующей задаче мы, наоборот, будем максимально «раздвигать» значения переменных.

Задача 3*). *Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принадлежат отрезку $[a; b]$, где $0<a<b$. Доказать, что*

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right) \leqslant \frac{(a+b)^2}{4ab}n^2.$$

В соответствии с принятым нами методом решения такого рода задач выясним, как ведет себя сумма $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ при сближении положительных чисел x и y (и постоянной сумме $x+y$). Так как $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}$, а произведение xy при сближении x и y возрастает (заготовка I), сумма $1/x+1/y$ убывает. Нас интересует наибольшее значение функции $P=(x_1+x_2+\ldots+x_n)(1/x_1+1/x_2+\ldots+1/x_n)$. Поэтому мы будем числа x_i не сближать, а раздвигать. Если среди чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ есть два, лежащих внутри отрезка $[a; b]$, то уменьшим меньшее из этих чисел и увеличим большее из них на одну и ту же величину так, чтобы хотя бы одно из этих чисел оказалось на конце отрезка $[a; b]$. При этом функция P возрастет. Так мы будем поступать до тех пор, пока хотя бы два числа нашего набора будут оставаться внутри отрезка $[a; b]$. В конце концов мы придем к ситуации, когда каждое из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, за исключением, быть может, одного, будет равно a или b.

---

*) Эта задача предлагалась на XII Всесоюзной математической олимпиаде. В «Кванте», 1979, № 7, изложено ее решение, отличное от разбираемого в статье.

Левую часть неравенства можно теперь рассматривать как функцию одной переменной, определенную на отрезке $[a; b]$. Покажите, что эта функция принимает наибольшее значение на одном из концов отрезка $[a; b]$, и проверьте, что это значение не превосходит правой части неравенства.

Упражнения

3. Какой из n-угольников, вписанных в данный полукруг (так, что одна из сторон совпадает с диаметром), имеет наибольшую площадь?

4. Докажите, что среди всех треугольников данной площади наименьший периметр имеет правильный треугольник.

5. Выясните, как ведет себя произведение $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)$ при сближении положительных чисел a и b.

Докажите, что если сумма положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равна 1, то

$$\left(1+\frac{1}{x_1}\right)\left(1+\frac{1}{x_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{x_n}\right) \geqslant (n+1)^n.$$

6. Выясните, как ведет себя сумма $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2$ при сближении положительных чисел a и b.

Докажите, что если сумма положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равна 1, то

$$\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)^2+\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)^2+\ldots+\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)^2 \geqslant \frac{(n^2+1)^2}{n}.$$

7. Исследуйте поведение дроби $\frac{(1-a)(1-b)}{ab}$ при сближении положительных, меньших 1, чисел a и b, сумма которых равна 1.

Докажите, что если сумма положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равна 1, то

$$\frac{(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)}{x_1x_2\ldots x_n} \geqslant (n-1)^n.$$

8. Исследуйте поведение суммы $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}$ при фиксированном произведении положительных чисел a и b.

Докажите неравенства:

а) если числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ больше 1, то

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\ldots+\frac{1}{1+x_n} \geqslant \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}};$$

б) если положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ меньше 1, то

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\ldots+\frac{1}{1+x_n} \leqslant \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}}.$$

9. Числа $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ принадлежат промежутку $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi$. Докажите, что $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\delta \geqslant 4$.

10. Положительные числа $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ таковы, что $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi$. Докажите, что $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta \leqslant \frac{1}{4}$.

11. а) a, b, c, d — положительные числа. Докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} \geqslant \sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}}.$$

б) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — положительные числа, k — натуральное число, $k \geqslant 2$. Докажите неравенство

$$\sqrt[k]{\frac{x_1^k+x_2^k+\ldots+x_n^k}{n}} \geqslant \sqrt[n-1]{\frac{x_1x_2\ldots x_n\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)}{n}}.$$

12. Какие n чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ следует вставить между положительными числами a и b $(a<b)$, чтобы дробь

$$\frac{(a+x_1)(x_1+x_2)(x_2+x_3)\ldots(x_{n-1}+x_n)(x_n+b)}{x_1x_2\ldots x_n}$$

приняла наименьшее возможное значение?

13. Сумма нескольких неотрицательных чисел равна 3, а сумма квадратов этих чисел больше 1. Докажите, что из этих чисел можно выбрать три числа, сумма которых больше 1.

задачник кванта

Задачи

М661 — М665; Ф673 — Ф677

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 1 марта 1981 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 1—81» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М661, М662» или «Ф673». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

М661. На берегу круглого озера четыре пристани K, L, P, Q. От пристани K отплывает катер, от L — лодка. Если катер поплывет прямо в P, а лодка — прямо в Q, то они столкнутся в некоторой точке X озера. Докажите, что если катер поплывет в Q, а лодка в P, то они достигнут этих пристаней одновременно.

Н. Васильев

М662. В копилке собрано четыре рубля медными монетами. Докажите, что этими монетами можно заплатить три рубля без сдачи.

А. Кушниренко,
Г. Кушниренко

М663. Найдите все простые числа p, для которых число 2^p+p^2 — тоже простое.

С. Майзус

М664*. Дан четырехугольник $ABCD$ площади S. Обозначим точки пересечения высот треугольников ABC, BCD, CDA, DAB через H, K, L, M соответственно. Докажите, что площадь четырехугольника $HKLM$ тоже равна S.

В. Батырев, В. Трофимов

М665*. Световое табло состоит из нескольких лампочек, каждая из которых может находиться в двух состояниях (гореть или не гореть). На пульте несколько кнопок, при нажатии каждой из которых одновременно меняется состояние у некоторого набора лампочек (для каждой кнопки — своего). Вначале лампочки не горят.

а) Докажите, что число различных узоров, которые можно получить на табло,— степень двойки.

б) Сколько различных узоров можно получить на табло, состоящем из $m\times n$ лампочек, расположенных в форме прямоугольника, если кнопками можно переключить каждый горизонтальный и каждый вертикальный ряд лампочек (проверьте ваш ответ для небольших значений m, n)?

в) Придумайте другие примеры табло и наборов (переключаемых кнопками), в которых можно найти число узоров.

Н. Гринберг, ученица 10 класса

Ф673. Груз висит на упругой нити. Если к грузу прикладывать силу, медленно нарастающую от нулевого значения, то нить оборвется, когда величина силы достигнет значения F_1. При какой минимальной величине силы оборвется нить, если прикладываемая сила мгновенно достигает некоторого значения и в дальнейшем остается неизменной?

Г. Баронов

Ф674. Серный ангидрид SO_3 в количестве $\gamma_1 = 1$ моль поместили в замкнутый сосуд и нагрели до температуры $T_1 = 1000$ К, при которой SO_3 частично диссоциирует на сернистый ангидрид SO_2 и кислород: $SO_3 = SO_2 + \frac{1}{2} O_2$. Степень диссоциации в этих условиях оказалась равной $\alpha_1 = 0{,}2$ (то есть диссоциировали 20% первоначально имевшихся молекул SO_3). Когда в тот же сосуд поместили $n_2 = 0{,}4$ моль SO_3, то оказалось, что для получения такого же, как в первом опыте, давления газ надо нагреть до температуры $T_2 = 200$ К. Определить степень диссоциации SO_3 во втором опыте. Все вещества в обоих опытах находятся в газообразном состоянии.

В. Белонучкин

Ф675. Для измерения больших токов в цепи CC (рис. 1) используется шунт Ш, параллельно которому через сопротивления $R_1 = 2$ Ом и R_2 подключается измерительный прибор Г с внутренним сопротивлением $r = 10$ Ом. В положении A переключателя П вся шкала прибора соответствует току в цепи $I_1 = 10$ А. Каким надо взять сопротивление R_2, чтобы в положении B переключателя П вся шкала прибора соответствовала току $I_2 = 100$ А?

Сопротивление шунта считать много меньше внутреннего сопротивления прибора.

Л. Луганский

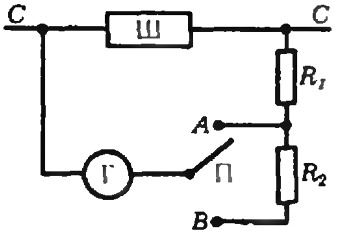


Рис. 1.

Ф676. Проволочной квадратной рамке с периметром $4a$ и массой m сообщают в горизонтальном направлении некоторую начальную скорость. Рамка движется в вертикальной плоскости, все время находясь в магнитном поле, перпендикулярном плоскости рамки (рис. 2). Индукция поля меняется по закону $B(z) = B(0) + kz$, где $k = \text{const}$. Сопротивление рамки равно R. Через некоторое время скорость рамки становится постоянной и равной v. Найти начальную скорость, сообщаемую рамке. Ускорение свободного падения g.

В. Можаев

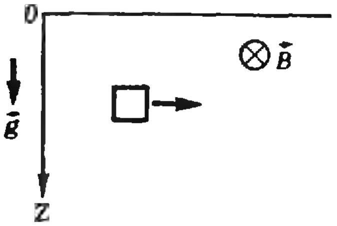


Рис. 2.

Ф677. С помощью системы концентрических зеркал (рис. 3) на экране получено изображение Солнца. Радиусы зеркал $R_1 = 12$ см, $R_2 = 30$ см. Каково должно быть фокусное расстояние тонкой линзы, чтобы с ее помощью получалось изображение Солнца такого же размера?

Е. Кузнецов

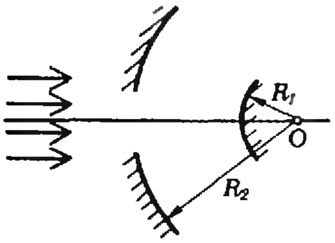
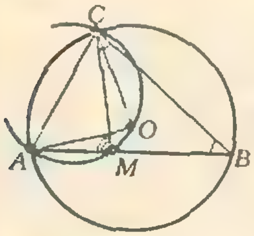


Рис. 3.

Решения задач

М611—М615; Ф618—Ф622

М611. *На хорде AB окружности с центром O берется произвольная точка M. Через точки A, M и O проводится окружность, пересекающая первую окружность в точках A и C. Докажите, что $|MB|=|MC|$.*



Пусть $\widehat{ABC}=\beta$. Тогда $\widehat{AOC}=2\beta$, так как $\widehat{ABC}$ и $\widehat{AOC}$ — вписанный и соответственно центральный углы, опирающиеся на одну и ту же дугу AC данной (черной — см. рисунок) окружности.

С другой стороны, $\widehat{AMC}$ и $\widehat{AOC}$ — вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу AC построенной (голубой) окружности (расположенную вне черной окружности). Поэтому $\widehat{AMC}=2\beta$.

$\widehat{AMC}$ — внешний угол треугольника MBC. Значит, $\widehat{MCB}=\widehat{AMC}-\widehat{MBC}=\beta$. Из $\widehat{MCB}=\widehat{ABC}$ следует $|MB|=|MC|$.

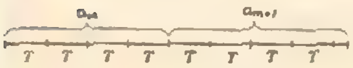
Это решение годится (в отличие от некоторых решений, присланных читателями) для любого расположения точки M на $[AB]$, кроме того случая, когда M совпадает с серединой хорды AB. В этом последнем случае голубая окружность касается черной, точки A и C сливаются и равенство $|MB|=|MC|$ превращается в равенство $|MB|=|MA|$.

Подумайте, останется ли доказанное утверждение верным, если M взять на продолжении отрезка AB.

И. Васильев

◆

М612. *Возрастающая последовательность натуральных чисел (a_n) такова, что $a_{n+1}<10a_n$. Докажите, что если все числа a_n записать рядом (без пробелов и запятых), то полученная последовательность цифр не будет периодической.*



Допустим, что у нас получилась периодическая последовательность цифр и что длина периода (количество цифр в нем) равна T. Легко видеть, что число a_{n+1} может быть «длиннее» числа a_n не более чем на один разряд (и, разумеется, не короче). Поскольку последовательность (a_n) — возрастающая, в ней есть числа любой длины, большей, чем длина a_1. Поэтому в ней наверняка найдется число a_m, длина которого kT кратна периоду (см. рисунок). Первые kT цифр числа a_{m+1} должны совпадать с цифрами числа a_m, поэтому у a_{m+1} есть еще один разряд ($a_{m+1}>a_m$), и в нем обязательно стоит нуль ($10a_m>a_{m+1}$). Но тогда первая цифра в записи a_m — нуль, что, конечно, невозможно.

Заметим, что если условие $a_{n+1}<10a_n$ заменить чуть-чуть более слабым: $a_{n+1}\leqslant 10a_n+1$ или $a_{n+1}<(10+\varepsilon)a_n$, где ε — произвольное положительное число, то полученная последовательность цифр может оказаться периодической.

И. Клумова

◆

М613. *На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены подобные между собой треугольники ADB, BEC и CFA*

$(|AD|/|DB|=$
$=|BE|/|EC|=$
$=|CF|/|FA|=k,$
$\widehat{ADB}=\widehat{BEC}=\widehat{CFA}=\alpha)$.

Докажите, что

а) середины отрезков AC, DC, BC и EF — вершины параллелограмма;

б) у этого параллелограмма два угла имеют величину α, а отношение длин сторон равно k.

Обозначим через $\vec a'$ вектор, получающийся из вектора $\vec a$ поворотом на угол α против часовой стрелки. (Известно, что $(k\vec a)'=k\vec a'$ для любого числа k, $(\vec a+\vec b)'=\vec a'+\vec b'$, и вообще, для любого числа слагаемых, $(\vec a+\vec b+\ldots+\vec c)'=\vec a'+\vec b'+\ldots+\vec c'$.)

Введем векторы $\overrightarrow{DA}=\vec a$, $\overrightarrow{EB}=\vec b$, $\overrightarrow{FC}=\vec c$ (см. рисунок).

По условию $\overrightarrow{DB}=\frac{1}{k}\vec a'$, $\overrightarrow{EC}=\frac{1}{k}\vec b'$, $\overrightarrow{FA}=\frac{1}{k}\vec c'$.

Поскольку $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FA}=\vec 0$,

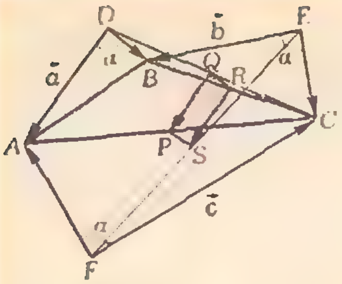
$$-\vec a+\frac{1}{k}\vec a'-\vec b+\frac{1}{k}\vec b'-\vec c+\frac{1}{k}\vec c'=\vec 0,$$

то есть $\vec a+\vec b+\vec c=\dfrac{\vec a'+\vec b'+\vec c'}{k}=\dfrac{1}{k}(\vec a+\vec b+\vec c)'$.

Обозначив $\vec a+\vec b+\vec c$ через $\vec u$, получим

$$\vec u-\frac{1}{k}\vec u'=0. \qquad (*)$$

Поскольку векторы $\vec u$ и $\vec u'$ неколлинеарны ($\alpha\neq 0$ и $\alpha\neq 2\pi$), равенство $(*)$ возможно тогда и только тогда, когда $\vec u=\vec 0$. Поэтому $\vec a+\vec b+\vec c=\vec 0$.



Далее: так как Q — середина $[DC]$ и P — середина $[AC]$ (см. рисунок), $\overrightarrow{QP} = \frac{1}{2}\vec a$. Аналогично $\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$. Из $(PQ)\parallel(AD)$ и $(QR)\parallel(BD)$ следует $\widehat{PQR} = \alpha$.

Наконец,

$$\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RC} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \vec c + \frac{1}{2}\overrightarrow{FE} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\vec b + \frac{1}{k}\vec b'\right) - \vec c + \frac{1}{2}\left(\vec c - \frac{1}{k}\vec b'\right) = -\frac{\vec b + \vec c}{2} = \frac{\vec a}{2} = \overrightarrow{QP}.$$

Таким образом, четырехугольник $PQRS$ — параллелограмм с углом PQR, равным α, и отношением длин сторон $|PQ|/|RQ| = |AD|/|DB| = k$.

Л. Купцов

◆

М614. *Для каждого натурального n через $S(n)$ обозначим сумму цифр всех натуральных чисел от 1 до n (в десятичной записи):*
$S(1) = 1$, $S(2) = 3$, $S(3) = 6, \ldots$
$\ldots$, $S(9) = 45$, $S(10) = 46$, $S(11) = 48$, $S(12) = 51$, $\ldots$
а) Найдите $S(100)$.
б) Докажите, что

$$S(10^k - 1) = 45k \cdot 10^{k-1} \quad (*)$$

для всех $k = 1, 2, \ldots$
в) Докажите, что для двузначного числа $\overline{ab}$

$$S(\overline{ab}) = 5a^2 + ab + 41a + b(b+1)/2.$$

г) Найдите аналогичную формулу для трехзначных чисел.
д) Вычислите сумму $S(1980)$.

Выведем общую формулу для $S(\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1})$. Представим эту сумму в виде $a_k + 1$ слагаемых, отдельно вычислив ее для чисел с k-м разрядом 0, 1, ..., $a_k - 1$ и a_k соответственно.

Первые a_k слагаемых однотипны: в них на цифры, стоящие в меньших, чем k, разрядах, никаких ограничений не накладывается. Если k-й разряд равен b (причем $0 < b < a_k - 1$), то сумма цифр всех таких чисел равна $10^{k-1} \cdot b + S(10^{k-1} - 1)$ (вклад от k-й цифры и от остальных цифр соответственно). $(a_k + 1)$-е же слагаемое (когда в k-м разряде стоит цифра a_k) выглядит так: $a_k \cdot (\overline{a_{k-1} \ldots a_1} + 1) + S(\overline{a_{k-1} \ldots a_1})$ (снова вклад от k-й цифры и остальных разрядов соответственно).

Окончательно для $S(\overline{a_k \ldots a_1})$ получаем

$$\begin{aligned} S(\overline{a_k \ldots a_1}) &= a_k \cdot (\overline{a_{k-1} \ldots a_1} + 1) + S(\overline{a_{k-1} \ldots a_1}) + \\ &\quad + 10^{k-1}(0 + 1 + \ldots + (a_k - 1)) + a_k \cdot S(10^{k-1} - 1) = \\ &= a_k(\overline{a_{k-1} \ldots a_1} + 1) + S(\overline{a_{k-1} \ldots a_1}) + 5 \cdot 10^{k-2} a_k (a_k - 1) + \\ &\quad + a_k \cdot S(10^{k-1} - 1). \end{aligned}$$

Осталось вычислить $S(10^{k-1} - 1)$. Если воспользоваться уже выведенной формулой, получим

$$\begin{aligned} S(10^{k-1} - 1) &= 9 \cdot 10^{k-2} + S(10^{k-2} - 1) + 5 \cdot 10^{k-3} \cdot 9 \cdot 8 + \\ &\quad + 9 \cdot S(10^{k-2} - 1) = 10 \cdot S(10^{k-2} - 1) + 45 \cdot 10^{k-2}. \end{aligned}$$

Если считать уже доказанным, что

$$S(10^{k-2} - 1) = 45(k-2) \cdot 10^{k-3},$$

получим формулу

$$S(10^{k-1} - 1) = 45(k-1) \cdot 10^{k-2},$$

поэтому достаточно доказать (*) (см. п. б) условия) для $k = 1$.

Имеем $S(10 - 1) = 45 \cdot 1 \cdot 10^0 = 45$ — формула (*) верна. Итак, $S(10^k - 1) = 45k \cdot 10^{k-1}$ — мы доказали утверждение б) задачи.

Для двузначных чисел это дает

$$\begin{aligned} S(\overline{a_2 a_1}) &= a_2(a_1 + 1) + S(a_1) + 5a_2(a_2 - 1) + \\ &\quad + 45a_2 = a_2(5a_2 + a_1 + 41) + \frac{a_1(a_1 + 1)}{2} \end{aligned}$$

— см. пункт в) задачи.

Для трехзначных чисел

$$\begin{aligned} S(\overline{a_3 a_2 a_1}) &= a_3((\overline{a_2 a_1} + 1) + 900 + 50(a_3 - 1)) + S(\overline{a_2 a_1}) = \\ &= a_3(50a_3 + \overline{a_2 a_1} + 851) + a_2(5a_2 + a_1 + 41) + \frac{a_1(a_1 + 1)}{2}. \end{aligned}$$

(В частности, $S(100) = 901$.)
Наконец,

$$\begin{aligned} S(1980) &= 980 + 1 + 45 \cdot 3 \cdot 10^2 + S(980) = \\ &= 13500 + 981 + 9(450 + 80 + 851) + 8(40 + 41) = 27558. \end{aligned}$$

И. Клумова

М615. *Докажите, что периметр любого сечения треугольной пирамиды плоскостью не превосходит наибольшего из периметров ее граней.*

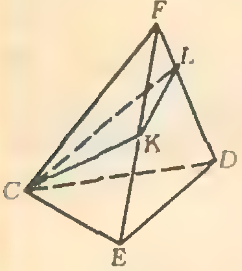


Рис. 1.

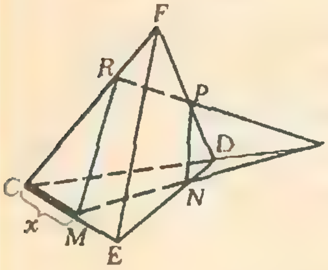


Рис. 2.

Нам понадобится следующая

Лемма. *Пусть точки A и B не лежат на прямой l, X, Y и Z — точки на прямой l, причем точка Y расположена между X и Z. Тогда периметр хотя бы одного из двух треугольников ABX и ABZ больше, чем периметр треугольника ABY.*

Указание. Если точки A, B и прямая l не лежат в одной плоскости, поворотом точки B вокруг l добейтесь этого. Если точки A и B лежат по одну сторону от l, рассмотрите точку, симметричную с B относительно l.

Докажем теперь утверждение задачи.

Пусть вначале сечение — треугольное. Обозначим вершины тетраэдра через C, D, E, F. Без ограничения общности можно считать, что плоскость сечения проходит через некоторую вершину тетраэдра, например через вершину C. Могут представиться различные случаи расположения плоскости сечения относительно тетраэдра.

Рассмотрим, например, конфигурацию, изображенную на рисунке 1 (остальные случаи разберите самостоятельно).

По лемме справедливо хотя бы одно из неравенств $P_{CKL}<P_{CKF}$, $P_{CKL}<P_{CKD}$ (P здесь и ниже — обозначение периметра).

В случае $P_{CKL}<P_{CKF}$, поскольку, очевидно, $P_{CKF}<P_{CEF}$, имеем $P_{CKL}<P_{CEF}$ — и утверждение задачи доказано.

Рассмотрим случай $P_{CKL}<P_{CKD}$. Снова воспользовавшись леммой, имеем хотя бы одно из неравенств $P_{CKD}<P_{CED}$, $P_{CKD}<P_{CFD}$. В любом из этих двух случаев периметр сечения меньше периметра хотя бы одной грани.

Пусть теперь $MNPR$ — произвольное четырехугольное сечение (рис. 2). Рассмотрим параллельные сдвиги плоскости этого сечения вдоль CE. Обозначим $|CM|$ через x. Заметим, что

1) P_{MNPR} при изменении x меняется линейно;

2) при некотором значении x четырехугольник $MNPR$ превратится в треугольник (возможно, вырожденный: в отрезок или в точку).

Рассмотрим два таких значения x: x_1 и x_2. Линейная на отрезке $[x_1;\ x_2]$ функция $P_{MNPR}(x)$ достигает наибольшего значения на одном из концов этого отрезка.

Пусть, например, $\max\limits_{x\in[x_1;\,x_2]} P_{MNPR}(x)=P(x_1)$. Но $P(x_1)$ — периметр некоторого треугольного сечения, который, по доказанному выше, меньше периметра хотя бы одной грани тетраэдра.

В. Сендеров

◆

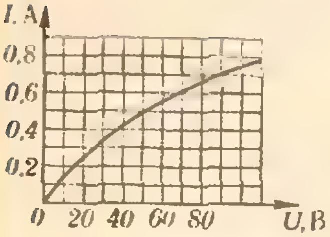


Рисунок к задаче Ф618.

Ф618. *Можно ли две лампы накаливания мощностью 60 Вт и 100 Вт, рассчитанные на напряжение 110 В, включить последовательно в сеть напряжением 220 В, если допустимо превышение напряжения на каждой из ламп не более 10% от номинального? Вольтамперная характеристика лампы мощностью 100 Вт показана на рисунке.*

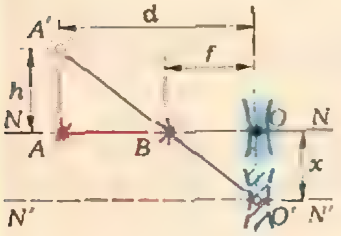
При номинальном напряжении $U_н=110$ В ток, текущий через лампу мощностью $P_1=60$ Вт, равен $I=P_1/U_н\approx0{,}5$ А. При таком токе напряжение на лампе мощностью 100 Вт, согласно вольтамперной характеристике этой лампы, равно ≈55 В. Следовательно, при последовательном соединении двух ламп напряжение на лампе мощностью 60 Вт достигает значения номинального уже при напряжении в сети ≈165 В. Поэтому ясно, что при напряжении в сети 220 В напряжение на этой лампе будет превышать номинальное больше, чем на 10%, и лампа перегорит.

А. Зильберман

◆

Ф619. *Светящаяся точка находится на главной оптической оси на расстоянии $d=40$ см от рассеивающей линзы с фокусным расстояни-*

При удалении светящейся точки A от главной оптической оси NN (см. рисунок) в направлении, перпендикулярном оси (в плоскости рисунка), мнимое изображение точки (точка B) смещается в том же направлении. Ясно, что для удержания изображения на прежнем месте (в точке B) линзу надо *ем $F=10$ см. Точку сместили на расстояние $h=5$ см в плоскости, перпендикулярной главной оптической оси. На сколько и куда надо сместить линзу, чтобы изображение светящейся точки вернулось в старое положение?*



перемещать в направлении, противоположном направлению перемещения точки.

При смещении точки A в точку A' оптический центр линзы надо сместить из точки O в точку O' такую, чтобы точки A', B, O' лежали на одной прямой. В новом положении линзы ее оптическая ось $N'N'$ должна быть параллельна прямой NN.

Из рисунка видно, что расстояние x, на которое надо сместить оптический центр линзы, удовлетворяет условию

$$\frac{x}{h}=\frac{f}{d-f} \Rightarrow x=\frac{hf}{d-f}.$$

Неизвестное значение f найдем по формуле рассеивающей линзы:

$$\frac{1}{d}-\frac{1}{f}=-\frac{1}{F} \Rightarrow f=\frac{dF}{d+F}.$$

Таким образом,

$$x=\frac{hF}{d}=1{,}25 \text{ см}.$$

А. Изергин, С. Манида, В. Саулит

◆

Ф620. *Если в центр квадратного стола поставить предмет массой, большей m, ножки стола сломаются. Найти множество точек стола, куда можно поставить предмет массой $m/2$, не боясь поломки стола.*

Чтобы ножки стола не ломались, сила, действующая на каждую ножку, не должна быть больше $m/4$ (это следует из условия задачи). Посмотрим, какая сила f_1 действует на ножку I (рис. 1), когда на столе стоит груз массы $m/2$ в точке с координатами x, y (за начало отсчета принята точка I).

Пусть f_2, f_3, f_4 — силы, действующие на ножки II, III, IV соответственно. Очевидно, что действие сил f_1 и f_2 эквивалентно действию силы $f_{1-2}=f_1+f_2$, приложенной в точке A с координатами $(0; y)$, а действие сил f_3 и f_4 эквивалентно действию силы $f_{3-4}=f_3+f_4$, приложенной в точке B с координатами $(l; y)$ (длина стороны стола равна l). Запишем условия равновесия стола:

$$f_{1-2}+f_{3-4}=\frac{mg}{2},$$

$$f_{1-2}x=f_{3-4}(l-x).$$

Отсюда

$$f_1+f_2=f_{1-2}=\frac{mg}{2}\,\frac{l-x}{l}. \qquad (1)$$

С другой стороны, $f_1y=f_2(l-y)$, откуда

$$f_1=f_2\,\frac{l-y}{y}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) находим

$$f_1=\frac{mg}{2}\,\frac{(l-x)(l-y)}{l^2}.$$

Чтобы ножка не сломалась, должно выполняться условие

$$f_1=\frac{mg}{2}\,\frac{(l-x)(l-y)}{l^2}<\frac{mg}{4},$$

то есть груз массы $m/2$ может стоять в точке, координаты которой связаны соотношением

$$y>l\left(1-\frac{l}{2(l-x)}\right).$$

График функции $y(x)=l\left(1-\dfrac{l}{2(l-x)}\right)$ изображен тол-

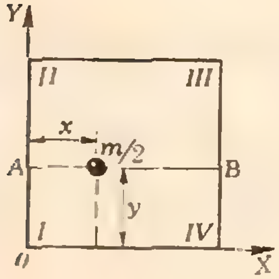


Рис. 1.

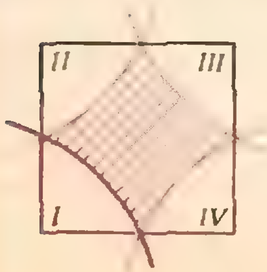


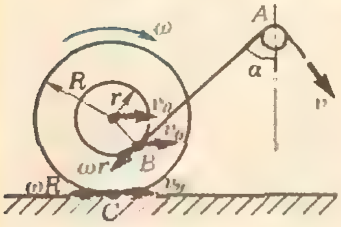
Рис. 2.

стой красной линией на рисунке 2. Из соображений симметрии ясно, что область «разрешенных» точек — заштрихованный криволинейный четырехугольник на рисунке 2.

О. Батищев

◆

Ф621. *Конец нити, намотанной на катушку, перекинут через вбитый в стену гвоздь (см. рисунок). Нить тянут с постоянной скоростью v. С какой скоростью движется центр катушки в тот момент, когда нить составляет угол α с вертикалью? Внешний радиус катушки равен R, внутренний — r.*



Если нить тянуть так, как показано на рисунке, катушка будет катиться вправо, вращаясь при этом по часовой стрелке вокруг своей оси.

Для точки B сумма проекций скорости $\vec{v}_0$ поступательного движения и линейной скорости вращательного движения с угловой скоростью ω на направление нити равна v:

$$v_0 \sin\alpha - \omega r = v$$

(v_0 — модуль искомой скорости). Из-за отсутствия проскальзывания катушки по горизонтальной поверхности сумма проекций соответствующих скоростей для точки C равна нулю:

$$v_0 - \omega R = 0.$$

Полученные уравнения дают

$$v_0 = v\,\frac{R}{R\sin\alpha - r}.$$

Очевидно, что при $R\sin\alpha = r$ (это соответствует случаю, когда точки A, B и C лежат на одной прямой) выражение для v_0 теряет смысл. Заметим также, что найденное выражение описывает движение катушки как вправо (когда точка B находится слева от прямой AC и $R\sin\alpha > r$), так и влево (когда точка B находится справа от прямой AC и $R\sin\alpha < r$).

С. Кротов

◆

Ф622. *Когда и во сколько раз больше абсолютная влажность воздуха (плотность водяных паров): в ноябре при температуре $t_1 = 0°C$ и влажности 95% или в июле при $t_2 = 35°C$ и влажности 40%, если давление насыщенного пара при $t_1 = 0°C$ равно $p_1 = 6 \cdot 10^2$ Па, а при $t_2 = 35°C$ равно $p_2 = 5{,}5 \times 10^3$ Па?*

Давление водяных паров при относительной влажности α равно

$$p = \alpha p_н,$$

где $p_н$ — давление насыщенных паров при данной температуре. Плотность водяных паров (абсолютную влажность) найдем из уравнения газового состояния:

$$pV = \frac{m}{\mu}RT \Rightarrow \varrho = \frac{m}{V} = \frac{\mu p}{RT} = \frac{\mu\alpha p_н}{RT}.$$

Отношение плотностей водяных паров ϱ_2/ϱ_1 в июле и в ноябре при заданных в задаче условиях ($\alpha_2 = 0{,}4$, $T_2 = 308$ К, $p_{н2} = p_2 = 5{,}5 \cdot 10^3$ Па, $\alpha_1 = 0{,}95$, $T_1 = 273$ К, $p_{н1} = p_1 = 6 \cdot 10^2$ Па) равно

$$\frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \frac{\alpha_2 p_2}{\alpha_1 p_1} \cdot \frac{T_1}{T_2} \approx 3{,}4.$$

Таким образом, в сухом июле (влажность 40%) в воздухе в 3,4 раза больше водяных паров, чем в сыром ноябре (влажность 95%).

В. Белонучкин

Квант для младших школьников

Задачи

1. Вырежьте из картона фигуры, изображенные на рисунке. Попробуйте сложить квадрат, использовав а) каждую из них, кроме квадратика, по одному разу; б) все пять фигур по одному разу; в) каждую из фигур по два раза. (Цифрами 1 и 2 на рисунке указаны относительные размеры фигур.)

2. Найдите, чем равен МИНУС в примере на умножение, изображенном на рисунке (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные).

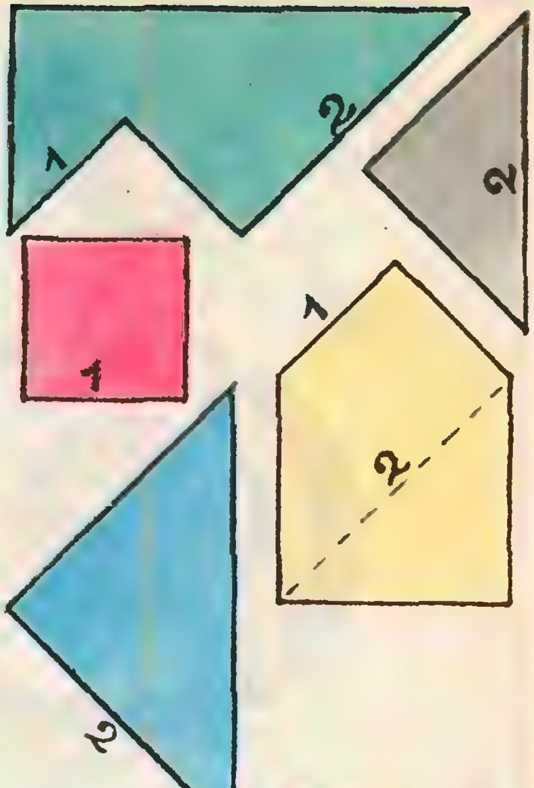
3. В сорока пяти кружочках, сложенных в треугольник ABC (см. рисунок), проставлены цифры от 1 до 9 (каждая цифра повторяется по пять раз, причем никакие две одинаковые цифры не являются соседними). Из вершины A до стороны BC можно добраться 256 различными путями. Но только один из них проходит через все девять цифр. Найдите этот путь.

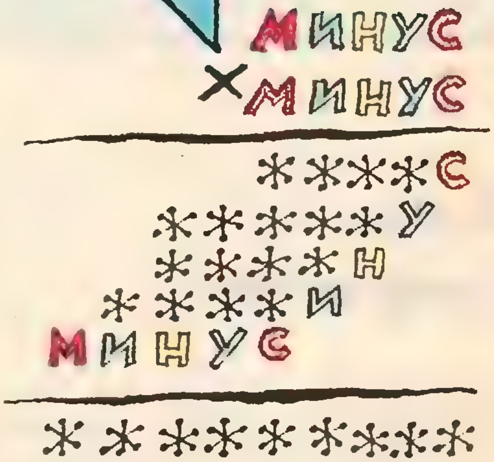
Попытайтесь также найти аналогичные пути из вершин B и C до сторон AC и BC соответственно.

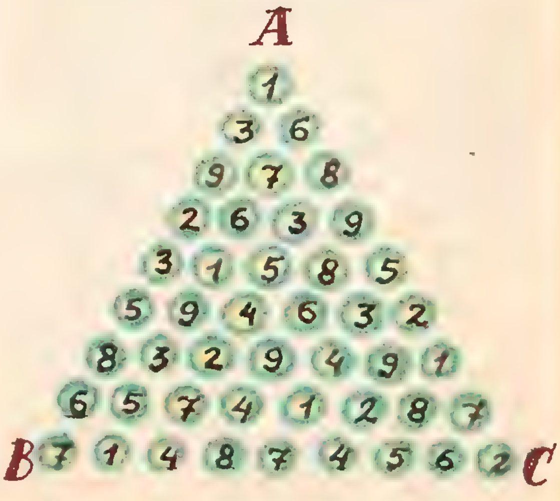
4. Найдите все пятизначные числа с таким свойством: каждая цифра числа строго больше суммы цифр, стоящих правее нее (в частности, четвертая цифра больше пятой).

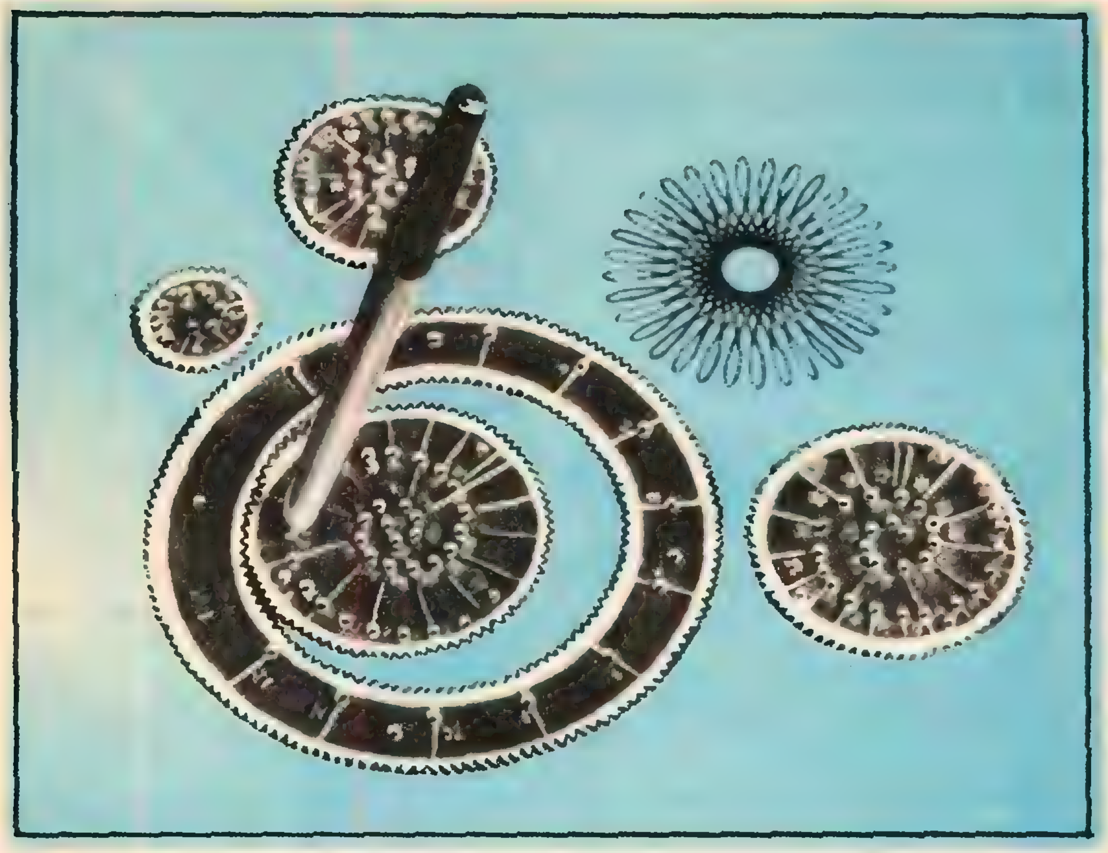
5. В Советском Союзе население составляет 260 млн. человек. Казалось бы, на карте СССР с масштабом 1:1 000 000 (в 1 сантиметре 10 километров) может поместиться в миллион раз меньше людей, чем на всей территории страны, то есть может поместиться 260 человек. Однако из опыта известно, что и пяти десяткам человек это будет нелегко сделать. Почему?

Эти задачи нам предложили Н. Антонович, Г. Гальперин, В. Дубровский, А. Швецов









С. Дворянинов

Узоры и... арифметика

Рисунок, который вы видите перед собой (рис. 1), получен с помощью несложного устройства, названного *спирографом*. И хотя спирограф продается в магазинах игрушек, он интересен не только школьникам младших классов, но и старшеклассникам, да и людям постарше. С его помощью можно вычерчивать разнообразные кривые. Наверное, многие, после того как получат несколько прекрасных рисунков, захотят разобраться — как же они получаются?

Спирограф состоит из набора колес и двух колец с зубцами одного размера. Они изготовлены из прозрачной пластмассы. Колеса имеют 24, 32, 52, 60, 63, 72 и 80 зубцов. На внутренней стороне одного кольца 96 зубцов, на внешней — 144; на другом кольце соответственно 105 и 150 зубцов. В каждом колесе и кольце имеется несколько небольших отверстий. Чтобы привести спирограф в действие, надо одной рукой прижать кольцо к бумаге или закрепить его булавками на планшетке, колесо поместить внутри кольца (или вне него) и совместить их зубцы (рис. 2). Затем следует укрепить острие шариковой ручки в одном

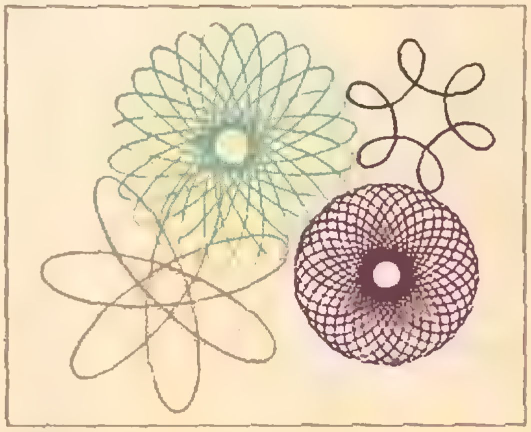


Рис. 1

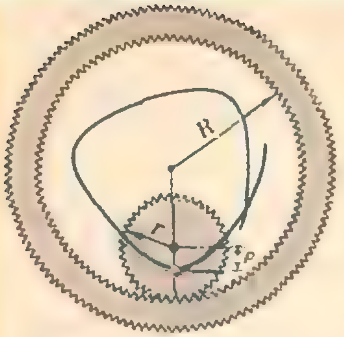


Рис. 2.

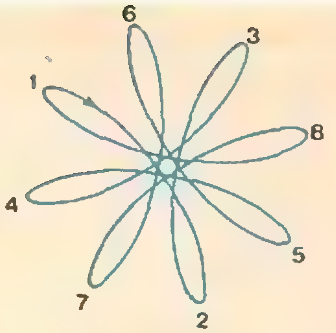


Рис. 3.

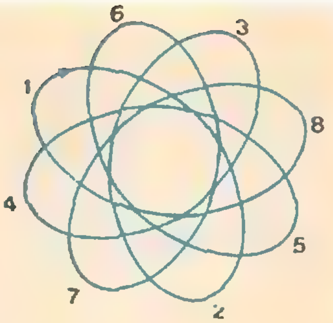


Рис. 4.

из отверстий в колесе и вращать колесо без проскальзывания по кольцу. При этом острие ручки будет вычерчивать на бумаге некоторую кривую. После нескольких оборотов кривая замкнется. Почему это так, мы сейчас объясним.

Пусть R — радиус кольца, r — радиус колеса, ρ — расстояние от центра колеса до отверстия, в котором укреплена ручка. При вращении колеса острие ручки будет двигаться по листу бумаги в некоторой кольцевой области. Ее внешний радиус $R_{\text{внешн.}} = R - r + \rho$, внутренний — $R_{\text{внутр.}} = R - r - \rho$. Из последней формулы видно, что если, например, $r = {}^3/_4 R$, $\rho = {}^1/_4 R$, то кривая окажется уже не в кольце, а в круге, так как при этом $R_{\text{внутр}} = 0$.

Пусть на кольце имеется N зубцов, на колесе — n. Предположим, что после того, как колесо совершило K оборотов вокруг своего центра и k оборотов по кольцу, оно вернулось в исходное положение, а острие ручки оказалось в начальной точке. При этом вычерчиваемая кривая замкнулась, и при дальнейшем вращении колеса новой кривой не получится — острие ручки будет повторять уже пройденный путь. Нетрудно сообразить, что в момент, когда кривая замкнулась, выполняется равенство

$$Kn = kN = D. \qquad (*)$$

Поскольку для любых натуральных чисел N и n найдутся числа K и k, удовлетворяющие равенству (*), всякая вычерчиваемая с помощью спирографа кривая окажется замкнутой. При этом числа K и k — это такие наименьшие целые, при которых выполнено равенство (*), а D — наименьшее общее кратное чисел N и n. На основе этого можно было бы так считать НОК двух чисел m и M: сделать колесо с m зубцами, кольцо — с M и, вращая колесо внутри кольца до тех пор, пока кривая не замкнется, считать, сколько оборотов сделает колесо вокруг собственного центра (число K), или сколько оборотов — по кольцу (число k). Затем по формуле (*) вычисляется величина $D = \text{НОК}\ (m, M)$.

При данных N и n вид кривой зависит от ρ. На рисунках 3 и 4 $N = 96$, $n = 60$, $K = 8$, $k = 5$, но на рисунке 3 величина ρ больше, чем на рисунке 4. Постепенно увеличивая или уменьшая ρ, то есть используя разные отверстия в колесе, можно проследить как деформируются получаемые кривые при изменении величины ρ.

Число K легко определить по рисунку — оно совпадает с количеством самых удаленных от центра кольца точек кривой. На рисунках 3 и 4 эти точки занумерованы в порядке их прохождения.

При вычерчивании кривых лучше поступать наоборот. В тех случаях, когда у N и n немного общих делителей (например, $N = 105$, $n = 72$), для получения замкнутой кривой колесо должно сделать большое количество оборотов. Чтобы определить момент, когда кривая замкнется, следует заранее сосчитать число K и ровно столько раз прокатить колесо по кольцу.

Знакомые с иррациональными числами могут представить себе идеальный спирограф — в нем на колесе и кольце нет зубцов, но колесо

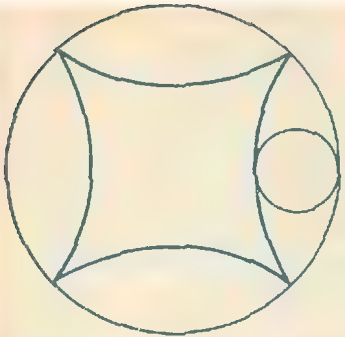


Рис. 5.

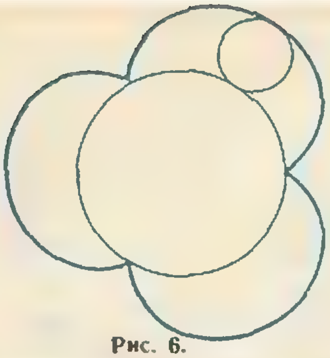


Рис. 6.

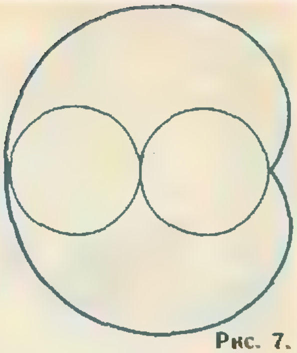


Рис. 7.

двигается по кольцу без проскальзывания. Пусть l — длина окружности колеса, L — длина окружности кольца, по которой перемещается колесо. Если числа l и L несоизмеримы (например, число l — рациональное, L — иррациональное), то вычерчиваемая кривая никогда не замкнется, потому что ни при каких натуральных K и k равенство $Kl=kL$, соответствующее (*), не может быть выполнено. Однако след от острия ручки имеет конечную ширину, а потому после достаточно большого количества оборотов колеса мы получим на бумаге целиком закрашенное кольцо. Сходная картина возникает при больших взаимно простых числах N и n (например, 105 и 52). Если же предположить, что след от острия ручки — это идеальная математическая линия, то получающаяся при несоизмеримых l и L кривая будет расположена в соответствующей кольцевой области *всюду плотно* (то есть траектория движения острия ручки к любой точке внутри области подходит как угодно близко). Подобные траектории возникают в разных математических задачах и изучаются, например, в теории дифференциальных уравнений.

В тех случаях, когда величина ϱ близка к r, описываемые спирографом траектории близки к известным кривым, имеющим специальные названия*). Когда колесо катится по внутренней стороне кольца, получается *гипоциклоида*. В частности, при $N=96$, $n=24$ получается *астроида* (рис. 5). Если колесо катится по кольцу извне или по другому колесу, то вычерчиваемая кривая близка к *эпициклоиде* (при ϱ близком к r; рис. 6). *Кардиоида* (рис. 7) получается при использовании двух одинаковых колес. Если же заставить колесо катиться без проскальзывания по прямой, а величину ϱ взять по-прежнему близкой к r, то получится кривая, похожая на *циклоиду*.

И в заключение — несколько советов тем, кто сам захочет смастерить спирограф. Кольцо можно вырезать из плотной резины или линолеума, колеса — из оргстекла, прозрачной пластмассы или изготовить их из других материалов, у которых достаточно большой коэффициент трения. Следует только заранее рассчитать отношение $L:l$; например, можно взять отношение равным 4:3, 3:1, 7:5. В колесах на разных расстояниях от центра следует просверлить несколько отверстий по диаметру стержня ручки.

---

*) Более подробно об этих кривых можно прочесть в следующих номерах «Кванта»: 1975, № 8, № 12; 1977, № 12.

М. Гельфанд, В. Берман

Десять задач на применение производной

Предлагаемые задачи адресованы девятиклассникам. Для их решения требуется понимание геометрического и физического смысла производной, а также умение судить о свойствах функции по ее графику.

Задача 1. На каждом из рисунков 1, *а—и* изображены графики зависимости от времени t координаты $x(t)$ и скорости $v(t)$ материальной точки, движущейся по квадратичному закону $x(t)=pt^2+qt+r$ вдоль координатной прямой. Восемь из девяти графиков скорости неверные. Установите, какие именно. В чем состоят допущенные ошибки? Найдите правильный рисунок.

Указание. Воспользуйтесь тем, что $v(t)=x'(t)=2pt+q$, поэтому графиком скорости является прямая, тангенс угла наклона которой к оси t равен $2p$. Точка $t=-\frac{q}{2p}$, в которой эта прямая пересекает ось t, является точкой экстремума функции $x(t)$.

Задача 2. На каждом из рисунков 2, *а—д* схематически изображены графики зависимости от времени координаты $x(t)$ и ускорения $a(t)$ материальной точки, движущейся вдоль координатной прямой по такому же закону, как и в задаче 1. Известно, что при построении некоторых графиков ускорения допущены ошибки. Установите, какие из рисун-

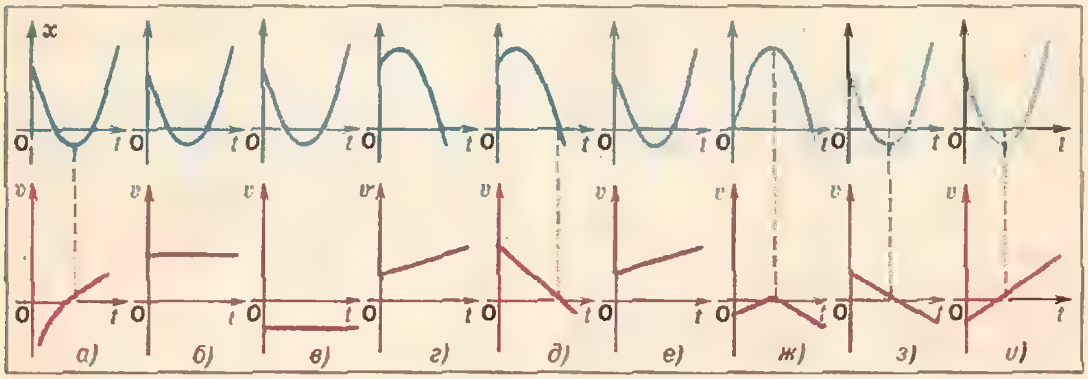


Рис. 1.

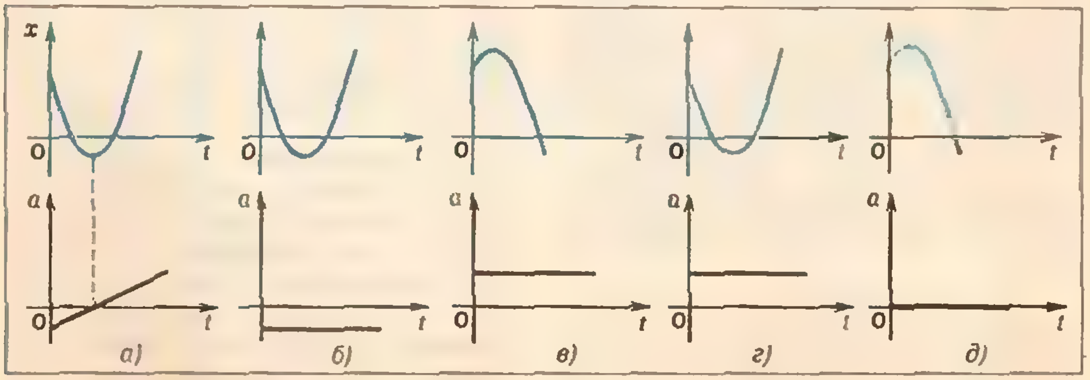


Рис. 2.

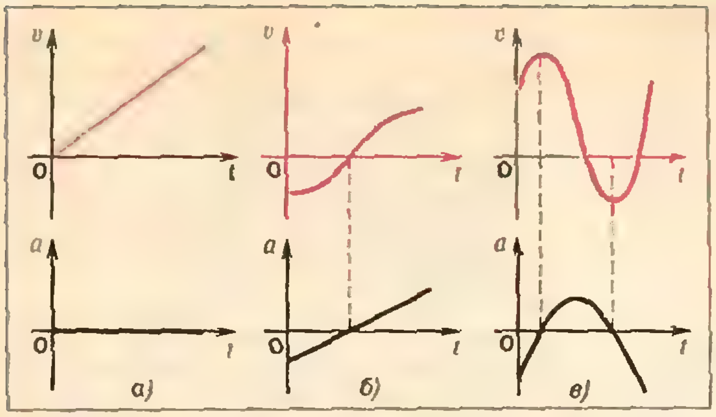


Рис. 3.

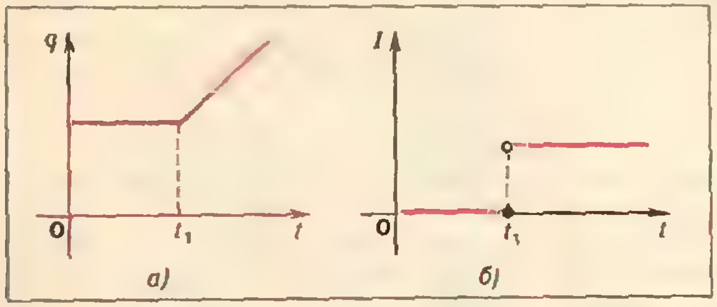


Рис. 4.

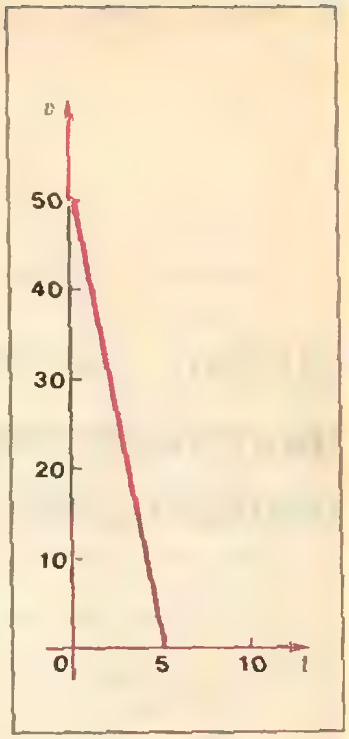


Рис. 5.

ков правильны, а какие нет. В чем заключаются допущенные ошибки? Нарисуйте правильные графики.

Указание. Если $x(t)=pt^2+qt+r$, то $a=v'(t)=2p$ (см. «Алгебра и начала анализа 9», п. 53), то есть графиком ускорения в данном случае является прямая, параллельная оси t и проходящая через точку $(0;\ 2p)$.

Задача 3. На каждом из рисунков 3, *а*—*в* черным цветом изображен график зависимости от времени t ускорения $a(t)$ движущейся прямолинейно материальной точки. Ученик попытался, опираясь на этот график, построить один из возможных графиков скорости $v(t)$ движения той же точки (линии красного цвета). Однако при этом он допустил ошибки. Помогите ученику найти допущенные им ошибки. Нарисуйте правильные графики скорости.

Указание. Воспользуйтесь признаками монотонности функции (см. «Алгебра и начала анализа 9», п. 54).

Задача 4. Через поперечное сечение проводника протекает заряд. График зависимости заряда q от времени представлен на рис. 4, *а*. Используя этот график, ученик изобразил график силы тока $I(t)$ в проводнике (рис. 4, *б*). Верен ли этот график?

Указание. По определению, $I(t)=q'(t)$.

Задача 5. На рисунке 5 изображен график скорости тела, брошенного вертикально вверх с высоты 20 м, в первые 5 с движения. Используя данные, показанные на рисунке, постройте график зависимости от времени t высоты $h(t)$ тела над Землей.

Указание. Как известно, тело, брошенное вертикально вверх, движется с постоянным ускорением $a=-g$ (мы принимаем $g=10$ м/с^2) по квадратичному закону $h(t)=pt^2+qt+r$. Пользуясь графиком, найдите коэффициенты p, q и r, после чего постройте график функции $h(t)$.

Задача 6. На рисунке 6 изображен график зависимости координаты материальной точки, движущейся по квадратичному закону вдоль координатной прямой, от времени t. Пользуясь данными, показанными на рисунке, определите значение скорости v точки в момент $t=2$ с.

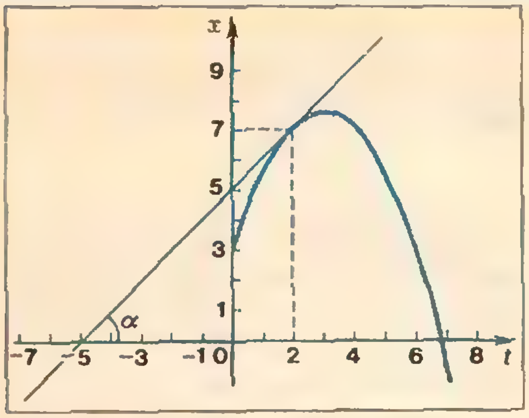


Рис. 6.

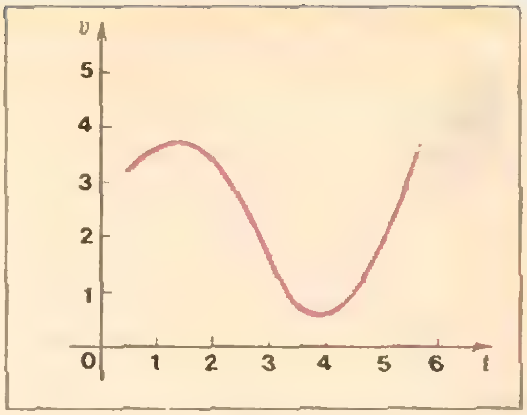


Рис. 8.

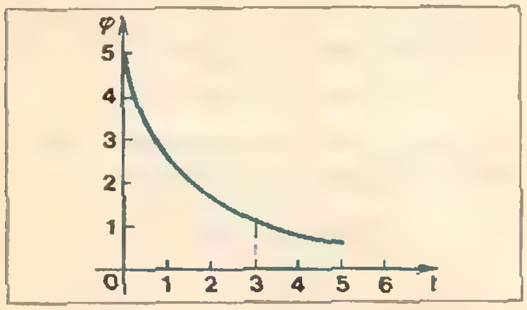


Рис. 7.

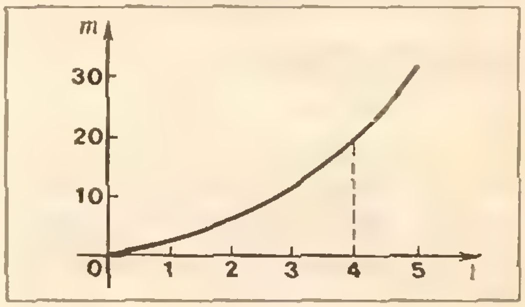


Рис. 9.

Указание. Воспользуйтесь тем, что $v(t)=x'(t)$, а $x'(t)$ — это угловой коэффициент касательной к графику функции x в точке t. Осталось найти $\operatorname{tg}\alpha$ (см. рис. 6).

Можно поступить и иначе. Вначале определите параметры p, q и r уравнения $x(t)=pt^2+qt+r$, выражающего зависимость координаты x от времени t, пользуясь тем, что парабола проходит через точки $(0; 3)$ и $\left(3; 7\frac{1}{2}\right)$, и тем, что абсцисса вершины этой параболы равна $-\frac{q}{2p}$. Далее найдите $x'(2)$.

Задача 7. Маховик, задерживаемый тормозом, за t секунд поворачивается на угол $\varphi=\varphi(t)$ радианов. Используя график функции φ (см. рис. 7), оцените по графику угловую скорость ω вращения маховика в момент времени $t=3$ с.

Указание. Поскольку $\omega=\varphi'(t)$, задача сводится к нахождению по данному графику функции φ значения ее производной в фиксированной точке ($t=3$). Чтобы найти значение $\omega(3)$, постройте касательную к данному графику функции φ в точке с абсциссой 3 (сделать это можно «на глаз», прикладывая линейку к графику), а затем определите тангенс угла, образованного этой касательной с положительным направлением оси t.

Задача 8. На рисунке 8 изображен график скорости $v=v(t)$ прямолинейно движущейся материальной точки. Можно ли, используя этот график, построить график ускорения $a=a(t)$ той же точки?

Указание. Так как $a=v'(t)$, искомый график ускорения — это множество точек вида $(t, v'(t))$. Примите во внимание, что график скорости, изображенный на рисунке 8, — непрерывная кривая, имеющая касательную в каждой точке.

Задача 9. На рисунке 9 изображен график зависимости массы неоднородного стержня от его длины. Используя данный график, попробуйте определить линейную плотность стержня в точке $l=4$ м.

Указание. Линейная плотность стержня τ в точке l_0 — это, по определению, предел

$$\tau=\lim_{l\to l_0}\tau_{\text{ср}}=\lim_{l\to l_0}\frac{m(l)-m(l_0)}{l-l_0}=m'(l_0).$$

(Окончание см. на с. 52)

А. Егоров

Показательные уравнения

Темой этой статьи являются уравнения, содержащие неизвестное в показателе степени. Такие уравнения часто встречаются на вступительных экзаменах, и поэтому абитуриенту полезно познакомиться с некоторыми методами их решения.

Простейшее показательное уравнение — это уравнение вида $a^x=b$, где $a>0$, $a\neq 1$. При $b>0$ это уравнение имеет единственный корень $x=\log_a b$, при $b\leqslant 0$ уравнение корней не имеет.

В ходе преобразований показательных уравнений часто используются свойства показательной функции (см. пособие «Алгебра и начала анализа 10», п. 108): $a^{x_1}\cdot a^{x_2}=a^{x_1+x_2}$, $(a^{x_1})^{x_2}=a^{x_1x_2}$, $(ab)^x=a^x\cdot b^x$ (здесь $a>0$, $b>0$).

Если исходное уравнение имеет вид

$$f(a^x)=b, \qquad (1)$$

где f — некоторая функция, то для его решения можно положить $y=a^x$, решить уравнение $f(y)=b$, выбрать его положительные корни и затем решить получившиеся простейшие уравнения.

Задача 1 (МИИГАиК, 1978). *Решить уравнение*

$$3^{2-x}=3^x-8.$$

Решение. Положив $y=3^x$, получим уравнение $\frac{9}{y}=y-8$ или или $y^2-8y-9=0$. Полученное квадратное уравнение имеет корни $y_1=-1$, $y_2=9$. Первый из них нас не устраивает ($y>0$). Поэтому $3^x=9$, откуда $x=2$.

Ответ. $\{2\}$.

В некоторых случаях уравнение, не имеющее вида (1), удается преобразовать к такому виду, пользуясь свойствами показательной функции.

Задача 2 (МИУ, 1976). *Решить уравнение*

$$3\cdot 16^x+2\cdot 81^x=5\cdot 36^x.$$

Решение. После очевидных преобразований получим:

$$3\cdot 4^{2x}+2\cdot 9^{2x}=5\cdot 4^x\cdot 9^x.$$

Так как $9^x\neq 0$, полученное уравнение равносильно уравнению

$$3\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{2x}+2=5\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^x.$$

Полагая $y=\left(\frac{4}{9}\right)^x$, приходим к квадратному уравнению $3y^2-5y+2=0$. Его корни $y_1=1$, $y_2=\frac{2}{3}$.

Решая простейшие уравнения $\left(\frac{4}{9}\right)^x=1$ и $\left(\frac{4}{9}\right)^x=\frac{2}{3}$, получаем в первом случае $x=0$, а во втором $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}=\frac{2}{3}$; то есть $2x=1$ или $x=\frac{1}{2}$.

Ответ. $\{0,\ 1/2\}$.

Рассмотрим теперь несколько примеров, в которых в показателе степени оказываются некоторые функции от x.

Задача 3 (МГУ, химфак, 1970). *Решить уравнение*

$$3^{2x^2+6x-9}+4\cdot 15^{x^2+3x-5}=3\cdot 5^{2x^2+6x-9}$$

Решение. Положим $y=x^2+3x-5$, после чего уравнение перепишется так:

$$3^{2y+1}+4\cdot 3^y\cdot 5^y=3\cdot 5^{2y+1}.$$

Разделив правую и левую части на 5^{2y}, придем к уравнению

$$3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{2y}+4\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^y-15=0.$$

Решая это уравнение, как предыдущее, получаем $\left(\frac{3}{5}\right)^y=\frac{5}{3}$, откуда

$y=-1$. Осталось решить квадратное уравнение $x^2+3x-5=-1$.

Ответ. $\{1, -4\}$.

Иногда после преобразований исходное уравнение приводится к виду

$$a^{f(x)}=b^{g(x)}$$
$$(a>0,\ b>0,\ a\neq 1).$$

Для решения этого уравнения полезно заметить, что оно равносильно уравнению

$$a^{f(x)}=a^{g(x)\log_a b} \qquad (2)$$

(мы воспользовались *основным логарифмическим тождеством* $a^{\log_a b}=b$). Из монотонности показательной функции следует, что уравнение (2) равносильно уравнению

$$f(x)=g(x)\log_a b.$$

Задача 4. *Решить уравнение*

$$3^{x-3}=5^{x^2-7x+12}.$$

Решение. Переходим к равносильному уравнению

$$x-3=(x^2-7x+12)\log_3 5.$$

Полученное уравнение, конечно, можно решить обычным способом (это — квадратное уравнение). Но решать его довольно неприятно, поскольку у него «противные» коэффициенты.

Однако, если заметить, что $x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$, решение значительно упрощается.

Имеем $x-3=(x-3)(x-4)\log_3 5$, откуда либо $x=3$, либо $(x-4)\times\log_3 5=1$ или $x=4+\frac{1}{\log_3 5}=4+\log_5 3$.

Ответ. $\{3,\ 4+\log_5 3\}$.

Разберем еще один пример.

Задача 5 (МИЭТ, 1978). *Решить уравнение*

$$32^{\frac{x+5}{x-7}}=0{,}25\cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}.$$

$32=2^5$, $0{,}25=2^{-2}$, $128=2^7$, поэтому данное уравнение переписывается так:

$$2^{5\cdot\frac{x+5}{x-7}}=2^{7\cdot\frac{x+17}{x-3}-2}$$

и, следовательно, равносильно уравнению

$$\frac{5x+25}{x-7}=\frac{7x+119}{x-3}-2,$$

которое приводится к уравнению

$$\frac{x+5}{x-7}=\frac{x+25}{x-3},$$

имеющему корень $x=10$.

Ответ. $\{10\}$.

Иногда встречаются уравнения, содержащие неизвестное и в основании, и в показателе степени. Прежде чем переходить к рассмотрению конкретных задач, сделаем некоторые замечания об области определения функций вида $f(x)^{g(x)}$.

Обычно, когда на экзамене предлагается задача, в которой фигурирует функция вида $f(x)^{g(x)}$, предполагают, что абитуриенты будут ее рассматривать при таких значениях x, для которых выполнено одно из условий: либо $f(x)>0$, либо $f(x)=0$ и $g(x)>0$.

Так, $x=3$ является корнем уравнения $(x-3)^x=3-x$. При $x>3$ это уравнение, очевидно, корней не имеет (левая часть его положительна, а правая отрицательна). При $x<3$ основание степени отрицательно и поэтому такие x рассматривать не следует, хотя и можно заметить, что непосредственная подстановка $x=2$ в уравнение дает верное равенство $(2-3)^2=3-2$ и потому число 2 также является его корнем.

Абитуриенты, не замечающие этого и вообще не рассматривающие случая $x<3$, не допускают никакой ошибки и ответ $x=3$ в этой задаче следует считать правильным.

Принятое соглашение связано с тем, что вопрос о смысле выражения a^b при $a<0$ и действительном b, не являющемся целым числом, является очень сложным и не может быть решен в рамках курса средней школы.

Задача 6. *Решить уравнение*

$$x^{x^2-5x+8}=x^2.$$

Решение. Рассматриваем только $x\geqslant 0$. Так как при $x=0$ функция, стоящая в левой части, определена и равна нулю и правая часть равна нулю, 0 является корнем этого уравнения. Легко видеть, что при $x>0$ данное уравнение равносильно уравнению $(x^2-5x+8)\lg x=2\lg x$, откуда либо $\lg x=0$, то есть $x=1$, либо $x^2-5x+6=0$, то есть $x=2$ и $x=3$.

Ответ. $\{0, 1, 2, 3\}$.

В заключение этого раздела рассмотрим две задачи, решить которые помогает свойство монотонности показательной функции.

Задача 7. *Решить уравнение*

$$3\cdot4^x+(3x-10)\cdot2^x+3-x=0.$$

Решение. Эта задача не принадлежит ни к одному из ранее рассмотренных типов. Все-таки попробуем сделать замену $y=2^x$. Получим

$$3\cdot y^2+(3x-10)y+3-x=0.$$

Решим теперь полученное уравнение как квадратное относительно y. Имеем

$$y=\frac{-3x+10\pm\sqrt{(3x-10)^2-12(3-x)}}{6}=$$

$$=\frac{-3x+10\pm\sqrt{9x^2-48x+64}}{6}=$$

$$=\frac{-3x+10\pm(3x-8)}{6},$$

откуда либо $y=3-x$, либо $y=\frac{1}{3}$.

Уравнение $2^x=\frac{1}{3}$ имеет корень $x=-\log_2 3$.

Решим теперь уравнение

$$2^x=3-x.$$

Легко угадать корень $x=1$. Докажем, что других корней у этого уравнения нет. В самом деле, при $x=1$ левая часть равна правой. Левая часть — возрастающая функция, а правая — убывающая. Поэтому при $x<1$ левая часть будет меньше правой, а при $x>1$, наоборот, правая часть больше левой.

Ответ. $\{1, -\log_2 3\}$.

Задача 8. *Решить уравнение*

$$6^x-2^x=32.$$

Решение. Попытки найти корень этого уравнения обычными методами здесь ничего не дают. В то же время нетрудно заметить, что уравнению удовлетворяет значение $x=2$. Докажем, что других корней нет. Для этого перепишем уравнение так:

$$3^x-1=\frac{32}{2^x}.$$

Правая часть является убывающей функцией, левая — возрастающей. Следовательно, $x=2$ — единственный корень этого уравнения.

Упражнения

Решите уравнения:

1. $3\cdot16^x+2\cdot81^x=5\cdot36^x$.

2. (МВТУ, 1979). $\frac{1}{2^x}+\frac{1}{1+2^x}=4$.

3. $5^{2x+1}+6^{x+1}=5^{2x}\cdot6^x+30$.

4. $2^{x-3}=5^{x^2-5x+6}$.

5. $36^{x+\sqrt{x^2-2}}-30\cdot6^{x-1+\sqrt{x^2-2}}=6$.

6. $x^{x^2-6x+5}=x^{12}$.

7 (МГУ, ф-т почвоведения, 1973).

$$4^{3x^2+x}-8=2\cdot8^{x^2+x/3}.$$

8 (МГУ, ф-т психологии, 1976).

$$\frac{x}{18}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_x 12}.$$

Докажите, что все корни этого уравнения — рациональные числа.

9 (МГУ, физфак, 1973).

$$3^{6x-3}=2\cdot27^{x-2/3}+1.$$

10 (МГУ, географ. ф-т 1974).

$$6^{\log_5\left(1-\frac{1}{2x}\right)}=6^{\log_{\sqrt5}\frac{2x-1}{\sqrt{9-x^2}}}\cdot36^{\log_{25}(3+x)}$$

11. $9\cdot7^x+1=2^{6/x}$.

12. $6^x+5^x=61^{x/2}$.

Л. Бакинина

Задачи о спутниках

4 октября 1957 года по праву считают началом нового века в освоении Космоса. Запуск первого искусственного спутника Земли открыл невообразимые ранее просторы для научных изысканий. Стали возможными исследования космических излучений, не возмущенных атмосферой. Человек получил возможность по-новому, со стороны взглянуть на свою родную планету: на ее поверхность, атмосферу и даже в ее глубины.

Искусственные спутники породили множество проблем, связанных с их собственным движением, и вызвали новую волну интереса к вопросам, которыми занимались еще Кеплер, Галилей, Ньютон.

Точный расчет движения спутника — задача чрезвычайно сложная. Однако в первом приближении она сводится к задаче взаимодействия двух тел. Именно такие задачи и будут рассмотрены в этой статье.

Вспомним основные физические законы, которые необходимо знать при решении задач о движении спутников.

Прежде всего это *закон всемирного тяготения* —

> любые две материальные точки притягивают друг друга с силой $\vec{F}$, направленной по линии, их соединяющей, а по абсолютной величине прямо пропорциональной их массам m_1 и m_2 и обратно пропорциональной квадрату расстояния r между ними:
>
> $$|\vec{F}| = G\frac{m_1m_2}{r^2}$$
>
> ($G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг $\cdot$ с^2) — гравитационная постоянная).

По поводу этого закона в третьем номере «Кванта» за 1980 год была опубликована статья В. Можаева. В ней было показано, в частности, что потенциальная энергия гравитационного взаимодействия тел равна

$$E_p = -G\frac{m_1m_2}{},$$

то есть она отрицательна и обратно пропорциональна расстоянию между телами. Знание этого выражения выходит за рамки школьной программы, но иногда оказывается очень полезным при решении задач. Хорошо известная формула для изменения потенциальной энергии

$$\Delta E_p = mg\Delta h$$

является частным случаем приведенной выше общей формулы. Она справедлива, если рассматривается взаимодействие тела массой m с Землей, причем тело находится вблизи поверхности Земли и перемещается на высоту Δh, малую по сравнению с радиусом Земли. В этом случае

$$\Delta E_p = \left(-G\frac{mM_з}{R_з+\Delta h} - \left(-G\frac{mM_з}{R_з}\right)\right) =$$

$$= \frac{GM_зm\Delta h}{(R_з+\Delta h)R_з} \approx m\frac{GM_з}{R_з^2}\Delta h.$$

Но, как следует из закона всемирного тяготения, ускорение свободного падения на поверхности Земли равно

$$g = GM_з/R_з^2.$$

Таким образом, действительно

$$\Delta E_p = mg\Delta h.$$

Кроме закона всемирного тяготения, следует вспомнить *законы Кеплера* —

> 1) каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце;
> 2) радиус-вектор планеты за одинаковые промежутки времени описывает равные площади;
> 3) квадраты периодов обращения планет относятся как кубы больших полуосей их орбит.

Эти законы, полученные при обработке результатов многолетних наблюдений датского астронома Тихо Браге, справедливы и для спутников. Так, например, для спутника, движущегося вокруг Земли, Земля выступает в роли Солнца, а спутник — в роли планеты.

Рассмотрим теперь несколько конкретных задач.

Задача 1. Покажите, что период спутника, обращающегося вокруг планеты в непосредственной близости от ее поверхности, зависит только от средней плотности планеты. Вычислите период такого спутника для нейтронной звезды, считая, что плотность нейтронной звезды порядка плотности атомных ядер $\varrho = 10^{17}$ кг/м³.

Сила притяжения спутника к планете сообщает спутнику центростремительное ускорение:

$$G\frac{mM}{r^2} = m\omega^2 r,$$

где m — масса спутника, r — его расстояние до центра планеты, примерно равное радиусу планеты, $M = 4/3\pi r^3\varrho$ — масса планеты. Отсюда можно найти угловую скорость ω, а значит, и период T обращения спутника:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\varrho}}.$$

Для спутника нейтронной звезды

$$T \approx 1{,}2\cdot 10^{-3}\,\text{с}.$$

Задача 2. Определите отношение массы Марса к массе Земли по параметрам орбиты советской автоматической станции «Марс-2»: максимальное удаление от поверхности (в апоцентре) $a = 25000$ км, минимальное (в перицентре) $p = 1380$ км, период обращения $T = 18$ ч 00 мин. Радиус Марса $r_{\text{М}} = 3400$ км, радиус Земли $r_{\text{З}} = 6400$ км.

Из условия задачи известны период T и длина большой полуоси $a_{\text{М}} = 2r_{\text{М}} + a + p = 33\,180$ км эллипса, по которому движется автоматическая станция «Марс-2». Легко вычислить периоды $T_{\text{З}}$ и $T_{\text{М}}$ спутников, вращающихся по круговым орбитам вблизи поверхности Земли и Марса, и сравнить все три периода.

Для спутника Земли можно написать

$$G\frac{m_{\text{с}}M_{\text{З}}}{r_{\text{З}}^2} = m_{\text{с}}\frac{4\pi^2}{T_{\text{З}}^2}r_{\text{З}},$$

откуда

$$\frac{T_{\text{З}}^2}{(2r_{\text{З}})^3} = \frac{\pi^2}{2GM_{\text{З}}}.$$

Для аналогичного спутника Марса

$$\frac{T_{\text{М}}^2}{(2r_{\text{М}})^3} = \frac{\pi^2}{2GM_{\text{М}}}.$$

По третьему закону Кеплера

$$\frac{T_{\text{М}}^2}{T^2} = \frac{(2r_{\text{М}})^3}{a_{\text{М}}^3}.$$

Таким образом, из последних трех равенств получаем

$$\frac{M_{\text{М}}}{M_{\text{З}}} = \frac{T_{\text{З}}^2 a_{\text{М}}^3}{(2r_{\text{З}})^3 T^2}.$$

Период $T_{\text{З}}$ спутника Земли можно найти, если вспомнить, что центростремительное ускорение спутника вблизи поверхности Земли равно ускорению свободного падения g:

$$\frac{4\pi^2}{T_{\text{З}}^2}r_{\text{З}} = g, \text{ и } T_{\text{З}}^2 = \frac{4\pi^2 r_{\text{З}}}{g}.$$

Итак, окончательно

$$\frac{M_{\text{М}}}{M_{\text{З}}} = \frac{\pi^2 a_{\text{М}}^3}{2r_{\text{З}}^3 g T^2} = 0{,}11.$$

Задача 3. Искусственный спутник Земли запущен с экватора и вращается по круговой орбите в направлении вращения Земли. Найдите отношение радиуса орбиты спутника к радиусу Земли, при котором спутник периодически проходит над точкой запуска ровно через двое суток.

Так как угловая скорость спутника $\omega_{\text{с}}$ может быть и больше, и меньше угловой скорости Земли $\omega_{\text{З}}$, возможны два решения задачи.

1) Пусть $\omega_{\text{с}} > \omega_{\text{З}}$, тогда

$$(\omega_{\text{с}} - \omega_{\text{З}})2T_{\text{З}} = 2\pi,$$

$$\omega_{\text{З}} = \frac{2\pi}{T_{\text{З}}} \text{ и } \omega_{\text{с}} = \frac{3\pi}{T_{\text{З}}}$$

(здесь $T_{\text{З}}$ — одни сутки — период обращения Земли вокруг своей оси). Согласно второму закону Ньютона,

$$G\frac{m_с M_З}{r^2}=m_с\omega_с^2 r.$$

Подставив сюда выражение для $\omega_с$ и зная, что $GM_З=gr_З^2$, найдем отношение радиуса орбиты спутника r к радиусу Земли $r_З$:

$$\left(\frac{r}{r_З}\right)^3=\frac{gT_З^2}{9\pi^2 r_З}\approx 130,\ \frac{r}{r_З}\approx 5.$$

2) Пусть $\omega_с<\omega_З$, тогда

$$(\omega_З-\omega_с)2T_З=2\pi,\ \omega_с=\frac{\pi}{T_З}\ ,$$

$$\left(\frac{r}{r_З}\right)^3=\frac{gT_З^2}{\pi^2 r_З}\approx 1170,\ \frac{r}{r_З}\approx 10{,}5.$$

Задача 4. Спутник, запущенный на круговую орбиту высотой $H=500$ км над поверхностью Земли, тормозится в верхних слоях атмосферы. Угловое ускорение спутника равно $\beta=-3\cdot10^{-13}$ рад/с^2. На какой высоте окажется спутник через месяц?

Обозначим через T_0 и r_0 начальные период обращения и радиус орбиты спутника, а через T и r — период и радиус орбиты спустя месяц после запуска. По третьему закону Кеплера

$$\frac{T_0^2}{T^2}=\frac{r_0^3}{r^3};$$

следовательно, при увеличении периода обращения (при уменьшении частоты) радиус орбиты должен возрастать. Найдем, на какую величину.

Пусть период увеличился на ΔT, а радиус орбиты — на Δr. Поскольку угловое ускорение β мало́, можно считать, что $\Delta T\ll T$ и $\Delta r\ll r$. Из равенства

$$T_0^2(r_0+\Delta r)^3=(T_0+\Delta T)^2 r_0^3,$$

пренебрегая всеми степенями $\Delta T/T$ и $\Delta r/r$, кроме первой, получим

$$2\frac{\Delta T}{T_0}=3\frac{\Delta r}{r_0}.$$

Период обращения T связан с угловой скоростью ω соотношением $T=2\pi/\omega$. Продифференцируем его: $T'(\omega)=-2\pi/\omega^2$. Ввиду малости ΔT и $\Delta\omega$ будем считать, что $\frac{\Delta T}{\Delta\omega}=T'(\omega)$. Тогда

$$\frac{\Delta T}{T_0}=-\frac{\Delta\omega}{\omega_0}=-\frac{\beta t}{\omega_0}.$$

Начальную угловую скорость ω_0 найдем из условия, что на высоте $H\ll r_З$ центростремительное ускорение спутника приблизительно равно g:

$$\omega_0^2 r_0=g,\ \omega_0=\sqrt{\frac{g}{r_0}}=\sqrt{\frac{g}{r_З+H}}.$$

Окончательно

$$\Delta r=\frac{2}{3}\frac{\Delta T}{T_0}r_0=-\frac{2}{3}\beta t(r^3+H)\sqrt{\frac{r_З+H}{g}}\approx 3\ \text{км}.$$

Итак, через месяц спутник будет находиться на высоте $H'=503$ км.

Упражнения

1. Искусственный спутник Земли запущен с экватора и вращается по круговой орбите в плоскости экватора в направлении осевого вращения Земли. Радиус орбиты спутника в $\alpha=3$ раза больше радиуса Земли $r_З=6400$ км. Через какое время спутник в первый раз пройдет над точкой запуска?

2. Вычислите первую космическую скорость при старте с поверхности Юпитера, если известно, что спутник Юпитера Ганимед вращается по почти круговой орбите радиусом $r=1\cdot10^6$ км с периодом $T=7{,}15$ земных суток. Радиус Юпитера $r_Ю=70\cdot10^3$ км.

3. Известно, что в настоящее время Луна удаляется от Земли со скоростью $\vec{v}$ ($|\vec{v}|=3{,}3$ см/год). Найдите угловое ускорение Луны. Среднее расстояние от Луны до Земли $R=3{,}84\cdot10^5$ км, угловая скорость вращения Луны вокруг Земли $\omega=2{,}56\cdot10^{-6}$ рад/с.

Московский инженерно-физический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Произведение второго и двенадцатого членов арифметической прогрессии равно 1, а произведение четвертого и десятого членов этой же прогрессии равно b. Найдите седьмой член этой прогрессии.

2. В прямой круговой конус вписана правильная треугольная пирамида, длина апофемы боковой грани которой равна k, а сама боковая грань составляет с плоскостью основания угол величиной α. Через одно из боковых ребер пирамиды проведена плоскость, пересекающая коническую поверхность. Найдите площадь сечения конуса этой плоскостью, если известно, что эта площадь имеет наибольшее из всех возможных значение.

3. При каком значении a площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{1}{2x-1}$, $x=2$, $x=a$, равна $\ln\frac{4}{\sqrt{5}}$?

4. Найдите $f'(x)$ и критические точки функции $f(x)=4x^3-6x^2\cos 2a+{}$ $+3x\sin\cdot 2a\sin 6a+\sqrt{\ln(2a-a^2)}$ Убывает или возрастает $f(x)$ в точке $x=\frac{1}{2}$?

Вариант 2

1. Сплав железа и никеля весом 7 кг содержит 70% железа; другой сплав тех же металлов содержит r% никеля и весит 18 кг. Сколько килограммов второго сплава надо сплавить с первым сплавом, чтобы получить новый сплав с наименьшим процентным содержанием железа? Сколько при этом в новом сплаве будет содержаться железа?

2. В основании пирамиды $SPQRT$ лежит четырехугольник $PQRT$, у которого $|PT|=|TR|$ и $\widehat{TPR}=\alpha$. Длина перпендикуляра, опущенного из вершины R на прямую (TP), равна h. Найдите объем пирамиды $SPQRT$, если известно, что площадь треугольника PQR в 15 раз больше площади треугольника TPR, прямые (TS) и (QS) перпендикулярны прямой (PR), $\widehat{TSQ}=90°$ и $|SQ|=c$.

3. Для функции $f(x)=-1-\frac{1}{x}\log_8 e$ найдите первообразную $F(x)$, которая при $x=2$ принимает значение $6\frac{2}{3}$. При каких значениях x кривая $F(x)$ пересекает ось Ox?

4. Найдите все значения m, при которых векторы $\vec{g}=(1;\ m;\ x)$ и $h=(7;\ x\ \ mx)$ образуют острый угол при любом $x\in\mathbf{R}$.

Решение задач варианта 1

1. Обозначим седьмой член арифметической прогрессии a_7 через x, а разность прогрессии через d. Имеем

$$\begin{cases} a_2=x-5d,\ a_{12}=x+5d,\\ a_4=x-3d,\ a_{10}=x+3d. \end{cases} \qquad (1)$$

По условию

$$\begin{cases} a_2\cdot a_{12}=1,\\ a_4\cdot a_{10}=b. \end{cases} \qquad (2)$$

Поэтому, в силу (1),

$$\begin{cases} x^2-25d^2=1,\\ x^2-9d^2=b. \end{cases}$$

Из этой системы легко находятся x^2 и d^2:

$$x^2=\frac{25b-9}{16};\ d^2=\frac{b-1}{16}.$$

При этом, очевидно, для существования решений должно выполняться неравенство $b>1$.

Ответ. $\left\{\frac{\sqrt{25b-9}}{4};\ -\frac{\sqrt{25b-9}}{4}\right\}$.

Поступающие, как правило, решали эту задачу правильно. Некоторые из них допускали ошибки при решении уравнения $x^2=\frac{25b-9}{16}$.

$$\left(x=\sqrt{\frac{25b-9}{16}}\ \text{вместо}\ x=\pm\sqrt{\frac{25b-9}{16}}.\right)$$

2. Высота SO пирамиды $SABC$ (рис. 1)

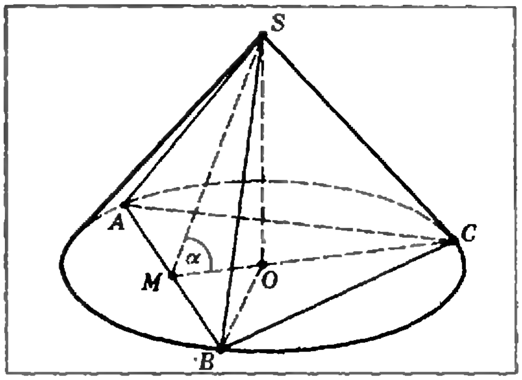


Рис. 1.

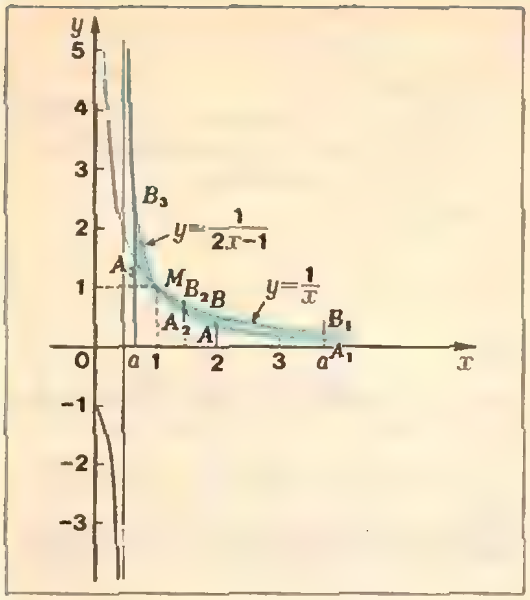


Рис. 2.

совпадает с высотой конуса, а боковые ребра пирамиды принадлежат боковой поверхности конуса. Пусть SM — апофема боковой грани, OM — проекция апофемы на плоскость основания. По условию, $|SM| = k$ и $\widehat{SMO} = \alpha$. Пусть l — длина образующей, h — высота, а r — радиус основания конуса.

Из прямоугольного треугольника SMO находим $|SO| = h = k \sin\alpha$, $|MO| = k \cos\alpha$. Кроме того, из $\triangle OMB$ получаем

$$r = |OB| = 2|MO| = 2k \cos\alpha.$$

Длина l образующей конуса находится из прямоугольного треугольника SBO по теореме Пифагора: $l = \sqrt{|BO|^2 + |SO|^2} = k \cdot \sqrt{1+3\cos^2\alpha}$.

Сечением конуса плоскостью, проходящей через боковое ребро пирамиды, является равнобедренный треугольник, боковые стороны которого — образующие конуса. Площадь такого треугольника равна $S(\varphi) = \frac{1}{2} l^2 \cdot \sin\varphi$, где φ — величина угла между боковыми сторонами.

Поэтому для определения максимальной площади сечения нужно найти максимум функции $S(\varphi)$.

Возможны два случая.

Если угол в осевом сечении конуса меньше или равен $\frac{\pi}{2}$, то площадь будет максимальна для осевого сечения конуса (убедитесь в этом!).

Так как площадь осевого сечения равна $S = \frac{1}{2} h \cdot 2r = hr$, $S_{\max} = S = k^2 \sin 2\alpha$.

Если же величина угла в осевом сечении конуса больше $\frac{\pi}{2}$, то максимум функции $S(\varphi)$ достигается при $\varphi = \frac{\pi}{2}$. При этом

$$S_{\max} = \frac{1}{2} l^2 = \frac{1}{2} k^2 (1+3\cos^2\alpha).$$

Так как величина угла в осевом сечении конуса определяется величиной угла $\widehat{SMO}$, ответ можно сформулировать следующим образом:

$$S_{\max} = \begin{cases} k^2 \sin 2\alpha, \text{ если } \alpha \in \left]\operatorname{arctg} 2; \frac{\pi}{2}\right[, \\ \frac{1}{2} k^2 (1+3\cos^2\alpha), \text{ если} \\ \alpha \in \left]0; \operatorname{arctg} 2\right]. \end{cases}$$

Характерной ошибкой при решении этой задачи было утверждение, что наибольшую площадь всегда имеет осевое сечение конуса.

3. Для решения задачи построим графики функций $y_1 = \frac{1}{x}$ и $y_2 = \frac{1}{2x-1}$ в области $x>0$ (рис. 2). Заметим, что гиперболы пересекаются в точке $(1; 1)$. Из условия ясно, что $a > \frac{1}{2}$.

Пусть сначала $a>2$.

Площадь фигуры ABB_1A_1, ограниченной кривыми y_1, y_2 и прямыми $x=2$, $x=a$, определяется по формуле

$$\int_2^a \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x-1}\right) dx = \ln \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2a-1}}.$$

Для определения a получаем уравнение

$$\ln \frac{\sqrt{3}\,a}{2\sqrt{2a-1}} = \ln \frac{4}{\sqrt{5}},$$

корни которого $a = 8$ и $a = \frac{8}{15}$. Итак, $a = 8$.

Пусть теперь $1 \leqslant a < 2$. Тогда

$$\int_a^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x-1}\right) dx \leqslant \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x-1}\right) dx =$$

$$= \ln \frac{2}{\sqrt{3}} < \ln \frac{4}{\sqrt{5}},$$

и поэтому площадь фигуры ABB_2A_2 меньше, чем $\ln \frac{4}{\sqrt{5}}$.

Осталось рассмотреть случай $a \in \left]\frac{1}{2}; 1\right[$.

При этом прямые $x=2$, $x=a$ и гиперболы y_1, y_2 ограничивают фигуру A_3B_3MAB, показанную на рисунке 2 горизонтальной штриховкой.

Площадь этой фигуры равна

$$\int_a^1 \left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{x}\right) dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x-1}\right) dx =$$

$$= \ln \frac{2a}{\sqrt{3(2a-1)}}.$$

Аналогично предыдущему получаем, что a удовлетворяет уравнению

$$\ln \frac{2a}{\sqrt{3(2a-1)}} = \ln \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

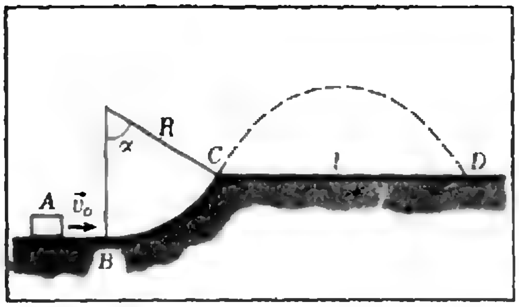


Рис. 3.

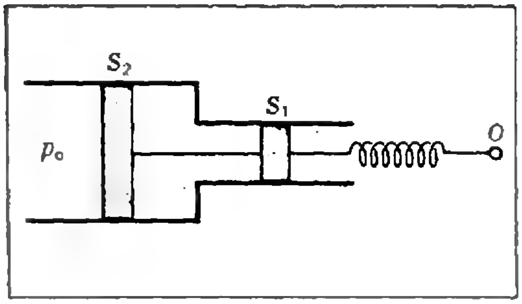


Рис. 4.

которое приводится к квадратному

$$5a^2-24a+12=0.$$

Это уравнение на интервале $\left]\frac{1}{2};1\right[$ имеет единственный корень

$$a=\frac{1}{5}(12-2\sqrt{21}).$$

Ответ. $\{8,\ 0{,}4(6-\sqrt{21})\}$.

Типичная ошибка, допущенная многими абитуриентами,— отсутствие исследования случая $a\in\left]\frac{1}{2};1\right[$ и потеря второго решения.

4. Прежде всего заметим, что параметр a должен удовлетворять неравенству $\ln(2a-a^2)>0$. Но

$$\ln(2a-a^2)>0\Leftrightarrow 2a-a^2>1\Leftrightarrow a=1.$$

Таким образом, $a=1$,

$$f(x)=4x^3-6x^2\cdot\cos 2+3x\cdot\sin 2\cdot\sin 6,$$
$$f'(x)=12x^2-12x\cos 2+3\sin 2\sin 6.$$

Решая квадратное уравнение $4x^2-4x\cos 2+\sin 2\cdot\sin 6=0$, находим критические точки

$$x_1=\cos 1\cdot\cos 3,\ x_2=\sin 1\cdot\sin 3.$$

Для того чтобы выяснить, убывает или возрастает функция f при $x=0{,}5$, нужно определить знак числа $f'(0{,}5)$.

Имеем $f'(0{,}5)=3(1+\sin 2\cdot\sin 6)-6\cos 2>0$, так как выражение, стоящее в круглых скобках, положительно, а $\cos 2<0$.

Ответ.

$f'(x)=12x^2-12x\cos 2+3\sin 2\cdot\sin 6$;
$\{\cos 1\cdot\cos 3,\ \sin 1\cdot\sin 3\}$;
возрастает.

При решении этой задачи некоторые абитуриенты не смогли решить неравенство $\ln(2a-a^2)>0$. Многие поступающие не сумели ее решить из-за незнания определения убывания (возрастания) функции в точке.

Физика

Задачи устного экзамена

1. К бруску массой $m=0{,}5$ кг, лежащему на горизонтальном столе, прикреплена одним концом вертикально расположенная пружина жесткостью $k=10$ Н/м. Другой конец пружины закреплен над бруском на высоте $l_0=0{,}1$ м. В этом положении пружина не деформирована. При равномерном движении стола в горизонтальном направлении пружина отклоняется на угол $\alpha=60°$ от вертикали. Найдите коэффициент трения между бруском и столом.

2. Небольшой шайбе A сообщили в горизонтальном направлении скорость $\vec{v}_0$ ($|\vec{v}_0|=10$ м/с), как показано на рисунке 3. После этого шайба, поднявшись по закруглению BC радиусом $R=2$ м, взлетела и упала в точке D. Угол $\alpha=60°$. Найдите расстояние $l=|CD|$, пренебрегая трением и сопротивлением воздуха.

3. В гладкой горизонтально закрепленной трубке, профиль которой показан на рисунке 4, находятся два поршня, соединенных жестким тонким стержнем. Площади поршней $S_1=10$ см² и $S_2=40$ см². Правый поршень соединен с точкой O пружиной жесткостью $k=400$ Н/м. В первоначальном состоянии температура всюду равна $T_0=300$ К, давление воздуха между поршнями равно внешнему $p_0=100$ кПа и пружина не деформирована. Затем газ между поршнями нагрели на $\Delta T=100$ К, а точку O переместили вправо на такое расстояние x, чтобы положение поршней не изменилось. Найдите x.

4. В закрытом с обоих торцов горизонтальном цилиндре объемом $V=0{,}0012$ м³ находится воздух при давлении $p_0=100$ кПа. Цилиндр разделен на две равные части тонким поршнем массой $m=0{,}1$ кг. Длина цилиндра $2l=0{,}4$ м. Цилиндр привели во вращение с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через его середину. Найдите величину ω, если поршень оказался на расстоянии $r=0{,}1$ м от оси вращения.

5. К источнику тока (электродвижущая сила $\mathcal{E}=90$ В) подключили плоский конденсатор с воздушным промежутком. Площадь каждой пластины конденсатора $S=0{,}5$ м². Пластины сближают так, что расстояние между ними изменяется со временем по закону $d(t)=d_0/(1+\alpha t)$, где $d_0=0{,}1$ м, $\alpha=5$ с$^{-1}$. При этом через источник тока течет постоянный ток. Определите его величину. Внутренним сопротивлением источника тока пренебречь.

6. Точечный источник света равномерно движется по окружности радиусом $r=0{,}5$ м. Линейная скорость вращения $V=3$ м/с. На расстоянии $l=5$ м от центра окружности перпендикулярно к оси вращения расположено сферическое зеркало (радиус кривизны $R=2$ м). Найдите ускорение, с которым движется изображение источника в зеркале.

Ю. Первин

Зачем и как детей учат программированию?

В разделе «Искусство программирования» мы продолжаем публиковать уроки нашей Заочной школы программирования и статьи по информатике, языкам программирования и вычислительной технике. Хотя сейчас подключиться ко второму курсу ЗШП довольно трудно (по этому поводу см. «Квант», 1980, № 9), новые читатели «Кванта», мы надеемся, заинтересуются многими другими статьями этого раздела.

Прошлым летом в Новосибирском академгородке проводилась Летняя школа юных программистов (см. «Квант», 1980, № 12), в которой участвовали лучшие учащиеся ЗШП и победители Олимпиады по программированию («Квант», 1980, № 3). В рамках Летней школы для преподавателей, воспитателей и родителей, сопровождавших младших школьников, был прочитан цикл лекций с вынесенным в заголовок названием. Впрочем, на двери аудитории, в которой читался цикл, не было объявления, запрещающего вход «детям до 16 лет». Ниже публикуется отрывок из этих лекций.

Три категории программистов

С каждым годом все больше становится вычислительных машин. Еще быстрее увеличивается число задач, решаемых с помощью ЭВМ. Казалось бы, перспектива ясна: скоро всем придется писать программы на алгоритмических языках.

Не будем спорить — учиться программированию нужно. Но кому и как?

С первых шагов развития вычислительной техники среди программистов наметилось разделение труда, ставшее особенно отчетливым в наши дни. Ближе всех к вычислительным машинам располагаются *системные программисты*. Это программисты-профессионалы. Они создают программы, которые имеют главным своим назначением облегчить общение с машиной для всех других пользователей ЭВМ: трансляторы с языков высокого уровня, диалоговые системы, программы управления базами данных. Системные программисты получают, как правило, университетское образование.

Второй «слой» программистов — *прикладные программисты*. Это специалисты в различных предметных областях — экономике, геологии, полиграфии, метеорологии, медицине и т. д., которые, не зная ни теории программирования, ни особенностей программирования на конкретных ЭВМ, умеют описать задачи из своих предметных областей на одном из наиболее подходящих для этой цели языков программирования. Прикладных программистов готовят «профильные» вузы.

Усилиями системных и прикладных программистов решение задач на машине может быть сведено до уровня подстановки параметров в уже готовые процедуры. Именно таким путем открывается доступ к машинам для более широкого круга людей — *параметрических пользователей*, которые могут не знать ни устройства ЭВМ, ни алгоритма решаемой задачи, ни языка, на котором написана программа. Параметрический пользователь должен только уметь правильно передать параметры для решаемой задачи. Характерный представитель параметрических пользователей ЭВМ — кассир Аэрофлота, обращающийся за сведениями о свободных местах к автоматизированной системе «Сирена».

Число системных и прикладных программистов сравнительно невелико, да и увеличивается со временем не столь уж значительно. А вот число «простых» параметрических пользователей ЭВМ растет и будет расти стремительно. Конечно, уровень программистской подготовки параметрических пользователей существенно уступает подготовленности других категорий программистов, тем не менее для успешного общения с машиной даже им необходимы определенные умения и навыки. И хотя сейчас отчетливо ясно, что в недалеком будущем параметрическими пользователями станет большая часть населения земного шара, никакая специальная подготовка будущих параметрических пользователей еще не предусмотрена.

Что может программист?

Рассмотрим некоторые из навыков и умений, необходимых людям, вступающим в жизнь, которая встретит их необходимостью общения с вычислительными машинами, по крайней мере в роли параметрических пользователей.

Во-первых, чрезвычайно важно *уметь планировать* предпринимаемые для решения своей задачи действия, исходя из ограниченного набора средств. Помните формулировку второго закона программирования: «В программах для любых роботов и ЭВМ можно использовать те и только те предписания, которые есть в их системах предписаний» («Квант», 1979, № 9, с. 52)?

Во-вторых, нужно уметь формально и полно описать все объекты, которые участвуют в решении задачи в качестве данных или результатов, указать все их взаимосвязи, или, как говорят программисты, *задать информационную модель* задачи.

В-третьих, нужно *уметь быстро найти информацию*, необходимую для решения задачи; важность этого умения связана с тем, что большую часть времени всех задач, решаемых на ЭВМ, занимают операции поиска.

В-четвертых, очень важно *правильно строить свои сообщения* машине: если ЭВМ имеет богатый набор процедур (или, как сказал бы системный программист, «хорошее программное обеспечение»), то с нею можно общаться при помощи крупных порций информации — процедур; если же такие процедуры заранее не написаны, то обращаться к машине можно только, описав требуемые действия с помощью более мелких порций информации — операторов или директив.

Здесь перечислена только часть важных навыков, которые пригодятся каждому молодому человеку в жизни, если ему доведется обращаться к ЭВМ или получать от нее результаты. Так как параметрическими пользователями ЭВМ предстоит в будущем быть каждому из нас, этого довода было бы уже достаточно, чтобы говорить о школьном курсе программирования. Однако причины, по которым программирование придет в школу, еще более глубоки.

Попробуем посмотреть на проблему пошире...

Действительно, перечисленные выше навыки и умения связывались до сих пор исключительно с необходимостью эффективного использования вычислительной техники. Между тем каждому из этих навыков соответствует некоторый навык более широкого, общечеловеческого значения.

Так, *умение планировать* необходимо не только пользователю ЭВМ. В той же мере должен уметь составлять план своих действий или действий своего коллектива инженер и агроном, офицер и учитель, экономист и спортивный тренер.

Умение моделировать, то есть предвидеть свойства создаваемой конструкции, важно для каждого творческого работника — технолога, инженера, физика, астронома.

Правильная *организация поиска* — залог успеха в работе всякого, кто обращается за нужными ему сведениями к разнообразным хранилищам человеческих знаний — библиотекам, архивам, информационным системам. Недаром говорят, что не имея возможности передать ученику за десять школьных лет все накопленные человечеством знания, учитель должен в первую очередь научить школьника учиться, то есть уметь искать нужные ему знания.

Наконец, *дисциплина общения* в любом человеческом коллективе не менее существенна, чем при «разговоре» с ЭВМ. И дело здесь не только в точности высказываний или вежливой их форме. Чтобы беседа получилась деловой, надо уметь учитывать уровень знаний собеседника: если одну и ту же задачу вам предстоит обсуждать со своим товарищем или учителем, то в этих беседах вы будете пользоваться по-видимому, разными «порциями информации».

Программирование придет на помощь

Важность и общий характер перечисленных умений и навыков требует, чтобы люди освоили их в средней школе. С другой стороны, учебные программы сегодняшней школы не предусматривают обучения школьников этим навыкам. И дело не только в том, что потребность в этих навыках возникла сравнительно недавно, вместе с бурными проявлениями современной научно-технической революции. Важно другое: ни одна из школьных дисциплин — ни физика, ни литература, ни даже математика — не располагает (в полном объеме) необходимыми инструментами для обучения школьника столь важным для него навыкам.

А вот в программировании эти инструменты есть! Действительно, умению планировать легко обучиться тому, кто понял, что такое процедура, условный оператор, цикл Для информационного моделирования хорошо служат те средства описания данных, которые есть в современных языках программирования — кортежи, множества, файлы, базы данных. Точно так же для организации поиска используются различные поисковые механизмы (каталоги, многоуровневые индексы, функции расстановки и т. д.), а для организации процессов общения — различные синтаксические описания и макросредства (часть терминов этого абзаца, возможно, еще не знакома читателям раздела «Искусство программирования»; о некоторых из них будет рассказано в следующих номерах «Кванта»; другие станут известны по рекомендуемым книгам).

Именно потому, что уже сегодня надо научиться мыслить «программистски», то есть прочно усвоить связанные с программированием навыки (а вовсе не потому, что много становится машин), именно поэтому можно уверенно ответить на первый вопрос «Зачем детей учат программированию?».

Когда и как?

О месте программирования в школе можно сказать еще точнее. Умения планировать, моделировать, искать, общаться настолько фундаментальны, что обучение этим навыкам должно начинаться как можно раньше — в младших классах начальной школы. Опыт советских педагогов и программистов, успешно обучающих программированию в Новосибирском академгородке школьников 2-го класса, и опыт американских ученых, внедряющих ЭВМ в учебную программу 3-го класса, подтверждает правильность этих выводов.

Что же касается второго (вообще говоря, не менее важного и сложного) вопроса «Как детей учат программированию?» читателям «Кванта» можно ответить очень просто — так, как это делает «Квант».

Очень часто любознательные школьники — начинающие программисты — хватаются за первый попавший учебник программирования. И как огорчительно порой бывает беседовать с ребятами, самостоятельно освоившими, например, начала фортрана в качестве своего первого языка программирования. Такие ребята пишут запутанные бесчисленными метками программы, придумывают только им понятные имена переменных и убежденно полагают, что ЭВМ потому и называются «вычислительными» машинами, что они предназначаются исключительно для «вычислительных», то есть арифметических, задач. Взгляд на машину как на сверхмощный арифмометр — опаснейшее заблуждение многих новичков, начинающих с фортрана или бэйсика. ЭВМ — это универсальный инструмент для обработки всех видов символьной информации — графической, текстовой, управляющей. И только в частных (не самых объемных) применениях ЭВМ действительно занимаются вычислениями арифметических выражений. Постоянный и внимательный читатель «Кванта», по-видимому, уже обратил внимание на то, с какой настойчивостью звучит эта мысль на страницах раздела «Искусство программирования».

Конкурс работ по программированию

Вычислительный центр СО АН СССР и редакция журнала «Квант» объявляют конкурс работ по программированию.

В конкурсе могут принять участие, наряду с учащимися Заочной школы программирования, учащиеся общеобразовательных школ и профессионально-технических училищ. Каждая работа должна содержать

1) краткие сведения об авторах (фамилия, имя, отчество, полный домашний адрес, школа, класс, когда и где изучал программирование);

2) описание работы (постановка задачи, обоснование метода ее решения, комментарии к программе, полученные результаты);

3) текст программы и машинные распечатки (если распечатки есть).

Конкурсные работы необходимо направлять не позднее 15 апреля по адресу: 630090, Новосибирск, 90, просп. Науки 6, ВЦ СО АН СССР, Отдел информатики, Конкурс-81.

Победители конкурса получат приглашение на VI Летнюю школу юных программистов. Обзор наиболее интересных работ будет опубликован в нашем журнале.

Десять задач на применение производной

(Начало см. на с. 37)

Задача 10. На рисунке 10 изображен график скорости v прямолинейно движущейся точки. Пользуясь этим графиком, определите момент времени t, когда ускорение a этой точки равно 3 м/с^2.

Указание. Постройте касательные к графику скорости с угловым коэффициентом, равным 3. Найдите абсциссы точек касания.

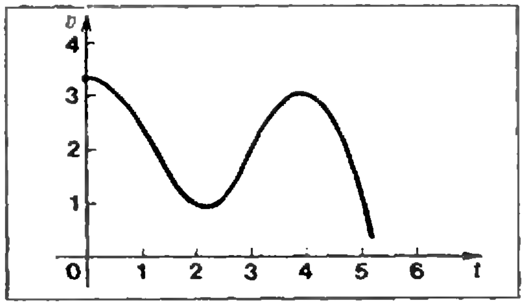


Рис. 10.

Заочная школа программирования

Урок 12:

Ассоциативный поиск

Важнейшими, наиболее часто используемыми действиями в ЭВМ при выполнении программы являются операции *обращения к памяти* — *запоминание* и *поиск*. Поэтому так много зависит от способа, которым организованы в машине эти операции.

Существуют два способа организации запоминания и поиска — *адресный* и *ассоциативный*.

Первый из них — адресный — очень прост в реализации, но предъявляет высокие требования к программисту: программист должен знать в этом случае места в памяти — *адреса* — используемых программой *объектов* (данных, промежуточных значений, результатов) или, в крайнем случае, их относительное расположение. Проблема распределения памяти в больших программах становится весьма сложной задачей; поскольку эта задача частично или полностью возлагается на человека, ошибки становятся неизбежными.

При ассоциативном способе поиска или запоминания необходимые объекты разыскиваются в памяти не по их адресам, а по характеризующим эти объекты *признакам*, ассоциациям — отсюда и название способа. В этом случае программист освобожден от обязанности знать адреса (даже относительные) разыскиваемых и запоминаемых объектов. Возникающие при этом трудности решаются либо аппаратными (техническими) средствами, либо специальными программами, включенными в состав языковых систем программирования*).

Ассоциативная организация основных операций — запоминания и поиска — предполагает, таким образом, что объекты состоят обязательно из двух компонент: одна из них, называемая *контекстом*, представляет основное содержание разыскиваемого или запоминаемого объекта, другая, именуемая *признаком*, используется в операциях обращения к объекту. Например, у элемента множества А разноцветных фигур, каждая из которых представляется кортежем

```
<ЦВЕТ,НАЗВАНИЕ—ФИГУРЫ>,
 А=<•<КРАСНЫЙ,ТРЕУГОЛЬНИК>,
<СИНИЙ,РОМБ>,
<ОРАНЖЕВЫЙ,КРУГ>,
<ЖЕЛТЫЙ,ПРЯМОУГОЛЬНИК>,
<СИНИЙ,КВАДРАТ>,
<КОРИЧНЕВЫЙ,ТРЕУГОЛЬНИК>,
<ФИОЛЕТОВЫЙ,РОМБ>,
<ЗЕЛЕНЫЙ,ПАРАЛЛЕЛОГРАММ>,
<ГОЛУБОЙ,КВАДРАТ>•>,
```

можно условиться признаком считать ЦВЕТ, а контекстом — НАЗВАНИЕ ФИГУРЫ. Тогда поиск фигур голубого цвета выполняется с помощью программы

```
ДЛЯ X ИЗ А ::
   ЕСЛИ X[1] = 'ГОЛУБОЙ'
   ТО ПЕЧАТЬ(X) ВСЕ;
ВСЕ;
```

Легко понять, что адресный и ассоциативный поиск имеют разные применения: в тех случаях, когда исходные данные упорядочены, чаще всего оказывается целесообразным адресный поиск; если же о порядке размещения данных в памяти ЭВМ известно мало, то на помощь приходит ассоциативный поиск.

К примеру, множество планет Солнечной системы (мы его назовем СОЛНЕЧНАЯ_СИСТЕМА) может быть введено в память в виде текста на Рапире:

```
<•<'МЕРКУРИЙ', 2450,58.0,<•'НЕТ'•>>,
<'ВЕНЕРА',6050,108,0, <• 'УГЛЕКИСЛЫЙ
ГАЗ','АЗОТ','ИНЕРТНЫЕ ГАЗЫ'•>>,   (1)
. . . . . . . . . . . . . . . . . .
<'ПЛУТОН',100,529,0,
<•'НЕИЗВЕСТНО'•>>•>
```

---

*) Об ассоциативном поиске можно почитать в книгах Т. Кохонена «Ассоциативная память» (М., «Мир», 1980) и Дж. Мартина «Организация баз данных в вычислительных системах» (М., «Мир», 1978).

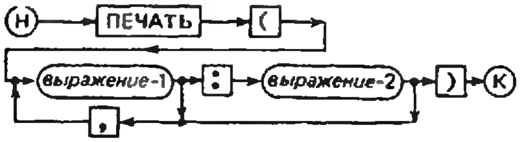
В таблице для каждой планеты приводятся ее название, радиус (в км), удаление от Солнца (в млн. км), количество спутников, а также состав атмосферы, задаваемый с помощью множества — списка названий газов. Все эти сведения образуют контекст соответствующего объекта — элемента множества СОЛНЕЧНАЯ_СИСТЕМА.

Если теперь в качестве признака взять ГАЗ в составе атмосферы, а совокупность остальных элементов в кортежах планет считать контекстом, то в этих обозначениях легко программируется задача 7 (а, г) Олимпиады по программированию («Квант», 1980, № 3): из множества планет Солнечной системы выбрать те, атмосферы которых содержат углекислый газ:

```
<••> —> РЕЗ;
ДЛЯ ПЛАНЕТЫ ИЗ
СОЛНЕЧНАЯ_СИСТЕМА ::
   ЕСЛИ'УГЛЕКИСЛЫЙ ГАЗ'
   ИЗ ПЛАНЕТА[5] ТО ИЗ ПЛАНЕТА[5]
   ТО РЕЗ+ПЛАНЕТА-->РЕЗ
   ВСЕ;
ВСЕ;
```

Программа начинается засылкой пустого множества в РЕЗ; в РЕЗ постепенно формируется множество результат. Обратите внимание, что, решая эту задачу, нам вообще не понадобится обращение к отдельным элементам множества. Порядок, в котором перечислены элементы в множестве (1), не существен.

В этой программе множество-результат осталось в памяти ЭВМ. Если результат требуется напечатать, можно воспользоваться оператором форматной печати, синтаксическая диаграмма которого имеет вид:



Здесь выражение-1 — это выражение, значение которого (число или текст) должно быть отпечатано, а значение выражения-2 — это количество печатаемых символов.

Таким образом, печать таблицы планет осуществляется циклом:

```
ДЛЯ X ИЗ РЕЗ ::
ПЕЧАТЬ (X[1] :12,X[2] :6.
X[3] :3,X[4] :2,X[5] :50)
ВСЕ;
```

(объясните, как выбраны здесь количества печатаемых символов). Стоит сказать, что в одной строке большинства печатающих устройств современных ЭВМ размещается 128 символов.

Остается только добавить, что печатная таблица всегда должна иметь заголовок. Но печать заголовка затруднений не вызывает: как правило, заголовок — это одна строка.

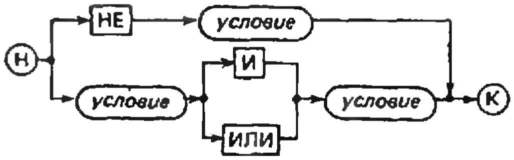
Задание 12.1. *Опишите множество учащихся вашего класса, предполагая, что по каждому из учеников известны сведения: фамилия, пол, год рождения, наличие значка ГТО. Напишите программу, печатающую*

а) *множество всех девочек класса;*

б) *множество всех значкистов ГТО класса.*

А как быть, если потребуется разыскать всех девочек, сдавших нормы на значок ГТО? Одно решение сразу бросается в глаза: написать две процедуры, одна из которых по множеству учеников класса формирует и оставляет в памяти множество ДЕВОЧКИ, а вторая (уже написанная при решении задачи 12.1) выбирает значкисток из этого множества. (Впрочем, порядок работы двух таких процедур может быть и обратным: сначала выбираются значкисты, а потом среди них — девочки.)

Во многих языках программирования (в том числе и в Рапире) предусмотрены возможности получения таких результирующих множеств за один «проход». Эти возможности обеспечиваются так называемыми *сложными условиями*. Сложное условие — это совокупность нескольких простых условий (которые знакомы читателям «Кванта», например, по условным операторам или операторам цикла Рапира), соединяемых *логическими операциями* И (*логическое умножение*), ИЛИ (*логическое сложение*) и НЕ (*отрицание*). Объединение простых условий в одно сложное делается не произвольно, а по определенным правилам, которые можно задать диаграммой.



В этой синтаксической диаграмме на месте условия может, разумеется, стоять и сложное условие.

Читатели «Кванта», возможно, уже встречались с логическими операциями И, ИЛИ, НЕ. Операции И и ИЛИ применяются к двум операндам-высказываниям, а операция НЕ — к одному. Значения операндов и результатов у всех трех операций — две различающиеся величины: *истина* и *ложь*, или «+» и «—», или (что особенно удобно для представления в машине) 0 и 1. Для операций И, ИЛИ и НЕ существует простое табличное представление (именами А и Б обозначены условия-операнды).

А И Б

Б \ А	0	1
0	0	0
1	0	1

А	НЕ А
0	1
1	0

А ИЛИ Б

Б \ А	0	1
0	0	1
1	1	1

Операции И, ИЛИ, НЕ можно применять и к условиям (которые тоже принимают значения *истина* и *ложь*). Так, (X>2) И (X<5) означает попадание X в числовой интервал]2;5[, а условие НЕ(ДЕВОЧКА ИЛИ (НЕ ЗНАЧКИСТ И МАЛЬЧИК)) выделяет множество всех «спортивных» мальчиков. То же сложное условие могло бы быть выражено проще — МАЛЬЧИК И ЗНАЧКИСТ. О способах преобразования сложных условий можно прочитать в книге Ю. А. Шихановича «Введение в современную математику» (М. «Наука», 1965).

Задание 12.2. *Составьте, используя сложные условия, процедуру выборки из множества* КЛАСС *всех мальчиков старше 1965 года рождения, сдавших нормы на значок ГТО. Отпечатайте таблицу-результат с заголовком.*

Рассматривавшиеся до сих пор множества (СОЛНЕЧНАЯ_СИСТЕМА, КЛАСС,...) служили машинными представлениями *двумерных таблиц*: одно измерение — *строки* — это кортежи (планеты, ученики,...), а второе измерение — *столбцы* — это элементы, образующие кортежи (радиусы планет, пол ученика, ...). Теперь не составит труда знакомство с *трехмерными таблицами*. В повседневной жизни трехмерная таблица — это, например, книга, на каждой странице которой размещена одна «обычная» двумерная таблица, третье измерение такой таблицы — номер страницы. Так, известные каждому школьнику таблицы Брадиса тоже можно изобразить как множество кортежей, состоящих из числового значения (контекста) и соответствующих ему трех признаков — СТРАНИЦА, СТРОКА, СТОЛБЕЦ.

Найти значение в третьем столбце и пятой строке на второй странице в такой таблице означает определить контекст, признаки которого удовлетворяют сложному условию (СТРАНИЦА-2) И (СТРОКА-5) И (СТОЛБЕЦ-3).

Задание 12.3. *Классный журнал на январь содержит 8 страниц, по странице на каждый из предметов — русский язык, литература, математика, физика, химия, география, иностранный язык, физкультура. Страница журнала состоит из строк, на каждой из которых написана фамилия школьника и предусмотрены места на 18 оценок — по одной на каждый из дней. Опишите ваш классный журнал на январь и составьте программу печати таблицы учеников, получивших отличные оценки хотя бы по одному предмету 28 января.*

И, наконец, заключительные вопросы:

Задание 12.4. *Опишите ситуацию из повседневной практики, когда может оказаться полезным представление информации в виде четырехмерной таблицы. Как такую таблицу вы зададите машине? Как найти элемент в такой таблице?*

Ю. Первин, Н. Юнерман

Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу

Во Всесоюзную заочную математическую школу Академии педагогических наук СССР при Московском университете (ВЗМШ) принимаются ученики седьмых классов и учащиеся ПТУ. Школьники, проживающие в Москве, Ленинграде и их ближайших пригородах, в школу не принимаются.

Занятия начнутся 1 сентября 1981 года. Обучение в школе бесплатное.

Учащиеся, принятые в школу, будут регулярно получать задания, в которых содержатся объяснения теоретических вопросов и задачи для решения. Программа ВЗМШ тесно связана со школьной программой и направлена на углубленное изучение основных вопросов школьного курса математики. Срок обучения — три года. Все, успешно выполнившие задания, получают удостоверения об окончании ВЗМШ.

Ниже публикуются задачи вступительной контрольной работы. Желающие поступить во ВЗМШ должны выслать решения этих задач *не позднее 1 марта*. После проверки работ (примерно в июле) ВЗМШ сообщит всем принявшим участие в конкурсе результаты выполнения работы. Превмуществом при поступлении пользуются школьники, проживающие в сельской местности и рабочих поселках.

Хотя некоторые из вступительных задач отличаются по внешнему виду от обычных школьных, для их решения не требуется дополнительных знаний по математике. Для поступления в школу не обязательно решить все задачи без исключения. При оценке работы будет учитываться не только количество решенных задач, но и качество решения. Решение каждой задачи должно быть обосновано. Ответ без обоснований может быть не засчитан. Если в задаче возможны несколько ответов, надо указать их все.

Работа должна быть выполнена на русском языке в ученической тетради в клетку. Вступительная работа обратно не высылается, рецензии на нее не выдается.

В конверт вместе с тетрадью надо вложить листок бумаги размером 14 см × 6 см с полным почтовым адресом (этот листок будет наклеен на конверт с извещением Приемной комиссии ВЗМШ о результатах проверки вступительной работы).

На обложку тетради надо наклеить листок клетчатой бумаги, разграфив и заполнив его по следующему образцу (иначе работа проверяться не будет):

Область	*Московская*
Фамилия, имя	*Иванов Петр*
Год рождения	*1967*
Класс, школа	*7 класс «А» школы № 2 г. Клина*
Фамилия, имя, отчество учителя математики	*Никаноров Владимир Алексеевич*
Место работы и должность родителей	*Отец — шофер автобазы № 1,* *мать — домашняя хозяйка*
Полный почтовый адрес	*123456, Клин, ул. Ленина 1, кв. 1.*

Результаты проверки

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

ВЗМШ имеет более 30 филиалов при университетах и педагогических институтах различных городов СССР. Учащиеся, проживающие на территории, обслуживаемой филиалами, и поступившие в ВЗМШ, занимаются в соответствующем филиале. Адреса филиалов вы найдете в «Кванте», 1979, № 2, с. 59.

Адрес ВЗМШ: 117234, Москва В-234, МГУ, ВЗМШ, на конкурс.

Задачи вступительной контрольной работы в ВЗМШ в 1981 году

1. Женя за весну похудел на 20%, потом поправился за лето на 30%, за осень опять похудел на 20% и за зиму прибавил в весе 10%. Остался ли за этот год его вес прежним, уменьшился или увеличился?

2. Из цифр 1, 2, ..., 9 составляются три трехзначных числа (каждая цифра используется по одному разу). Рассмотрим разность между наибольшим и наименьшим из них. Чему, самое меньшее, может быть равна эта разность?

3. Построена трапеция, диагонали которой взаимно перпендикулярны. Докажите, что длина ее высоты не больше длины средней линии.

4. Можно ли в клетчатой таблице размером 5×5 клеток расставить 25 чисел так, чтобы сумма четырех чисел в каждом квадрате 2×2 была отрицательной, а сумма всех чисел — положительной?

5. Составьте четыре множества из элементов 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 так, чтобы количества элементов в их шести попарных пересечениях равнялись 1, 2, 3, 4, 5, 6.

6. Решите уравнение $x^2-[x]=2$, где $[x]$ означает целую часть числа x.

7. Постройте ломаную, которая каждое свое звено пересекает три раза (все пересечения должны происходить во внутренних точках звеньев ломаной, а не в вершинах).

8. Два человека, у которых есть один велосипед, должны попасть из пункта A в пункт B, находящийся на расстоянии 40 км от A. Первый передвигается пешком со скоростью 4 км/ч, на велосипеде — 30 км/ч. Второй — пешком со скоростью [illegible] км/ч, на велосипеде — 20 км/ч. За какое наименьшее время они могут добраться в пункт B (велосипед можно оставлять без присмотра)?

9. Найдите три натуральных числа p, q, r такие, что $2pqr+pq+pr=1981$ (укажите все решения).

10. Сложите квадрат из четырех плиток размером 1×1, восьми плиток размером 2×2, двенадцати плиток размером 3×3 и шестнадцати плиток размером 4×4.

Заочная физико-техническая школа

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) при Московском ордена Трудового Красного Знамени физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор учащихся восьмилетних и средних школ, расположенных на территории РСФСР, в 8-й, 9-й и 10-й классы на 1981/82 учебный год.

Цель этой школы — помочь ученикам в самостоятельных занятиях физикой и математикой. Вот почему при приеме в ЗФТШ предпочтение отдается учащимся, проживающим в сельской местности и рабочих поселках, где такая помощь особенно нужна.

Обучение в школе бесплатное.

ЗФТШ дает хорошие дополнительные знания по физике и математике своим выпускникам, многие из которых становятся студентами ведущих вузов нашей страны.

Кроме отдельных учащихся, в ЗФТШ принимаются и физико-технические кружки, которые могут быть организованы на месте по инициативе двух преподавателей — физики и математики. Руководители кружка набирают и зачисляют в них учащихся, успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Кружок принимается в ЗФТШ, если директор школы сообщит в ЗФТШ фамилии руководителей кружка и поименный список членов кружка по классам (с указанием итоговых оценок за вступительное задание).

Учащиеся, принятые в ЗФТШ, и руководители физико-технических кружков будут регулярно получать задания по физике и математике в соответствии с программой ЗФТШ, а также рекомендуемые ЗФТШ решения этих заданий. Задания ЗФТШ содержат теоретический материал и разбор характерных задач и примеров по теме, а также 10—14 задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Работы отдельных учащихся проверяют в ЗФТШ или ее филиалах, а работы членов кружка — его руководители.

С учащимися Москвы два раза в неделю проводятся очные занятия по физике и математике по программе ЗФТШ. Занятия проходят в вечерних консультативных пунктах (в ряде московских школ), набор в которые проводится или по результатам выполнения вступительного задания ЗФТШ, или по результатам очного собеседования по физике и математике. Собеседование будет проводиться во второй половине сентября (справки по телефону 216-00-05, доб. 2-59).

Вступительное задание по физике и математике каждый ученик должен выполнить самостоятельно на русском языке и аккуратно переписать в одну школьную тетрадь. Порядок задач должен быть тот же, что и в задании.

Тетрадь перешлите в большом конверте простой бандеролью (только не сворачивайте тетрадь в трубку). Вместе с решением обязательно вышлите справку из школы, в которой вы учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на внутреннюю сторону обложки тетради. Без этой справки решение рассматриваться не будет. На внешнюю сторону тетради наклейте лист бумаги, заполненный по следующему образцу:

1. Область (край или АССР)	*Челябинская область*
2. Фамилия, имя, отчество	*Гайнетдинов Рафис Зинатурович*
3. Класс	*восьмой*
4. Номер и адрес школы	*поселок Роза, с. ш. № 19*
5. Профессия родителей и занимаемая должность	
отец	*шахтер*
мать	*слесарь*
6. Подробный домашний адрес	*456550, Челябинская обл., поселок Роза, пер. Кооперативный, д. 2.*

Срок отправления решения — *не позднее 1 марта 1981 года* (по почтовому штемпелю места отправления). Вступительные работы обратно не высылаются.

Зачисление в школу производится приемной комиссией Московского физико-технического института. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 1981 года.

Тетрадь с выполненным заданием (обязательно и по физике, и по математике) присылайте по адресу: 141700, г. Долгопрудный Московской области, Московский физико-технический институт, для ЗФТШ.

Учащиеся Архангельской, Вологодской, Калининградской, Калининской, Кировской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областей, Карельской и Коми АССР высылают работы по адресу: 198904, г. Старый Петергоф, ул. 1 Мая 100, ЛГУ, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Учащиеся Амурской, Иркутской, Камчатской, Сахалинской, Читинской областей, Красноярского, Приморского, Хабаровского краев, Бурятской, Тувинской, Якутской АССР и Чукотки высылают работы по адресу: 660607, г. Красноярск, ул. Перенсона 7, Пединститут, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Ниже приводятся задачи вступительного задания по физике и математике. По физике задачи 1—5 предназначены для учащихся седьмых классов, задачи 3—9 — для учащихся восьмых классов и задачи 6—12 — для учащихся девятых классов. По математике задачи 1—5 — для седьмых классов, 4—10 — для восьмых классов и 7—13 — для девятых классов.

Вступительное задание

Физика

1. Для откачивания воды из колодца глубиной $h = 7$ м пользуются насосом, полезная мощность двигателя которого $N = 500$ Вт. За какое время двигатель откачает из колодца $V = 10$ м^3 воды?

2. В ведре находится смесь воды со льдом общей массой $m = 10$ кг. Какое количество льда было в смеси, если при добавлении $V = 2$ л горячей воды с температурой $t_1 = 80°$ С температура воды в ведре оказалась равной $t_2 = 10°$ С?

3. Электрическая цепь, состоящая из сопротивлений R_1, R_2 и R_3, подключена к двум источникам постоянного напряжения U_1 и U_2, как показано на рисунке 1. При каких условиях сила тока через сопротивление R_1 будет равна нулю?

4. Скорость пловца относительно воды равна по модулю $v = 0{,}5$ м/с, скорость течения реки $u = 0{,}3$ м/с. В каком направлении должен двигаться пловец, чтобы он попал в противоположную точку на другом берегу? Сколько времени он будет плыть, если ширина реки $l = 40$ м?

5. Воздушный шар массой $M = 120$ кг опускается с постоянной скоростью. Какое количество балласта надо выбросить, чтобы шар начал подниматься с той же скоростью? Архимедову силу $\vec{F}_A$ ($|\vec{F}_A| = 980$ Н) считать постоянной.

6. Автомобиль массой $M = 2$ т равномерно поднимается по шоссе с углом наклона $\alpha = 12°$. Определите, на сколько отличаются давления передних и задних колес автомобиля на шоссе, если известно, что расстояние между осями колес $L = 3$ м, а центр тяжести автомобиля расположен на равных расстояниях от осей на высоте $H = 1$ м.

7. Схема, изображенная на рисунке 2, состоит из двух одинаковых сопротивлений $R_2 = R_3 = R$ и двух одинаковых нелинейных сопротивлений $R_1 = R_4$, вольтамперная характеристика которых имеет вид $U = \alpha I^2$, где α — некоторый постоянный коэффициент. При каком напряжении источника питания U_0 сила тока через гальванометр Г равна нулю?

8. При какой продолжительности суток тела на экваторе Земли весили бы в два раза меньше, чем на полюсе? Радиус Земли $R_З = 6400$ км.

9. Человек массой $m = 70$ кг прыгает с берега в лодку, стоящую в неподвижной воде. Его скорость горизонтальна и равна по модулю $v_0 = 3$ м/с. На какое расстояние переместится лодка? Сила трения лодки о воду пропорциональна скорости, коэффициент пропорциональности $k = 35$ Н · с/м.

10. В цилиндре под поршнем находится $n = 2$ моля идеального газа. Определите начальную температуру газа, если при сообщении ему количества теплоты $Q = 18$ кДж объем увеличился в $k = 2{,}5$ раза. Молярная теплоемкость газа при постоянном давлении $C_p = 21$ Дж/(моль · К).

11. Для заполнения лазерных трубок используется смесь ксенона и гелия в молярном отношении 1:9. Имеется баллон с ксеноном

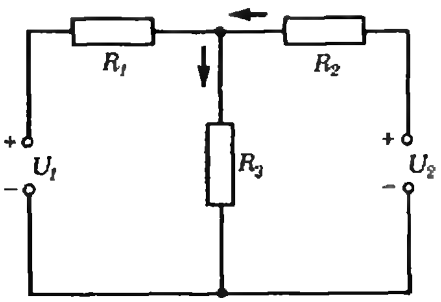


Рис. 1.

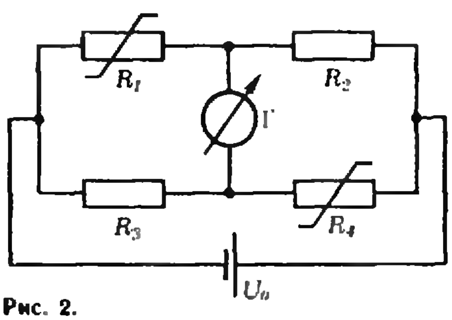


Рис. 2.

объемом $V_1=1$ л с давлением $p_1=39$ кПа. Сколько баллонов гелия потребуется для полного использования ксенона, если гелий имеется в баллонах объемом $V_2=2$ л с давлением $p_2=6{,}5$ кПа?

12. Вычислите объемную плотность ρ электрических зарядов в атмосфере, если известно, что напряженность электрического поля на поверхности Земли $|\vec{E}_1|=100$ В/м, а на высоте $h=1$ км напряженность уменьшается в 2 раза. Считайте, что электрические заряды в атмосфере распределены равномерно.

Математика

1. В футбольном турнире каждая из 8 участвующих команд сыграла с каждой по одному разу. Команды набрали 14, 12, 8, 8, 6, 4, 3, 1 очков. Сколько очков потеряли команды, занявшие первые четыре места? За выигрыш команда получает 2 очка.

2. Существует ли треугольник, длины двух высот которого меньше 1 см, а площадь равна 4000 см²?

3. Доказать, что если неотрицательные числа x_1, x_2, x_3 удовлетворяют условию

$$x_1+x_2+x_3\leq\frac{1}{2},$$

то справедливо неравенство

$$(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)\geq\frac{1}{2}.$$

4. Доказать следующее утверждение: если точка O лежит внутри треугольника ABC, то

$$|OA|+|OB|+|OC|<|AB|+|BC|+|CA|.$$

Сформулировать обратное утверждение. Верно ли оно?

5. Доказать или опровергнуть следующие утверждения:

а) равнобедренная трапеция имеет одну и только одну ось симметрии;

б) если четырехугольник имеет одну и только одну ось симметрии, то четырехугольник — равнобедренная трапеция.

6. Доказать, что если рациональные числа a, b, c связаны равенством $|a+c|=|b|$, то уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет рациональные корни.

7. Пусть O — точка пересечения медиан треугольника ABC. Доказать, что

$$3\vec{CO}=\vec{CA}+\vec{CB}.$$

8. Даны два утверждения:

а) уравнение $x^2+(a+1)x+1=0$ имеет два отрицательных корня;

б) неравенство $4x^2+(a-2)x+1\geq 0$ справедливо при всех значениях x.

При каких значениях a одно из этих утверждений истинно, а другое ложно?

9. Для того чтобы угол треугольника был острым, необходимо и достаточно, чтобы длина противолежащей стороны треугольника была меньше удвоенной длины медианы, опущенной на указанную сторону. Доказать.

10. Один из учеников 8-го класса собрал 26 кг металлолома, а остальные его одноклассники — по 11 кг каждый. Один из учеников 9-го класса собрал 25 кг, а его одноклассники — по 10 кг. Сколько учеников в каждом классе, если оба класса собрали одинаковое количество лома, а общий вес собранного лома больше 400 кг, но меньше 600 кг?

11. Доказать, что данный разносторонний треугольник никакой прямой нельзя разделить на два конгруэнтных треугольника.

12. Доказать, что если сумма положительных чисел a, b, c равна 1, то

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 9.$$

13. При каких a, b, c функции

$$f(x)=ax+b,\ g(x)=cx^2$$

при любом $x\in\mathbf{R}$ удовлетворяют равенству

$$f(g(x))=g(f(x))?$$

Новый прием на малый мехмат

Для учеников седьмых классов, проживающих на территории европейской части РСФСР (за исключением северных областей) и Белоруссии, объявляется прием на малый механико-математический факультет (МММФ) — заочную математическую школу при механико-математическом факультете МГУ, являющуюся отделением ВЗМШ.

Программа МММФ, направленная на углубление знаний по важнейшим разделам школьной программы и развитие у школьников навыков самостоятельных занятий математикой, составлена под руководством профессоров факультета. Эта программа учитывает особенности вступительных экзаменов по математике на механико-математический факультет МГУ и в другие вузы.

Занятия начнутся с 1 сентября 1981 года. Обучение на малом мехмате бесплатное. Срок обучения — 3 года.

Желающие поступить на малый мехмат должны выслать решение контрольной работы ВЗМШ не позднее 15 апреля 1981 г. по адресу: 117234, Москва, В-234, МГУ, мех.-мат. ф-т, МММФ. Требования к оформлению работы не отличаются от требований ВЗМШ.

Участники областных олимпиад по математике могут быть приняты на малый мехмат на основании заявления и документа, подтверждающего участие в олимпиаде.

Для московских школьников работают Вечерняя математическая (7—9 кл.) и Воскресная подготовительная (10 кл.) школы. Справки о них по телефону 139-33-43.

М.П.ШАСКОЛЬСКАЯ
КРИСТАЛЛЫ

Путешествие в мир кристаллов

Мир кристаллов необычайно разнообразен. Он представлен множеством различных форм, свойств и закономерностей. Много веков ученые исследовали этот мир. Но никогда наши знания о кристаллах не расширялись и не углублялись так быстро, как в последние десятилетия.

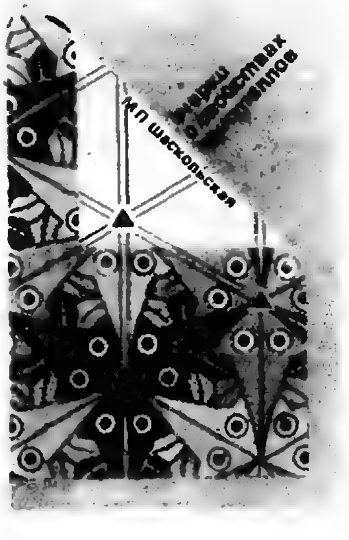
В 1944 году в издательстве «Детская литература» вышла книга известного советского специалиста по физике кристаллов М. П. Шаскольской «Кристаллы». В то время даже многие ученые считали кристаллографию (науку о кристаллах) скучной, сухой и почти никому не нужной. Автор задалась целью показать, что это далеко не так, и книга оказалась очень увлекательной. В 1967 году под тем же названием книга была издана в Гостехиздате. При этом автор существенно переработала ее в расчете на несколько более подготовленного читателя, знакомого с основами школьной физики. Недавно издательство «Наука» вновь подарило эту книгу читателям. В новой авторской переработке она предназначается, прежде всего, школьникам старших классов. Теперь книга вышла двумя частями. Одна из них по-прежнему называется «Кристаллы», а вторая — «Очерки о свойствах кристаллов».*

За годы, истекшие с момента выхода первого издания, кристаллы, по словам автора, ожили: стало ясно, что многие их свойства определяются не столько строгой правильностью их структуры, четким порядком в расположении атомов, сколько нарушениями этой правильности. В реальных кристаллах всегда имеется множество разнообразных дефектов структуры. Они рождаются, размножаются, движутся, взаимодействуют друг с другом. Не застывшая неподвижность идеального кристалла, а процессы движения отдельных его частей и частиц характеризуют структуру реального кристалла и определяют многие его свойства.

Книги М. П. Шаскольской вводят читателя в современный мир кристаллов, обогащенный новыми знаниями и практическими применениями. Первая книга богата интереснейшими сведениями о кристаллах в природе и о кристаллах в лабораториях и заводских цехах. В ней подробно рассказывается о том, как растут природные кристаллы и как создают их ученые. Автор знакомит нас с судьбой знаменитых алмазов и даже рассказывает о многочисленных суевериях, связанных с кристаллами. Кристаллы в пещерах и в облаках, в соляных озерах и в живых организмах — обо всем этом написано необычайно живо и интересно. А дальше читатель узнает, как выращивают искусственные рубины, алмазы, кварц и другие материалы, необходимые современной технике.

Во второй книге речь идет о разнообразных свойствах кристаллов — механических, электрических, оптических, магнитных. В ней рассказывается также о разных типах симметрии кристаллов, о различных вариантах «упаковки» образующих кристаллы частиц, о дефектах реальных кристаллических решеток и их роли в тех или иных свойствах кристаллов.

Прочитав эти книги, читатель по-новому увидит окружающий нас мир, с которым мы сталкиваемся ежедневно и ежечасно и о котором мы, к сожалению, обычно почти ничего не знаем. Эти книги дают прекрасную возможность взглянуть глазами физика на то, что у нас всегда под руками, чем мы пользуемся в повседневной жизни. Но пожалуй, главное, с чем встретится читатель этих книг, — это глубокая влюбленность ученого в свою науку, в кристаллы, изучению которых М. П. Шаскольская посвятила всю свою жизнь. С такой влюбленностью в кристаллы можно столкнуться лишь на страницах знаменитых научно-популярных книг, написанных академиком А. Е. Ферсманом. Такие книги не только рассказывают о науке с той или иной степенью доступности. Их авторы стремятся увлечь читателя самим процессом познания, приоткрыть дверь в настоящую науку, показать, как нелегко добывается научная истина и сколько радости она приносит своим первооткрывателям. Именно поэтому мы настойчиво рекомендуем обе книги М. П. Шаскольской нашим юным читателям.



В. Лешковцев

---

*) М. П. Шаскольская. Кристаллы (М., «Наука», 1978), цена 40 к.; М. П. Шаскольская. Очерки о свойствах кристаллов (М., «Наука», 1978), цена 30 к.

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов.
Ведет страничку — мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик

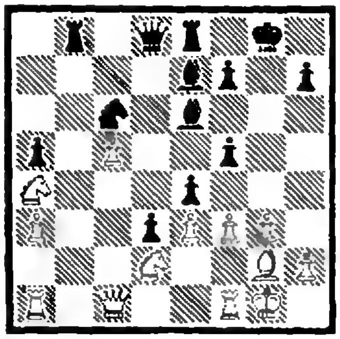
Первый шахматный король

Итак, наша шахматная страничка начинает второй год своего существования. За это время в редакцию журнала поступило множество писем от читателей, и мы убедились, что шахматы пользуются большой популярностью среди ребят, увлекающихся точными науками. Мы стремились к тому, чтобы материалы наших страничек были разнообразными — задачи и этюды, интересные комбинации и партии выдающихся шахматистов сопровождались информацией о событиях, происходящих в шахматном мире, головоломками и шахматными задачами с геометрическим сюжетом. Мы и в дальнейшем будем знакомить вас с различными сторонами шахматной игры и шахматного искусства.

Напомним, что этим летом состоится 30-й матч на первенство мира по шахматам. Поэтому на наших страничках много внимания будет уделено матчам за шахматную корону. Мы хотя бы кратко расскажем о каждом матче и приведем наиболее яркие и интересные фрагменты борьбы. В шахматном конкурсе будут предлагаться для решения комбинации, принадлежащие чемпионам мира и их соперникам.

Истории шахмат известно немало «некоронованных королей» — сильнейших шахматистов своей эпохи, неофициальных чемпионов мира: Греко, Филидор, Лабурдоннэ, Стаунтон, Андерсен, Морфи. В 80-е годы прошлого столетия шахматный мир решил, что пора иметь «настоящего» короля, и в 1886 году после победы над И. Цукертортом первым официальным чемпионом мира был объявлен Вильгельм Стейниц. Неофициально сильнейшим шахматистом мира Стейниц был признан еще в 1866 году после выигрыша матча у Андерсена. Так, спустя двадцать лет, он узаконил свой титул.

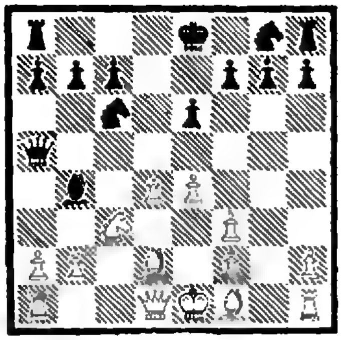
Матч проходил в нескольких городах США. После пяти партий Стейниц проигрывал своему выдающемуся современнику со счетом 1:4, но в дальнейшем сумел переломить ход событий и одержал девять побед всего при одном поражении (матч продолжался до десяти побед). Приведем окончание предпоследней партии матча.



Цукерторт — Стейниц

20...Kd4! (угрожая Кc2 или Кe2) **21. ed Ф:d4+22. Kph1 e3!** Черные пожертвовали коня, но их пешки неудержимо рвутся вперед. **23. Kc3 Cf6! 24. Kdb1 d2! 25. Фc2 Cb3 26. Ф:f5 d1Ф 27. K:d1 C:d1 28. Kc3 e2 29. Л:d1 Ф:c3. Белые сдались.**

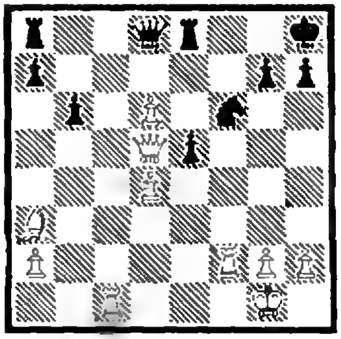
Свой первый матч в звании чемпиона мира Стейниц провел с великим русским шахматистом М. Чигориным в 1889 году в Гаване. Если Стейниц по праву считался основоположником позиционной школы игры, то Чигорин был признанным мастером комбинационного стиля. Таким образом, состязание между этими двумя корифеями прошлого носило принципиальный характер. Во всей дальнейшей истории борьбы за шахматную корону не было более «кровопролитного» матча, чем этот — лишь последняя, семнадцатая партия завершилась мирно. Стейниц одержал десять побед при шести поражениях и сохранил свое звание.



Стейниц — Чигорин

В дебюте этой, четвертой партии матча черные допустили несколько позиционных промахов, и Стейниц умело использует их: **9. d5! ed 10. a3! Kd4** (гибельно 10...C:c3 11. C:c3 и 12. C:g7, а также 10...Cd6 11. K:d5 Фc5 12. Ce3 Фa5+ 13. b4) **11. Cd3 0—0—0 12. ab K:f3+ 13. Ф:f3! Ф:a1+ 14. Kpe2 Ф:b2 15. Лb1 Фa3 16. Kb5 Фa6 17. Ф:f7 Фb6 18. Лc1 h6 19. Ф:g7 de 20. Ф:c7+ Ф:c7 21. Л:c7+ Kpb8 22. C:e4. Черные сдались.**

В конце 80-х годов прошлого столетия И. Гунсберг выиграл ряд крупных турниров и сыграл вничью матч с Чигориным. Это дало ему основания бросить перчатку чемпиону. Хотя большого перевеса Стейниц не добился, но свое звание отстоял довольно уверенно. Вот как закончилась седьмая партия этого матча.



Стейниц — Гунсберг

22. Л:f6! gf (на 22...Ф:f6 решает 23. d7 Лed8 24. Ф:a8! Л:a8 25. Лc8+ Фd8 26. Л:a8 Ф:a8 27. Ce7) **23. d7 Лg8 24. de Лg5** (24...fe 25. Cb2) **25. Ф:a8! Ф:a8 26. Лc8+ Лg8 27. Л:a8 Л:a8 28. e6. Черные сдались.**

Десять задач на применение производной

1. Правильный рисунок 1, *и*.
2. Ошибки допущены в рисунках 2, *а—в*, *д*.
3. См. рис. 1.
4. График зависимости $l = l(t)$ правилен.
5. Если $t=0$, то $v=q=50$, откуда $q=50$. Далее из соотношения $a=g=2p=-10$ находим, что $p=-5$. Наконец, так как $h=20$ при $t=0$, получаем $r=20$. Таким образом, $h(t)=-5t^2+50t+20$ (рис. 2).
6. Способ 1. В треугольнике, отсекаемом от второго квадранта касательной к параболе в точке с абсциссой 2, катеты имеют одну и ту же длину, равную 5. Отсюда $\operatorname{tg}\alpha=1$, то есть $v=1$ м/с.

Способ 2. Координаты точек (0; 3) и $(3;\ 7\frac{1}{2})$ удовлетворяют уравнению $x(t)=pt^2+qt+r$. Следовательно, $3=p\cdot 0^2+q\times\times 0+r$, $7\frac{1}{2}=p\cdot 3^2+q\cdot 3+r$. Кроме того, $3=-\frac{q}{2p}$. Решая систему, находим, что $p=-\frac{1}{2}$, $q=3$, $r=3$. Таким образом, $x(t)=-\frac{1}{2}t^2+3t+3$. Поэтому $v=x'(t)=-t+3$, $v(2)=1$м/с.

7. Тангенс угла α, образованного касательной к кривой $\varphi=\varphi(t)$ в точке $t=3$, можно

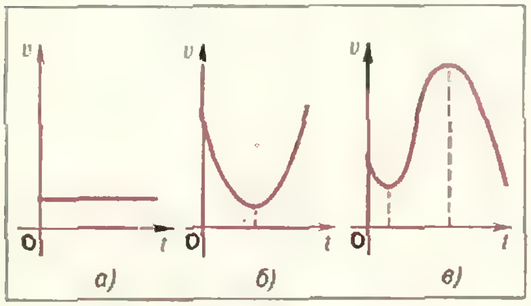


Рис. 1

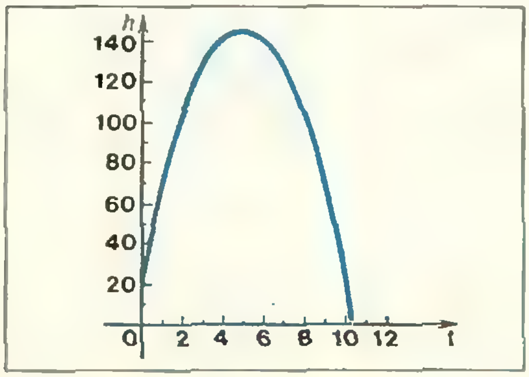


Рис. 2.

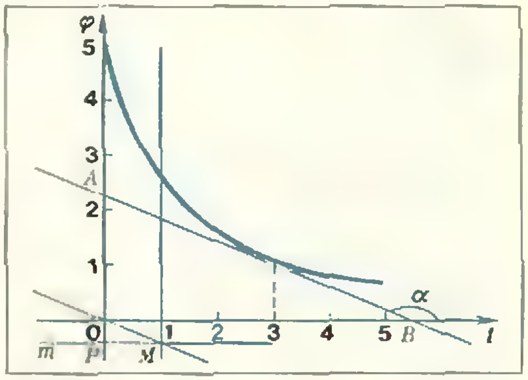


Рис. 3.

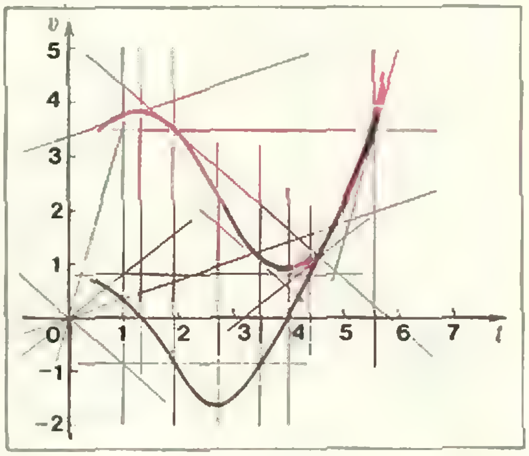


Рис. 4.

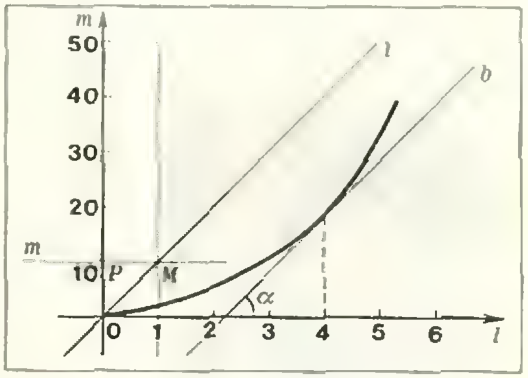


Рис. 5.

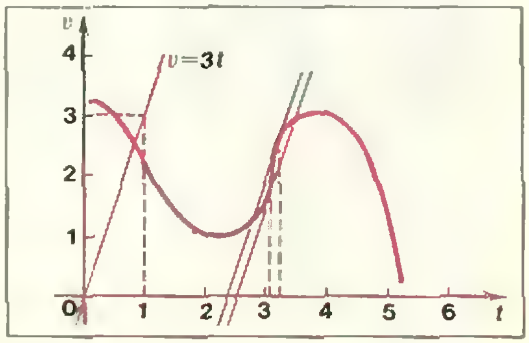


Рис. 6.

найти из прямоугольного треугольника AOB (см. рис. 3). Возможен и способ графического нахождения углового коэффициента касательной, заключающийся в следующем: 1. Проводим через точку 0 прямую l, параллельную касательной AB. 2. Находим точку M пересечения l с прямой $t=1$. 3. Проводим через точку M прямую m, параллельную оси t. Пусть P — точка пересечения m с осью φ. Ордината точки P равна тангенсу угла наклона касательной (AB) к оси t (убедитесь в этом). Пользуясь указанным способом, получаем $\omega(3) = \operatorname{tg}\alpha \approx -0{,}4$.

8. Пусть точка $K(t_0; v(t_0))$ принадлежит графику v. Для построения соответствующей ей точки $K_1(t_0; v'(t_0))$ удобно применить способ, описанный в решении задачи 7: для каждой точки t_0 прямая m в пересечении с прямой $t=t_0$ дает точку $K_1(t_0; v'(t_0))$, принадлежащую искомому графику ускорения. Построив достаточно большое число точек вида $(t; v'(t))$, соединим их плавной линией (рис. 4)*). В результате получим непрерывную кривую, которая дает наглядное представление о характере зависимости ускорения a от времени t.

9. $\tau(4) = m'(4) \approx 10$ кг/м (рис. 5).

10. Строим прямую $v=3t$ (рис. 6). Перемещая эту прямую параллельно самой себе (это можно сделать с помощью линейки и чертежного треугольника), убеждаемся в том, что абсциссы точек касания приближенно равны 3,1 и 3,3. Таким образом, $a \approx 3$ м/с^2 при $t_1 \approx 3{,}1$ и $t_2 \approx 3{,}3$.

Московский инженерно-физический институт

Математика

Вариант 2

1. Если x — количество кг второго сплава, y — количество кг железа в новом сплаве, то

при $0 \leqslant r < 30$, $x=0$, $y=4{,}9$,
при $r=30$, $x \in [0; 18]$, $y=0{,}7x+4{,}9$,
при $30 < r \leqslant 100$, $x=18$, $y=12{,}9-0{,}18\,r$.

2. $\dfrac{1}{3}hc\dfrac{\sqrt{64h^2-c^2\cos^2\alpha}}{\sin 2\alpha}$.

3. $F(x) = 9 - x - \log_8|x|$, $x=8$.

4. $[0; 28[$.

Физика

1. На брусок действуют четыре силы (рис. 7). Это сила тяжести $m\vec g$, сила реакции $\vec R$, сила упругости пружины $\vec T$ и сила трения скольжения $\vec F_{тр}$. Так как брусок не имеет ускорения, суммы проекций всех сил на горизонтальную и вертикальную оси равны нулю:

$$|\vec F_{тр}| - |\vec T|\sin\alpha = 0, \quad |\vec T|\cos\alpha + |\vec R| - mg = 0.$$

Кроме того,

$$|\vec F_{тр}| = \mu|\vec R| \text{ и } |\vec T| = k(l-l_0) = k(l_0/\cos\alpha - l_0) = kl_0(1/\cos\alpha - 1).$$

Из полученных равенств находим коэффициент трения

$$\mu = \frac{kl_0(1/\cos\alpha - 1)\sin\alpha}{mg - kl_0(1-\cos\alpha)} = 0{,}2.$$

2. Обозначим через $\vec v$ скорость шайбы в точке C (см. рис. 3 в статье). Ее можно найти из закона сохранения энергии

$$\frac{m|\vec v_0|^2}{2} = \frac{m|\vec v|^2}{2} + mgR(1-\cos\alpha).$$

Время бруска в полете от точки C до точки D определяется формулой

$$t = 2|\vec v|\sin\alpha/g.$$

Дальность полета бруска равна

$$l = |\vec v|\cos\alpha\cdot t = |\vec v|^2\sin 2\alpha/g = (|\vec v_0|^2 - 2gR(1-\cos\alpha))\sin 2\alpha/g = 6{,}9 \text{ м}.$$

3. Запишем условия равновесия поршней после нагревания газа и перемещения точки O:

$$kx + pS_1 - p_0S_1 - |\vec F| = 0,$$
$$p_0S_2 + |\vec F| - pS_2 = 0.$$

Здесь $\vec F$ — сила натяжения стержня, p — новое давление газа, которое можно найти из условия неизменности объема газа:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{T}{T_0} = \frac{T_0+\Delta T}{T_0}.$$

Исключая из полученных равенств $|\vec F|$ и p, находим искомое расстояние

$$x = \frac{p_0(S_2-S_1)}{k}\cdot\frac{\Delta T}{T_0} = 0{,}25 \text{ м}.$$

4. Второй закон Ньютона для движущегося по окружности поршня запишется в виде

$$m\omega^2r = (p_2-p_1)S,$$

где p_2 — давление сжатого (по сравнению с первоначальным состоянием) газа, а p_1 — давление разреженного газа. Давления p_1 и p_2 можно найти из условия, что температура газа остается неизменной:

$$p_1(l+r) = p_0l, \quad p_2(l-r) = p_0l.$$

Тогда угловая скорость

$$\omega = \sqrt{\frac{p_0V}{m(l^2-r^2)}} = 200 \text{ рад/с}.$$

5. Заряд q на обкладках конденсатора меняется по закону

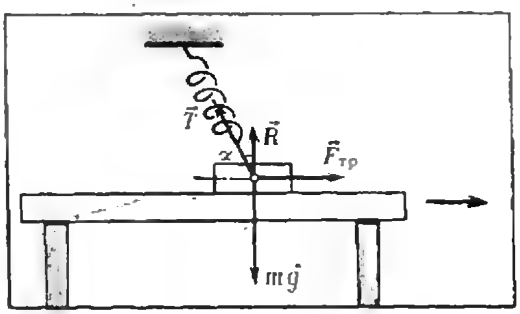


Рис. 7.

---

*) Построение графика производной некоторой функции по графику самой функции называется *графическим дифференцированием*.

$$q = CU = \frac{\varepsilon_0 S}{d}\,\mathscr{E} = \frac{\varepsilon_0 S\,\mathscr{E}(1+\alpha t)}{d_0}.$$

Ток I — это скорость изменения заряда со временем, то есть производная от заряда по времени, следовательно,

$$I = q'(t) = \varepsilon_0 S\,\mathscr{E}\,\alpha/d_0 = 2\cdot 10^{-8}\ \text{А}.$$

6. Расстояние l от источника до зеркала и расстояние l' от зеркала до изображения связаны формулой сферического зеркала

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{l'} = \frac{2}{R}.$$

Радиус r окружности, по которой движется источник, и радиус r' окружности, по которой движется изображение, связаны соотношением

$$\frac{r}{r'} = \frac{l}{l'}.$$

Отсюда получаем

$$r' = r\frac{l'}{l} = \frac{rR}{2l-R}.$$

Теперь найдем центростремительное ускорение a', с которым движется изображение:

$$a' = \omega^2 r' = \left(\frac{V}{r}\right)^2 \frac{rR}{2l-R} = \frac{V^2R}{r(2l-R)} = 4{,}5\ \text{м/с}^2.$$

Шахматный конкурс

(см. «Квант» № 8, 1980)

1 (слева). При своем ходе белые сыграли бы Kb6×, однако это так называемый «ложный след» — последний ход черных невозможен. Поэтому в данной позиции ход черных (который принято называть нулевым), и они получают мат в трех вариантах: 0...Л:b7 1. **Ф:b7**×; 0...С:b7 1. **Ф:b7**× (в этих двух вариантах присутствовал задачный элемент — связка); 0...С:b5 (**a4**—a3) **1.** Kb6×.

1 (справа). 0...h4 1. Kf8×; 0...**fg** 1. **fg**× (но не 1. Kf8×).

2 (слева). Обычная задача: **1. c8K! Лb5 (b7, b8) 2. Kc6**×; **1**...Л — любой ход по шестой горизонтали 2. С:b4×.

2 (справа). В позиции ход черных — **0...gf 1. Л:f5 h5 2. Л:h5**×.

3 (слева). 0...ab 1. a7 и 2. a8Ф (Л)×; 0...cb 1. Л:b6! **Kp:a4** (1...ab **2.** a7 и 3. **a8Ф**×) 2. Лb5! **Kp:a3** 3. Лa5×;

3 (справа). Вновь ход черных (конь не мог попасть на h6 с **g4**, так как тогда белый король находился бы под шахом). Имеется три разветвления: **I. 0...K:f5 1. f8Ф** hg 2. С:g6 и 3. **Фg7**×; **1**...h6 2. **g7+!** (но не 2. Kp:f5? — пат! и не 2. Kpe5 Kg7!) 2...**K:g7** 3. **Ф**:g7×. **II. 0...Kg4+** 1. С:g4! **hg** 2. f8Ф gf 3. **Фg7**×, но не 1. Kpe7? **hg**! (1...С:f7? 2. **g7+!** Kpg8 3. С:f7×) 2. f8Ф gf! **III. 0...hg 1. f8Ф K:f5 2. С:g6 и 3. Фg7**×.

4 (слева). Обычная задача: **1. Kpb1 b3 2. Ka6! ba+ 3. Kpc2! и 4. Kc4**×.

4. (справа). Подобна задаче № 2 (справа). Ход черных, **0...gh** (0...gf 1. Cg7 f4 2. Л:h6×) **1. Cg7 h4 2. K:h4 h5 3. Kf3 h4 4. Kg5**×.

5 (слева). 0...Л:a5+ 1. Kpb3 Лh5 2. Лc3—c6+ Kpa5! 3. Л:a7+ Kpb5 4. Лb7+ Kpa5 5. Лa6×.

5 (справа). 1. **Kf8+!** (1. f8K+ **Kpg7!**) **1...Kpg7 2. Ke6+! Kph7** (2...Ф:e6 3. f8Ф+) **3. f8K+! Ф**:f8 **4. K:f8+ Kpg7 5. Лf7**×

6 (слева). 1. Kb6 c4! 2. Kpb5! **c3 3. Kpa5** c2! **4. Kpb5 b3 5. Kpa5**, и на любое отступление коня **6. Kc4**×.

6 (справа). 0...С:f7 1. Kp:f7 h4 2. f6! hg 3. Kp:g6! **Kpg8** 4. h7+! Kph8 5. f7 h3 6. f8Ф×; 2...h3 3. Kpe7 (e8) (3. Kpe6? Kpg8! 4. Kpe7 hg; **4.** f7+ Kpf8) 3...hg 4. f7 Kph7 5. f8Ф g5 6. **Фg7**×.

(см. «Квант» № 9, 1980)

1. 1. c7 Лd6+ 2. Kpb5 (2. Kpc5? Лd1 3. c8Ф Лc1+) **2...Лd5+ 3. Kpb4** (на линию «с» опять нельзя становиться) **3...Лd4+ 4. Kpb3 Лd3+ 5. Kpc2!** (Кажется, что белые добились своего, превращение пешки в ферзя неизбежно.) **5...Лd4!** (Выясняется, что 6. c8Ф Лc4+! 7. Ф:c4 приводит к пату.) **6. c8Л!!** Теперь на доске материальное равенство, но грозит 7. Лa8×. После вынужденного **7...Лa4** и ответа **8. Kpb3!** черные теряют ладью или получают мат следующим ходом.

Любопытно, что сам Сааведра был довольно слабым шахматистом. Рассказывают, что однажды, наблюдая за легкой партией, в которой белые сыграли c7—c8**Ф** и нарвались на пат, Сааведра предложил c7—c8Л! Затем эта идея была обработана другими шахматистами и родился этюд.

2. **1. Kc1** Л:b5 2. c7 Лd5+ 3. Kd3! Л:d3+ 4. Kpc2 Лd**4** 5. c8Л!; 1...Лd5+ 2. Kpc2 Лc5+ 3. Kpd3! (3. Kpd2 Лd5+? **4.** Kd3 с выигрышем, но 3...Л:b5! **4.** c7 Лb2+ 5. Kpd3 Лc2! 6. Kp:c2 пат!) 3...Л:b5 **4.** c7 Лb8! 5. cbC!, и, как известно, слон и конь матуют.

3. 1. Лh7+ Kpe8 2. Kc8! (проигрывают 2. Лh8+ или 2. Kc6) **2...Cc5 3. Лh4 e1Ф 4. Лe4+! Ф:e4 5. Kd6+ С:d6 пат.**

Номер подготовили:

А. Виленкин, А. Егоров, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:

М. Дубах, Г. Красиков, С. Лухин, Э. Назаров, Э. Смирнов, Л. Черневская

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор В. Сорокина

113035 Москва, М-35, Б. Ордынка 21/16.
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 1.10.80
Подписано к печати 24.12.80
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 6,79 Т-22729
Цена 30 коп. Заказ 2777
Тираж 234 654 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета
СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли,
г. Чехов Московской области

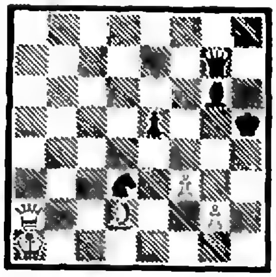
Шахматный конкурс

Напомним, что первый шахматный конкурс «Кванта» состоял из шести туров. Читатели журнала с радостью восприняли новую рубрику и активно откликнулись на нее. Итоги первого конкурса будут опубликованы в майском номере журнала. А сейчас мы начинаем новый конкурс, который на этот раз будет продолжаться весь год (с перерывом на летние каникулы). Победителей обоих конкурсов мы планируем пригласить в редакцию журнала на встречу с А. Карповым (разумеется, после окончания его матча на первенство мира и необходимого отдыха), на которой им будут вручены призы. Как и раньше, решения (подробные!) конкурсных задач следует отправлять в одном экземпляре не позднее последнего дня следующего месяца за выходом журнала. Так, решения задач этого номера можно отправлять по 28 февраля 1981 г. по адресу: 113035, Москва М-35, Б. Ордынка 21/16, журнал «Квант», «Шахматный конкурс № 1-81» (в дальнейших турах указывается номер журнала с заданием).

Этюды чемпионов мира

Многие выдающиеся шахматисты мира занимались составлением этюдов. Известен ряд композиций, принадлежащих чемпионам мира по шахматам.

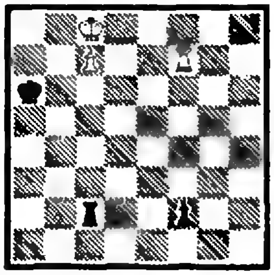
В «Кванте» № 2-80 был приведен этюд, соавтором которого является М. Таль, восьмой чемпион мира. А в «Кванте» № 10-80 в качестве конкурсного задания был предложен этюд первого советского чемпиона мира М. Ботвинника. Вот еще одна интересная позиция, составленная М. Ботвинником (совместно с С. Каминером), когда ему было всего 14 лет.



Белые начинают и выигрывают

1. g4+ Крh4 2. Сh6 (тема завлечения) **2...Ф:h6** (иначе 3. Фh2×) **3. Фh2+ Крg5 4. Фd2+ Кf4 5. Фd8×!**

Следующий этюд принадлежит второму чемпиону мира Эм. Ласкеру.

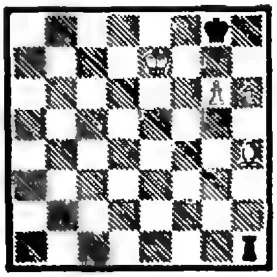


Белые начинают и выигрывают

Это классический пример из области ладейных окончаний. Возникающее здесь так называемое «систематическое движение фигур» (то есть неоднократное повторение одного и того же маневра) очень эффектно и имеет большое практическое значение. На первый взгляд кажется, что выиграть вообще невозможно, так как достижения сторон одинаковые — обе пешки прошли до предпоследней горизонтали. Но попробуем.

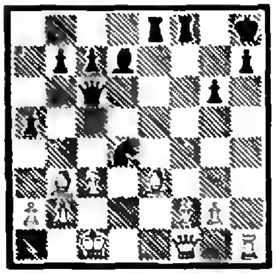
1. Крb8 Лb2+ 2. Крa8 Лc2 3. Лf6+ Крa5 (черный король сейчас и дальше должен в ответ на шах оставаться на вертикали «a», чтобы иметь в запасе шахи ладьей по линии «b») **4. Крb7 Лb2+ 5. Крa7 Лc2 6. Лf5+ Крa4 7. Крb6** (всякий раз маневры белого короля позволяют отогнать его черного оппонента на одну горизонталь ниже) **7...Лb2+ 8. Крa6 Лc2 9. Лf4+ Крa3 10. Крb6** (король отошел от поля c8, но зато теперь грозит взятие ладьей на f2) **10...Лb2+ 11. Крa5 Лc2 12. Лf3+ Крa2.** Трудно было в начальной позиции предположить, что через 12 ходов черный король окажется на одной горизонтали со своей ладьей. Тут решает элегантное **13. Л:f2!,** и все кончено.

А теперь — конкурсные задания. Первый этюд принадлежит герою нашей сегодняшней шахматной странички В. Стейницу.

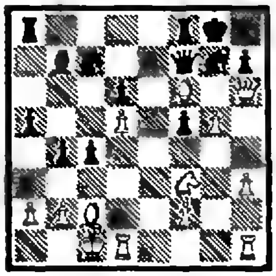


1. Белые начинают и выигрывают.

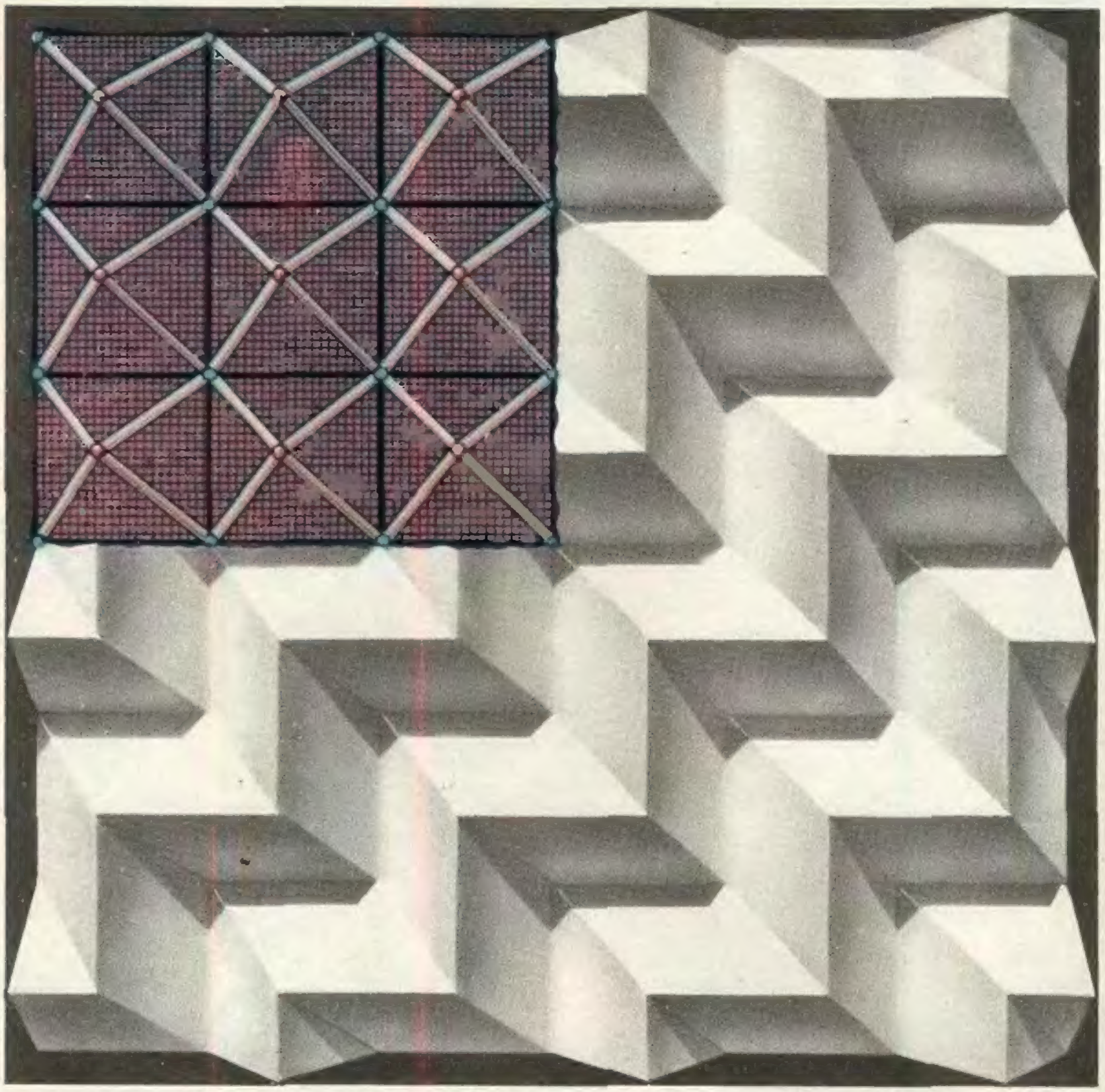
В «Кванте» №8-80 была приведена партия Стейниц Барделебен, закончившаяся победой белых благодаря блестящей комбинации. Предлагаем вам найти еще две красивые комбинации первого чемпиона мира.



2. Стейниц — Чигорин. Белые начинают и выигрывают.



3. Стейниц — Блэкберн. Белые начинают и выигрывают.



На этом рисунке показано принципиальное устройство рельефного потолка, встречающегося в некоторых современных зданиях. В левом верхнем углу приоткрыт стержневой каркас, на который монтируется покрывающая потолок пленка.

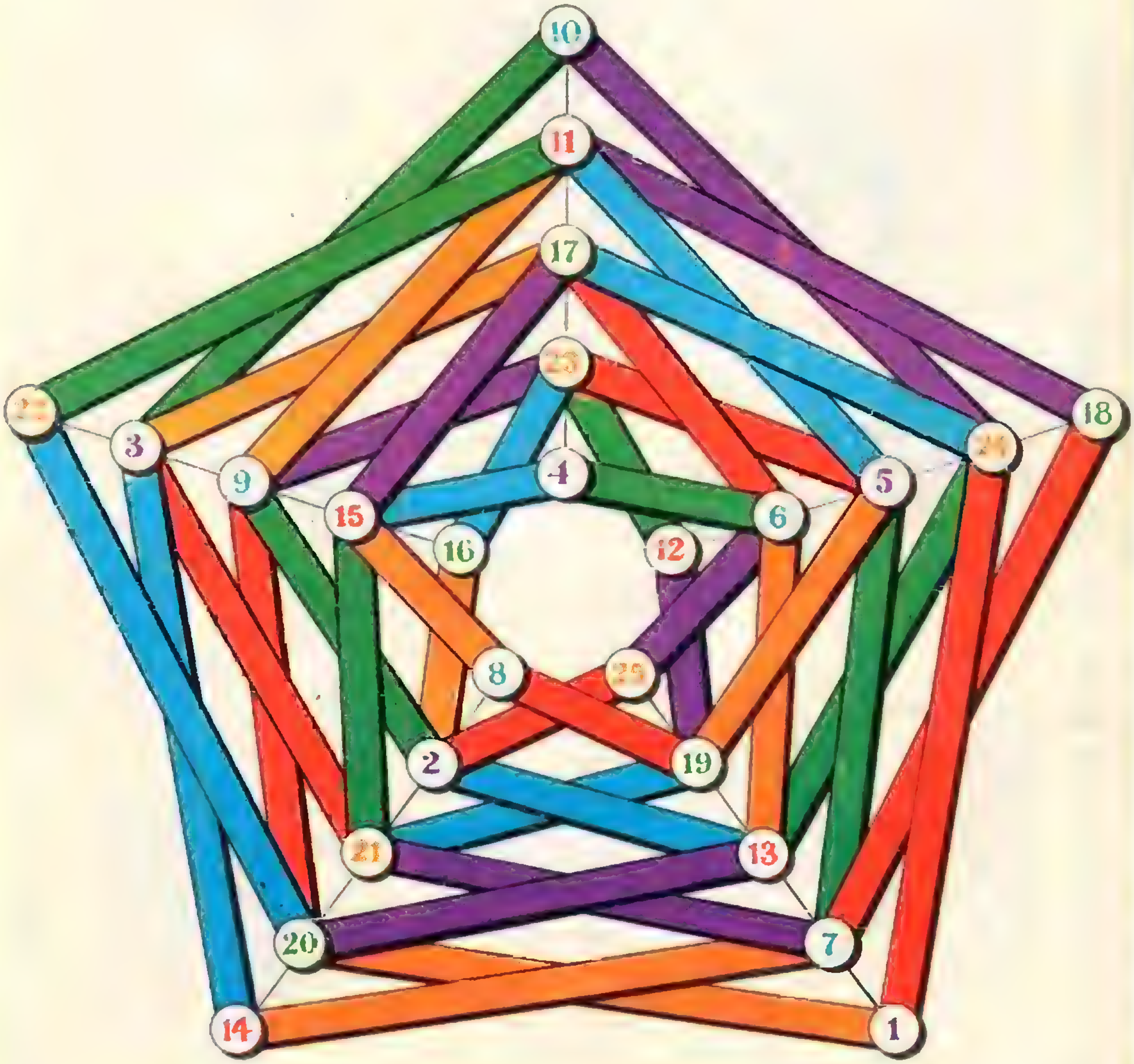
Конструкция основана на удивительном соответствии между разбиениями плоскости на квадраты и на правильные треугольники. Разбиение на квадраты (с черными сторонами) вы видите в левом верхнем углу; к вершинам квадратов (синие точки) приделаны по четыре стержня; они скреплены (в красных точках) так, что под каждым квадратом образуется полуоктаэдр. Закрывающая стержневую систему пленка геометрически образована следующим образом: сначала плоский лист пленки разбивается на равносторонние треугольники, они объединяются парами в параллелограммы (эти параллелограммы и образуют видимые на рисунке грани потолка) и затем лист складывается «двойной гармошкой».

Удивительно здесь вот что: оказывается, если взять сторону треугольника равной стороне квадрата, сложенная пленка как раз примкнет без зазоров к стержневой системе — все стороны параллелограммов прижмутся к ребрам полуоктаэдров.

Подобную двойную гармошку нетрудно изготовить из плотного листа бумаги. Подробнее о таких потолках можно прочитать на с18.

Цена 30 коп.
Индекс 70465

На этом рисунке числа 1, 2,...,25 расположены так, что их можно многими «правильными способами» разбить на группы с одной и той же суммой — 65. Как это сделать — см. на с. 18


10
11
17
23
22
18
3
24
9
4
5
15
6
16
12
8
25
2
19
21
13
20
7
14
1

НОМЕР
2

Квант

2
1981

Основан в 1970 году

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

ОРГКОМИТЕТ МОСКОВСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ
МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

В НОМЕРЕ:

2 Навстречу XXVI съезду КПСС

Ученые обращаются к молодежи

4 *И. Франк.* Путь в науку

6 *А. Иоффе.* Полупроводниковые термоэлементы и холодильники

14 *А. Раухман.* Группоиды

Лаборатория «Кванта»

18 *В. Майер, Е. Мамаева.* Псевдолинза Роберта Вуда

Математический кружок

20 *М. Апресян.* Бесконечные суммы и... прямоугольник

Задачник «Кванта»

22 Задачи М666—М670; Ф678—Ф682

24 Решения задач М616—М621; Ф623—Ф630

«Квант» для младших школьников

33 Задачи

34 *В. Касаткин.* Пригодны ли счеты?

По страницам школьных учебников

36 *Р. Гордин.* Что такое степень?

Практикум абитуриента

40 *А. Егоров.* Логарифмические уравнения

44 *А. Буздин, В. Тугушев.* Закон сохранения энергии для тепловых процессов

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1980 году

48 Московский физико-технический институт

Искусство программирования

54 Заочная школа программирования. Урок 13

Рецензии, библиография

57 *В. Лишевский.* Ученый и революционер

58 *Е. Левитан.* Книга о прошлом и будущем Вселенной

Информация

59 О приеме на биологическое отделение ВЗМШ

60 **Шахматная страничка**

61 **Ответы, указания, решения**

Шахматный конкурс «Кванта» *(3-я с. обложки)*

Наша обложка *(39)*

Смесь *(13, 17, 32, 35, 53)*

О красочных этюдах, показанных на первой и последней страницах обложки, более подробно рассказано на с. 39.

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1981

Навстречу XXVI съезду КПСС

23 февраля Кремлевский Дворец съездов примет участников XXVI съезда Коммунистической партии Советского Союза. Съезд рассмотрит и утвердит Основные направления экономического и социального развития СССР на 1981—1985 годы и на период до 1990 года, проект которых был опубликован в центральной печати в начале декабря 1980 года. Три месяца наш народ предельно заинтересованно и откровенно обсуждал этот важнейший документ современности. При этом было внесено много конкретных дополнений, изменений и уточнений, учет которых превратил его в плод коллективного разума всего народа.

Десять лет нам предстоит жить и работать на основе решений, которые примет XXVI съезд КПСС. Реализация намеченной им программы приблизит нашу страну к заветной цели — коммунизму. И в этом огромную роль должна сыграть наука. С ней неразрывно связаны многие разделы проекта Основных направлений. Покажем это на примере физико-математических наук, которым посвящен наш «Квант».

Третий раздел проекта Основных направлений экономического и социального развития СССР на 1981—1985 годы и на период до 1990 года посвящен развитию науки и ускорению технического прогресса. В нем, в частности, сказано следующее:

«В области естественных и технических наук сосредоточить усилия на решении следующих важнейших проблем:

развитие математической теории, повышение эффективности ее использования в прикладных целях;

развитие физики элементарных частиц и атомного ядра с целью дальнейшего познания строения материи;

развитие ядерной и создание основ термоядерной энергетики, совершенствование методов преобразования и передачи энергии; ...

совершенствование вычислительной техники, ее элементной базы и математического обеспечения, средств и систем передачи и обработки информации, повышение эффективности автоматизированных систем управления, развитие сетей ЭВМ и вычислительных центров коллективного пользования; ...

дальнейшее изучение и освоение космического пространства в интересах развития науки, техники и народного хозяйства; ...».

В третьем разделе также сказано:

«На основе использования достижений науки и техники:

развивать производство и обеспечить широкое применение автоматических манипуляторов (промышленных роботов), встроенных систем автоматического управления с использованием микропроцессоров и мини-ЭВМ, создавать автоматизированные цехи и заводы. Расширять автоматизацию проектно-конструкторских и научно-исследовательских работ с применением электронно-вычислительной техники; ...

использовать электрохимические, лазерные, радиационные и другие высокоэффективные методы обработки металлов, материалов и изделий с целью существенного улучшения их свойств;...

увеличить масштабы использования в народном хозяйстве возобновляемых источников энергии (гидравлической, солнечной, ветровой, геотермальной)».

Лаконичен язык этого документа, но за каждой из процитированных строк стоят важные проблемы нашего народного хозяйства, которые нельзя решить без огромной помощи физико-математических наук.

Немало конкретных заданий, тесно связанных с физикой и математикой, включено и в четвертый раздел проекта Основных направлений, посвященный развитию промышленности. Рост и совершенствование промышленного производства, увеличение выпуска необходимой народу продукции требуют непрерывного увеличения энергетических мощностей. В связи с этим перед энергетической промышленностью ставятся очень сложные задачи. Необходимо «довести выработку электроэнергии в 1985 году до 1550—1600 млрд. киловатт-часов, в том числе на атомных электростанциях до 220—225 млрд. киловатт-часов и на гидроэлектростанциях до 230—235 млрд. киловатт-часов. Обеспечить прирост производства электроэнергии в европейской части СССР в основном на атомных и гидроэлектростанциях.

Ввести в действие на атомных электростанциях 24—25 млн. киловатт новых мощностей. Продолжить работы по освоению реакторов на быстрых нейтронах и использованию ядерного топлива для выработки теплоэнергии».

Все это связано с решением сложных научно-технических проблем, прежде всего — в области физики.

Не менее сложные задачи, решение которых просто невозможно без активного участия физико-математических наук, возникают и во многих других отраслях нашего народного хозяйства: в электротехнической и приборостроительной промышленности, черной и цветной металлургии, на транспорте, в строительстве и технике связи.

Прошлую, десятую, пятилетку вы, наши основные читатели, провели в школе. Кто-то за вас плавил металл и выращивал хлеб, прокладывал рельсы БАМа и строил КАМАЗ. Вы учились на всем готовом, за счет труда своих родителей, всех тех, кто старше вас. В одиннадцатой пятилетке вы окончите школу и уйдете в напряженную самостоятельную трудовую жизнь. В двенадцатой многие из вас станут уже мастерами различных профессий. Планы, которые сегодня обсуждает наш народ, XXVI съезд нашей родной коммунистической партии, станут планами вашей дальнейшей жизни. Всмотритесь в них внимательно и выбирайте. Впереди много интереснейшей работы и ее хватит на всех. Мир не стоит на месте. Он быстро меняется. И особенно быстро должна совершенствоваться и развиваться наша страна, идущая по неизведанным путям навстречу коммунизму.

Наша будущая жизнь наполнена интереснейшими проблемами. Многие из них тесно связаны с наукой, в том числе — с математикой, механикой и физикой. И тот, кто выберет их своей будущей профессией, никогда не пожалеет. Романтика научного поиска, муки творчества, радость победы, ощущение общественной полезности вашего труда сделают всю вашу жизнь яркой и интересной.

И. Франк

Путь в науку

Пытаясь заглянуть в будущее, юность мечтает. Счастлив тот, кто не расстается со своей мечтой и в дальнейшей жизни. Мне ближе всего тот, кто уже с юных лет стремится к занятиям наукой. Не только в мечтах, но и в действительности наука необычайно увлекательна. Но, чтобы стать ученым, надо быть искренне и бескорыстно преданным науке и не бояться трудностей.

Первые шаги обычно облегчены учителями, если, разумеется, они не только знают, но и любят науку. И тема первой работы, и метод ее выполнения часто бывают подсказаны руководителем. Это хорошо, так как приобретение опыта необходимо, а та научная среда, в которую попадает начинающий, для последующего немаловажна. Начинающему можно и нужно помочь учиться, и все же научиться он может только сам. При этом первые самостоятельно сделанные шаги, которые радуют как некоторые достижения, зачастую ведут к разочарованию. Нередко оказывается, что полученный результат уже был кем-то найден ранее, а идея, представляющаяся новой, на самом деле не только не нова, но, возможно, уже оставлена как ошибочная. Но огорчаться не следует. Самое главное и наиболее ценное в науке — элемент творчества. Самостоятельно пройти участок пути, даже пройденный другими,— это полезно и часто необходимо. Тем не менее после нескольких таких «неудач» возникает ощущение, что в науке все известно. В действительности объяснение иное. Первоначальные знания невольно подсказывают и путь, по которому уже прошли многие. Умение мыслить по-своему не возникает сразу, оно вырабатывается трудной и напряженной работой. Что касается науки, то никогда не следует забывать слова Ньютона, сказанные им незадолго до смерти: «Не знаю,

---

Академик Илья Михайлович Франк — лауреат Нобелевской и Государственной премий, директор лаборатории нейтронной физики Объединенного института ядерных исследований, профессор Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Статья перепечатывается из сборника «Ленин. Наука. Молодежь», выпущенного в 1980 году издательством «Наука».

чем я могу казаться миру, но сам себе я кажусь только мальчиком, играющим на морском берегу, развлекающимся тем, что до поры до времени отыскиваю камешек более цветистый, чем обыкновенно, или красную раковину, в то время как великий океан истины расстилается передо мной неисследованным».

Не случайно Ньютон видит себя мальчиком, так как именно мальчиков больше, чем взрослых, занимают поиски «цветистых камешков», а ум их свеж и легче различает необычное. Мне думается, что одна из необходимых и счастливых черт ученого — это любознательность, так свойственная детству и так легко теряемая взрослыми. Ньютон был гений, таких в истории науки немного. Не удивительно, что он находил удивительные камешки там, где другие видели только одноцветные россыпи песка, и не только находил, но и строил из них поразительной красоты здания.

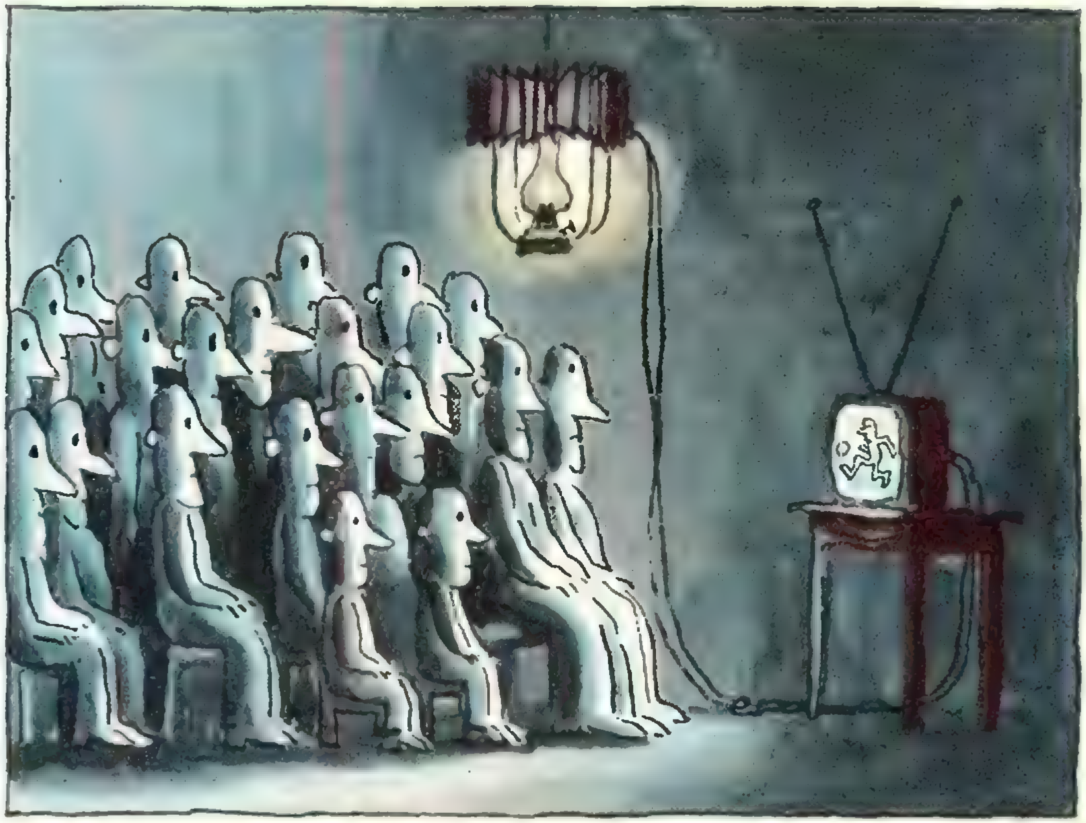
После Ньютона к океану истины было проложено множество новых путей и найдены замечательные камешки и раковины, но океан истины попрежнему безбрежен. Каждый, кто не лишен таланта и умения искать, найдет в нем нечто свое.

Мечты юности не лишены иллюзий. Одна из них — в том, что у начинающего неограниченно много времени впереди. Невольно рассуждают так: «Я пока не знаю и не понимаю этого, но мне незачем торопиться. Я молод и все еще успею». В действительности, какую бы длинную творческую жизнь ни подарила нам судьба, все равно не успеваешь узнать и малой доли того, что необходимо для работы, а тем более выполнить все, что мог бы сделать. Вам, конечно, известны слова Павлова: «Помните, что наука требует от человека всей его жизни. И если у вас было бы две жизни, то и их не хватило бы вам» и «всегда имейте мужество сказать себе: я невежда».

Наши молодые годы наиболее плодотворны. К сожалению, лишь дожив до старости, по-настоящему понимаешь, что не только молодость, но и вся жизнь пролетает необыкновенно быстро. И все же именно в молодом возрасте жажда знаний и интерес к науке заставляют нас особенно много работать. Без этого пути в науку вообще были бы закрыты.

В призыве работать содержится нечто существенно большее, чем обычное наставление родителей детям-школьникам, что надо учиться хорошо. Науке нужно не механическое запоминание материала (это плохо и для школьников), а подлинное творческое овладение знаниями и методами. Основанное на них умение по-своему ставить вопросы и отвечать на них или видеть неясность там, где другие ее не замечают,— это и есть то, что позволяет найти красивый камешек там, где другие не видят ничего, кроме песка. Здесь не просто удача, здесь прежде всего труд и множество неудач, через которые необходимо мужественно пройти.

Сумма знаний в любой области науки огромна, и невозможно знать всего. Нельзя, например, в деталях знать все, над чем работают физики. Однако нужно быть в курсе основных идей и событий и вне своей специальности. Ученый обязан быть широко образованным, по-настоящему интеллигентным человеком. Вопросы человеческой культуры и проблемы общественной жизни не могут быть ему чужды. Как найти время на все? Это, конечно, трудно в любом возрасте, но в молодые годы больше времени и сил, зато умение работать и широта знаний приходят с годами.



А. Иоффе

Полупроводниковые термоэлементы и холодильники

Термоэлементы

В 1822 году Зеебек заметил, что замкнутая цепь, составленная из двух различных проводников (термоэлемент), отклоняет расположенную вблизи магнитную стрелку всякий раз, когда места контакта проводников имеют различные температуры.

Отклонение стрелки было вызвано появлением электрического тока в цепи. Любопытно, что Зеебек долго и упорно отрицал такое объяснение, считая, что открытое им явление вызвано намагничиванием проводников.

Термоэлемент можно было бы рассматривать как термоэлектрическую машину, которая без всяких движущихся механизмов превращает часть тепловой энергии, нагревающей горячий спай, в электрическую энергию; при этом остальная часть тепла отдается холодным спаем в окружающую среду. Но одновременно большой поток тепла переходит от горячего спая термоэлемента к холодному путем теплопроводности, а из создаваемой термоэлементом электрической энергии некоторая часть превращается в тепло внутри самого же термоэлемента и не может быть использована. Эти бесполезные затраты того запаса тепла, который получает горячий спай, настолько велики, что коэффициент полезного действия, соответствующий превращению сообщаемой горячему спаю тепловой энергии в электрическую, для термоэлемен-

---

Академик Абрам Федорович Иоффе — выдающийся физик, один из создателей советской физики. В 1980 году исполнилось 100 лет со дня его рождения и «Квант» отметил этот юбилей в № 10. Здесь мы воспроизводим отрывок из его книги «Полупроводники и их применение» (М.—Л., издательство АН СССР, 1956, издание 2-е).

тов, изготовленных из металлических проволок, не превышает 0,5%. Такие термоэлементы применяются только для измерения температур и совершенно непригодны как технические генераторы электроэнергии.

В полупроводниках соотношение между развиваемой термоэлементом электроэнергией и теплотой, теряемой путем теплопроводности и выделяемой внутри термоэлемента током, гораздо благоприятнее. Полупроводники позволяют реально поставить проблему непосредственного получения электроэнергии из тепловой энергии.

В металлах при всех температурах, начиная с абсолютного нуля, все валентные электроны одинаково свободны, а их кинетическая энергия почти не зависит от температуры. Поэтому разность температур на концах металлического проводника вызывает лишь слабое перемещение зарядов и создает малые термоэлектродвижущие силы — менее 10^{-5} вольта на каждый градус разности температур.

Другое дело — полупроводник. Свободные заряды создаются в нем тепловым движением. При абсолютном нуле концентрация таких зарядов равна нулю, и полупроводник превращается в изолятор. С повышением температуры концентрация свободных электронов или дырок (их число в 1 $см^3$ — *прим. ред.*) чрезвычайно быстро возрастает, достигая при комнатных температурах 10^{15}—10^{20}. Кинетическая энергия свободного электрона в полупроводнике, в отличие от металла, не остается неизменной, а растет пропорционально абсолютной температуре. Поэтому в полупроводнике наличие разности температур вызывает перемещение свободных зарядов.

Если носителями тока являются электроны, то они переносят свой заряд в холодный конец, заряжая его отрицательным электричеством, тогда как горячий конец полупроводника, потерявший часть своих электронов, окажется заряженным положительно, что создаст между горячим и холодным концами разность потенциалов (рис. 1, *а*). В полупроводниках же с дырочным механизмом тока горячий конец окажется заряженным отрицательно, а холодный — положительно (рис. 1, *б*).

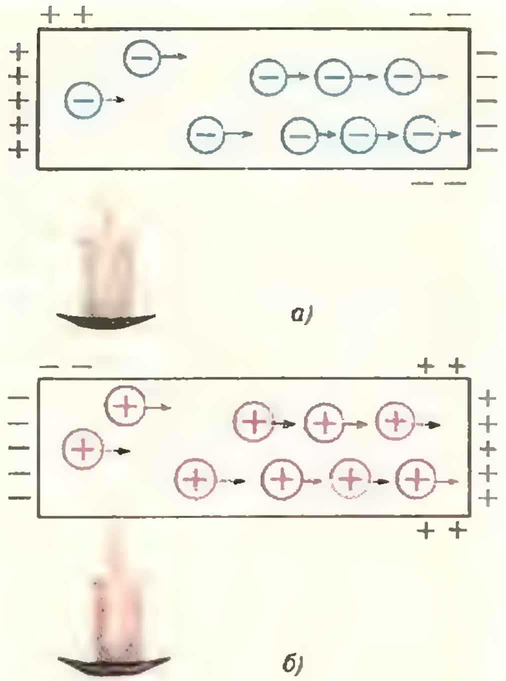


Рис. 1.

Если полупроводник изолирован, то по мере роста разности потенциалов внутри полупроводника нарастает электрическое поле, замедляющее поток электронов от горячего конца к холодному и ускоряющее поток в обратном направлении. Через некоторое время между горячим и холодным концами установится такая разность потенциалов, при которой потоки в обоих направлениях сравняются; это равновесие и определит термоэлектродвижущую силу. Она в десятки раз больше, чем в металлах, достигая или даже превышая 10^{-3} вольта на один градус разности температур.

Если полупроводник, в котором существует разность температур, составляет часть замкнутой электрической цепи, то поток зарядов, не прекращаясь, создает ток в цепи и выделяет электрическую энергию. Особенно выгодно устройство, в котором цепь составлена из дырочного и электронного полупроводников: их токи совпадают по направлению и усиливают друг друга.

Количественное различие между полупроводником и металлом приводит к новым качественным возможностям. Коэффициент полезного действия полупроводниковых термоэлементов доходит до 7%, но может быть и больше. Среди находящихся в обращении тепловых машин только двигатели внутреннего сгорания, требующие высококачественного жидкого топлива — бензина, керосина, нефти, обладают коэффициентом полезного действия порядка 40—50%. Коэффициент полезного действия лучших паровых электростанций едва достигает 30%, а паровых машин малой мощности — 10%. Учитывая крайнюю простоту термоэлектрических генераторов электроэнергии, не требующих ни сложных вращающихся механизмов тепловых машин, ни динамомашины, а также учитывая малые размеры и устойчивую работу термоэлементов, можно ожидать, что полупроводниковые термобатареи займут немаловажное место в энергетике народного хозяйства. Возможно, что термоэлементы откроют также путь к использованию новых источников тепла везде, где имеются значительные разности температур. Вероятно, можно будет с помощью термоэлектрических батарей превращать в электроэнергию энергию солнечных лучей.

Первое практическое применение термоэлементов осуществлено в Советском Союзе в целях радиофикации районов, не имеющих электроэнергии. Источником тепла здесь служат горячие газы, выходящие из стекла керосиновой лампы; они проходят внутри вертикальной трубки, помещенной над стеклом, и подогревают внутренние спаи термоэлементов, расположенных по радиусам трубки. Наружные спаи охлаждаются комнатным воздухом; для усиления охлаждения эти спаи соединены с металлическими пластинами радиатора. В таком устройстве внутренние спаи нагреты до 300—350°С, тогда как температура наружных спаев не превышает 60°С. Разности температур в 250—300°С, поддерживаемой теплом, доставляемым керосиновой лампой, оказывается достаточно для создания электроэнергии, необходимой для питания радиоприемника.

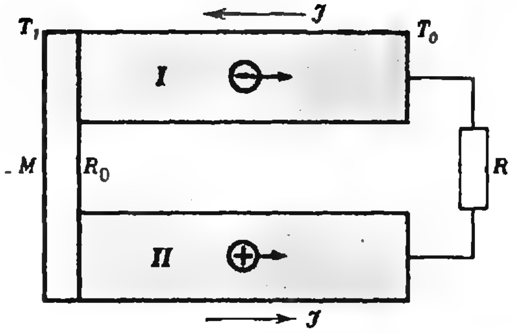


Рис. 2.

Рассмотрим устройство полупроводникового термоэлемента. Он состоит из двух соединенных металлическим проводом полупроводниковых ветвей, из которых одна изготовлена из электронного, а другая из дырочного полупроводников (рис. 2). Соединяющий их металлический мостик M подогревается источником тепла. Два других конца, охлаждаемые воздухом или проточной водой, присоединены к внешней цепи, использующей создаваемую термоэлементом электроэнергию. Такой внешней цепью в описанном случае являлся радиоприемник; в других случаях это может быть лампа накаливания или флюоресцентная лампа, если задачей является освещение; электромотор, если нужна механическая энергия, и т. п. Рисунок 2 поясняет сказанное. В нем I и II обозначают две ветви термоэлемента, состоящие из полупроводниковых стержней, R — электрическое сопротивление того или другого приемника электроэнергии. Положим, что ветвь I представлена электронным, а ветвь II — дырочным полупроводниками. Тогда электрическое поле, а следовательно, и электрический ток будут направлены так, как указывают стрелки: в ветви II от горячего конца к холодному, а в ветви I — от холодного к горячему, складываясь, таким образом, в направлении движения против часовой стрелки.

Обозначим абсолютную температуру горячих концов термоэлемента через T_1, а холодных через T_0. Если α_{I} и α_{II} обозначают термоэлектродвижущие силы, возникающие в ветвях I и II при разности температур между концами в 1° С, то общая электродвижущая сила $\mathscr{E}$, соответствующая разности температур $T_1 - T_0$, составит

$$\mathcal{E} = (\alpha_I + \alpha_{II})(T_1 - T_0).$$

Ток I, который появится в замкнутой цепи, состоящей из внутреннего сопротивления R_0 ветвей термоэлемента и внешнего сопротивления R_0 приемника, будет равен

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + R_0}.$$

Полезная мощность P, которую мы получаем в приемнике, может быть выражена как

$$P = UI,$$

где U — разность потенциалов на концах внешнего сопротивления R. Так как потенциал падает в цепи постоянного тока, с которым мы здесь и имеем дело, пропорционально сопротивлению, то

$$\frac{U}{\mathcal{E}} = \frac{R}{R + R_0}, \quad U = \frac{\mathcal{E} R}{R + R_0},$$

а

$$P = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R + R_0)^2}.$$

Подставив вместо $\mathcal{E}$ его значение, мы получим общее выражение для полезной мощности P, доставляемой термоэлементом:

$$P = (\alpha_I + \alpha_{II})^2 (T_1 - T_0)^2 \frac{R}{(R + R_0)^2}.$$

Наибольшего значения P достигает тогда, когда $R = R_0$ (докажите это самостоятельно — *прим. ред.*); наибольшая мощность, которую может создать термоэлемент во внешнем приемнике, равна

$$P_{\max} = \frac{(\alpha_I + \alpha_{II})^2 (T_1 - T_0)^2}{4R}.$$

Вся же развиваемая термоэлементом электрическая мощность будет

$$\mathcal{E} I = \frac{(\alpha_I + \alpha_{II})^2 (T_1 - T_0)^2}{2R}.$$

Для того чтобы поддерживать разность температур, необходимо непрерывно сообщать тепловую энергию горячему спаю и отнимать тепло от холодных концов. Значительная часть подводимого тепла уходит путем теплопроводности обеих ветвей к холодным концам. Часть создаваемой термоэлементом электроэнергии бесполезно расходуется на нагревание обеих ветвей. Эти необратимые процессы резко снижают коэффициент полезного действия термоэлемента. Если бы можно было их полностью избежать (а это неосуществимо, так как любой полупроводник обладает теплопроводностью и электрическим сопротивлением), то термоэлемент давал бы наивысший допустимый по законам термодинамики коэффициент полезного действия

$$\eta_{\max} = \frac{T_1 - T_0}{T_1}.$$

В примере термобатареи для радиоприемника можно принять $T_1 = (350 + 273)\,\mathrm{K} = 623\,\mathrm{K}$ и $T_0 = (50 + 273)\,\mathrm{K} = 323\,\mathrm{K}$, откуда

$$\eta_{\max} = \frac{623 - 323}{623} = 0{,}48 = 48\%.$$

В действительности же коэффициент полезного действия η термобатареи измеряется немногими процентами. Этот пример показывает, какую громадную роль играют процессы теплопроводности и выделения током джоулевой теплоты.

Если мы заинтересованы в получении возможно большего коэффициента полезного действия η, а не максимальной мощности P, соотношение между внешним сопротивлением R и внутренним R_0 следует подобрать иначе: R должно быть больше R_0. В этом случае из всей развиваемой термоэлементом мощности $\mathcal{E} I$ используется более половины мощности P.

Анализ явлений в термоэлементе показывает, что резкое снижение коэффициента полезного действия η во много раз по сравнению с термодинамически возможным значением $\eta_{\max}$ вызвано в основном необратимым процессом теплопроводности. Обратимся поэтому к вопросу о механизме передачи тепла внутри полупроводника. Выравнивание температуры происходит здесь одновременно двумя путями — в результате: 1) переноса тепла электронами и 2) передачи тепла движением атомов. Электроны, обладающие в горячем конце более высокой кинетической энергией, переходят к холодному концу, где они отдают избыток энергии атомам, усиливая их тепловое движение и повышая температуру. Находившиеся у холодного конца электроны с меньшей кинетической энергией, переходя к горячему концу, ослабляют тепловое движение и понижают температуру. Так как те же электроны переносят и электрический ток в полупроводнике, то между переносом ими тепла и тока существует близкая связь.

Теплопроводность материала характеризуется некоторым коэффициентом $\varkappa$, который можно определить следующим образом. Если мы возьмем цилиндрический стержень из данного вещества с единичным поперечным сечением, в котором на каждую единицу длины температура изменяется на один градус, то за единицу времени в направлении от горячего к холодному концу переносится количество теплоты, равное $\varkappa$.

Если же площадь поперечного сечения стержня равна S, его длина L, разность температур на его концах ΔT, то за время t путем теплопроводности перейдет от горячего к холодному концу количество теплоты

$$Q=\varkappa\frac{\Delta T}{L}\ St.$$

С другой стороны, вызванный теми же электронами электрический ток в данном веществе определяется его удельной электропроводностью σ. В таком же стержне длиной L и поперечным сечением S при разности потенциалов ΔU между его концами за время t пройдет количество электричества

$$q=\sigma\frac{\Delta U}{L}\ St.$$

Связь между теплопроводностью $\varkappa$ и электропроводностью σ для различных металлов была чисто эмпирически установлена Видеманом и Францем. А именно: опыт показал, что

$$\frac{\varkappa}{\sigma}=A_{м}T,$$

где T—абсолютная температура и $A_{м}$ — одинаковый для всех металлов множитель. Квантовая теория полупроводника также приводит к соотношению $\frac{\varkappa}{\sigma}=A_{п}T$, но коэффициент $A_{п}$ имеет другое значение.

Такое соотношение между $\varkappa$ и σ делает принципиально невозможным осуществление обратимого термоэлемента. Для устранения теплопроводности нужно, чтобы $\varkappa=0$; для устранения джоулевой теплоты нужно, чтобы удельное сопротивление ветвей термоэлемента равнялось нулю, а обратная величина $\varkappa$ — бесконечности. Но требование, чтобы одновременно было $\varkappa=0$, а $\sigma\to\infty$, несовместимо с законом Видемана—Франца.

Перейдем к рассмотрению второго вида теплопроводности. Кроме переноса тепла электронами, теплопроводность в полупроводниках осуществляется и тепловым движением атомов кристаллической решетки. Механизм этого процесса можно представить себе следующим образом. Хаотическое тепловое движение атомов твердого тела можно рассматривать как совокупность самых разнообразных их колебаний. Сюда входят и колебания отдельных атомов одного по отношению к другому, и колебания их попарно, по три и т. д., вплоть до колебаний всего тела как целого. Чем выше температура, тем интенсивнее колебания. Каждое из этих многочисленных колебаний распространяется в теле в виде упругих волн, перенося свою энергию.

Коэффициент теплопроводности $\varkappa$ полупроводника складывается, таким образом, из двух частей: из теплопроводности $\varkappa_{эл}$, обязанной электронам, и теплопроводности $\varkappa_{ф}$, создаваемой тепловым движением атомов тела. Величина $\varkappa_{эл}$ пропорциональна удельной электропроводности σ. Поэтому с изменением концентрации свободных электронов в полупроводнике коэффициент $\varkappa_{эл}$ изменяется пропорционально σ, тогда как $\varkappa_{ф}$ остается почти неизменным. Общая теплопроводность $\varkappa$ может быть выражена как

$$\varkappa=A_{п}T\sigma+\varkappa_{ф}.$$

Наши опыты действительно подтвердили такую зависимость $\varkappa$ от σ.

Коэффициенты теплопроводности $\varkappa_{\mathrm{I}}$ и $\varkappa_{\mathrm{II}}$ ветвей термоэлемента играют важную роль в определении его коэффициента полезного действия; наряду с этим, существенное значение имеют термоэлектродвижущие силы α_{I} и α_{II} и удельные сопротивления ϱ_{I} и ϱ_{II} обеих ветвей. Как показывают вычисления, при данных температурах T_1 горячего и T_0 холодного концов коэффициент полезного действия термоэлемента определяется одной величиной z, зависящей от перечисленных характеристик материалов термоэлемента:

$$z=\frac{(\alpha_{\mathrm{I}}+\alpha_{\mathrm{II}})^2}{(\sqrt{\varkappa_1\varrho_1}+\sqrt{\varkappa_2\varrho_2})^2}.$$

Чем больше z, тем выше коэффициент полезного действия; при данном же значении z он всегда один и тот же, каковы бы ни были значения величин α, $\varkappa$ и ϱ в отдельности. Расчет показывает также, что коэффициент полезного действия не зависит от размеров и формы ветвей термоэлемента, а зависит только от T_1, T_0 и z. Коэффициент полезного действия термоэлемента может быть выражен следующим образом:

$$\eta=\frac{T_1-T_0}{T_1}\qquad\frac{\sqrt{1+\frac{1}{2}(T_1+T_0)z}-1}{\sqrt{1+\frac{1}{2}(T_1+T_0)z}+\frac{T_0}{T_1}}.$$

Для металлов z имеет значения порядка нескольких единиц, умноженных на 10^{-5}, для полупроводников 10^{-3} и выше, то есть в несколько десятков раз больше. Соответственно с такими значениями z, и коэффициент полезного действия полупроводниковых термоэлементов в десятки раз превосходит таковой металлических термоэлементов.

Из термоэлементов составляются термоэлектрические батареи. Если нужно получить значительные напряжения, приходится соединять последовательно большое число термоэлементов. Так, при термоэлектродвижущей силе $\alpha_{\mathrm{I}}+\alpha_{\mathrm{II}}=4\cdot10^{-4}$В/°С и разности температур $T_1-T_0=30°$ С электродвижущая сила одного элемента $\mathcal{E}=0{,}12$ В. Для того чтобы создать электродвижущую силу в 120 вольт, нужно включить последовательно 1000 таких элементов. Если ставится требование получения сильных токов, элементы соединяются параллельно.

Чем больше тепла поступает через каждый квадратный сантиметр горячего спая, тем меньше размеры термобатареи, выделяющей данную электроэнергию. Эти соображения определяют выбор той или иной конструкции термобатареи. Коэффициент полезного действия термобатареи не зависит ни от способа соединения элементов, ни от ее формы.

Холодильники

Вскоре после открытия Зеебека Пельтье в 1834 году наблюдал явление, которое оказалось тесно связанным с термоэлектричеством (чего, впрочем, сам Пельтье не подозревал). Пельтье хотел доказать, что нагревание проводников слабыми токами не подчиняется общему для всех проводников закону Джоуля — Ленца и обнаруживает индивидуальные особенности в разных металлах. С этой целью он составлял цепи из разных металлов. Хотя измерения теплоты, выделяемой в них током, не оправдали ожиданий Пельтье, но зато он подметил на границах двух разных металлов своеобразные тепловые эффекты, которые и описал. Петербургский академик Ленц показал в 1838 году изящным опытом, что на границе различных проводников электрический ток либо выделяет, либо поглощает определенное количество тепла. Поместив на стыке двух металлов каплю воды, Ленц заморозил ее пропусканием тока.

Теперь мы знаем, что количество теплоты Q, выделяемой или поглощаемой на границе двух проводников, пропорционально силе тока I и абсолютной температуре T стыка проводников:

$$Q=AIT.$$

Коэффициент A совпадает с суммой термоэлектродвижущих сил $\alpha_{\mathrm{I}}+\alpha_{\mathrm{II}}$ ветвей термоэлемента. Знак величины Q (то есть получение или потеря тепла в стыке) зависит от знака I, то есть от направления тока.

Рассмотренный нами ранее ток, возникающий в замкнутой цепи термоэлемента, охлаждает горячий спай и, наоборот, подогревает холодный спай, выделяя здесь теплоту. Если, пользуясь внешним источником, пропустить через термоэлемент ток обратного направления, то он будет выделять тепло на горячем спае и отнимать тепло от холодного. Один и тот же спай двух проводников при одном направлении тока нагревается, при другом — охлаждается.

Расчет показывает, что разность температур, которую можно таким образом создать, а также количество тепла, которое ток отнимает от охлаждаемого им спая и сообщает нагреваемому, определяется той же величиной z, что и коэффициент полезного действия термоэлемента.

Те же свойства материала обеих ветвей, определяемые величинами α, $\varkappa$ и ϱ, характеризуют производство электроэнергии в термоэлектрическом генераторе и холодопроизводительность в холодильнике.

Поддерживая температуру нагреваемого спая близкой к комнатной и непрерывно отводя от него выделяемую здесь теплоту в окружающую среду, можно значительно охладить другой спай и через его посредство — окружающий воздух. Таким образом, с помощью полупроводников, характеризуемых достаточной величиной z, можно получить в холодильном шкафу необходимые низкие температуры. На этом принципе могут быть осуществлены домашние холодильники.

С другой стороны, можно воспользоваться явлением Пельтье и для подогрева помещения, например для отопления зданий или для подогрева пищи. Подобные задачи давно решаются более простым способом — выделением джоулевой теплоты в реостате или нагревательной плитке. Количество выделяемой в этом случае тепловой энергии равно количеству затраченной электроэнергии.

Термоэлектрический же обогрев помещения существенно отличается от действия нагревательной плитки. Пропуская электрический ток через термоэлектрическую цепь, мы, помимо обычного нагрева всего проводника, охлаждаем один спай и нагреваем другой. От охлаждаемого спая отнимается некоторое количество тепловой энергии Q_0, которое может быть выражено так:

$$Q_0 = \alpha T_0 It,$$

где α — термоэлектродвижущая сила, T_0 — абсолютная температура холодного спая, I — сила тока и t — длительность прохождения тока. Соответственно в теплом спае, абсолютную температуру которого обозначим через T_1, выделяется тепловая энергия

$$Q_1 = \alpha T_1 It,$$

которая больше теплоты Q_0 в отношении

$$\frac{Q_1}{Q_0} = \frac{T_1}{T_0}.$$

Если мы ограничимся рассмотрением процессов на обоих спаях, то их можно описать следующим образом. Электрический ток отнимает от холодного спая теплоту Q_0 и передает теплому спаю большее количество тепла Q_1, добавляя недостающую энергию $Q_1 - Q_0$ в виде электрической энергии W. К теплоте Q_0, отнимаемой от холодного спая, добавляется энергия W, и сумма их $Q_0 + W = Q_1$ выделяется на теплом спае.

Из приведенных данных о величинах Q_0 и Q_1 видно, что отношение затрачиваемой электроэнергии W к теплоте Q_1, которая освобождается на теплом спае, равно

$$\frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_0}{Q_1} = \frac{T_1 - T_0}{T_1}.$$

Если, например, абсолютная температура теплого спая $T_1 = 300$ K, что соответствует +27° C, а температура $T_0 = 270$ K, или —3° C, то

$$\frac{W}{Q_1} = \frac{30}{300} = 0{,}1.$$

Другими словами, для того чтобы передать в теплое помещение при температуре 27° C 100 калорий тепла (1 кал = 4,18 Дж — *прим. ред.*), можно было бы использовать 90 калорий, взятых от холодной среды (например, от внешнего воздуха), и добавить всего 10 калорий электроэнергии. Поскольку отнятие 90 калорий от внешнего холодного воздуха или водного резервуара легко доступно, возникает заманчивая возможность, затрачивая всего 10 калорий электроэнергии, сообщить более теплому помещению 100 калорий тепла.

К сожалению, действительный процесс в термоэлектрической батарее не ограничивается выделением и поглощением тепла на спаях. Вдоль ветвей самой термобатареи возникает поток тепла от теплого спая к холодному, который противодействует переносу тепла в обратном направлении, сопровождающему прохождение тока. Кроме того, часть электрической энергии тока превращается в тепло в обеих ветвях термоэлемента.

В результате наличия этих двух процессов использование электроэнергии резко снижается: приходится добавлять не 10% электроэнергии, а около 60%. Но и такой результат представляет значительный интерес: затрата электроэнергии составляет только около половины теплоты, поступающей в помещение, остальная половина доставляется более холодным наружным воздухом или проточной водой. Чем меньше разность $T_1 - T_0$ по сравнению с T_1, тем выгоднее окажется термоэлектрическая батарея по сравнению с электрической печью сопротивления.

Термоэлектрическая батарея обладает и другим важным преимуществом. Если изменить направление тока на противоположное, то на наружных спаях начнет выделяться теплота Q_0, а нагревавшие помещение спаи будут отнимать теплоту Q_1, охлаждая помещение. В жаркое время года та же термобатарея может охлаждать воздух. Регулируя силу и направление тока в батарее, можно поддерживать в помещении одну и ту же температуру при любых температурах внешнего воздуха.

Охлаждение, вызываемое термоэлектрической батареей, можно, как мы уже упоминали, использовать для осуществления холодильника. Теплые спаи отдают получаемую ими теплоту Q_1 в окружающий воздух или в водопроводную воду, холодные же спаи, находящиеся внутри холодильного шкафа, отнимают теплоту, поддерживая в нем желательную низкую температуру.

В современной технике имеются различные типы холодильных машин. Чем меньше в них необратимых процессов, тем такие машины выгоднее, тем ближе их коэффициент полезного действия к термодинамическому. Существуют сложные холодильные машины с бо́льшим коэффициентом полезного действия, чем термоэлектрические, но последние обладают преимуществом простоты и отсутствия движущихся механизмов.

1980
4
ПОЧТА СССР
АКАДЕМИК
А.Ф. ИОФФЕ
1880-1960

В коллекцию филателистов

В нашей стране неоднократно выпускались почтовые марки, посвященные выдающимся советским физикам и математикам — президенту Академии наук СССР академику С. И. Вавилову, академикам И. В. Курчатову, Л. А. Арцимовичу, М. Д. Миллионщикову, И. Г. Петровскому, А. Н. Крылову. В конце 1980 года эта коллекция пополнилась маркой с изображением выдающегося советского физика — академика А. Ф. Иоффе. Она выпущена в связи с юбилеем — столетием со дня его рождения.

В. Рудов

А. Раухман

Группоиды

В алгебре, которая начиналась как наука о решении уравнений еще в средневековье («Квант», 1976, № 9, с. 2 и 1976, № 5, с. 3, 6), в XIX веке произошли сильные изменения, особенно ярко проявившиеся в работах французского математика Э. Галуа («Квант», 1973, № 10). В наше время алгебра — в первую очередь, наука об абстрактных операциях или, по выражению Н. Бурбаки («Квант», 1978, № 6, с. 32), наука об «алгебраических структурах». В этой статье предлагается исследовать элементарными средствами простейшую такую структуру — структуру группоида.

Алгебраические операции

Говорят, что на непустом множестве M определена (*бинарная*) *алгебраическая операция*, если задано правило, с помощью которого каждой упорядоченной паре элементов a и b этого множества ставится в соответствие определенный элемент c этого же множества.

Обычные операции сложения и умножения действительных чисел, конечно же, являются алгебраическими операциями. Но важно сразу понять, что совсем не обязательно рассматривать только операции над числами: множество M может состоять из элементов самой разнообразной природы — из многочленов, функций, перемещений, букв и даже слов.

Как правило, мы в дальнейшем будем обозначать алгебраические операции звездочкой $*$. Запись $c=a*b$ означает, что элемент $c \in M$ является результатом применения операции $*$ к паре $(a;\, b)$. Множество M с определенной на нем алгебраической операцией называется *группоидом* и обозначается $(M;\, *)$.

Задача 1. *Проверьте, что* $(\mathbf{N};\, \cdot)$, $(\mathbf{N};\, +)$, $(\mathbf{Z};\, -)$, $(\mathbf{R}_0;\, :)$, *где* $\mathbf{R}_0$ *— множество ненулевых действительных чисел, являются группоидами, а* $(\mathbf{N};\, -)$, $(\mathbf{Z};\, :)$ *— нет. Приведите еще десяток группоидов из школьной математики.*

Свойства группоидов

Когда речь идет об обычных операциях сложения и умножения, вы умеете, не думая, пользоваться их основными свойствами. В этом таится определенная опасность: когда переходишь к произвольной операции, не все эти свойства справедливы, нельзя ими пользоваться «по аналогии». Рассмотрим, например, такие свойства сложения:

$$x+z=y+z \Rightarrow x=y \tag{1}$$

$$x+y = y+x \tag{2}$$

$$x=y \Rightarrow x+z=y+z \tag{3}$$

$$x+y=z \Rightarrow x=z-y \tag{4}$$

$$x+x = 2x \tag{5}$$

Какие из этих свойств верны, если вместо операции + в них взять произвольную алгебраическую операцию $*$?

Как мы увидим ниже, утверждения (1) и (2) верны далеко не всегда. Однако утверждение (3) всегда верно (постарайтесь сообразить, почему)! Об утверждении (4) нельзя говорить, верно оно или не верно,— оно не понятно, так как знак «минус» не определен для произвольной операции $*$. Аналогично обстоит дело с утверждением (5): выражение $2x$ (где x — элемент произвольного множества M) пока не определено.

Таким образом, прежде всего нужно разобраться в основных свойствах группоидов. Таких свойств много, мы ограничимся пятью наиболее важными.

Свойство К. Группоид $(M;\, *)$ называется *коммутативным*, если для любых $a,\, b \in M$

$$a*b=b*a.$$

Так, группоиды $(\mathbf{Z};\ +)$, $(\mathbf{R};\ \cdot)$ коммутативны, но $(\mathbf{R}_0;\ :)$, конечно же, нет: например, $8:4 \neq 4:8$!

Свойство А. Группоид $(M;*)$ называется *ассоциативным*, если для любых $a,\ b,\ c \in M$

$$(a*b)*c=a*(b*c).$$

По-видимому, все известные вам операции этим свойством обладают; примеры не ассоциативных группоидов появятся ниже (см. задачу 2).

Свойство Е. Элемент $e \in M$ называется *нейтральным* (говорят еще *единичным*, а для операции сложения — *нулевым*) в группоиде $(M;\ *)$, если для любого $a \in M$

$$a*e=e*a=a.$$

Мы будем говорить, что группоид $(M;\ *)$ обладает «свойством Е», если в нем есть нейтральный элемент. Выкладка $e=e*e'=e'$ показывает, что нейтральный элемент всегда единственный.

Для сложения чисел нейтральным элементом служит число 0, для умножения — число 1. А есть ли нейтральный элемент в группоиде всех перемещений плоскости (относительно операции композиции перемещений)? Конечно же, есть — тождественное преобразование.

Свойство И. Пусть $(M;\ *)$ — группоид с нейтральным элементом e. Тогда $(M;\ *)$ обладает свойством *инверсности* (говорят еще *обратимости*), если для любого $a \in M$ можно указать *обратный элемент*, то есть такой элемент $\bar{a} \in M$, что

$$a*\bar{a}=\bar{a}*a=e.$$

Для умножения чисел, например, обратным для элемента $a \neq 0$ служит элемент $1/a$, а при сложении — элемент $(-a)$. А вот для группоида $(\mathbf{N};\ +)$ сложения натуральных чисел уже нет свойства инверсности (почему?)

Свойство С. Группоид $(M;\ *)$ обладает свойством *сократимости*, если для любых $a,\ b,\ c \in M$

$$a*b=a*c \Rightarrow b=c$$
$$b*a=c*a \Rightarrow b=c.$$

Вам, наверное, пока трудно себе представить группоид, в котором эти правила не действуют. Но такие примеры вы сейчас увидите!

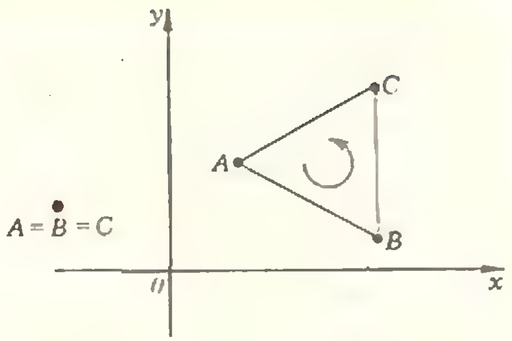


Рис. 1.

Задача 2. *Исследуйте, какими из свойств* К, А, Е, И, С *обладают следующие группоиды:*

а. $(\mathbf{R};\ *)$, *где для любых* $x,\ y \in \mathbf{R}$ $x*y=\max(x,\ y)$ ($\max(x,\ y)$ — наибольшее из чисел $x,\ y$).

б. $(\mathbf{N};\ *)$, *где* $x*y=$ **НОК** $(x,\ y)$ (НОК — *наименьшее общее кратное*).

в. $(\mathbf{R}^2;\ *)$, *где* $\mathbf{R}^2$ — *координатная плоскость и для произвольной пары точек* $(a;\ b)$ *и* $(c;\ d)$

$$(a;\ b)*(c;\ d)=(ac;\ bc+d).$$

Задача 3. *Пусть* $\mathbf{П}$ — *множество точек плоскости. Определим на этом множестве алгебраическую операцию* $*$ *следующим образом: Пусть* $A,\ B \in \mathbf{П}$; *если* $A=B$, *то считаем, что* $A*A=A$; *если* $A \neq B$, *положим* $A*B=C$, *где* C — *третья вершина правильного положительно ориентированного*) треугольника* ABC *(рис. 1). Исследуйте свойства группоида* $(\mathbf{П},\ *)$.

Какие группоиды невозможны?

Составим таблицу всех мыслимых сочетаний пяти рассмотренных свойств. Этим выделяются различные типы группоидов $(M;\ *)$. Каждый такой тип мы охарактеризуем пятеркой букв вида К $\bar{\text{А}}$ Е $\bar{\text{И}}$ С. В этой записи буква К означает, что группоид обладает свойством коммутативности, буква $\bar{\text{А}}$ — что свойство ассоциативности не имеет места и т. д.

---

*) Треугольник ABC называется *положительно ориентированным*, если обход вершин в порядке $A \to B \to C$ осуществляется против часовой стрелки.

Мы получим всего 32 сочетания:

КАЕИС	$\overline{К}$АЕ$\overline{И}$С	$\overline{К}\overline{А}\overline{Е}$ИС	К$\overline{А}$Е$\overline{И}\overline{С}$
$\overline{К}$АЕИС	$\overline{К}$АЕИ$\overline{С}$	$\overline{К}\overline{А}$Е$\overline{И}$С	КА$\overline{Е}\overline{И}\overline{С}$
К$\overline{А}$ЕИС	К$\overline{А}\overline{Е}$ИС	$\overline{К}\overline{А}$ЕИ$\overline{С}$	$\overline{К}\overline{А}\overline{Е}\overline{И}$С
КА$\overline{Е}$ИС	К$\overline{А}$Е$\overline{И}$С	$\overline{К}$А$\overline{Е}\overline{И}$С	$\overline{К}\overline{А}\overline{Е}$И$\overline{С}$
КАЕ$\overline{И}$С	К$\overline{А}$ЕИ$\overline{С}$	$\overline{К}$А$\overline{Е}$И$\overline{С}$	$\overline{К}\overline{А}$Е$\overline{И}\overline{С}$
КАЕИ$\overline{С}$	КА$\overline{Е}\overline{И}$С	$\overline{К}$АЕ$\overline{И}\overline{С}$	$\overline{К}$А$\overline{Е}\overline{И}\overline{С}$
$\overline{К}\overline{А}$ЕИС	КА$\overline{Е}$И$\overline{С}$	К$\overline{А}\overline{Е}\overline{И}$С	К$\overline{А}\overline{Е}\overline{И}\overline{С}$
$\overline{К}$А$\overline{Е}$ИС	КАЕ$\overline{И}\overline{С}$	К$\overline{А}\overline{Е}$И$\overline{С}$	$\overline{К}\overline{А}\overline{Е}\overline{И}\overline{С}$

Однако не все указанные здесь типы группоидов существуют. Давайте совместными усилиями докажем, что группоиды, тип которых напечатан красным шрифтом, на самом деле невозможны.

Проще всего решается вопрос с теми типами, в обозначении которых встречается сочетание $\overline{Е}$ И (таких типов всего 8). Противоречивость $\overline{Е}$ и И становится совершенно ясной из анализа формулировки свойства И.

Задача 4. *Докажите, что*

$$А\ Е\ И \Rightarrow С,$$

то есть одновременное выполнение свойств А, Е и И влечет за собой выполнение свойства С.

Эта теорема исключает в нашей таблице еще два сочетания (какие?).

Какие группоиды существуют?

Итак, из 32 первоначально намеченных типов группоидов у нас осталось 22. Мы подошли теперь к основной задаче этой статьи:

Задача 5. *Докажите, что все группоиды, типы которых напечатаны черным шрифтом, существуют.*

Как доказать существование математического объекта? Проще всего — построить пример. В самом деле, если мы сможем привести конкретный пример группоида, обладающего, скажем, свойствами К А $\overline{Е}$ $\overline{И}$ $\overline{С}$, то этим самым докажем существование данного типа группоидов.

Следовательно, чтобы решить задачу 5, достаточно сделать такую задачу:

Второй множитель

*	a	b	c
a	b	c	a
b	c	c	b
c	a	b	a

Первый множитель

Рис. 2.

Задача 5'. *Построить примеры группоидов всех 22 типов, указанных черным в таблице.*

Наша задача распадается, таким образом, на 22 частные задачи. Хочется верить, что их число не испугает читателя. Так или иначе, читателю мы посоветуем сначала дочитать статью, а затем за них браться.

Отметим, что, решив задачу 5, мы одновременно ответим еще на один важный вопрос. Предположим, что нам удалось построить группоиды типов К А Е И С и К $\overline{А}$ Е И С. Существование таких группоидов означает, что свойство А является *логически независимым* от свойств К Е И С.

Задача 6. *Глядя на таблицу, установите, какие еще свойства независимы от остальных.*

Как найти группоид?

Задача 7. *Пусть* $M = \{a, b, c\}$, *а операция* $*$ *задана «таблицей умножения» (рис. 2). Каков тип группоида* $(M; *)$?

Задача 8. *Рассмотрим группоид* $(\mathbf{R}; *)$, *где для любых* $x, y \in \mathbf{R}$

$$x*y = (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{2})^3.$$

Каков тип группоида?

Задачи 7 и 8 подсказывают два способа задания группоидов — *табличный* и *формульный*. Эти способы могут вам пригодиться при решении основной задачи 5'.

Конечные и бесконечные группоиды

Группоид $(M; *)$ называется *конечным* или *бесконечным* в зависимости от того, конечно или бесконечно множество M.

Задача 9. *Рассмотрим два группоида:*

1) $(M; *)$, *где* $M=\{e, a, b\}$, *а операция* $*$ *задана таблицей* (рис. 3);

2) $(\mathbf{N}_0; \Delta)$, *где* $\mathbf{N}_0$ — *множество целых неотрицательных чисел, причем для любых* $x, y \in \mathbf{N}_0$ $x\Delta y=|x-y|$.

Покажите, что группоиды $(M; *)$, $(\mathbf{N}_0; \Delta)$ *относятся к одному и тому же типу (какому?).*

Как видим, для некоторых типов группоидов в качестве примеров можно привести и конечный, и бесконечный случаи.

Для других попытка придумать конечный группоид не приводит к успеху. Причина состоит в том, что в конечных группоидах появляются новые зависимости между свойствами операции $*$.

Задача 10. *Пусть* $(M, *)$ — *конечный группоид. Докажите, что*

К Е С ⇒ И.

Задача 11*. *Пусть* $(M, *)$ — *конечный группоид. Тогда*

А С ⇒ Е И.

*	e	a	b
e	e	a	b
a	a	a	e
b	b	e	b

Рис. 3.

Докажите это!

Утверждения задач 10 и 11 предохранят вас от безнадежных попыток придумать конечный группоид в тех случаях, когда он невозможен.

Ждем писем!

Если вам удастся найти примеры всех 22 типов, пришлите их нам. В случае, когда возможны конечный и бесконечный группоиды, хорошо найти и тот, и другой.

Геометрические доказательства теорем о средних

Возьмем полуокружность с центром O и пусть A — произвольная точка на продолжении ее диаметра BC, $[OD] \perp [BC]$, $[AE]$ — касательная и $[EF] \perp [BC]$ (см. рисунок). Положим $|AB|=a_1$ и $|AC|=a_2$ $(a_1 \neq a_2)$. Тогда

$$|AO|=\frac{a_1+a_2}{2},$$

$$|AE|=\sqrt{|AO|^2-|OE|^2}=\sqrt{a_1a_2},$$

$$|AD|=\sqrt{|AO|^2+|OD|^2}=\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2}{2}},$$

$$|AF|=\frac{|AE|^2}{|AO|}=\frac{a_1a_2}{\frac{a_1+a_2}{2}}=\frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}},$$

то есть $|AO|$ — это *среднее арифметическое*, $|AE|$ — *среднее геометрическое*, $|AD|$ — *среднее квадратичное* и $|AF|$ — *среднее гармоническое* положительных чисел a_1 и a_2.

Поскольку $|AD|>|AO|$, $|AO|>|AE|$ и $|AE|>|AF|$, получаем такую цепочку неравенств:

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2}{2}}>\frac{a_1+a_2}{2}>\sqrt{a_1a_2}>\frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}}$$

(нетрудно видеть, что для $a_1=a_2$ эти неравенства превращаются в равенства)*).

Заметим еще, что среднее геометрическое двух положительных чисел является также средним геометрическим между их средним арифметическим и средним гармоническим:

$$a_{\text{ср.геом}}=\sqrt{a_{\text{ср.арифм.}}\cdot a_{\text{ср.гарм.}}}$$

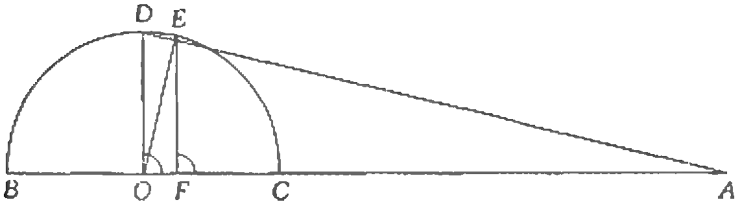
Это ясно аналитически:

$$\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}}=a_1a_2,$$

и геометрически:

$$|AE|=\sqrt{|AO|\cdot|AF|}.$$

А. Искендеров



---

*) Определения *средних* для случая n чисел, а также доказательства соответствующих неравенств см. в «Кванте», 1980, № 3, с. 22—23.

В. Майер,
Е. Мамаева

Псевдолинза Роберта Вуда

Может ли прозрачная плоскопараллельная пластинка давать изображения предметов, то есть действовать подобно собирающей линзе? Давайте рассуждать.

Как формируется изображение в собирающей линзе? От точечного источника света распространяется сферическая волна. В линзе центр волны проходит больший путь, чем края, поэтому он отстает от краев, а волна превращается в сходящуюся. Световые лучи, которые всегда нормальны волновым поверхностям, при этом поворачиваются так, что после выхода из линзы они пересекаются в одной точке. Эта точка и является действительным изображением источника.

В плоскопараллельной пластинке нормально падающие на нее лучи проходят одинаковые пути. Поэтому, на первый взгляд, кажется, что сделать из такой пластинки собирающую линзу нельзя. Впрочем, можно поступить по-другому. Вспомним, что скорость света в веществе зависит от его показателя преломления: чем больше показатель преломления, тем меньше скорость света. Следовательно, чтобы из плоскопараллельной пластинки получить собирающую линзу, достаточно сделать показатель преломления наибольшим в центре пластинки и постепенно уменьшающимся к ее краям.

В настоящее время линзы с переменным показателем преломления нашли применение в технике сантиметровых радиоволн. Для оптического диапазона электромагнитных волн изготовить подобную линзу, которая могла бы выдержать конкуренцию с обычной, довольно сложно. Однако выдающийся американский физик-экспериментатор Роберт Вуд предложил простую модель оптической линзы с переменным показателем преломления, которую он назвал псевдолинзой. Несколько измененный способ изготовления псевдолинзы, приводящий, на наш взгляд, к лучшим результатам, мы вам и рекомендуем.

Возьмите пробирку и насыпьте в нее фотографический или пищевой желатин так, чтобы образовался слой толщиной около 2 см. Налейте в пробирку до половины ее высоты воду и оставьте желатин на 2—3 часа набухать в воде. Затем слейте из пробирки избыток воды и, нагревая пробирку на пламени сухого горючего, полностью расплавьте набухший желатин. (Пробирку нагревайте осторожно, чтобы приготовляемый состав не подгорел.) После этого влейте в расплавленный желатин равное по объему количество глицерина.

Пока состав охлаждается, приготовьте две чистые пластинки размером примерно 20 × 20 мм и 40 × 40 мм из тонкого стекла (можно использовать стекло тщательно отмытой от эмульсии фотопластинки, оконное стекло или, в крайнем случае, оргстекло). Заготовьте также две полоски картона размером 4 × 25 мм и толщиной около 0,5 мм.

В охладившийся состав опустите стеклянную трубку и перенесите ею на расположенную горизонтально большую стеклянную пластинку немного состава. Постарайтесь добиться, чтобы образовавшаяся капля была совершенно круглой диаметром 6—10 мм. Если с первого раза вам не удастся получить то, что нужно, быстро вымойте в проточной воде стеклянную пластинку, насухо вытрите ее и проделайте все еще раз. Как только вы сумеете получить нужную каплю, положите рядом с каплей на пластинку картонные

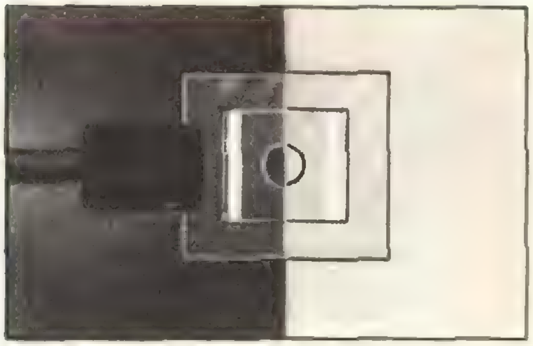


Рис. 1.

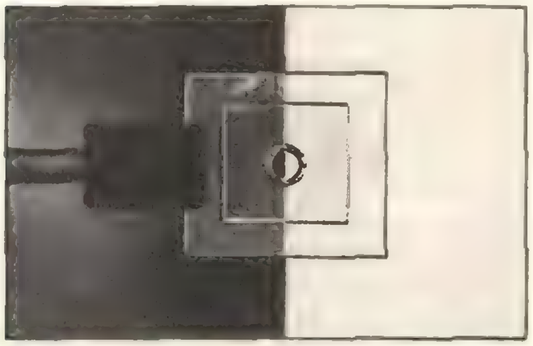


Рис. 2.

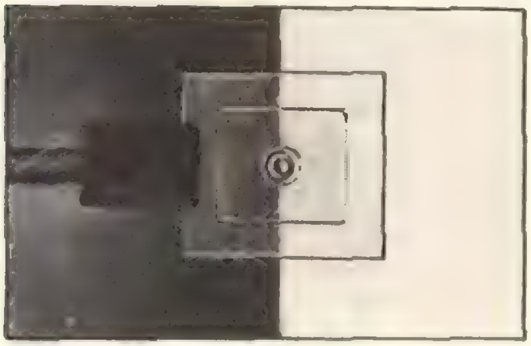


Рис. 3.

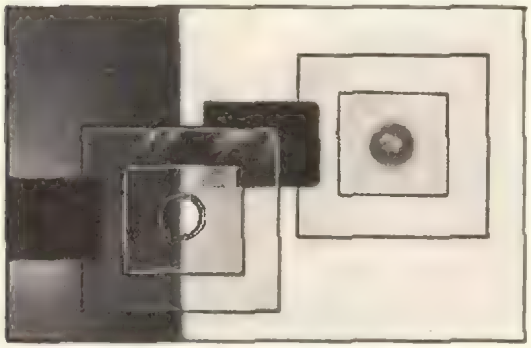


Рис. 4.

полоски и быстро накройте каплю второй стеклянной пластинкой.

Через 10—20 минут, когда состав окончательно загустеет, между стеклянными пластинками образуется небольшой цилиндрик, боковая стенка которого перпендикулярна основаниям (рис. 1). Посмотрите через плоскопараллельные основания цилиндрика на границу между темной и светлой областями или просто на какой-либо удаленный предмет — никакого преломления вы не обнаружите.

Вынув прокладки, опустите стеклянные пластинки с цилиндриком на дно блюдца с холодной прокипяченной или дистиллированной водой. Проследите, чтобы вода обязательно зашла в промежуток между пластинками. Воздушный пузырек, который почти неизбежно остается вблизи цилиндрика, аккуратно удалите полоской бумаги. Спустя 3—4 минуты достаньте пластинки из воды, осторожно протрите их тряпочкой, воду из промежутка между ними удалите фильтровальной бумагой. На стеклянных пластинках не должно оставаться капель воды, так как они, фокусируя свет, будут сильно мешать наблюдениям.

Вновь посмотрите сквозь цилиндрик на границу раздела между светлой и темной областями. Вы обнаружите, что цилиндрик своим внешним ободком начал преломлять свет. Опустив цилиндрик в воду еще на 5—15 минут, добейтесь того, чтобы вода проникла вплоть до оси цилиндрика. На рисунках 2 и 3 приведены фотографии, ясно показывающие, что́ вы должны наблюдать.

Итак, псевдолинза готова. Достав ее из воды и высушив стеклянные пластинки тряпочкой и фильтровальной бумагой, вы сможете получить с ее помощью удивительно четкие изображения, например изображение спирали настольной лампы (рис. 4). Последняя фотография получена в следующих условиях: расстояние от лампы до псевдолинзы (которая имела диаметр 9 мм) $d=75$ см, расстояние от псевдолинзы до изображения $f=26$ см.

(Окончание см. на с. 21)

М. Апресян

Бесконечные суммы и... прямоугольник

Старшеклассники знают, что при $|q|<1$ сумма бесконечной геометрической прогрессии $1+q+q^2+q^3+\dots$ равна $\frac{1}{1-q}$, и умеют это доказывать аналитически (см. пособие «Алгебра и начала анализа 9», п. 24). Для $q=\frac{1}{n}$, где $n \in \mathbf{N}$, существует простой геометрический способ нахождения этой суммы.

Начнем с $n=2$: найдем сумму

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots$$

Возьмем произвольный прямоугольник площади 2. Разрежем его на два *равновеликих* (одинаковой площади) прямоугольника единичной площади так, как показано на рисунке 1. Один из этих прямоугольников снова разрежем на две равновеликие части: получим прямоугольнички площади $\frac{1}{2}$. С одним из них снова поступим так же — получим два прямоугольничка площади $\frac{1}{4}$. Продолжая этот процесс, мы получим прямоугольнички площади $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$ Объединение этих прямоугольников дает исходный прямоугольник (без одной угловой точки). Поэтому сумма площадей прямоугольников равна площади исходного прямоугольника, то есть двум. Таким образом, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots=2$.

Найдем теперь сумму $1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\dots$ Для этого возьмем уже прямоугольник площади n и разрежем его на n прямоугольников единичной площади (рис. 2.). Один из этих прямоугольников снова разрежем на n равновеликих прямоугольничков площади $\frac{1}{n}$. С одним из них снова проделаем ту же операцию; получим n прямоугольничков площади $\frac{1}{n^2}$. Продолжая этот процесс, мы получим теперь по $n-1$ прямоугольничков площади $1, \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \dots, \frac{1}{n^k}, \dots$ В объединении они составляют исходный прямоугольник (опять без одной угловой точки). Поэтому искомая площадь равна $\frac{n}{n-1}$.

Та же идея годится и для нахождения суммы бесконечной геометрической прогрессии с рациональным знаменателем $0<q<1$. В самом деле, используя прямоугольник площади n и рассуждая аналогично, можно доказать, что сумма $1+\frac{m}{n}+\frac{m^2}{n^2}+\frac{m^3}{n^3}+\dots(m<n,\ m$ и

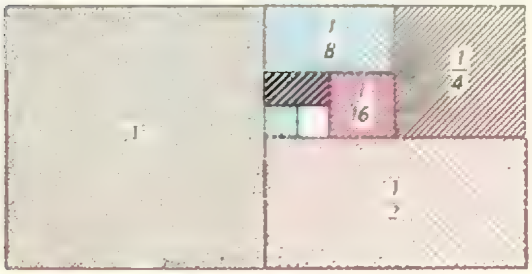


Рис. 1.

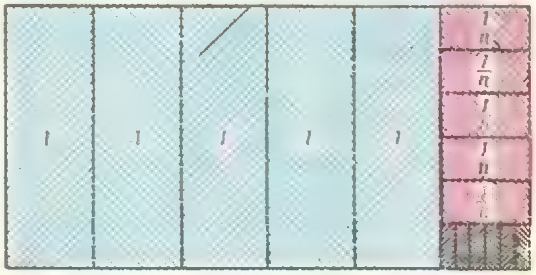


Рис. 2.

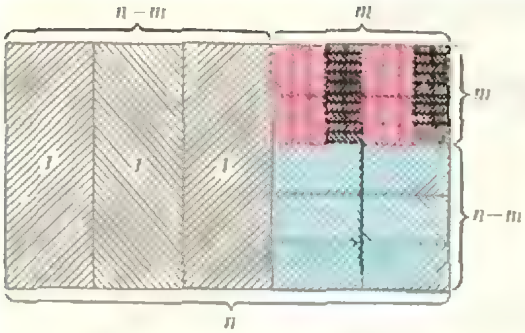


Рис. 3.

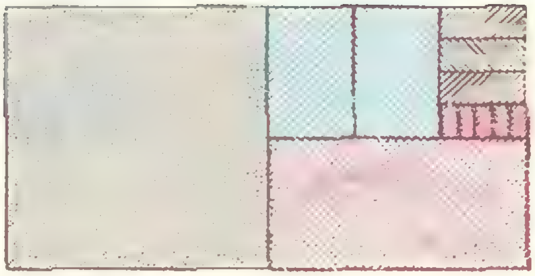


Рис. 4.

n — натуральные числа) равна $\frac{n}{m-n}$: для этого нужно оставить без изменения $n-m$ единичных прямоугольничков, а каждый из m прямоугольничков площади 1 снова разрезать на n равновеликих частей (рис. 3). Затем оставить без изменения $n-m$ полос, площади $\frac{m}{n}$ каждая, а каждый из m^2 прямоугольничков площади $\frac{1}{n}$ снова разрезать на n равновеликих частей. Вы уже догадались, что нужно делать дальше? Доведите это построение до «конца» и обоснуйте его.

В заключение мы с помощью прямоугольника площади 2 вычислим еще одну бесконечную сумму; именно, мы докажем, что

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n}{n+1!}+\ldots=2.$$

Первые два шага будут такие же, как раньше: разрежем прямоугольник на два прямоугольника площади 1; один из них — на два прямоугольничка площади $\frac{1}{2}$ (рис. 4). А затем один из этих прямоугольничков разрежем уже на три равновеликие части (площади $\frac{1}{6}$ каждая). Одну из частей площади $\frac{1}{6}$ разрежем на четыре равновеликие части; одну из них — на пять частей и т. д. Продолжая этот процесс до бесконечности, мы получим в результате один прямоугольничек площади 1, один — площади $\frac{1}{2!}$, два прямоугольничка площади $\frac{1}{3!}$, три — площади $\frac{1}{4!}$, ..., n прямоугольничков площади $\frac{1}{(n+1)!}$ и т. д. Значит, искомая сумма равна площади исходного прямоугольника, то есть двум.

Псевдолинза Роберта Вуда

(Начало см. на с. 18)

Отсюда, согласно формуле $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$, можно найти фокусное расстояние псевдолинзы: $F=19{,}5$ см. Псевдолинзы диаметром около 6 мм имеют фокусное расстояние порядка 10 см.

Каков принцип действия псевдолинзы? Показатель преломления глицерина $n_г=1{,}47$; а показатель преломления воды $n_в=1{,}33$. Вода, диффундируя в однородный цилиндрик, состоящий из желатина и глицерина, вытесняет из него глицерин. Цилиндрик при этом становится неоднородным, причем его показатель преломления постепенно уменьшается от центра к краям. А такая система, как уже говорилось, ведет себя как собирающая линза.

Заметим, что примерно через сутки состав вновь становится однородным, и псевдолинза теряет свои удивительные свойства.

задачник кванта

Задачи

М666—М670; Ф678—Ф682

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 апреля 1981 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 2 — 81» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М666, М667» или «Ф678». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

М666. Докажите, что наименьшее общее кратное n натуральных чисел $a_1<a_2<\ldots<a_n$ не меньше na_1.

А. Разборов

М667. Постройте треугольник ABC, если заданы его наименьший угол $\widehat{A}$ и отрезки длины $d=|AB|-|BC|$ и $e=|AC|-|BC|$.

Н. Васильев

М668*. Последовательность (x_i) определяется условиями

$$x_1=1,\ x_2=0,\ x_3=2,\ x_{n+1}=x_{n-2}+2x_{n-1}.$$

Докажите, что для любого натурального m найдутся два соседних члена этой последовательности, каждый из которых делится на m.

Г. Козлов

М669. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Докажите, что

а) отрезок, соединяющий середины дуг AB и CD, перпендикулярен отрезку, соединяющему середины дуг BC и AD;

б) центры окружностей, вписанных в треугольники ABC, BCD, CDA и DAB, являются вершинами прямоугольника.

К. Малхасян,
И. Герман

М670*. а) Дано несколько точек, некоторые пары которых соединены линиями (точки таких пар называются *соседями*). Число соседей у каждой точки нечетно. В начальный момент все точки раскрашены в два цвета — красный и синий. Затем каждую минуту происходит одновременное перекрашивание точек по следующему правилу: каждая точка, у которой большинство соседей имеет отличный от нее цвет, меняет свой цвет; в противном случае ее цвет сохраняется.

Докажите, что наступит момент, начиная с которого у некоторых точек цвет не будет меняться, а у некоторых будет меняться каждую минуту.

б) Останется ли это утверждение верным, если не предполагать, что у каждой точки число соседей нечетно?

О. Козлов

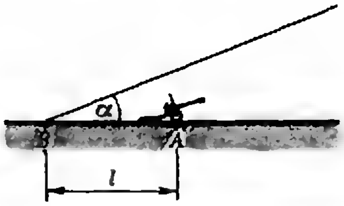


Рис. 1.

Ф678. Артиллерийское орудие стреляет из-под укрытия, наклоненного под углом α к горизонту (рис. 1). Орудие находится в точке A на расстоянии l от основания укрытия (точка B). Начальная скорость снаряда равна $|\vec{v}_0|$. Считая, что траектория снаряда лежит в плоскости рисунка, определить максимальную дальность полета.

С. Кротов

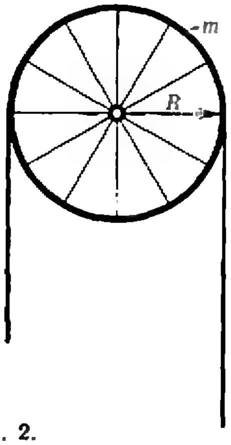


Рис. 2.

Ф679. Нерастяжимая шероховатая веревка линейной плотности ϱ и длины L перекинута через блок (рис. 2) так, что длина одного из свисающих концов равна $l(l<L/2)$. Блок, надетый на горизонтальную ось, представляет собой тонкий обруч массы m и радиуса R на легких спицах. Систему удерживают в состоянии покоя и затем отпускают. Найти силу давления на ось в первый момент времени. Трение между осью и блоком мало.

М. Эфроимский, ученик 10 кл.

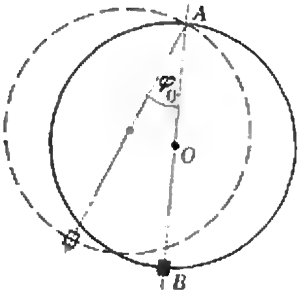


Рис. 3.

Ф680. Тонкий обруч радиуса R может вращаться вокруг горизонтального стержня A, параллельного оси обруча (рис. 3). На обруч надета небольшая шайба B массы m, которая может перемещаться по обручу без трения. Обруч вместе с шайбой как целое отклоняют от положения равновесия на угол φ_0 (см. рис. 3) и отпускают. Определить зависимость силы взаимодействия шайбы и обруча от угла φ, образуемого радиус-вектором OA с вертикалью.

Д. Белов

Ф681. Омметр состоит из миллиамперметра, рассчитанного на максимальный ток $I=1$ мА, источника тока и добавочного резистора, регулировкой сопротивления которого омметр устанавливается на нулевую отметку при замкнутых накоротко выводах (нуль омметра находится в правом конце шкалы).

Схему собирают из батареи для карманного фонарика с ЭДС $\mathscr{E}=4{,}5$ В, резистора с неизвестным сопротивлением и омметра. Когда омметр включают последовательно, он показывает 0 Ом. Когда его включают параллельно батарее, он показывает бесконечно большое сопротивление.

Определите величину неизвестного сопротивления резистора и напряжения на батарее и на омметре.

З. Рафаилов

Ф682. Зеркало антенны радиолокатора, работающего на волне $\lambda=0{,}3$ м, представляет собой параболоид вращения с «выходным» диаметром $d=6$ м, в фокусе которого (глубоко внутри параболоида) расположен точечный излучатель энергии. Эта же антенна используется для приема отраженного от самолета сигнала. Мощность излучателя $P_и=2\cdot10^5$ Вт. Минимальная мощность

сигнала на входе антенны, необходимая для нормальной работы, $P_{min}=1\cdot10^{-13}$ Вт.
Оцените максимальную дальность обнаружения локатором самолета, площадь отражающей поверхности которого $S=5$ м^2. Считать, что мощность отраженного сигнала в $n=10$ раз меньше мощности падающего сигнала и отражение происходит равномерно во все стороны.

А. Зильберман

Решения задач

М616—М621; Ф623—Ф630

М616. *Можно ли числа 1, 2, ..., 30 разбить на группы*

а) по пять чисел,

б) по шесть чисел

так, чтобы суммы чисел во всех группах были одинаковыми?

в) При каких n и k числа 1, 2, ..., nk можно разбить на n групп по k чисел так, чтобы суммы чисел во всех группах были одинаковыми?

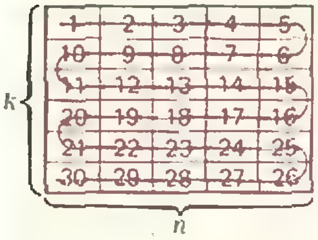


Рис. 1.

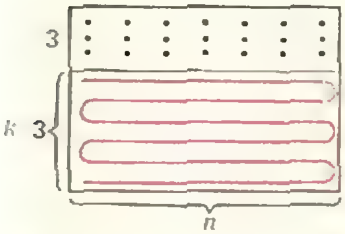


Рис. 2.

Назовем разбиение, удовлетворяющее условиям задачи, *правильным*. Ответ на общий вопрос в) задачи дает

Теорема. *Чтобы множество {1, 2, ..., nk} допускало правильное разбиение на k-элементные подмножества, необходимо и достаточно, чтобы либо k было четным, либо nk нечетным.*

Необходимость этих условий очевидна. В самом деле, пусть такое разбиение существует; тогда сумма всех чисел $\frac{nk(nk+1)}{2}$ делится на n (количество подмножеств), то есть число $k(nk+1)/2$ — целое; поэтому либо k четно, либо $nk+1$ четно, то есть nk нечетно.

Отсюда видно, что ответ на вопрос а) задачи — отрицательный ($k=5$ нечетно, а $n=6$ четно).

Для доказательства достаточности сформулируем теорему в более наглядном виде:

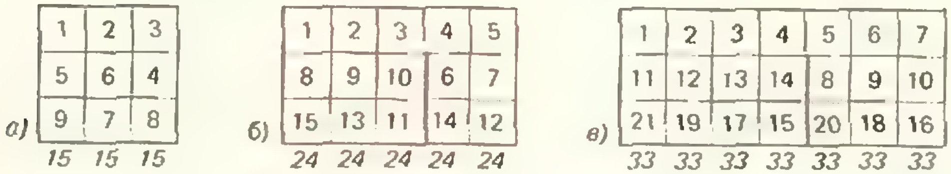
Чтобы nk чисел {1, 2, ..., nk} можно было расставить в таблицу из k строк и n столбцов правильным образом (суммы чисел во всех столбцах одинаковы), необходимо и достаточно, чтобы либо k было четным, либо nk — нечетным.

Пусть k четно. Тогда числа можно расставить в таблицу «змейкой» (рис. 1; для каждых двух последовательных строк сумма чисел в любом столбце одинакова).

Пусть nk нечетно. Расставим «правильно» в трех верхних строках таблицы числа $\{1, 2, ..., 3n\}$ (оставшиеся числа, начиная с числа $3n+1$, можно расставить в таблицу $(k-3)\times n$ змейкой, поскольку $k-3$ четно — рис. 2). Как это сделать при $n=3, 5, 7$, показано на рисунках 3, а—в. Аналогичным образом можно построить таблицу $3\times n$ для любого нечетного $n=2m+1$ (рис. 4; проверьте, что в нее входит по разу любое число от 1 до $3n=6m+3$).

Легко видеть, что справедливо тривиальное обобщение доказанной теоремы: чтобы nk чисел $\{a+1, a+2, a+3, ..., a+nk\}$ можно было расставить в таблицу из k строк и n столбцов правильным образом, необходимо и достаточно, чтобы либо k было четным, либо nk — нечетным.

Это обобщение подсказывает еще один способ «правильной расстановки» в прямоугольнике $3\times n$: надо разбить прямоугольник $3\times n$ на прямоугольники 3×3, 3×5 (любое нечет-



а)

1	2	3
5	6	4
9	7	8
15	15	15

б)

1	2	3	4	5
8	9	10	6	7
15	13	11	14	12
24	24	24	24	24

в)

1	2	3	4	5	6	7
11	12	13	14	8	9	10
21	19	17	15	20	18	16
33	33	33	33	33	33	33

Рис. 3.

$$3\left\{\overbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
1 & 2 & \ldots & m+1 & m+2 & \ldots & 2m+1 \\
\hline
3m+2 & 3m+3 & \ldots & 4m+2 & 2m+2 & \ldots & 3m+1 \\
\hline
6m+3 & 6m+1 & \ldots & 4m+3 & 6m+2 & \ldots & 4m+4 \\
\hline
\end{array}}^{n=2m+1}\right.$$

Рис. 4.

ное число $n \geqslant 9$ можно представить в виде $n = 3p + 5q$, где p, q — целые неотрицательные числа) и правильным образом расположить в них отрезки ряда $\{1, 2, \ldots, 3n\}$ — соответственно, из 9 и 15 чисел — так, как в уже готовых табличках на рисунках 3, *а*, *б* (при этом в каждом прямоугольнике придется добавить к числам свою константу a).

Подумайте над таким более сложным вопросом: при каких $k < n$ существует «магический прямоугольник» из чисел $1, 2, \ldots, nk$, у которого суммы чисел по всем строкам равны между собой и суммы чисел по столбцам тоже. Магический квадрат существует при любом $n \geqslant 3$ (см. книгу М. М. Постникова «Магические квадраты», М., «Наука», 1964).

С. Берколайко, Н. Васильев

◆

М617. *Внутри треугольника расположены окружности α, β, γ, δ одинакового радиуса так, что каждая из окружностей α, β, γ касается двух сторон треугольника и окружности δ. Докажите, что центр окружности δ принадлежит прямой, проходящей через центры вписанной в данный треугольник окружности и окружности, описанной около него.*

Пусть ABC — данный треугольник и O_1, O_2, O_3 — центры конгруэнтных окружностей, касающихся пар его сторон, и O_4 — центр четвертой окружности — той, которая касается указанных трех (см. рисунок). Длины их радиусов обозначим через ϱ. Треугольник $O_1O_2O_3$ гомотетичен треугольнику ABC, так как его стороны соответственно параллельны сторонам треугольника ABC. Не трудно видеть, что центром этой гомотетии будет точка N, являющаяся одновременно центром окружности, вписанной в треугольник ABC, и центром окружности, вписанной в треугольник $O_1O_2O_3$. Действительно, прямые AO_1, BO_2, CO_3 являются биссектрисами углов как треугольника ABC, так и треугольника $O_1O_2O_3$, и точка N — точка пересечения этих биссектрис.

Теперь заметим, что точка O_4 является центром окружности, описанной вокруг треугольника $O_1O_2O_3$ (ее расстояние до каждой из вершин этого треугольника равно 2ϱ).

Рассмотрим гомотетию с центром в точке N, переводящую треугольник $O_1O_2O_3$ в треугольник ABC. Точка O_4 переходит при этом в некоторую точку M, лежащую на прямой NO_4. Мы уже знаем, что точка O_4 была центром окружности, описанной вокруг треугольника $O_1O_2O_3$; следовательно, ее образ — точка M — будет центром окружности, описанной вокруг треугольника ABC. Итак, центр окружности, описанной вокруг треугольника ABC, лежит на одной прямой с точкой O_4 и с центром окружности, вписанной в треугольник ABC. Тем самым доказано утверждение задачи.

Нетрудно вычислить величину радиуса ϱ этих четырех окружностей через r и R — радиусы вписанной в треугольник ABC окружности и окружности, описанной около него.

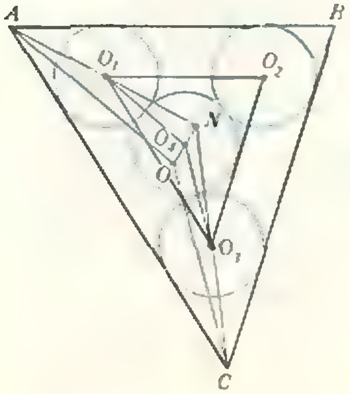
Заметим, что радиус окружности, вписанной в треугольник $O_1O_2O_3$, равен $r - \varrho$, а радиус окружности, описанной вокруг этого треугольника, равен 2ϱ.

Пусть k — коэффициент рассмотренной выше гомотетии. Тогда $(r - \varrho)k = r$ и $2\varrho k = R$. Выразив k из каждого соотношения и приравняв полученные выражения, найдем

$$\frac{r}{r-\varrho} = \frac{R}{2\varrho},$$

откуда

$$\varrho = \frac{rR}{R+2r}.$$



А. Савин

M618. *а) Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что $n!$ делится на n^2+1.*

б) Докажите, что для любого $\alpha>0$ существует бесконечно много натуральных n таких, что $[\alpha n]!$ делится на n^2+1. (Здесь $m! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m$; $[x]$ — целая часть числа x.)

В задаче, по существу, требуется доказать существование бесконечного числа натуральных n таких, что n^2+1 раскладывается в произведение не очень больших сомножителей. Это можно сделать различными способами.

Покажем, например, что существует бесконечно много n, при которых n^2+1 имеет вид $5m^2$. Иными словами, уравнение $n^2-5m^2=-1$ имеет бесконечное число натуральных решений. Это утверждение следует из следующих двух фактов, каждый из которых проверяется непосредственно: пара $n=2$, $m=1$ удовлетворяет этому уравнению, и если $n=a$, $m=b$ — его решение, то и пара $n=9a+20b$, $m=4a+9b$ тоже (как дойти до этих формул, объясняется в статье Н. Вагутена «Сопряжение числа», «Квант», 1980, № 2).

Это сразу дает нам доказательство утверждения задачи а). Действительно, при найденных значениях n имеем $n^2+1=5m^2$, $m=\sqrt{\frac{n^2+1}{5}}<\frac{n}{2}$ и $n!$ делится на n^2+1, так как при $n>5$ в произведении $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ встречаются числа 5, m и $2m$.

Так же можно действовать и в общем случае б). Но для этого пришлось бы доказывать, что существует бесконечно много натуральных D таких, что число натуральных решений уравнения $n^2-Dm^2=-1$ бесконечно (выбрав тогда D так, чтобы выполнялось неравенство $D\geqslant 5/\alpha^2$, мы бы получили искомые значения n). Это утверждение верно, но элементарное доказательство его весьма сложно, поэтому мы пойдем другим путем.

Будем искать нужные нам n среди чисел вида $2k^2$. В этом случае n^2+1 разлагается в произведение $n^2+1=4k^4+1=(2k^2+2k+1)(2k^2-2k+1)$, но этого еще недостаточно. Покажем, как получить много таких k, при которых числа $P(k)=2k^2+2k+1$ и $Q(k)=2k^2-2k+1$ — составные (разлагаются на множители). Возьмем произвольное натуральное c и положим $p=P(c)$, $q=Q(c)$. Тогда при любом l число $P(c+lpq)$ делится на p, а $Q(c+lpq)$ делится на q (докажите!). Пусть $P(c+lpq)=p\cdot r$ и $Q(c+lpq)=q\cdot s$. Взяв c достаточно большим, мы можем добиться того, чтобы $p=P(c)$ и $q=Q(c)$ стали больше, чем $5/\alpha$ (это следует из того, что $P(k)$ и $Q(k)$ неограниченно возрастают с ростом k). В таком случае $n^2+1=4k^4+1=P(k)\cdot Q(k)=p\cdot q\cdot r\cdot s$, где $k=c+lpq$, $r=P(k)/p<\frac{P(k)}{5/\alpha}<\frac{\alpha n}{4}$ (при $k>5$) и $s=Q(k)/q<\frac{Q(k)}{5/\alpha}<\frac{\alpha n}{4}$ (при $k>5$). Выбирая теперь l так, чтобы p и q были меньше, чем $\alpha n/4$, получаем, что в последовательности 1, 2, 3, …, $[\alpha n]$ существуют четыре различных числа, одно из которых делится на p, другое на q, третье на r, а четвертое на s. Таким образом, мы построили бесконечное множество таких n, что $[\alpha n]!$ делится на n^2+1.

Возможны и другие решения этой задачи. Наиболее короткое, по-видимому, основано на разложении

$$64m^{12}+1=(4m^4+1)(4m^4-4m^3+2m^2-2m+1)\times$$
$$\times(4m^4+4m^3+2m^2+2m+1)$$

(это решение предложено нашим читателем *В. Юдаковым*).

А. Вайнтроб

◆

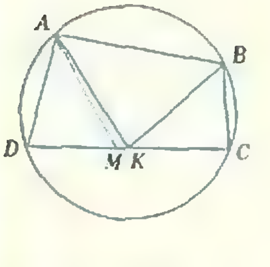


Рисунок к М619.

M619. *Докажите, что если для вписанного четырехугольника $ABCD$ выполнено равенство $|CD|=|AD|+|BC|$, то биссектрисы его углов A и B пересекаются на стороне CD.*

Возьмем на стороне CD точку K так, чтобы $|DK|=|AD|$, $|KC|=|BC|$ (см. рисунок), и опишем около треугольника ABK окружность. Пусть M — вторая точка пересечения этой окружности с $[CD]$. Покажем, что $[AM]$ и $[BM]$ — биссектрисы соответствующих углов. Например, для $[AM]$ имеем

$$\widehat{BAM}=\widehat{BKC}=90^\circ-\frac{\widehat{BCK}}{2}=90^\circ-\frac{1}{2}(180^\circ-\widehat{DAB})=\frac{1}{2}\widehat{DAB},$$

что и требовалось.

И. Шарыгин

М620. *Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — действительные числа такие, что $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=1$. Докажите, что сумма модулей 2^n чисел*

$$\pm x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n$$

(со всевозможными комбинациями знаков «+» и «—») не превосходит 2^n.

Докажем вначале, что *если $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2=k$, то $a_1+a_2+\ldots+a_k\leqslant k$.* В самом деле, пусть $a_i=1+\alpha_i$ $(i=1, 2, \ldots, k)$. Тогда

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2=k+2(\alpha_1+\ldots+\alpha_k)+(\alpha_1^2+\ldots+\alpha_k^2),$$

откуда

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k=-\frac{1}{2}(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_k^2)\leqslant 0.$$

Поэтому

$$a_1+a_2+\ldots+a_k=k+(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k)\leqslant k.$$

Обозначим теперь сумму модулей 2^n чисел

$$\pm x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n$$

(со всевозможными комбинациями знаков «+» и «—») через S. Нетрудно проверить, что сумма квадратов всех 2^n чисел, входящих в сумму S, равна $2^n(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)=2^n$. Обозначим 2^n чисел, входящие в S, через $a_1, a_2, \ldots, a_{2^n}$. Тогда $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{2^n}^2=2^n$, и из утверждения, доказанного выше, получаем оценку $a_1+a_2+\ldots+a_{2^n}\leqslant 2^n$, что и требовалось доказать.

Как справедливо заметил наш читатель *А. Хейфиц* из Ростова-на-Дону, задача М620 является частным случаем следующей общей задачи M. Klamkin'a (American Mathematical Monthly, 1975, **82**, № 8, p. 829—830):

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$— любые действительные числа. Тогда при $\lambda>2$ и при $\lambda<0$ имеет место неравенство

$$\sum|\pm x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n|^\lambda > 2^n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\lambda/2},$$

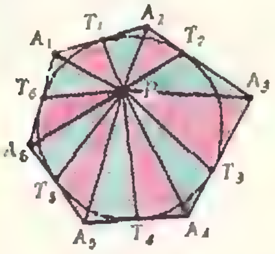
а при $0<\lambda<2$ — неравенство противоположного смысла. (Суммирование в левой части производится по всевозможным комбинациям знаков «+» и «—».)

Предлагаем вам подумать над доказательством этого утверждения самостоятельно.

И. Клумова

◆

М621. *Вокруг окружности описан n-угольник. Произвольная точка P внутри окружности соединена со всеми его вершинами и точками касания. Образовавшиеся $2n$ треугольников окрашены попеременно в красный и синий цвет. Докажите, что произведение площадей красных треугольников равно произведению площадей синих треугольников.*



Пусть $A_1A_2\ldots A_n$ — описанный n-угольник, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — длины отрезков касательных, проведенных к окружности из точек $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ $(t_1=|A_1T_1|=|A_1T_n|;\ t_2=|A_2T_2|=|A_2T_1|$ и т. д.) и $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}, h_n$ — расстояния от точки P до прямых $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ соответственно (см. рисунок). Тогда произведения площадей красных и синих треугольников

$$\frac{t_1h_1}{2}\cdot\frac{t_2h_2}{2}\cdot\frac{t_3h_3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{t_nh_n}{2}$$

и

$$\frac{t_1h_n}{2}\cdot\frac{t_2h_1}{2}\cdot\frac{t_3h_2}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{t_nh_{n-1}}{2}$$

оба равны $t_1t_2\ldots t_nh_1h_2\ldots h_n/2^n$.

Укажем более сложный вариант этой задачи, предложенный *У. Аллой: если соединить последовательные точки касания отрезками, то произведение n длин тех частей отрезков, которые попали в синие треугольники, равно произведению n длин тех частей отрезков, которые попали в красные треугольники.* Для доказательства достаточно заметить, что отношение, в котором отрезок A_kP разбивает отрезок $T_{k-1}T_k$, равно отношению площадей треугольников $PT_{k-1}A_k$ и PT_kA_k.

Н. Васильев

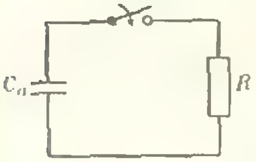
◆

Ф623. *Переменный конденсатор с начальной емкостью C_0, заряженный до напряжения U, замыкают на резистор с сопротивлением R (см. рисунок). Как нужно изменять со временем емкость конденса-*

Ток в цепи определяется напряжением на резисторе, равным напряжению на конденсаторе: $I=U/R$. Так как ток должен быть постоянным, постоянным должно быть и напряжение на конденсаторе, то есть

$$\frac{q_0}{C_0}=\frac{q_0-\Delta q}{C},$$

тора, чтобы в цепи шел постоянный ток? Какую мощность развивают внешние силы, благодаря которым изменяется емкость конденсатора?



где q_0 — начальный заряд конденсатора, $\Delta q = It = Ut/R$ — заряд, прошедший по цепи за время t, C — емкость конденсатора в момент времени t. Отсюда

$$C = C_0\left(1-\frac{\Delta q}{q_0}\right) = C_0\left(1-\frac{t}{RC_0}\right).$$

Для определения мощности N, развиваемой внешними силами, воспользуемся законом сохранения и изменения энергии: изменение энергии системы за время t равно работе внешних сил, то есть

$$\left(\frac{CU^2}{2}-\frac{C_0U^2}{2}\right)+I^2Rt = Nt.$$

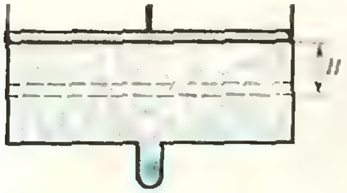
Отсюда, учитывая зависимость емкости от времени, находим мощность внешних сил:

$$N = \frac{U^2}{2R}.$$

П. Зубков

◆

Ф624. *В отростке сосуда, закрытого плоским поршнем диаметра $D=5$ см, имеется небольшое количество воды (см. рисунок). Диаметр отростка $d=2$ мм. Если при постоянной температуре $t=20$ °C поршень опустить на $H=10$ см, то уровень воды в отростке повысится на $h=1$ мм. Найти давление насыщенных паров воды при температуре $t=20$ °C.*



Так как в отростке с самого начала находится вода, водяной пар в сосуде — насыщенный. При опускании поршня его давление не меняется, а весь пар, находящийся в «исчезающем» объеме

$$V = \pi D^2/4H,$$

конденсируется. Масса сконденсировавшейся воды равна

$$m = \varrho\pi d^2/4h,$$

где $\varrho = 10^3$ кг/м³ — плотность воды.

Из уравнения Менделеева — Клапейрона находим давление насыщенного пара:

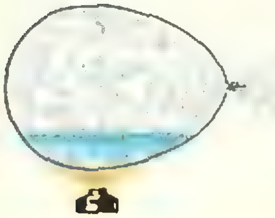
$$p = \frac{m}{\mu}\frac{RT}{V} = \varrho\left(\frac{d}{D}\right)^2\frac{h}{H}\frac{RT}{\mu} = 2{,}16 \text{ кПа}.$$

Замечание. В полученной формуле величины d и D, h и H образуют безразмерные комбинации. Следовательно, значения этих величин можно подставлять в любых, но обязательно одинаковых единицах измерения. Например, d и D — в миллиметрах, а h и H — в сантиметрах. При условии, что остальные величины (ϱ, R, T и μ) выражены в единицах СИ, ответ получится в паскалях.

В. Белонучкин

◆

Ф625. *Из яичной скорлупы сделан реактивный двигатель, показанный на рисунке. Площадь отверстия в скорлупе $s=3$ мм². Какова наибольшая сила тяги такого двигателя, если температура воды и скорлупе поддерживается равной 100° C?*



Согласно закону сохранения импульса, реактивная сила, действующая на скорлупу, равна по модулю разности импульсов молекул, вылетевших из скорлупы за единицу времени и влетевших в скорлупу за то же время. С другой стороны, давление газа на стенку есть не что иное как удвоенный импульс молекул, ударяющихся о единицу площади поверхности стенки в единицу времени. Таким образом, импульс молекул, вылетающих из отверстия площадью s в единицу времени, равен $ps/2$, импульс влетающих молекул — $p_0s/2$ (где p и p_0 — давления внутри скорлупы и вне ее соответственно), а искомая сила

$$F = \frac{ps}{2}-\frac{p_0s}{2} = (p-p_0)\frac{s}{2}.$$

Максимальное давление, которое теоретически можно получить внутри скорлупы, несколько больше удвоенного атмосферного давления. Действительно, если воду в скорлупе нагревать так быстро, что масса воздуха не успеет измениться, давление будет складываться из давления воздуха (которое при 100°C несколько больше атмосферного) и давления насыщенного водяного пара (которое при 100° C равно атмосферному). В этом случае

$$F_{max} = (p_{max}-p_0)\frac{s}{2} = p_0\frac{T}{T_0}\frac{s}{2} \approx 0{,}2 \text{ Н}.$$

Однако оценочный расчет дает, что для этого нагревание воды должно продолжаться не более 10^{-2} с, что практически нереально.

Если же скорлупу нагревать медленно, весь воздух за время нагрева успеет выйти из скорлупы и давление внутри будет таким же, как и снаружи. Искомая сила при этом будет равна нулю.

С. Семенчинский

◆

Ф626. *Гимнаст падает с высоты $H=12$ м на горизонтальную натянутую упругую сетку, которая прогибается при этом на величину $h=1$ м. Оценить, во сколько раз максимальная сила, действующая на гимнаста со стороны сетки, больше силы тяжести, если размеры сетки много больше h и масса сетки мала по сравнению с массой человека.*

При деформации натянутой сетки в ней возникают упругие силы. Результирующая этих сил, действующая на гимнаста, направлена вверх. Так как, по условию задачи, прогиб сетки мал по сравнению с ее размерами, результирующая подчиняется закону Гука: $F=kx$, где F — модуль силы, действующей на гимнаста, x — величина прогиба сетки и k — коэффициент пропорциональности. Максимальный прогиб сетки $x_{\max}=h$ и максимальное значение силы натяжения

$$F_{\max}=kx_{\max}=kh.$$

Таким образом, для оценки отношения $F_{\max}/mg$ необходимо найти k. Поскольку требуется лишь оценить это отношение, а не найти его точное значение, для простоты будем считать, что сетка абсолютно упругая и что сопротивлением воздуха движению гимнаста можно пренебречь. При этих упрощениях имеет место закон сохранения механической энергии: изменение потенциальной энергии тяготения гимнаста равно изменению потенциальной энергии упруго растянутой сетки, то есть

$$mg(h+H)=\frac{kh^2}{2}$$

(мы учли, что в момент, когда прогиб сетки равен h, скорость гимнаста равна нулю). Отсюда найдем коэффициент упругости сетки:

$$k=\frac{2mg(h+H)}{h^2}.$$

В соответствии с этим

$$\frac{F_{\max}}{mg}=\frac{kh}{mg}=2\left(1+\frac{H}{h}\right)=26.$$

А. Изергин, С. Манида, В. Саулит

◆

Ф627. *Пока вы решали задачи из «Кванта», картошка, которая варилась на плите, сварилась, вода выкипела и кастрюля изнутри пригорела. Куда надо лить холодную воду, чтобы нагар легче отскочил — внутрь кастрюли или на ее внешнюю поверхность?*

Почему вообще нагар отлетает от кастрюли? Всегда ли это происходит? Оказывается, нет. Если оставить кастрюлю остывать на воздухе, нагар — увы! — не отлетит. Если же кастрюлю поливать водой, нагар отстанет от кастрюли. Почему?

Чтобы слой нагара отделился от металла, на него надо подействовать внешними силами, превышающими силы межмолекулярного притяжения. Это может сделать, например, водяной пар, когда вода проникает в трещины или поры слоя нагара и испаряется там. Однако такой эффект практически не дает никаких результатов.

Эксперимент показывает, что нагар отделяется гораздо лучше, если поливать водой не внутреннюю, а наружную поверхность кастрюли, причем начинать это нужно как можно быстрее, пока кастрюля еще не остыла. Причиной тому — неодинаковая скорость охлаждения металла и слоя нагара.

При охлаждении и металл, и нагар сжимаются. Если их температуры будут различными, со стороны более холодного тела на более горячее будут действовать сжимающие силы, а на более холодное тело — растягивающие. Оказывается, нагар отделяется от металла и в первом, и во втором случаях. Однако, чем больше разность температур, тем больше силы возникают, и нагар быстрее отскакивает от дна кастрюли. Поскольку теплопроводность у металла гораздо больше, чем у слоя нагара, если пригоревшую кастрюлю охлаждать водой снаружи, металл будет быстро остывать, а нагар будет продолжать оставаться горячим. Если же кастрюлю охлаждать изнутри, нагар будет остывать медленно, температура металла будет успевать следовать за температурой нагара и разности температур практически не будет.

Возникают ли силы, способствующие отделению нагара, при медленном охлаждении, то есть практически при равенстве температур металла и нагара? Да, так как у металла и у нагара различные коэффициенты линейного расширения. Но оказывается, эти силы недостаточны для разрушения слоя нагара и его отделения от дна кастрюли.

Л. Ашкинази

◆

Ф628. *В вертикальной трубке длиной $H=152$ см, запаянной с нижнего конца, имеется столбик воздуха высотой $h=76$ см, запертый столбиком ртути (рис. 1). Атмосферное давление равно 10^5 Па, а температура $t_0=17°$ С. До какой температуры t_1 следует нагреть воздух в трубке, чтобы вся ртуть вылилась?*

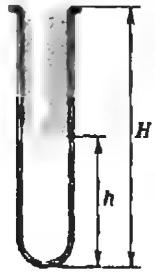


Рис. 1.

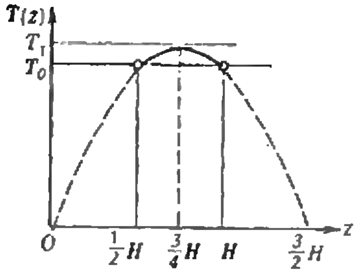


Рис. 2.

Начальное давление воздуха в трубке складывается из гидростатического давления столбика ртути высотой $H-h\approx76$ см и давления атмосферы. Атмосферное давление по условию равно 10^5 Па ≈76 см рт. ст. Таким образом, начальное давление воздуха в трубке приблизительно равно удвоенному атмосферному давлению.

Будем считать, что вытекание ртути происходит медленно, так что систему в каждый момент можно считать находящейся в состоянии равновесия. В конечном состоянии, когда почти вся ртуть выльется, давление воздуха в трубке будет равно атмосферному, то есть вдвое меньше начального. Объем же воздуха HS (S — площадь поперечного сечения трубки) будет вдвое больше начального объема hS. Согласно уравнению состояния идеального газа это означает, что температура в конечном состоянии должна быть такой же, как и в начальном!

Разумеется, вообще без повышения температуры ртуть выливаться из трубки не будет. Поэтому полученный результат означает, что для ответа на вопрос задачи нельзя ограничиться рассмотрением только начального и конечного состояний, а нужно проследить за всем процессом.

Выясним, как должна изменяться температура воздуха в трубке для того, чтобы ртуть выливалась постепенно и в каждый момент времени систему можно было считать находящейся в состоянии равновесия.

Обозначим высоту столбика воздуха в некоторый момент времени через z. Тогда давление воздуха в трубке $p(z)$ равно

$$p(z)=p_0+\varrho g(H-z), \qquad (1)$$

где ϱ — плотность ртути, а p_0 — атмосферное давление, которое по условию задачи приблизительно равно давлению столбика ртути высоты $H/2$:

$$p_0=\varrho gH/2. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получаем

$$p(z)=\varrho g\left(\frac{3}{2}H-z\right). \qquad (3)$$

Поскольку мы предполагаем, что воздух в трубке находится в состоянии термодинамического равновесия при любом z, то давление $p(z)$ воздуха, занимаемый им объем Sz и температура $T(z)$ связаны уравнением состояния идеального газа:

$$\frac{p(z)Sz}{T(z)}=\frac{2p_0SH/2}{T_0}, \qquad (4)$$

где T_0 — начальная температура, $2p_0$ — начальное давление воздуха в трубке, $SH/2$ — начальный объем воздуха. Подставляя в (4) $p(z)$ из (3) и p_0 из (2), находим зависимость температуры от высоты столбика воздуха в трубке:

$$T(z)=T_0\frac{(3H-2z)z}{H^2}. \qquad (5)$$

График функции $T(z)$ показан на рисунке 2. Процессу выливания ртути соответствует участок между точками $z=H/2$ и $z=H$, изображенный сплошной линией. Видно, что для медленного (квазиравновесного) процесса температура должна сначала повышаться до значения $T_1=(9/8)T_0$ (при этом

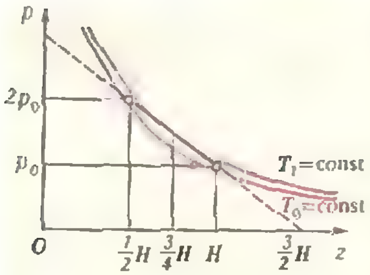


Рис. 3.

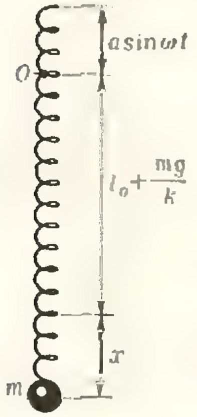
выльется половина первоначального количества ртути), а затем понижаться до начального значения T_0. Поэтому для полного выливания ртути воздух в трубке нужно нагреть до температуры $T_1 \approx 326$ К. Достигнув этой температуры, нужно сохранить контакт с нагревателем, имеющим температуру T_1. Дальше ртуть будет выливаться сама, причем этот процесс уже не будет квазиравновесным.

Чтобы лучше уяснить это, полезно рассмотреть процесс на p—V-диаграмме (рис. 3). Равновесному процессу вытекания ртути соответствует линейная зависимость давления воздуха в трубке от z, описываемая формулой (3) и показанная сплошной прямой между значениями $z=H/2$ и $z=H$. На этом же рисунке изображены изотермы, соответствующие температурам T_0 и T_1. Начальное и конечное состояние лежат на одной изотерме. Видно, что при температуре выше T_1 ни одна изотерма не пересекает прямой $p(z)$, то есть равновесие воздуха в трубке не возможно ни при каком значении высоты столбика z. Поэтому, если температура воздуха будет поддерживаться хотя бы чуть выше значения T_1, вся ртуть неизбежно будет вытолкнута воздухом из трубки.

Е. Бутиков, А. Быков, А. Кондратьев

◆

Ф629. *Шарик массы m подвешен на пружине жесткости k (пружинный маятник). Точка подвеса пружины совершает вертикальные гармонические колебания с амплитудой a и частотой ω. Как движется шарик при установившихся колебаниях?*



На рисунке показано положение системы в некоторый момент времени t. Точка O — положение равновесия точки подвеса; x — отклонение шарика от положения равновесия, при котором длина пружины равна l_0+mg/k (l_0 — длина пружины в нерастянутом состоянии).

Запишем уравнение движения шарика:

$$mg-k\Delta X=m\ddot{x}.$$

Подставив $\Delta X=\frac{mg}{k}+x+a\sin\omega t$ (полное удлинение пружины), получим:

$$m\ddot{x}+kx=-ka\sin\omega t. \qquad (1)$$

Вынужденные колебания шарика происходят с частотой вынуждающей силы, то есть с частотой ω. В установившемся режиме собственные колебания, частота которых $\omega_0=\sqrt{k/m}$, отсутствуют.

Будем искать решение (1) в виде

$$x=A\sin\omega t+B\cos\omega t. \qquad (2)$$

где A и B — некоторые постоянные коэффициенты, которые нужно определить. Взяв дважды производную от (2) и подставив (2) в (1), получим:

$$(-A\omega^2m+kA)\sin\omega t+(-B\omega^2m\cos\omega t+kB)\cos\omega t=$$
$$=-ka\sin\omega t. \qquad (3)$$

Это равенство должно выполняться в любой момент времени.

Взяв $t_1=0$ и $t_2=\pi/2\omega$, найдем $B=0$, $A=\frac{ka}{\omega^2m-k}=\frac{a}{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}-1}$.

Подставив найденные значения A и B в (2), получим:

$$x=\frac{a\sin\omega t}{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}-1}.$$

А. Зильберман

◆

Ф630. *Элемент атомной батареи представляет собой конденсатор, на одну из пластин которого нанесен радиоактивный препарат, испускающий α-частицы со скоростью $v_0=2{,}2\cdot10^6$ м/с. Определить ЭДС этого элемента. Отношение заряда α-частицы к ее массе $k=4{,}8\cdot10^7$ Кл/кг.*

Электродвижущая сила источника равна отношению работы сторонних сил по перемещению заряда по цепи к величине этого заряда. Максимальной ЭДС будет тогда, когда α-частицы уже не будут достигать противоположной пластины конденсатора. Другими словами, когда работа сторонних сил равна кинетической энергии вылетающих α-частиц: $\mathcal{E}q=\frac{mv_0^2}{2}$.

Отсюда

$$\mathcal{E}=\frac{mv_0^2}{2q}=\frac{v_0^2}{2k}\approx5\cdot10^5\ \text{В}=500\ \text{кВ}.$$

А. Григоренко, ученик 10 класса,
г. Макеевка Донецкой обл.

Играют полифигуры

В «Кванте» (1978, № 11, с. 37) уже рассматривались группы коней, живущих на (бесконечной) шахматной доске по закону взаимной защиты. Напомним, что набор коней, занимающий определенную позицию, называется *активным эскадроном*, если, передвигая их (на каждом ходу по шахматным правилам передвигается какой-нибудь из коней набора), мы можем достичь одним из коней любого наперед заданного поля, причем как в начальный момент, так и после каждого хода любой конь защищен, по крайней мере, одним конем из набора. Пример активного эскадрона из пяти коней показан на рисунке 1 (доказательство — «Квант», 1978, № 12, с. 61).

Естественным обобщением активного эскадрона является полифигура $П(n, k)$ — набор из n одинаковых фигур, передвигая которые (на каждом ходу по шахматным правилам передвигается какая-нибудь из фигур набора), мы можем достичь одной из фигур любого наперед заданного поля, причем как в начальный момент, так и после каждого хода, любая фигура защищена, по крайней мере, k фигурами из набора*). Для коней соответствующая полифигура будет называться *эскадроном* $Э(n, k)$ (например, активный эскадрон на рисунке 1 — это $Э(5,1)$), для королей — *кланом* $K(n, k)$, для ферзей — *фракцией* $Ф(n, k)$ и для ладей — *лигой* $Л(n, k)$.

Задача 1. *Докажите, что лига, фракция, эскадрон и клан возможны только при* $k=1$, $k<3$, $k<2$ *и* $k<2$ *соответственно.*

На рисунке 2 показаны $Л(3,1)$, $Ф(2,1)$, $Ф(3,2)$, $K(2,1)$ и $K(4,2)$. Легко проверить, что при фиксированном k эти полифигуры минимальны по n (по количеству фигур).

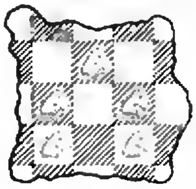
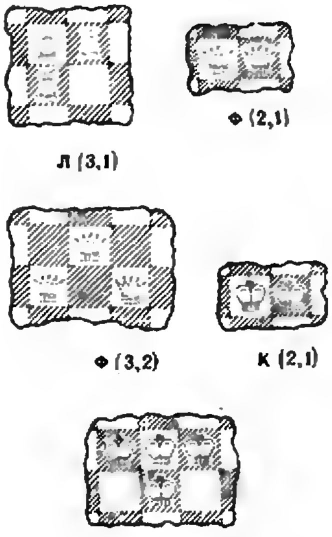


Рис. 1.



Л (3,1) Ф (2,1) Ф (3,2) К (2,1) К (4,2)

Рис. 2.

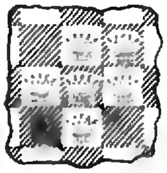


Рис. 3.

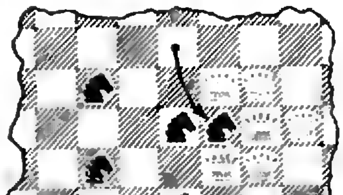


Рис. 4.

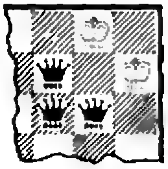


Рис. 5.

На рисунке 3 показана минимальная (по n) фракция $Ф(n, 3)$: для нее $n=6$.

Задача 2. *Проверьте, что полифигура на рисунке 3 действительно является фракцией* $Ф(6, 3)$ *и докажите ее минимальность по* n *(при* $K=3$*).*

Указание: сдвиг на одну клетку всей фракции — шестиходовка!

Описанными выше полифигурами можно играть (например, на доске 8×8), если договориться о правилах; ниже мы сформулируем три правила, позволяющих ставить игровые задачи.

I. Игроки ходят поочередно, на каждом ходу переставляя одну из своих фигур на свободное поле (брать чужие фигуры нельзя) так, чтобы не испортить своих полифигур.

II. Полифигура $П(n, k)$ считается *уничтоженной* ходом полифигуры $П'(n', k')$, если у полифигуры $П$ этим ходом нарушено «условие k-кратной защиты». Уничтоженная полифигура снимается с доски. (Например, эскадрон $Э(5, 1)$ на рисунке 4 уничтожил фракцию $Ф(6, 3)$, разрушив взаимную защиту двух крайних слева ферзей.)

III. Клану $K(n, k)$ объявлен шах (соответственно мат), если он объявлен каждому из королей клана. (На рисунке 5 показано, как фракция $Ф(3, 2)$ объявила мат клану $K(2, 1)$.)

Задача 3. Поставит ли фракция $Ф(2, 1)$ форсированный мат клану $K(2,1)$ на доске 8×8? А фракция $Ф(3, 2)$ — клану $K(2, 1)$?

При этих правилах ни клан, ни эскадрон не могут быть уничтожены. Подумайте, как переделать правило II с тем, чтобы эскадрон тоже можно было уничтожить.

В заключение мы предлагаем вам самостоятельно поиграть в полифигурные шахматы. Если при этом возникнут интересные вопросы, напишите нам.

В. Чванов

---

*) При этом фигуры считаются «непрозрачными»: например, две ладьи Ла2 и Ла3 защищают ладью Ла1 не двукратно, а однократно.

Квант для младших школьников

Задачи

1. В жаркий летний день представители нескольких фирм собрались на переговоры.

Вначале, при обсуждении двусторонних договоров, за каждым столом сидели по два человека — и служители поставили на каждый стол по бутылке минеральной воды.

Потом представители разбились на группы по трое — и служители принесли каждой группе по бутылке лимонада.

В заключение за каждым столом уселись по четыре человека — и на каждый стол поставили по бутылке фруктового сока. Кроме того, каждый представитель выпил по бутылочке пепси-колы.

После совещания со всех столов было собрано 50 пустых бутылок. (Известно, что все поданные напитки были выпиты и никто не унес с собой ни одной бутылки.)

Сколько человек участвовало в совещании?

2. Имеются шестилитровая кастрюля и четырехлитровая банка (см. рисунок). Требуется налить из бочки один литр воды.

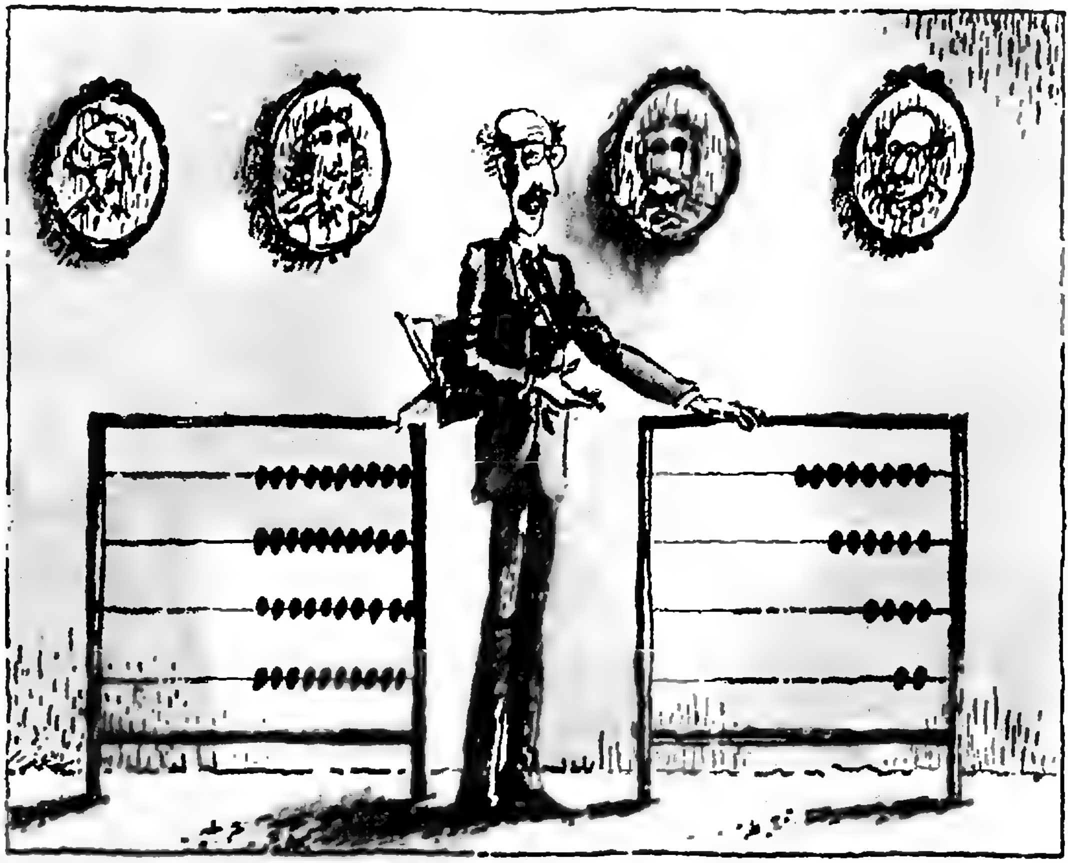
3. Дедушка подарил Пете на день рожденья пятирублевую бумажку. Пошел Петя в «Спорттовары», чтобы купить компас за 3 рубля. Подошел к кассе, а кассирша говорит: «Чем я тебе сдачи давать буду? У меня одна медь, да и той, боюсь, не хватит!» Стала набирать 2 рубля: сначала пятаками — пятаки скоро кончились, потом трехкопеечными монетами — и эти кончились, затем «двушками». Когда кончились и «двушки», набралось 1 рубль 99 копеек, а в кассе осталась одна-единственная копейка. Взяла ее кассирша и говорит: «Ну, повезло тебе! Ровно 2 рубля набралось!»

Взял Петя сдачу, получил компас, собрался уходить и вдруг видит на витрине замечательное увеличительное стекло — и стоит всего-то 1 рубль. Думает Петя: «Наберется рубль без сдачи — куплю!»

Пришел он домой и рассказывает дедушке всю эту историю. Дедушка подумал секундочку и говорит: «Показывай скорей и компас, и стекло. Посмотрим, такое ли оно замечательное!»

Как дедушка догадался, что Петя купил увеличительное стекло?

Эти задачи нам предложили
А. Кушин, Г. Кушниренко,
А. Халамайзер



В. Касаткин

Пригодны ли счеты?

В математическом кабинете, где занимались участники школьного математического кружка, стояли счеты, изображенные на заставке слева. Но однажды, прийдя на очередное занятие кружка, школьники увидели еще одни, «испорченные» счеты (они изображены на заставке справа).

— Что это такое? Зачем нам испорченные счеты? — спросил кто-то из ребят.

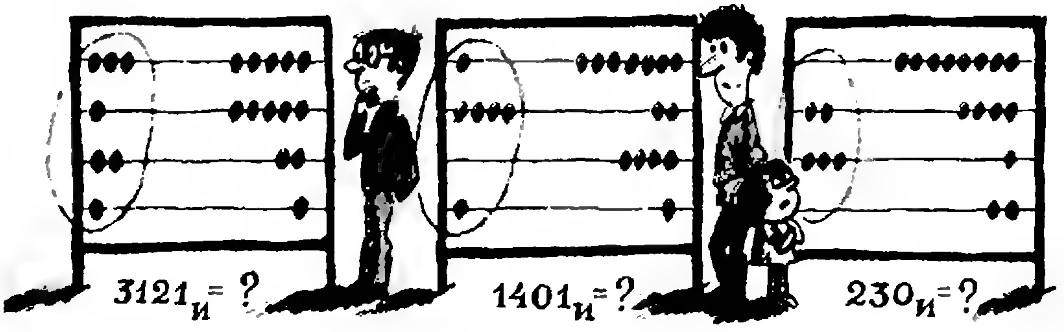
— Не удивляйтесь,— сказал учитель математики.— Это новые счеты, на которых мы сейчас научимся считать.

Прежде всего разберемся в их конструкции. Каждая косточка нижней проволочки, как и на привычных вам счетах, имеет «вес» равный единице. А вот любая из четырех косточек, расположенных на второй снизу проволочке, заменяет уже не десять косточек нижней проволочки, как в обычных счетах, а две, и поэтому ее «вес» равен не десяти, а двум. Легко сообразить, какой «вес» имеет любая из косточек, расположенных на третьей и четвертой проволочках.

— Я, кажется, догадался,— воскликнул один из школьников.— Любая косточка третьей проволочки заменяет четыре косточки второй проволочки, и поэтому «вес» ее равен восьми, а «вес» косточки с самой последней проволочки равен уже сорока восьми единицам.

— Правильно,— подтвердил учитель.— Таким образом, «веса» косточек образуют последовательность 1, 2, 8 и 48.

Знакомство с необычными счетами привело нас к новой системе счисления; назовем ее «испорченной». Посмотрим, что в этой системе означает, например, запись $3021_{\text{и}}$.



Имеем

$$3021_{и}=3\cdot48+0\cdot8+2\cdot2+1=149_{10},$$

то есть $3021_{и}$ — это десятичное число 149.

Нетрудно сообразить, что в младшем разряде этой системы придется использовать только цифры 0 и 1, в следующем — цифры 0, 1, 2, 3, в следующем — цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5. Легко понять, как будут выглядеть в этой системе признаки делимости на 2, 8, 48 (числа берутся в десятичной системе): число $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ четно тогда и только тогда, когда $a_4=0$; число $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ делится на 8 тогда и только тогда, когда $a_3=a_4=0$ (то есть оканчивается двумя нулями); число $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ делится на 48 тогда и только тогда, когда $a_2=a_3=a_4=0$ (оканчивается тремя нулями).

Научиться считать на «испорченных» счетах совсем несложно.

Прошло несколько минут, и ребята уверенно складывали и вычитали числа в «испорченной» системе счисления, решали и другие забавные задачи на «испорченных» счетах.

Предлагаем и вам попробовать свои силы в решении некоторых задач.

Задачи

1. а) Имеется 23 камешка. При их пересчитывании (по одному) велось откладывание косточек (по одной) на новых счетах. Как будут выглядеть счеты по окончании пересчитывания всех камешков? Изобразите счеты с отмеченным на них результатом пересчитывания и запишите это число в «испорченной» системе.

б) Какое наибольшее число можно отложить на «испорченных» счетах? Запишите это число в «испорченной» системе. Какому десятичному числу оно равно?

2. На счетах, изображенных на рисунке, отмечены числа в «испорченной» системе. Каким десятичным числам они соответствуют?

3. Отложите на необычных счетах десятичные числа 37, 59, 101, 269.

4. Выполните указанные действия (результаты проверьте на счетах):

$231_{и}+120_{и}$; $4021_{и}+2521_{и}$; $320_{и}+4430_{и}$;
$221_{и}-30_{и}$; $1001_{и}-231_{и}$; $4021_{и}-311_{и}$.

5. Утройте число $21_{и}$. Расскажите, как вы выполнили умножение.

6. Выполните умножение $1311_{и}\times21_{и}$.

Письмо в редакцию

Уважаемый товарищ редактор!

Недавно вышла из печати книга В. Гильде и З. Альтрихтера «С микрокалькулятором в руках» (М., «Мир», 1980), рассчитанная на массового читателя. Хочу обратить Ваше внимание на опечатки в этой (в целом очень хорошей) книге на с. 38, которые опасны прежде всего для юного читателя, поскольку старшее поколение, возможно, еще помнит правильное значение числа π и стихи для его запоминания.

Во-первых, приведенное значение числа π неверно в двух последних знаках. Правильное значение составляет 3,1415926536, это округление значения 3,141592653589...

Во-вторых, не подходит известный стишок для запоминания числа π. В этом стишке число букв в словах определяет последовательные цифры числа π, но все дело в том, что приведенный в книге текст дает верный результат только в старой орфографии:

Кто и шутя, и скоро пожелаетъ
Пи узнать число, ужъ знаетъ!

Е. С.

Р. Гордин

Что такое степень?

Оперируя со степенями, мы обнаруживаем замечательный факт: умножению, делению и возведению в степень степеней одного и того же числа с целыми показателями соответствуют сложение, вычитание и умножение показателей. Это соответствие сохраняется и при переходе к рациональным показателям.

Возникает вопрос: можно ли так определить степень с действительным показателем, чтобы замеченное нами соответствие сохранилось?

Здесь мы проследим, листая школьные учебники, за всеми последовательными этапами обобщения понятия степени: от степеней с натуральными показателями до степеней с произвольными действительными показателями.

Степень с натуральным показателем

Определение 1. $a^n = a \cdot a \cdot \cdot a \cdot \ldots \cdot a$, $a^1 = a$ (здесь $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$). Из этого определения легко вывести следующие свойства степени:

1^0. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

2^0. $\dfrac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} \text{ при } m>n \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} \text{ при } n>m. \end{cases}$

3^0. $(a^m)^n = a^{mn}$.

4^0. Если $a>0$, то $a^n>0$.

5^0. Если $a>1$ и $m>n$, то $a^m>a^n$.

6^0. Если $0<a<1$ и $m>n$, то $a^m<a^n$.

Обратите внимание на свойство 1^0. Его иногда называют *основным свойством показателя степени* или *основным свойством показательной функции*.

При дальнейших последовательных обобщениях понятия степени мы будем в первую очередь стремиться к сохранению именно этого свойства (остальные свойства 2^0—6^0 также будут сохраняться, и на каждом шагу их можно будет вывести из свойства 1^0).

Степень с целым показателем

Примем следующие определения («Алгебра 7», §4):

Определение 2. $a^0 = 1$.

Целесообразность этого определения вытекает из простого рассуждения: пусть $a^0 = k$; тогда (мы стремимся к сохранению свойства 1^0) $a^m \cdot k = a^m \cdot a^0 = a^{m+0} = a^m$; следовательно, должно быть $k=1$.

Это рассуждение не является доказательством соотношения $a^0=1$. Оно лишь подводит нас к «хорошему» определению нулевой степени.

Определение 3. Пусть $a \neq 0$, $n \in \mathbf{N}$. Тогда $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Это определение также диктуется необходимостью сохранения свойства 1^0 (убедитесь в этом).

Докажем теперь, что $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ для любых $m \in \mathbf{Z}$ и $n \in \mathbf{Z}$.

Мы ограничимся случаем $m<0$ и $n<0$.

Имеем $a^m \cdot a^n = \dfrac{1}{a^{-m}} \cdot \dfrac{1}{a^{-n}} = \dfrac{1}{a^{-m-n}} = \dfrac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}$.

Упражнения.

1. Докажите свойство 1^0 для оставшихся случаев, а также свойства 2^0—6^0.

2. Почему следующие определения — «плохие»: а) $a^{-n} = \dfrac{2}{a^n}$; б) $a^{-n} = -a^n$; в) $a^0 = 2$?

Степень с рациональным показателем

Напомним, прежде всего, что число r называется *рациональным*, если $r = \dfrac{m}{n}$, где $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$. При этом представление рационального числа в виде дроби не единственно. Так, $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\ldots$

Будем искать определение степени a^r, где $a>0$, $r=\frac{m}{n}$, исходя из необходимости сохранения свойства 1°.*) Это значит, что для любых r_1 и r_2 должно выполняться соотношение $a^{r_1+r_2}=a^{r_1}\cdot a^{r_2}$.

Предположим, что мы уже знаем, что такое $a^{\frac{m}{n}}$. Пусть $a^{\frac{m}{n}}=k$. Тогда должно быть $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n=k^n=$ $=a^{\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\ldots+\frac{m}{n}}=a^m$. Окончательно получаем $k=\sqrt[n]{a^m}$.

Это соотношение подсказывает следующее определение:

Определение 4. Если $a>0$, то $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$. Заметим, что для отрицательных a понятие степени с рациональным не целым показателем *не определяется.* Также заметим, что в учебнике изучению степеней с рациональными показателями предшествует тема «Корень n-й степени и его свойства» («Алгебра 8», §9), в которой выводятся основные свойства корня n-й степени, позволяющие доказать, что принятое нами определение a^r корректно. Под корректностью определения в данном случае понимается независимость числа a^r от записи числа r в виде дроби, то есть, в конечном счете, справедливость равенства $\sqrt[n]{a^m}=$ $=\sqrt[kn]{a^{km}}$, где $k\in \mathbf{N}, m\in \mathbf{Z}, n\in \mathbf{N}$.

Упражнение 3. Повторите свойства корня n-й степени и выведите из них свойства 1°—6° степени с рациональным показателем.

Степень с действительным показателем.

В учебнике «Алгебра и начала анализа 10» вводится показательная функция с любым действительным показателем (п. 108). Фактически и здесь ставится задача найти «хорошее» определение степени с действительным показателем, причем в самом определении показательной функции перечисляются те ее свойства, которые могут быть выведены из этого «хорошего» определения. Каково же «хорошее» определение степени с любым действительным показателем?

Пусть для определенности $a>1$. Если x — рациональное число, то a^x нами уже определено, причем функция $y=a^x$ в силу свойства 5° возрастает на множестве $\mathbf{Q}$ всех рациональных чисел (при $0<a<1$ функция $y=a^x$ убывает (свойство 6°) на множестве $\mathbf{Q}$).

Для того чтобы продолжить функцию $y=a^x$ на множество $\mathbf{R}$ всех действительных чисел, мы сначала потребуем лишь сохранения монотонности этой функции.

Пусть α — иррациональное число, а r_1 и r_2 — рациональные числа, для которых $r_1<\alpha<r_2$. Предположим, что нам уже известно, что такое a^α. В силу нашего требования, должны быть справедливы неравенства

$$a^{r_1}<a^\alpha<a^{r_2}.$$

Таким образом, число a^α должно быть заключено между любыми двумя числами a^{r_1} и a^{r_2}, где $r_1<\alpha<r_2$.

В курсах математического анализа доказывается, что существует единственное число β, для которого справедливы все неравенства $a^{r_1}<$ $<\beta<a^{r_2}$, где r_1 и r_2 — произвольные рациональные числа, для которых $r_1<\alpha<r_2$.

Это дает возможность сформулировать следующее определение:

Определение 5. Пусть α иррационально и $a>0$. Тогда a^α — это действительное число, заключенное между любыми двумя числами a^{r_1} и a^{r_2}, где r_1 и r_2 рациональны и $r_1<\alpha<r_2$.

Рамки школьного курса не позволяют доказать существование числа a^α, и мы примем его на веру. Ограничимся доказательством единственности.

Для доказательства нам понадобится важное и само по себе неравенство Бернулли $(1+h)^n\geqslant 1+nh$, где $n\in \mathbf{N}$ и $h\geqslant -1$.

---

*) «Алгебра 8», § 10.

Докажем его методом математической индукции.

При $n=1$ это неравенство верно $(1+h \geqslant 1+h)$. Предположим, что $(1+h)^k \geqslant 1+kh$, и докажем, что $(1+h)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)h$. Имеем

$$(1+h)^{k+1}=(1+h)(1+h)^k \geqslant$$
$$\geqslant (1+h)(1+hk)=1+hk+h+h^2k=$$
$$=1+h(k+1)+h^2k \geqslant 1+h(k+1),$$

что и требовалось доказать.

Докажем теперь, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ при $a>0$.

Пусть дано $\varepsilon>0$ и $a>1$ *), тогда $\sqrt[n]{a} = 1+\varepsilon_n$, где $\varepsilon_n>0$. Отсюда, применяя неравенство Бернулли, получаем $a=(1+\varepsilon_n)^n \geqslant 1+n\varepsilon_n$. Поэтому $0<\varepsilon_n \leqslant \frac{a-1}{n}$. Легко видеть, что $\frac{a-1}{n} < \varepsilon$ при $n>N=\left[\frac{a-1}{\varepsilon}\right]+1$.

Мы доказали, таким образом, что $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n=0$, но это и значит, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} (1+\varepsilon_n)=1.$$

Теперь перейдем к доказательству единственности.

Пусть существуют 2 числа β и γ, для которых справедливы неравенства $a^{r_1}<\beta<a^{r_2}$ и $a^{r_1}<\gamma<a^{r_2}$ при любых рациональных r_1 и r_2, для которых $r_1<\alpha<r_2$. Пусть для определенности $\beta>\gamma$.

Тогда $0<\beta-\gamma<a^{r_2}-a^{r_1}=a^{r_1}(a^{r_2-r_1}-1)$. Ясно, что $a^{r_1}<a^{[\alpha]+1}=c$. Существуют для любого $n \in \mathbf{N}$ такие $r_1^{(n)}$ и $r_2^{(n)}$, что $r_1^{(n)}<\alpha<r_2^{(n)}$ и $r_2^{(n)}-r_1^{(n)}<\frac{1}{n}$.

Для этих $r_2^{(n)}$ и $r_2^{(n)}$ (по свойству 5^0 для рационального показателя) $0<\beta-\gamma<c(a^{\frac{1}{n}}-1)$.

По доказанному ранее, для любого $\varepsilon>0$ существует такое N, что при всех $n>N$ справедливо неравенство $a^{\frac{1}{n}}-1<\frac{\varepsilon}{c}$. Поэтому при любом $\varepsilon>0$ справедливо неравенство $0<\beta-\gamma<\varepsilon$, что невозможно.

Исходя из определения 5, можно доказать, что для степени с действительным показателем сохраняются все свойства 1^0—6^0, установленные нами для натуральных показателей. Этим и завершается построение функции $y=a^x$.

Следует заметить, что при определении степени с иррациональным показателем мы отошли от принятой ранее схемы: строить определения, лишь исходя из необходимости сохранения свойства 1^0.

Оказывается, продолжить показательную функцию $y=a^x$, определенную на множестве $\mathbf{Q}$ рациональных чисел, с сохранением лишь свойства 1^0 можно бесконечным количеством способов.

Точнее, существует бесконечно много функций $y=f(x)$ таких, что $f(x)=a^x$ при $x \in \mathbf{Q}$, для которых $f(x+y)=f(x) \cdot f(y)$.

Из всех этих функций монотонной (и непрерывной) будет лишь одна построенная нами функция $y=a^x$ Все остальные функции этого семейства устроены достаточно «дико». Например, любая из них не ограничена ни на каком промежутке числовой оси.

Как вычислить $2^{\sqrt{2}}$?

Рассмотрим несколько десятичных приближений $\sqrt{2}$ по недостатку и по избытку. Эти приближения удовлетворяют неравенствам $1<\sqrt{2}<2$; $1{,}4<\sqrt{2}<1{,}5$; $1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42$. Тогда, по нашему определению 5, число $2^{\sqrt{2}}$ должно удовлетворять неравенствам $2^1<2^{\sqrt{2}}<2^2$; $2^{1{,}4}<2^{\sqrt{2}}<2^{1{,}5}$; $2^{1{,}41}<2^{\sqrt{2}}<2^{1{,}42}$, или $2<2^{\sqrt{2}}<4$; $2{,}6<2^{\sqrt{2}}<2{,}9$; $2{,}65<2^{\sqrt{2}}<2{,}68$.

Второе из этих неравенств позволяет найти $2^{\sqrt{2}}$ с точностью до целых, третье — с точностью до десятых. Понятно, что можно получить значение $2^{\sqrt{2}}$ с любой заданной точностью, взяв соответствующие приближения $\sqrt{2}$.

Упражнения

4. Чем больше $2^{\sqrt{3}}$ или $3^{\sqrt{2}}$?

5. Докажите свойства 4^0 и 5^0 для степени с любым действительным показателем.

6. Докажите свойство 1^0 для степени с любым действительным показателем.

7. Докажите непрерывность функции $y=a^x$ а) при $x=0$; б) при $x=x_0$, где $x_0 \in \mathbf{R}$.

8. Пусть α и β — иррациональные числа. Может ли число α^β быть рациональным?

9. Докажите, что $y=a^x$ и $y=\exp_a x$ — одна и та же функция.

---

*) Случай $0<a<1$ разберите самостоятельно.

Модели звездчатых многогранников

На первой и четвертой страницах обложки воспроизведены два красочных чертежа (эпюра)*), с помощью которых можно строить модели различных многогранников, в частности звездчатых. Прежде чем начать конструирование модели, ознакомьтесь с основными приемами построения развертки многогранника, описанными ниже.

Возьмем небольшой лист кальки; на нем и будет нарисована развертка (вернее, ее половина — см. рис. 1) одного из многогранников.

Первый шаг состоит в выборе начальной грани на одном из эпюров или, что удобнее, на рисунках 2, 3 (этот выбор определяет, какой именно из возможных многогранников мы построим); в нашем случае выбран центральный пятиугольник *PSTUR* на рисунке 2. Перенесем этот пятиугольник на кальку и оставим ее на рисунке в том же положении.

Рассмотрим одну из вершин грани *PSTUR*, скажем *P*. Число граней нашего многогранника, примыкающих к этой вершине, будет равно числу прямых (в данном случае 3), проходящих через нее на эпюре, увеличенному на 1. Как построить эти 4 грани?

Если вершина является *полюсом* (как *P*), то есть около нее на эпюре нарисованы черные дужки, нужно воткнуть циркуль в эту вершину, повернуть кальку на угол, указанный меньшей из дужек, и перенести на кальку очертания той же грани в новом положении. Так у нас получится вторая грань, примыкающая к первой по ребру *PS* (рис. 1). Выполнив еще дважды поворот на тот же угол, мы получим остальные две грани, примыкающие к *P*.

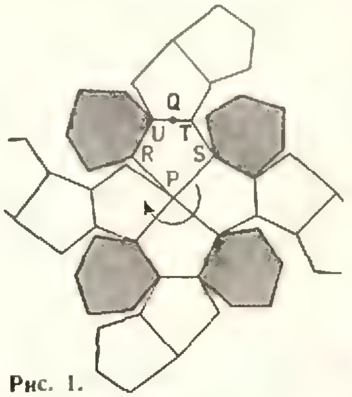


Рис. 1.

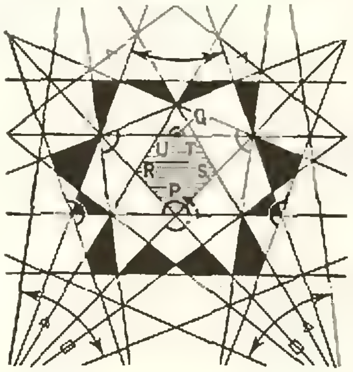


Рис. 2.

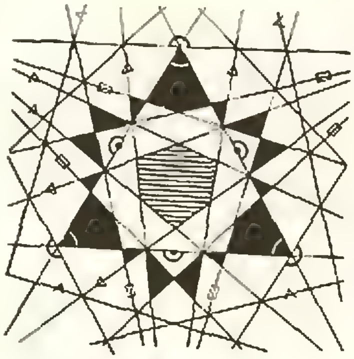


Рис. 3.

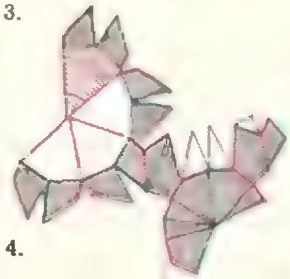


Рис. 4.

Возьмем теперь вершину *U*, которая уже не является полюсом. Через нее проходят 2 прямые, и, значит, к ней должны примыкать 3 грани.

Чтобы найти грань, примыкающую к ребру *UT*, заметим, что середина *Q* этого ребра — полюс с дужкой в 180°. В соответствии с этим, повернем кальку около *Q* на 180° и нарисуем новое положение грани

На ребре *UR* уже нет полюсов: дальнейшее построение в таких случаях нужно продолжить на другом эпюре. Чтобы найти место, куда следует приложить кальку, заметим, что прямая отмечена на рисунке 2 значком △. Найдите этот же значок на рисунке 3, приложите ребро *UR* вдоль какой-нибудь прямой, помеченной им, и двигайте вдоль нее кальку, пока к грани *PSTUR* не примкнет грань того же цвета (центральная шестиугольная грань на рисунке 3 — найдите ее и на рисунке 1!). Такое совмещение может получиться не сразу — прямых со знаком △ на рисунке 3 несколько, нужную вы найдете методом проб и ошибок.

Дальнейшие построения проводятся в таком же духе. При этом кальку приходится перебрасывать с одной эпюры на другую, пользуясь меткой △, но не бездумно (нужно помнить, что склеиваются ребра одинаковой длины!). В итоге вы должны получить на кальке развертку, совпадающую с рисунком 1.

Проделав это, проверьте себя, выполнив теми же приемами развертку звездчатого многогранника, показанную на рисунке **4**. Начинается это построение с одной из черных четырехугольных граней на рисунке 3 (на рисунке **4** эта грань заштрихована красным).

Разобравшись в методике построения разверток, вы можете перейти к практическому конструированию моделей в натуральную величину. Для этого следует перенести оба эпюра в увеличенном масштабе на два листа ватмана. (Это можно сделать с помощью эпидиаскопа или пантографа; если у вас нет этих приборов, вам придется поработать циркулем и линейкой) Затем возьмите большой лист кальки, выбирайте начальную грань... и действуйте!

Начальных граней много — на целый школьный кружок хватит. Если у вас получатся красивые модели, сфотографируйте и пришлите их нам.

В. Гамаюнов

---

*) Метод раскрашивания эпюров «концентрическими кругами» предложен архитектором А. М. Бреславец.

А. Егоров

Логарифмические уравнения

На вступительных экзаменах часто встречаются уравнения, содержащие переменную под знаком логарифма. Такие уравнения принято называть *логарифмическими*.

Простейшим логарифмическим уравнением является уравнение вида $\log_a x = b$. Если $a>0$, $a\neq 1$ и $b>0$, оно имеет единственный корень $x=a^b$.

В дальнейшем мы часто будем пользоваться следующими свойствами логарифмов:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y, \qquad (1)$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, \qquad (2)$$

$$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x, \qquad (3)$$

$$\log_{a^\beta} x = \frac{1}{\beta} \log_a x, \qquad (4)$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \qquad (5)$$

(здесь всюду $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $b\neq 1$, $x>0$, $y>0$). Полезно также запомнить такой частный случай формулы (5):

$$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}. \qquad (5')$$

Рассмотрим теперь некоторые распространенные типы логарифмических уравнений.

Пример 1. *Решить уравнение*

$$\log_4 x + \log_{\frac{1}{16}} x + \log_8 x^3 = 5.$$

Решение. Пользуясь свойством (4), приведем все логарифмы к основанию 2; учитывая свойство (3), получим

$$\frac{1}{2}\log_2 x - \frac{1}{4}\log_2 x + \log_2 x = 5,$$

откуда $\frac{5}{4}\log_2 x = 5$, $\log_2 x = 4$, $x = 16$.

Ответ. $\{16\}$.

Иногда после некоторых преобразований уравнение удается привести к виду

$$f(\log_a x) = 0. \qquad (6)$$

Решение уравнения (6) после замены $y = \log_a x$ и отыскания корней уравнения $f(y)=0$ сводится к решению простейших уравнений $\log_a x = y$. Поэтому главная задача — найти преобразования, приводящие исходное уравнение к уравнению вида (6).

Пример 2 (МИИГАиК, 1977). *Решить уравнение*

$$(\log_x 9x^2) \cdot \log_3^2 x = 4.$$

Решение. Переходя к логарифмам по основанию 3, получим равносильное уравнение

$$\frac{\log_3 9x^2}{\log_3 x} \cdot \log_3^2 x = 4,$$

откуда $(2+2\log_3 x)\cdot\log_3 x = 4$. Полагая $y=\log_3 x$, приходим к квадратному уравнению $y^2+y-2=0$, откуда либо $y=-2$, либо $y=1$. Осталось решить простейшие уравнения $\log_3 x = -2$ и $\log_3 x = 1$.

Ответ. $\left\{\frac{1}{9}, 3\right\}$.

Пример 3. *Решить уравнение*

$$x^{\lg x} = 10^{2\lg^2 x - 3\lg x + 2}.$$

Решение. Здесь x стоит под знаком логарифма, и поэтому $x>0$.

Логарифмируя левую и правую части по основанию 10, получаем равносильное уравнение

$$\lg^2 x = 2\lg^2 x - 3\lg x + 2.$$

Полагая $y=\lg x$, приходим к квадратному уравнению $y^2-3y+2=0$, имеющему корни $y_1=1$ и $y_2=2$.

Ответ. $\{10, 100\}$.

Довольно часто встречаются также уравнения вида

$$\log_a f(x) = g(x) \qquad (7)$$

или уравнения, приводящиеся к виду (7).

Уравнение (7) равносильно (при $a>1$, $a\neq 1$) уравнению $f(x)=a^{g(x)}$.

Пример 4. *Решить уравнение*
$$\log_3(4\cdot 3^{x-1}-1)=2x-1.$$

Решение. Данное уравнение равносильно следующему:
$$4\cdot 3^{x-1}-1=3^{2x-1}.$$

Сделав замену $y=3^x$, придем к квадратному уравнению
$$y^2-4y+3=0;$$
решая его, находим $y_1=1$, $y_2=3$.

Ответ. $\{0, 1\}$.

Уравнение вида
$$\log_{g(x)}f(x)=a \qquad (8)$$
равносильно системе
$$\left\{\begin{array}{l} f(x)=[g(x)]^a, \\ g(x)>0, \\ g(x)\neq 1. \end{array}\right. \qquad (8')$$

Пример 5 (МГУ, геолог. ф-т, 1966). *Решить уравнение*
$$\log_{(x+1)}(x^2+x-6)^2=4.$$

Решение. Уравнение равносильно системе
$$\left\{\begin{array}{l} (x^2+x-6)^2=(x+1)^4, \\ x+1>0, \\ x+1\neq 1. \end{array}\right.$$

Имеем $(x^2+x-6)^2-[(x+1)^2]^2=0$, откуда
$$[x^2+x-6+(x+1)^2]\,[x^2+x-6-(x+1)^2]=0,$$
так что уравнение этой системы равносильно такому:
$$(2x^2+3x-5)(x+7)=0,$$
откуда $x_1=1$, $x_2=-\frac{5}{2}$, $x_3=-7$.

Системе удовлетворяет лишь значение $x=1$.

Ответ. $\{1\}$.

В некоторых случаях после преобразований исходное уравнение приводится к виду
$$\log_a f(x)=\log_a g(x). \qquad (9)$$

Легко видеть, что всякий корень уравнения (9) удовлетворяет системе
$$\left\{\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)>0. \end{array}\right. \qquad (9')$$

Наоборот, если x_0 — решение системы (9'), то $\log_a f(x_0)=\log_a g(x_0)$, так что всякое решение системы (9') удовлетворяет и уравнению (9). Таким образом, уравнение (9) равносильно системе (9').

Пример 6. *Решить уравнение*
$$\log_8(7x^2-5x-6)=2\log_4\sqrt[3]{3x-1}.$$

Решение. Приводя логарифмы к основанию 2, получим после упрощенний равносильное уравнение
$$\log_2(7x^2-5x-6)=\log_2(3x-1),$$
которое равносильно системе
$$\left\{\begin{array}{l} 7x^2-5x-6=3x-1, \\ 3x-1>0. \end{array}\right.$$

Решая систему, получим $x=\frac{4+\sqrt{51}}{7}$ $\quad(3x_2-1<0)$.

Ответ. $\left\{\frac{4+\sqrt{51}}{7}\right\}$.

Отметим теперь некоторые ошибки, допускаемые учащимися при решении логарифмических уравнений.

Чаще всего эти ошибки бывают связаны с неправильными применениями формул для логарифмирования произведения, дроби и степени.

Например, решая уравнение из примера 5, некоторые школьники пишут вот что:

«Из условия следует, что $2\log_{(x+1)}(x^2+x-6)=4$, откуда $x^2+x-6=(x+1)^2$ или $x=-7$. Но $x=-7$ не удовлетворяет исходному уравнению, и поэтому оно корней не имеет».

Причиной потери корня $x=1$ послужило применение формулы $\log_a x^2=2\log_a x$, которая верна лишь при $x>0$. В нашем же случае выражение x^2+x-6 при $x=1$ отрицательно.

Здесь следовало бы воспользоваться формулой $\log_a x^2=2\log_a|x|$, которая верна при всех $x\neq 0$.

Еще один пример. Решая уравнение
$$\log_2[(x+1)(x-3)]=2\log_4(x+8)-\log_{\frac{1}{2}}[(x+1)(x-5)],$$
ученик привел его к виду
$$\log_2(x+1)+\log_2(x-3)=\log_2(x+8)+\log_2(x+1)+\log_2(x-5),$$
или
$$\log_2(x-3)=\log_2[(x+8)(x-5)]. \qquad (10)$$

После этого он получил квадратное уравнение $x^2+2x-37=0$, откуда нашел $x_1=-1+\sqrt{38}$, $x_2=-1-\sqrt{38}$.

Второй корень ученик отбросил как не удовлетворяющий уравнению (10) и получил ответ $x=-1+\sqrt{38}$.

В чем здесь ошибка? Формула $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$ верна лишь при $x>0$ и $y>0$. Поэтому при логарифмировании произведения и произошла потеря корня $x=-1-\sqrt{38}$, который, на самом деле, исходному уравнению удовлетворяет.

Чтобы убедиться в этом, заметим, что исходное уравнение равносильно системам

$$\begin{cases} \log_2(x+1)(x-3)= \\ =\log_2(x+8)(x+1)(x-5), \\ x+8>0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+1)(x-3)= \\ =(x+8)(x+1)(x-5), \\ x+8>0, \\ (x+1)(x-3)>0. \end{cases}$$

Решения последней системы — $\{-1-\sqrt{38},\ -1+\sqrt{38}\}$.

Применение формул $\log_a u^2=2\log_a u$ и $\log_a uv=\log_a u+\log_a v$ «справа налево», вообще говоря, приводит к расширению области определения уравнения, что может повлечь за собой приобретение посторонних корней. В тех случаях, когда корни полученного уравнения достаточно просты и проверка не обременительна, вовсе не обязательно выписывать системы уравнений и неравенств. Можно переходить к уравнениям-следствиям и в конце решения делать проверку.

Пример 7. *Решить уравнение*

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(x+1)-\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(7-x)=1.$$

Решение. Переходя к логарифмам по основанию 2 и перенося часть слагаемых в правую часть, приходим к уравнению

$$2\log_2(7-x)=1+\log_2(x-1)+\log_2(x+1),$$

откуда получаем уравнение-следствие

$$(7-x)^2=2(x^2-1),$$

или

$$x^2+14x-51=0.$$

Корни этого квадратного уравнения $x_1=3$, $x_2=-17$.

Второй корень, очевидно, не удовлетворяет данному уравнению. Подставляя в него значение $x=3$, убеждаемся, что $x=3$ — действительно его корень.

Ответ. $\{3\}$.

Наконец, приведем еще пример того, как учащиеся теряют корни при использовании формулы перехода к другому основанию.

Пример 8. *Решить уравнение*

$$\log_{2x}x+\log_{8x^2}x=0.$$

«Решение». Переходя к основанию x, получим

$$\frac{1}{\log_x 2+1}+\frac{1}{2+3\log_x 2}=0.$$

Положив $y=\log_x 2$, получим уравнение

$$\frac{1}{y+1}+\frac{1}{3y+2}=0.$$

Это уравнение имеет корень $y=-\frac{3}{4}$. Поэтому $\log_x 2=-\frac{3}{4}$, откуда

$$x_1=2^{-\frac{4}{3}}=\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}.$$

Значение $x=\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$ удовлетворяет уравнению. Однако легко видеть, что и значение $x=1$ является его корнем. В чем же дело?

Корень $x=1$ был потерян при переходе к основанию x, поскольку формула (6) справедлива при $x>0$, $x\neq 1$.

Такое решение можно «спасти», сразу заметив, что $x=1$ удовлетворяет уравнению, а при остальных x решать так, как это и было сделано.

Ответ. $\left\{1,\ \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\right\}$.

Вообще говоря, лучше избегать переходов к основаниям, зависящим от x. Если все же приходится переходить к таким основаниям, то нужно очень внимательно следить за тем, при каких x преобразование возможно, и проверять прямой подстановкой в исходное уравнение те значения x, при которых основание равно 1 или отрицательно.

Так, решая последнее уравнение, лучше перейти к основанию 2. В результате получим

$$\frac{\log_2 x}{1+\log_2 x}+\frac{\log_2 x}{2+3\log_2 x}=0,$$

или, после замены $y=\log_2 x$,

$$\frac{y}{1+y}+\frac{y}{2+3y}=0.$$

Решая это уравнение, найдем корни $y_1=0$, $y_2=-\frac{4}{3}$, после чего без труда получим прежний ответ.

Теперь рассмотрим две задачи, при решении которых используются свойства монотонности некоторых функций.

Пример 9. *Решить уравнение*

$$\log_5(x+3)=3-x.$$

Решение. Легко проверить, что $x=2$ является корнем данного уравнения. Других корней оно, очевидно, не имеет, поскольку функция $\log_5(x+3)$ возрастает во всей своей области определения, а функция $y=3-x$ — убывает.

Ответ. $\{2\}$.

Пример 10. *Решить уравнение*

$$(x+1)\log_3^2 x+4x\log_3 x-16=0.$$

Решение. Положим $y=\log_3 x$ и решим относительно y квадратное уравнение

$$(x+1)y^2+4xy-16=0.$$

Получаем $y=\frac{4}{x+1}$, либо $y=-4$. Осталось решить два уравнения:

$$\log_3 x=\frac{4}{x+1} \text{ и } \log_3 x=-4.$$

Второе из этих уравнений легко решается, а для решения первого достаточно заметить, что $x=3$ удовлетворяет уравнению и функция, стоящая в левой части, возрастает при $x>0$, а функция, стоящая в правой части,— убывает.

Ответ. $\left\{\frac{1}{81};3\right\}$.

В заключение рассмотрим уравнение, которое решается из других соображений.

Пример 11. *Решить уравнение*

$$3x^2-2x^3=\log_2(x^2+1)-\log_2 x.$$

Решение. Правая часть уравнения определена при $x>0$ и равна $\log_2\left(x+\frac{1}{x}\right)$. Поскольку $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$ при $x>0$; $\log_2\left(x+\frac{1}{x}\right)\geqslant 1$. С другой стороны, $3x^2-2x^3\leqslant 1$ при $x>0$ (в этом можно убедиться, например, исследовав функцию с помощью производной). $\log_2\left(x+\frac{1}{x}\right)=1$ при $x=1$. Поскольку $3x^2-2x^3$ тоже равно 1 при $x=1$, левая часть равна правой только при $x=1$.

Ответ. $\{1\}$.

Упражнения

Решите уравнения:

1. $\log_4 x+\log_2 x+2\log_{16} x=5$.
2. (МГУ, геолог. ф-т, 1974)

$$\log_{16}(x^2-2x-3)^2-2\log_{16}(x^2+x-2)=\frac{1}{2}.$$

3. (МГУ, ф-т почвоведения, 1974)

$$\left[(\log_2 x)^2+2\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2\sqrt{2}}\right](3\log_8 x-1)=2\left(\log_2\frac{x}{2}\right)\log_2 x^2.$$

4. (МГУ, эконом. ф-т, отделение политэкономии, 1979)

$$\log_{(3-4x^2)}(9-16x^4)=2+\frac{1}{\log_2(3-4x^2)}.$$

5. (МГУ, ф-т психологии, 1978)

$$\left(\log_3\frac{3}{x}\right)\log_2 x-\log_3\frac{x^3}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}+\log_2\sqrt{x}.$$

6. (МГУ, эконом. ф-т, отделение эконом. кибернетики, 1978)

$$3+\frac{1}{\log_{32}\frac{x}{2}}=\log_{\frac{x}{2}}\left(\frac{75x}{4}-\frac{11}{x}\right).$$

7. (МГУ, эконом. ф-т, отделение политэкономии, 1979)

$$\log_{(2x+1)}(5+8x-4x^2)+\log_{(5-2x)}(1+4x+4x^2)=4.$$

8. (МВТУ, 1979)

$$0{,}5\lg(2x-1)+\lg\sqrt{x-9}=1.$$

9. (МГУ, ф-т почвоведения, 1979)

$$x^2\log_6\sqrt{5x^2-2x-3}-x\log_{\frac{1}{6}}(5x^2-2x-3)=x^2+2x.$$

10. (МГУ, химфак, 1972)

$$\log_{(x^2+6x+8)}(\log_{(2x^2+2x+3)}(x^2-2x))=0.$$

11. (МГУ, физфак, 1975)

$$6^{\log_{\frac{1}{6}}(x+3)}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_4(x^2+5x+12)}$$

12. $\log_2^2 x+(x-1)\log_2 x=6-2x$.
13. $3^x=10-\log_2 x$.
14. $\log_{0.5} x^2-14\log_{16x} x^3+40_{4x}\sqrt{x}=0$.

А. Буздин, В. Тугушев

Закон сохранения энергии для тепловых процессов

При решении задач, связанных с рассмотрением тепловых процессов, важнейшую роль играет закон сохранения и превращения энергии, называемый первым законом термодинамики:

$$Q=\Delta U+A.$$

Здесь Q — количество теплоты, переданное системе, ΔU — изменение ее внутренней энергии и A — работа, совершаемая системой против внешних сил. (В учебном пособии «Физика 9» эта работа обозначена A', для краткости мы «штрих» будем опускать.)

Внутренняя энергия U является функцией термодинамических параметров (давления p, объема V и температуры T), описывающих состояние системы, но не зависит от того, каким образом это состояние возникло. Например, для одноатомного идеального газа

$$U=\frac{m}{\mu}\frac{3}{2}RT,$$

где m — масса газа, μ — его молярная масса, R — универсальная газовая постоянная, равная 8,31 Дж/(моль · К).

Работа A, совершаемая системой, зависит, разумеется, от характера теплового процесса. Так, при небольшом изменении объема ΔV (когда давление можно считать постоянным)

$$A=p\Delta V.$$

Термодинамические параметры системы не являются независимыми переменными, они связаны уравнением состояния. В случае идеального газа это уравнение Менделеева — Клапейрона

$$pV=\frac{m}{\mu}RT.$$

Рассмотрим некоторые типичные задачи на тепловые процессы, предлагавшиеся на вступительных экзаменах.

Задача 1 (МЭИ, 1978 г.). *Над одним молем идеального газа совершают тепловой процесс, изображенный на рисунке 1. Как менялась температура газа на участках 1—2, 2—3, 3—1? На каких участках газ получал, а на каких отдавал тепло?*

Для участка *1—2* зависимость давления от объема — линейная: $p=\alpha V$ (α — некоторый постоянный коэффициент). Из уравнения Менделеева — Клапейрона в этом случае имеем

$$\alpha V^2=RT.$$

Это означает, что температура газа возрастала пропорционально квадрату объема и его внутренняя энергия увеличилась: $\Delta U>0$. Кроме того, газ совершал положительную работу по расширению: $A>0$. Из первого закона термодинамики следует, что количество теплоты

$$Q_{1-2}=\Delta U+A>0$$

— на участке *1—2* газ получал тепло.

На участке *2—3* $V_2=V_3=\mathrm{const}$, то есть работа газом не совершалась: $A=0$. Давление газа падало: $p_3<p_2$; значит, $T_3<T_2$ и $\Delta U<0$. Поэтому на участке *2—3* газ отдавал тепло: $Q_{2-3}<0$.

На участке *3—1* $p_1=p_3=\mathrm{const}$, объем газа уменьшался от V_3 до

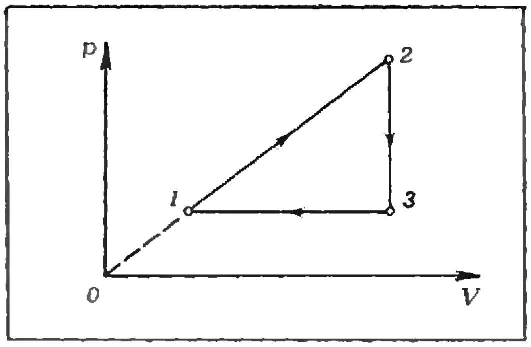


Рис. 1.

V_1 и температура газа падала от T_3 до T_1. Следовательно, $A<0$ и $\Delta U<0$. В итоге $Q_{3-1}<0$ — газ отдавал тепло.

Задача 2 (физический факультет МГУ, 1979 г.). *Идеальный газ совершает работу. При этом состояние газа меняется по замкнутому циклу, состоящему из двух изохор и двух изобар (рис. 2). Температуры газа в точках 1 и 3 равны соответственно T_1 и T_3. Определите работу, совершаемую одним молем газа, если известно, что точки 2 и 4 лежат на одной изотерме.*

На участках *1—2* и *3—4* работа не совершается, так как объем газа не меняется. На участке *2—3* газ совершает работу, равную $p_2(V_3-V_2)$. Эта работа положительна, поскольку газ расширяется. На участке *4—1* совершаемая газом работа отрицательна (газ сжимается) и равна $-p_4(V_4-V_1)$. Полная работа за цикл равна

$$A=p_2(V_3-V_2)-p_4(V_4-V_1)=$$
$$=(p_2-p_4)(V_3-V_2),$$

или, с учетом равенств $p_1=p_4$, $p_2=p_3$ и $V_2=V_1$,

$$A=(p_3-p_1)(V_3-V_1)=$$
$$=p_3V_3-p_1V_3-p_3V_1+p_1V_1.$$

Заметим, что искомая работа численно равна площади фигуры, ограниченной графиком циклического процесса в координатах p,V. Это общий результат, справедливый для любого процесса.

Уравнение Менделеева — Клапейрона для одного моля газа дает

$$p_1V_1=RT_1 \text{ и } p_3V_3=RT_3.$$

Из условия, что точки *2* и *4* лежат на одной изотерме, получаем

$$p_2V_2=p_4V_4, \text{ или } p_3V_1=p_1V_3.$$

В соответствии с этим

$$(p_3V_1)^2=(p_3V_1)(p_1V_3)=$$
$$=(p_3V_3)(p_1V_1)=R^2T_1T_3,$$

откуда

$$p_3V_1=p_1V_3=R\sqrt{T_1T_3}.$$

Тогда окончательно

$$A=RT_3-2R\sqrt{T_1T_3}+RT_1=$$
$$=R(\sqrt{T_3}-\sqrt{T_1})^2.$$

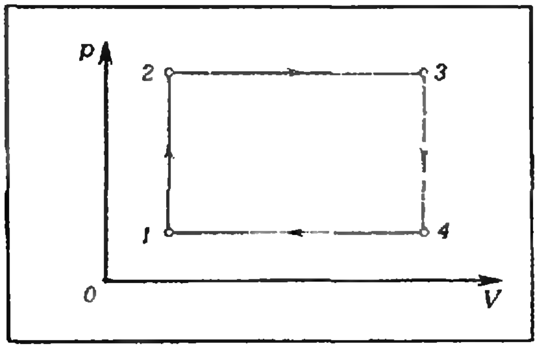


Рис. 2.

* * *

В ряде задач на тепловые явления используется понятие теплоемкости. Теплоемкость тела C определяется как отношение сообщенного телу количества теплоты Q к изменению температуры тела ΔT:

$$C=\frac{Q}{\Delta T}.$$

Хотелось бы подчеркнуть, что теплоемкость существенно зависит от того, каким именно образом телу сообщается тепло. В частности, различают теплоемкости при постоянном объеме C_V и при постоянном давлении C_p. Найдем, как связаны между собой молярные теплоемкости (теплоемкости одного моля) C_p и C_V идеального газа.

Нагреем моль газа на ΔT градусов один раз изохорически, а другой раз — изобарически. Из первого закона термодинамики следует, что необходимое количество теплоты $Q=\Delta U+A$. В случае изохорного процесса ($V=\text{const}$) газ работы не совершает: $A=0$, поэтому

$$Q_1=\Delta U \text{ и } C_V=\frac{Q_1}{\Delta T}=\frac{\Delta U}{\Delta T}.$$

При изобарном процессе ($p=\text{const}$) $A=p\Delta V=R\Delta T$ (мы использовали уравнение Менделеева — Клапейрона для одного моля газа), а изменение внутренней энергии ΔU — такое же, как и в первом случае. Следовательно,

$$Q_2=\Delta U+R\Delta T \text{ и } C_p=\frac{\Delta U}{\Delta T}+R.$$

Таким образом,

$$C_p=C_V+R.$$

Теперь разберем три конкретные задачи.

Задача 3 (МФТИ, 1976 г.). *Один моль идеального газа, первоначально находившегося при нор-*

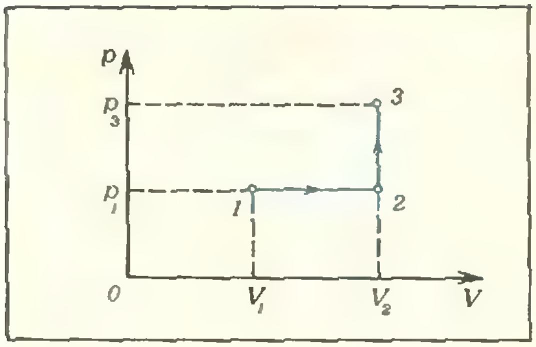


Рис. 3.

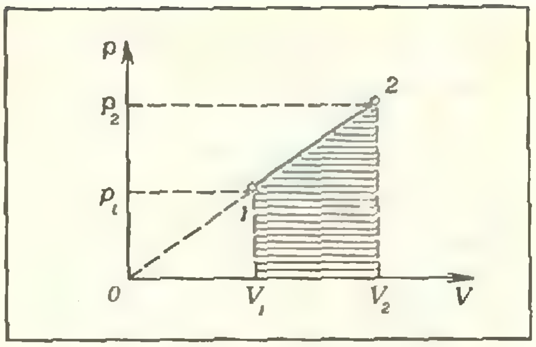


Рис. 4.

мальных условиях, переводят в состояние с вдвое бóльшими объемом и давлением. Процесс перевода слагается из двух участков — изобары и изохоры. Какое количество теплоты было подведено к газу? Теплоемкость газа $C_V=21$ Дж/(моль · K).

Изобразим рассматриваемый процесс в координатах p, V (рис. 3). На участке 1—2 давление остается постоянным, а объем возрастает в два раза ($V_2=2V_1$). Согласно закону Гей-Люссака, температура в точке 2 будет $T_2=2T_1$. На участке 2—3 сохраняется постоянным объем газа, но вдвое увеличивается давление. По закону Шарля температура в точке 3 будет равна $T_3=2T_2=4T_1$.

Зная температуры газа в точках 1, 2, 3 (по условию в точке 1 газ находится при нормальных условиях, то есть $T_1=273$ К), нетрудно найти подведенное к газу количество теплоты:

при изобарном процессе 1—2 газ получил количество теплоты

$$Q_1=C_p(T_2-T_1)=(C_V+R)T_1;$$

при изохорном процессе 2—3 газу сообщили количество теплоты

$$Q_2=C_V(T_3-T_2)=2C_VT_1;$$

полное количество теплоты, подведенное к газу, равно

$$Q=Q_1+Q_2=(3C_V+R)T_1\approx 20 \text{ кДж}.$$

Задача 4 (МЭИ, 1977 г.). *Один моль газа расширяется так, что его объем во время процесса пропорционален давлению: $V=\alpha p$. Давление газа увеличивается от p_1 до p_2. Найдите коэффициент α, если теплоемкость моля газа при постоянном объеме равна C_V и во время процесса газу сообщается количество теплоты Q.*

Используя первое начало термодинамики, запишем

$$Q=\Delta U+A.$$

Изменение внутренней энергии газа

$$\Delta U=C_V\Delta T,$$

где ΔT — изменение температуры. В случае процесса, при котором $V=\alpha p$, уравнение газового состояния имеет вид $\alpha p^2=RT$. Тогда

$$\Delta T=T_2-T_1=\frac{\alpha}{R}\,(p_2^2-p_1^2)$$

и

$$\Delta U=\frac{C_V\alpha}{R}\,(p_2^2-p_1^2).$$

Для нахождения работы A, совершенной газом, удобно использовать графический метод (рис. 4): работа равна площади заштрихованной области, то есть

$$A=\frac{p_1+p_2}{2}\,(V_2-V_1)=\alpha\,\frac{p_2^2-p_1^2}{2}.$$

Таким образом,

$$Q=\Delta U+A=\left(\frac{C_V}{R}+\frac{1}{2}\right)\,\alpha\,(p_2^2-p_1^2).$$

Решая это уравнение относительно α, получаем

$$\alpha=\frac{Q}{(C_V/R+1/2)\,(p_2^2-p_1^2)}.$$

Задача 5 (МФТИ, 1980 г.). *При одинаковом изменении температуры количества теплоты, подведенные к одной и той же порции идеального газа один раз при постоянном давлении, а другой раз при постоянном объеме, отличаются на $\Delta Q=7$ Дж. Определите изменение внутренней энергии газа при этих процессах. Коэффициент пропорциональности C_V между температу-*

рой и внутренней энергией одного моля данного газа равен 20,75 Дж/(моль • К), газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль • К).

Внутренняя энергия определенной порции идеального газа зависит только от его температуры, поэтому ее изменение в обоих процессах будет одинаковым и равным $\Delta U=\nu C_V\Delta T$, где ν — число молей газа, ΔT — изменение его температуры.

Количество теплоты, подведенное к газу при изохорном процессе, равно

$$Q_1=\nu C_V\Delta T,$$

а количество теплоты, подведенное при изобарном процессе, равно

$$Q_2=\nu C_p\Delta T=\nu(C_V+R)\Delta T.$$

Значит,

$$\Delta Q=Q_2-Q_1=\nu R\Delta T,$$

откуда находим

$$\Delta U=\frac{\Delta Q C_V}{R}\approx 17\text{ Дж}.$$

* * *

Циклические тепловые процессы лежат в основе работы тепловых машин, важной характеристикой которых является коэффициент полезного действия (КПД). Рассмотрим задачу на расчет этой величины.

Задача 6 (физический факультет МГУ, 1976 г.). *Тепловая машина имеет КПД $\eta=40\%$. Каким станет КПД машины, если количество теплоты, потребляемое за цикл, увеличится на 20%, а количество теплоты, отдаваемое холодильнику, уменьшится на 10%?*

По определению коэффициент полезного действия равен отношению работы A, совершаемой тепловой машиной за цикл, к величине получаемого ею количества теплоты $Q_п$. Из закона сохранения энергии следует, что совершаемая работа равна разности получаемого количества теплоты и количества теплоты $Q_{от}$, отдаваемого тепловой машиной холодильнику. Таким образом,

$$\eta=\frac{A}{Q_п}=\frac{Q_п-Q_{от}}{Q_п}=1-\frac{Q_{от}}{Q_п}.$$

Отсюда нетрудно найти, что вначале, когда КПД машины составлял 40%, отношение $Q_{от}/Q_п$ было равно 0,6. Затем, по условию задачи, количество теплоты, потребляемое за цикл, увеличилось на 20%, то есть стало равным $Q'_п=1{,}2Q_п$, а отдаваемое холодильнику количество теплоты уменьшилось на 10%, то есть стало равным $Q'_{от}=0{,}9Q_{от}$. Значит, новое значение КПД

$$\eta'=1-\frac{Q'_{от}}{Q'_п}=1-\frac{0{,}9Q_{от}}{1{,}2Q_п}=0{,}55.$$

Мы нашли, таким образом, что КПД тепловой машины увеличился и стал равным 55%.

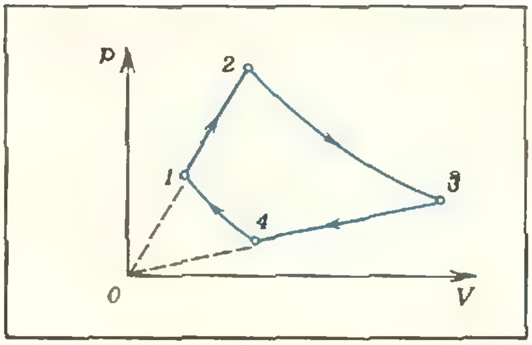


Рис. 5.

Упражнения

1. В цилиндрическом сосуде под невесомым поршнем находится газ при температуре $t=20°C$. Газ занимает объем $V=1$ л. При увеличении температуры газа на $\Delta t=10°C$ поршень поднимается. Найдите работу A, совершенную газом. Атмосферное давление $p_0=10^5$ Па, трение поршня о стенки сосуда отсутствует.

2. Какое количество теплоты необходимо подвести молю идеального газа при нагревании его на 1°C в тепловом процессе, в котором давление p и объем V связаны соотношением $p=\alpha V$, где α — некоторая постоянная. Молярную теплоемкость газа при постоянном объеме C_V принять равной $5/2R$.

3. Некоторая масса газа имеет давление p_0, объем V_0 и температуру T_0. Затем газ при постоянном объеме нагревают до температуры $T_1=2T_0$, после этого происходит расширение газа при постоянном давлении до объема $V_2=4V_0$. Из получившегося состояния газ возвращают к начальному (p_0, V_0, T_0), причем так, что во время этого процесса $pV^n=\text{const}$. Определите n.

4. На рисунке 5 изображен график циклического теплового процесса в координатах p, V. Участки *2—3* и *4—1* соответствуют изотермическим процессам. Определите, как менялась температура идеального газа. На каких участках газ отдавал, а на каких поглощал тепло?

5. Температура некоторой массы m идеального газа с молярной массой μ меняется по закону $T=\alpha V^2$, где α — постоянная величина. Найдите графически работу, совершаемую газом при увеличении объема от V_1 до V_2. Поглощается или выделяется при этом тепло?

Московский физико-технический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$10\cos^2 x - 16\sin x = \cos 2x + 15.$$

2. На координатной плоскости дан круг радиуса $\sqrt{7}$ с центром в точке $(2; 3)$. Найти все точки вне этого круга, координаты которых удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} 3^x + 3^{y-\frac{1}{2}} = 4, \\ (2x-y)^2 = \frac{9}{4}. \end{cases}$$

3. Длины боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ равны соответственно 8 см и 10 см, а длина основания BC равна 2 см. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найти площадь трапеции.

4. Высота правильной четырехугольной пирамиды вдвое больше диагонали ее основания, объем пирамиды равен V. Рассматриваются правильные четырехугольные призмы, вписанные в пирамиду так, что их боковые ребра параллельны диагонали основания пирамиды, одна боковая грань принадлежит этому основанию, вершины противоположной боковой грани лежат на боковой поверхности пирамиды. Найти:

а) объем той призмы, плоскость боковой грани которой делит высоту пирамиды в отношении 4:1, считая от вершины;

б) наибольшее значение объема рассматриваемых призм.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2y - xy^5z = z^2, \\ xz + 3y^4z^2 = 10x^2y^5, \\ 5y^4z + 3xy^8z^2 = 2x^2. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Решить неравенство

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x - 32\left(\frac{1}{8}\right)^{x^2-1} < 0.$$

2. Решить уравнение

$$\log_{\cos x}\left(\frac{\sin 2x}{\sqrt{2}} + \cos x - \sin^2 x - \sqrt{2}\sin x\right) = 2.$$

3. В круге проведены две взаимно перпендикулярные и пересекающиеся хорды AB и CD. Известно, что $|AB| = |BC| = |CD|$. Установить, что больше: площадь круга или площадь квадрата со стороной AB.

4. Найти все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2^x(y+1)(1-y\cdot 2^x) = a^3, \\ (1+2^x)(1-y\cdot 2^x) = a \end{cases}$$

а) не имеет решений;

б) имеет конечное множество решений;

в) имеет бесконечное множество решений.

В случаях б), в) найти все решения.

5. Длина стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, длина апофемы пирамиды равна $\frac{3}{2}a$. Ортогональной проекцией пирамиды на плоскость, перпендикулярную одной из боковых граней, является равнобедренная трапеция. Найти площадь этой трапеции.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$2x - \sqrt{x^3 + 2x^2 - 3x} = 0.$$

2. Решить неравенство

$$\log_{\frac{x-1}{5x-\text{[illegible]}}}(\sqrt{6} - 2x) < 0.$$

3. В равнобедренную трапецию вписана окружность. Расстояние от центра окружности до точки пересечения диагоналей трапеции относится к радиусу как 3 к 5. Найти отношение периметра трапеции к длине вписанной окружности.

4. На координатной плоскости рассматривается множество N всех точек, координаты $(a; b)$ которых удовлетворяют условиям $a < b$, $|a| < 3$, $|b| < 3$ и таковы, что уравнение

$$(a^3 - b^3)x^4 + (3a + b)x^2 + \frac{1}{a-b} = 0$$

не имеет корней.

а) Принадлежит ли точка $P(-2; -1)$ множеству N?

б) Найти площадь многоугольника, внутренней областью которого является множество N.

5. На ребре BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка F так, что $|B_1F| = \frac{1}{3}|BB_1|$, на ребре C_1D_1 — точка E так, что $|D_1E| = \frac{1}{3}|C_1D_1|$. Какое наибольшее значение может принимать отношение $\frac{|AP|}{|PQ|}$, где точка P лежит на луче (DE), а точка Q — на прямой A_1F?

Решение задач варианта 1

1. Выразив $\cos^2 x$ и $\cos 2x$ через $y = \sin x$, получим систему

$$\begin{cases} 4y^2 + 8y + 3 = 0, \\ |y| < 1, \end{cases}$$

откуда $y = -\frac{1}{2}$. Осталось решить уравнение $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Ответ. $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n\ (n\in Z)$.

Эта задача очень проста, однако некоторые абитуриенты не сумели правильно ее решить. Основная ошибка состояла в том, что они не отбрасывали второй корень $y=-\frac{3}{2}$ квадратного уравнения и рассматривали выражение $\arcsin\left(-\frac{3}{2}\right)$. Плохое знание обратных тригонометрических функций было также заметно и на устном экзамене.

2. Из второго уравнения сразу получаем, что *либо* $y=2x-\frac{3}{2}$, *либо* $y=2x+\frac{3}{2}$.

В первом случае получаем уравнение $3^x+3^{2x-2}=4$, которое заменой $z=3^{x-1}$ приводится к квадратному уравнению $z^2+3z-4=0$ с корнями $z_1=-4$, $z_2=1$.

Так как $z>0$, получаем $3^{x-1}=1$, откуда $x=1$, $y=\frac{1}{2}$.

Во втором случае, как и в первом, приходим к уравнению $3z^2+z-4=0$, где $z=3^x$; решая его, находим $x=0$, $y=\frac{3}{2}$.

Найденные решения могут быть изображены на координатной плоскости точками $M\left(1;\frac{1}{2}\right)$ и $N\left(0;\frac{3}{2}\right)$. Расстояние от точки M до центра $O\ (2;3)$ данного круга равно $|OM|=\sqrt{(1-2)^2+\left(\frac{1}{2}-3\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{29}>\sqrt{7}$.

Точно так же $|ON|=\sqrt{(0-2)^2+\left(\frac{3}{2}-3\right)^2}=$ $=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}<\sqrt{7}$.

Таким образом, вне круга лежит лишь точка M.

Ответ. $\left\{\left(1;\frac{1}{2}\right)\right\}$.

При решении этой задачи некоторые абитуриенты не смогли правильно записать условие того, что точка $(x;y)$ лежит вне заданного круга.

3. Пусть E — середина отрезка AB. Проведем среднюю линию EF трапеции $ABCD$. Поскольку $\widehat{ADE}=\widehat{DEF}$, $(EF)\parallel(AD)$ и $\widehat{ADE}=\widehat{EDF}$ (по условию), получаем $\widehat{DEF}=\widehat{EDF}$, то есть треугольник EFD — равнобедренный. Значит, $|EF|=|FD|=\frac{1}{2}|CD|=5$. Поэтому $|AD|=2|EF|-|BC|=8$. Проведем отрезок BG, параллельный стороне CD (рис. 1). Имеем $|BG|=10$; $|AG|=|AD|-|DG|=|AD|-|BC|=6$ ($BCDG$ — параллелограмм). Зная длины сторон треугольника ABG, можно вычислить угол BAG. По теореме косинусов

$$\cos(\widehat{BAG})=\frac{|BG|^2-|AB|^2-|AG|^2}{2|AB||AG|}=$$
$$=\frac{100-64-36}{2\cdot8\cdot6}=0,$$

то есть $\widehat{BAG}=90^\circ$. Значит, AB — высота трапеции $ABCD$, а площадь трапеции равна $8\cdot5=40$.

Ответ. 40 см^2.

К сожалению, лишь немногие из абитуриентов нашли приведенное здесь простое геометрическое решение. Некоторые пытались решить задачу с помощью векторов, другие вводили большое количество новых параметров (например, углы трапеции) и многократно применяли теорему косинусов, третьи пользовались теоремой об отношении, в котором делит сторону треугольника основание биссектрисы.

4. Обозначим точки пересечения плоскости «верхней» боковой грани призмы с боковыми ребрами пирамиды $SABCD$ через A_1, B_1, C_1, D_1 (рис. 2), а точку пересечения высоты SO пирамиды с этой плоскостью — через O_1. Обозначим длину ребра EH через b, длину стороны EE_1 основания призмы через a, высоту пирамиды $SABCD$ через H. Пусть точка O_1 делит высоту в отношении λ: $\frac{|O_1O|}{|SO|}=\lambda$ (ясно, что $\lambda\in]0;1[$).

Поскольку $|O_1O|=|E_1E|=a$, имеем $a=\lambda H$. Рассмотрим квадрат $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 3). Из условия задачи следует, что отрезки F_1G, E_1H_1 и A_1C_1 попарно параллельны. Найдем длину диагонали A_1C_1. Из подобия треугольников ASC и A_1SC_1 имеем $\frac{|A_1C_1|}{|AC|}=\frac{|SO_1|}{|SO|}$, откуда

$$|A_1C_1|=\frac{H}{2}\cdot\frac{H-\lambda H}{H}=(1-\lambda)\frac{H}{2}.$$

Найдем длину b бокового ребра E_1H_1 призмы:
$$b=|A_1C_1|-2|KE_1|=|A_1C_1|-|E_1F_1|=$$
$$=(1-\lambda)\frac{H}{2}-\lambda H=(1-3\lambda)\frac{H}{2}.$$

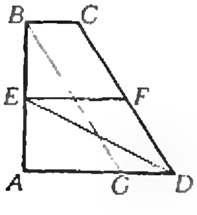


Рис. 1.

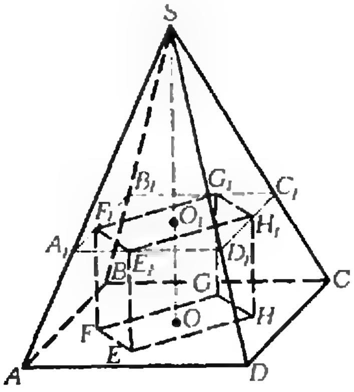


Рис. 2.

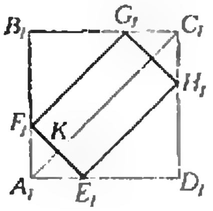


Рис. 3.

Объем $V_{пр}$ призмы $EFGHE_1F_1G_1H_1$ равен $V_{пр}=a^2b=\lambda^2(1-3\lambda)\frac{H^3}{2}$. Поскольку $\frac{1}{24}H^3=V$, окончательно получаем

$$V_{пр}=12\lambda^2(1-3\lambda)V,$$

где $\lambda\in]0;1[$.

Теперь можно ответить на вопрос а). Значение λ в этом случае равно $\frac{1}{1+4}=\frac{1}{5}$, и поэтому $V_{пр}=\frac{24}{125}V$.

Для того чтобы ответить на вопрос б), найдем максимум функции $V_{пр}(\lambda)$ на интервале $]0;1[$. Приравняем нулю производную $V'_{пр}(\lambda)=2\lambda-9\lambda^2=0$, откуда $\lambda=\frac{2}{9}$. Так как при $\lambda<\frac{2}{9}$ $V'_{пр}(\lambda)>0$, а при $\lambda>\frac{2}{9}$ $V'_{пр}(\lambda)<0$ функция $V_{пр}(\lambda)$ имеет при $\lambda=\frac{2}{9}$ наибольшее значение на интервале $]0;1[$, равное $V_{пр}\left(\frac{2}{9}\right)=\frac{16}{81}V$.

Ответ. а) $\frac{24}{125}V$; б) $\frac{16}{81}V$.

Многие из абитуриентов не сумели правильно выбрать тот параметр, через который выражается объем призмы, хотя в условии а) имеется на этот счет явная подсказка. При исследовании функции $V_{пр}(\lambda)$ на экстремум лишь немногие абитуриенты доказали, что при $\lambda=\frac{2}{9}$ имеет место именно максимум.

5. Умножив первое уравнение на $5y^4$ и сложив с вторым, получим

$$2y^4z^2=-5xy^9z+xz. \qquad (1)$$

Возможны два случая: $z=0$ и $z\neq0$. В первом случае из третьего уравнения получим $x=0$, а значения y могут при этом быть любыми. Получаем бесконечное множество решений: $(0, \alpha, 0)$, $\alpha\in\mathbf{R}$.

Если $y=0$, то из третьего и первого уравнений получаем $x=0$ и $z=0$, то есть одно из уже найденных решений. Если же $x=0$, то из первого уравнения $z=0$ и вновь мы приходим к решениям $(0, \alpha, 0)$, $\alpha\in\mathbf{R}$.

Пусть теперь $z\neq0$, $y\neq0$, $x\neq0$. Из (1) получаем

$$z=\frac{x-5xy^9}{2y^4}. \qquad (2)$$

Подставив это соотношение в первое уравнение системы, получим после преобразований уравнение

$$15y^{18}-16y^9+1=0.$$

Положим $t=y^9$. Решая уравнение $15t^2-16t+1=0$, получаем $t_1=1$, $t_2=\frac{1}{15}$, откуда $y_1=1$, $y_2=(15)^{-1/9}$.

Из соотношения (2) получаем

$$y_1^4z=x\left(\frac{1-5y^9}{2}\right)=-2x$$

в первом случае и

$$y_2^4z=x\left(\frac{1-1/3}{2}\right)=\frac{x}{3}$$

во втором.

Разберем первый случай. Подставив y^4z в третье уравнение, получим $12x^2-2x-10=0$, откуда $x_1=-\frac{5}{6}$, $x_2=1$. Воспользовавшись соотношением (2), получим два решения: $\left(-\frac{5}{6};1;\frac{5}{3}\right)$, $(1;1;-2)$.

Во втором случае, действуя так же, как и в первом, находим еще два решения: $(1;15^{-1/9};5\cdot15^{-5/9})$, $(5;15^{-1/9};25\cdot15^{-5/9})$.

Ответ. $\{(0;\alpha;0),\alpha\in\mathbf{R}$; $\left(-\frac{5}{6};1;\frac{5}{3}\right)$; $(1;1;-2)$; $(1;15^{-1/9};5\cdot15^{-5/9})$; $(5;15^{-1/9};25\cdot15^{-5/9})\}$.

Решение этой задачи требовало некоторой изобретательности, и лишь немногие справились с ней полностью. Однако и те, кто продвинулся в решении задачи достаточно далеко, часто теряли решения $(0;\alpha;0)$, $\alpha\in\mathbf{R}$, указывая лишь $(0,0,0)$. Многие абитуриенты не сумели увидеть полученного ими квадратного уравнения относительно y^9 и не знали, что с ним дальше делать.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. На неподвижный груз массой $m=10$ кг, лежащий на горизонтальном столе и прикрепленный к стене пружиной жесткостью $k=4\cdot10^3$ Н/м, на некоторое время τ прикладывается постоянная сила $\vec{F}$ (рис. 4). При каких значениях τ после прекращения действия силы $\vec{F}$ груз будет снова неподвижным? Трением пренебречь.

2. Цилиндрическую гирю, подвешенную к динамометру, опускают в воду (рис. 5), пока уровень воды в сосуде не изменится на $\Delta h=8$ см. Показание динамометра при этом изменилось на $|\Delta\vec{F}|=0{,}5$ Н. Определите сечение сосуда.

3. На две плоскопараллельные сетки, между которыми приложена разность потенциалов U_0, падает параллельный пучок отрицательно заряженных частиц под углом $\alpha=60°$ (рис. 6). При каких энергиях частицы смогут пройти через сетки, если заряд частиц равен q?

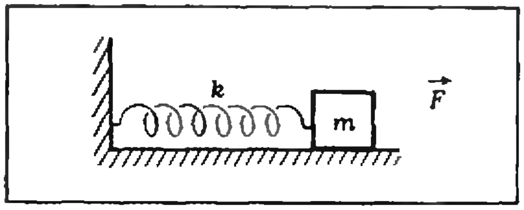


Рис. 4.

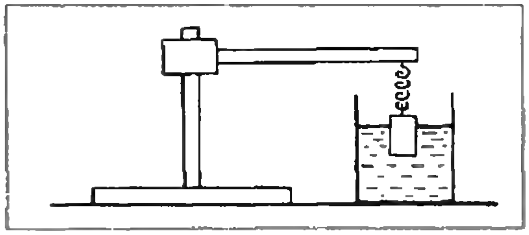


Рис. 5.

4. На некотором расстоянии за тонкой отрицательной линзой с фокусным расстоянием $F_л = 10$ см находится сферическое вогнутое зеркало. Система линза + зеркало создает прямое изображение предмета в натуральную величину. Затем зеркало отодвинули от линзы на $l = 2$ см, при этом вновь получилось изображение предмета в натуральную величину. Определите расстояние от предмета до линзы.

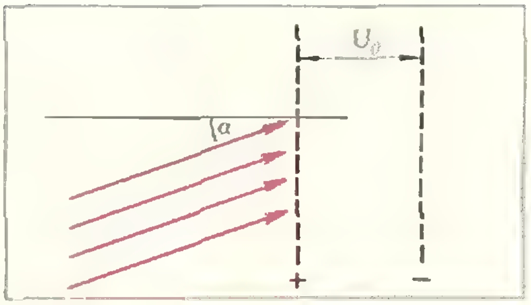


Рис. 6.

Вариант 2

1. Ядерная реакция $^{14}N + {}^4He \rightarrow {}^{17}O + p$ может идти, если налетающие на неподвижные ядра азота α-частицы имеют энергию, превышающую пороговую энергию $E_п = 1{,}45$ МэВ. На сколько энергия α-частиц должна быть больше пороговой, чтобы кинетическая энергия образующихся в реакции протонов была равна нулю?

2. В горизонтально расположенном цилиндре сечением S находится массивный поршень (рис. 7). В начальный момент поршень удерживается на расстоянии l_0 от дна сосуда, для чего к нему пришлось приложить силу $\vec{F}$. После прекращения действия силы $\vec{F}$ поршень начинает двигаться без трения. На каком расстоянии от дна поршень будет иметь наибольшую скорость? Процесс считать изотермическим. Внешнее давление равно p_0.

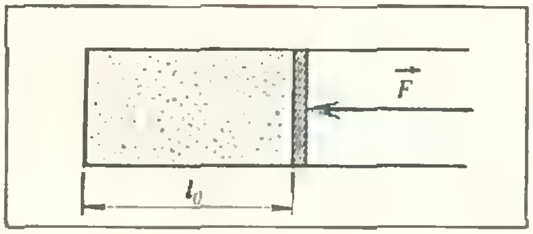


Рис. 7.

3. Колебательный контур, состоящий из катушки индуктивности и конденсатора, через ключ K подключен к источнику постоянной ЭДС с внутренним сопротивлением r (рис. 8). Первоначально ключ K замкнут. После установления стационарного режима ключ размыкают, и в контуре возникают колебания с периодом T. При этом амплитуда напряжения на конденсаторе в n раз больше ЭДС батареи. Найдите индуктивность катушки и емкость конденсатора. Омическим сопротивлением катушки пренебречь.

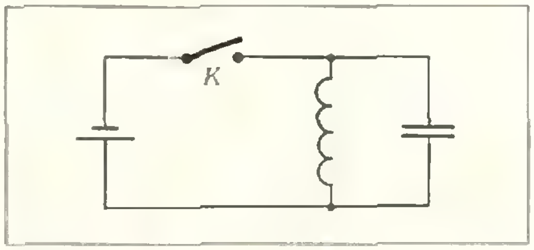


Рис. 8.

4. Предмет и его изображение, создаваемое тонкой положительной линзой, находятся по одну сторону от линзы. Расстояние между предметом и изображением $a_1 = 4$ см. Точно такое же изображение того же предмета получено с помощью сферического зеркала, имеющего такое же, как у линзы, фокусное расстояние. При этом расстояние между предметом и изображением оказалось равным $a_2 = 8$ см. Определите фокусное расстояние линзы.

Вариант 3

1. С какой минимальной горизонтальной силой $\vec{F}$ надо действовать на брусок массой $m = 1$ кг, находящийся на наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30°$, чтобы брусок покоился (рис. 9)? Коэффициент трения бруска о наклонную плоскость $\mu = 0{,}2$.

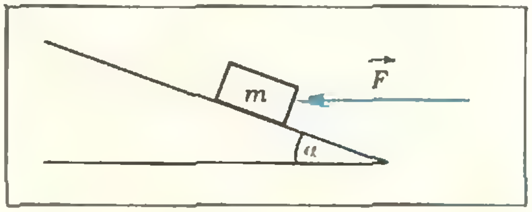


Рис. 9.

2. Из баллона объемом $V_1 = 200$ л, содержащего гелий при температуре $T_1 = 273$ К под давлением $p_1 = 2 \cdot 10^6$ Н/м², израсходовали часть газа, занявшего при нормальных условиях объем $V_2 = 1000$ л. При повторном измерении давления в баллоне получено значение $p_2 = 1{,}4 \cdot 10^6$ Н/м². При какой температуре проведено это измерение?

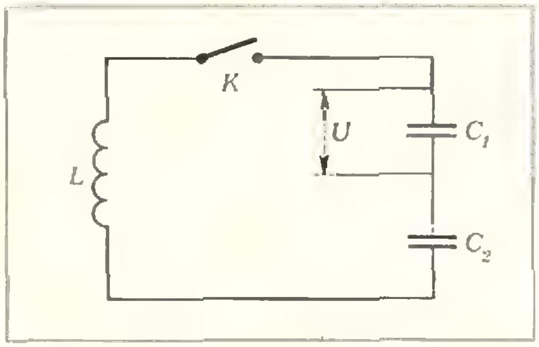


Рис. 10.

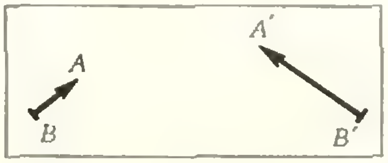


Рис. 11.

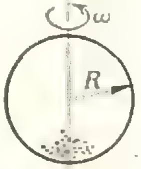


Рис. 12.

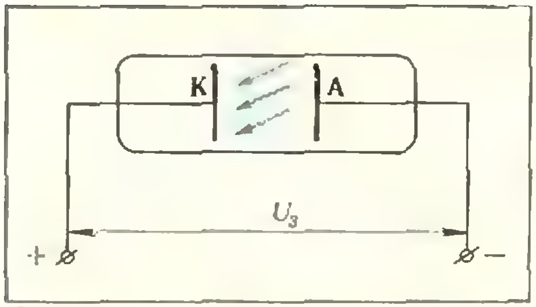


Рис. 13.

3. Цепь, состоящая из двух конденсаторов емкостью C_1 и C_2 и катушки с индуктивностью L, первоначально разомкнута (рис. 10). Конденсатор емкостью C_1 заряжают до разности потенциалов U, а конденсатор емкостью C_2 остается незаряженным. Определите максимальную величину силы тока в цепи после замыкания ключа K. Активным сопротивлением катушки пренебречь.

4. С помощью сферического зеркала получено изображение $A'B'$ предмета AB (рис. 11). Построением определите местоположение зеркала и его фокус.

Вариант 4

1. На дно сферы радиусом R насыпали горсть песка (рис. 12). Определите, где будут находиться песчинки после того, как сферу привели во вращение вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω. Трением песчинок о сферу пренебречь.

2. Плотность раствора соли с глубиной h меняется по закону $\varrho = \varrho_0 + Ah$, где $\varrho_0 = 1$ г/см^3, $A = 0{,}01$ г/см^4. В раствор опущены два шарика, связанные нитью длиной $l = 5$ см. Объем каждого шарика $V = 1$ см^3, а массы $m_1 = 1{,}2$ г, $m_2 = 1{,}4$ г. На какой глубине каждый шарик будет находиться в равновесии, если известно, что нить натянута?

3. При исследовании вакуумного фотоэлемента оказалось, что при задерживающей разности потенциалов $U_з = 1{,}5$ В между катодом К и анодом А (рис. 13) фототок с поверхности катода, освещаемого светом с длиной волны λ_0, прекращается. Определите λ_0, если работа выхода материалов катода и анода $A = 4$ эВ. Постоянная Планка $\hbar = 1{,}05 \times 10^{-34}$ Дж·с, заряд электрона $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ Кл.

4. За тонкой положительной линзой с фокусным расстоянием $F_1 = 15$ см расположено выпуклое зеркало с фокусным расстоянием $F_2 = 5$ см. Эта система создает прямое изображение предмета в натуральную величину независимо от его удаления от линзы. Определите расстояние между линзой и зеркалом. (Зеркало находится между линзой и ее фокусом.)

Решение задач варианта 1

1. Во время действия силы $\vec{F}$ груз совершает гармонические колебания с периодом $T = 2\pi\sqrt{m/k} \approx 0{,}3$ с около нового положения равновесия, определяемого условием $kx_0 = |\vec{F}|$, где x_0 — смещение нового положения равновесия относительно старого. При этом амплитуда колебаний тоже равна $x_0 = |\vec{F}|/k$, а правое крайнее положение груза совпадает с его первоначальным положением. Очевидно, что скорость груза и его ускорение в этот момент равны нулю. Поэтому, если действие силы прекращается именно в этом положении, груз будет оставаться неподвижным. Итак, время τ действия силы должно быть равно $\tau = nT$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$

Характерной ошибкой при решении этой задачи было неправильное понимание вопроса задачи. После прекращения действия силы груз будет оставаться неподвижным, если и скорость, и ускорение груза равны нулю. Это будет только в крайнем правом положении. (В крайнем левом положении скорость груза действительно равна нулю, но ускорение его отлично от нуля. В тот момент, когда силы уравновешены и ускорение груза равно нулю, отлична от нуля его скорость.)

2. Изменение показания динамометра связано с действием на гирю выталкивающей силы, которая равна весу воды в объеме погруженной части гири:

$$|\Delta\vec{F}| = \varrho g S \Delta h,$$

откуда

$$S = \frac{|\Delta\vec{F}|}{\varrho g \Delta h} \approx 6{,}25 \text{ см}^2.$$

Эта простая задача оказалась с «подводным камнем», который подавляющее большинство абитуриентов не заметили и совершенно формально написали правильное решение. При устном обсуждении задачи многие не могли ответить на вопрос, почему они запи-

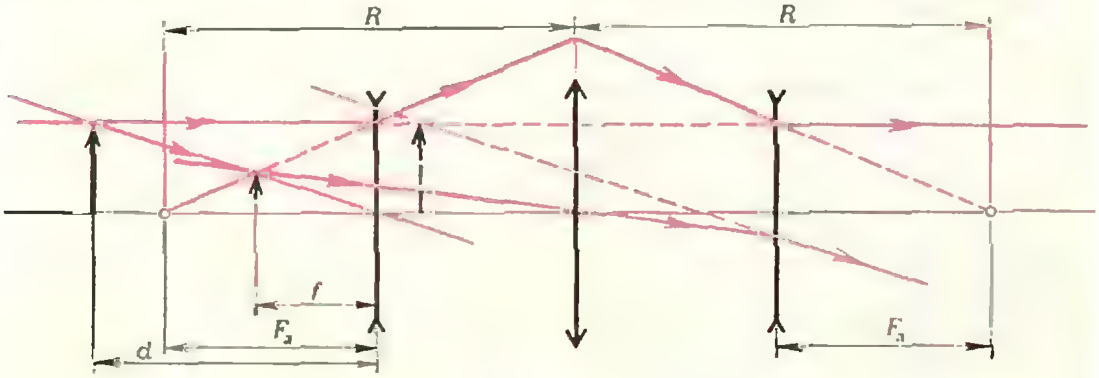


Рис. 14.

сали именно такое выражение для выталкивающей силы. Некоторые, например, утверждали, что в данном случае выталкивающая сила равна весу вытесненной воды и равна $\varrho gS\Delta h$. В этом утверждении содержится сразу две ошибки, которые исключают друг друга, и в результате получается формально правильный ответ. Первое ошибочное утверждение — в данном случае выталкивающая сила равна весу вытесненной воды, второе — объем вытесненной воды равен $S\Delta h$.

3. Частицы будут проходить через сетки (преодолевать задерживающую разность потенциалов U_0), если их энергия будет больше некоторой минимальной энергии $E_{\min}$. При скорости $\vec{v}_0$, соответствующей $E_{\min}$ ($E_{\min}=mv_0^2/2$), проекция скорости частицы на направление вдоль поля у поверхности второй сетки равна нулю; следовательно,

$$\frac{mv_0^2\cos^2\alpha}{2}=qU_0.$$

Проекция скорости на направление, перпендикулярное полю, равная $v_0\sin\alpha$, не изменяется. Согласно закону сохранения энергии,

$$E_{\min}=qU_0+E_{\min}\sin^2\alpha,$$

откуда

$$E_{\min}=\frac{qU_0}{1-\sin^2\alpha}=4qU_0.$$

Таким образом, при энергиях $E>4qU_0$ частицы смогут проходить через сетки.

Большинство абитуриентов успешно справились с этой задачей. Некоторые допустили характерную ошибку: при записи закона сохранения полной энергии частицы не учитывали кинетическую энергию, связанную с проекцией скорости на направление, перпендикулярное линиям электрического поля, и получали, что результат не зависит от угла α. Тогда, пытаясь ввести угол α, они делали еще более грубую ошибку: умножали начальную энергию на $\cos\alpha$, то есть пытались «проектировать» энергию.

4. Данная оптическая система дает прямое изображение предмета в натуральную величину, если в первом случае центр кривизны зеркала совпадает с ближайшим к предмету фокусом линзы, а во втором случае центр кривизны зеркала находится в той же плоскости, что и первое изображение, создаваемое линзой. Ход лучей для первого случая показан на рисунке 14; для наглядности изображена эквивалентная схема: зеркало заменено собирающей линзой с тем же фокусным расстоянием, равным половине радиуса кривизны R зеркала. Из этого рисунка видно, что изображение предмета действительно прямое и натуральной величины. Если сдвинуть зеркало (или эквивалентную ему положительную линзу) вправо на расстояние $l=F_л-f$, то центр кривизны зеркала попадет в плоскость первого изображения, создаваемого линзой, и окончательное изображение опять будет прямым и в натуральную величину (сделайте самостоятельно соответстаующий чертеж). Тогда по формуле линзы

$$\frac{1}{d}-\frac{1}{f}=-\frac{1}{F_л},\ \text{или}\ \frac{1}{d}-\frac{1}{F_л-l}=-\frac{1}{F_л},$$

откуда

$$d=\frac{F_л(F_л-l)}{l}=40\ \text{см}.$$

Заметим, что это типичная задача, требующая неформального подхода к ее решению. Прежде всего необходимо выяснить, при каких взаимных расположениях отрицательной линзы и вогнутого зеркала может получиться прямое изображение натуральной величины. Для данной системы это возможно только в двух, указанных выше, случаях. А, например, для системы положительная линза плюс вогнутое зеркало — четыре таких взаимных расположения (попробуйте их найти). Наиболее характерная ошибка при решении этой задачи связана с непониманием того, что формирование изображения в данной оптической системе происходит в три этапа: преломление лучей в линзе, отражение от зеркала и опять преломление в линзе. Последний этап многие не учитывали. Большинство абитуриентов пытались решить задачу формально — записать систему соответствующих уравнений и решить ее. Даже при условии, что система составлена правильно, для ее решения требовалось много времени. Лишь единицы сумели довести все математические выкладки до конца, остальные безнадежно запутались.

А. Болибрух,
В. Можаев

Рассказывает «Фотон»

С сентября 1980 года в Москве в Центральном лектории Всесоюзного общества «Знание» работает молодежный лекторий «Фотон». Он рассчитан на старшеклассников, увлекающихся физикой, и на его заседаниях, которые происходят ежемесячно, регулярно присутствует несколько сот московских школьников. Особенно многолюдным было заседание, проведенное в январе 1981 года. Доктор физико-математических наук М. Каганов и писатель-фантаст А. Стругацкий более трех часов вели разговор о том, как в современном мире взаимодействуют наука и фантастика. В феврале состоялась встреча с учеными Дубны, работающими в Объединенном институте ядерных исследований. Они рассказали о современных и будущих ускорителях заряженных частиц, о поисках кварков и новых трансурановых элементов. До этого в гостях у школьников побывали академики Е. Лифшиц, А. Мигдал и действительный член Академии педагогических наук В. Фабрикант. Они рассказывали о «черных дырах», нейтронных звездах и других интереснейших проблемах физики и астрофизики. В марте «Фотон» организует встречу с журналом «Природа», а в апреле — с учеными Академии наук СССР и московских вузов.

В. Л.

Заочная школа программирования

Урок 13: Приближенное решение уравнений с помощью ЭВМ

Из школьного курса математики вы знакомы с линейными и квадратными уравнениями, корни которых могут быть найдены по известным вам формулам. Существуют такие формулы и для решения уравнений третьей и четвертой степеней. А вот уравнение общего вида пятой и более высоких степеней неразрешимо в радикалах: решения таких уравнений (в общем случае) нельзя выразить через коэффициенты с помощью арифметических действий и извлечения корней*). Задача еще больше усложняется, если рассматривать неалгебраические уравнения**). В этом случае найти для корней явные выражения, за редким исключением, не удается. Но означает ли это, что такие уравнения нельзя решить? Обычно для нахождения корней уравнений, возникающих при решении большинства прикладных задач, и не нужна точная формула. Чаще всего для таких задач достаточно получить ответ с определенной степенью точности. Поэтому важно знать и уметь применять тот или иной способ вычисления корня уравнения с необходимой степенью точности. Известен целый ряд методов приближенного решения уравнений. Описанию некоторых из них и посвящен этот урок.

Рассмотрим один из них на примере решения задачи 2б Олимпиады по программированию («Квант», 1980, № 3): пусть Ф1(М) — описанная на Рапире функция с одним параметром (М). Нужно найти и отпечатать все целые корни уравнения Ф1(М)=0, лежащие на отрезке [0; 100].

Большинство ребят, принявших участие в Олимпиаде, хорошо справились с этой задачей. Действительно, алгоритм ее решения несложен. Сначала вычислим значение Ф1(М) при М=0. Если результат равен нулю, то число 0 — корень данного уравнения. Теперь найдем значение Ф1(М) при М=1 и опять сравним полученное значение с нулем. Последовательно вычисляя значения Ф1(М) при всех целых М ∈ [0; 100], найдем те из них, при которых Ф1(М)=0. Эти значения М и являются корнями уравнения Ф1(М)=0. Заметим, что в этом случае найдены точные значения корней.

Реализация этого алгоритма посильна любому школьнику, который умеет находить значения выражений и сравнивать их с нулем. Но сколько времени потребуется для решения уравнения этим способом «вручную»? А если левая часть уравнения достаточно сложна и отрезок, на котором нужно искать решения, велик? Здесь на помощь человеку приходит вычислительная техника. Проверьте, что по следующей программе будут отпечатаны все целые решения уравнения Ф1(М)=0 из отрезка [0; 100], а их количество накапливается в счетчике корней СЧЕТКОР.

```
ПЕЧАТЬ ('РЕШЕНИЯ НА [0; 100]');
0—> М; 0—> СЧЕТКОР;
ПОКА М=<100::
   ЕСЛИ Ф1(М)=0 ТО
   ПЕЧАТЬ(М);
   СЧЕТКОР+1 —> СЧЕТКОР
   ВСЕ;
   1+М —> М
ВСЕ;
ЕСЛИ СЧЕТКОР=0 ТО
ПЕЧАТЬ('КОРНЕЙ НЕТ') ВСЕ;
```

А если нужно организовать поиск требуемых решений на различных отрезках? В этом случае удобно описать процедуру с двумя параметрами НАЧ и КОН, которая организует поиск всех целых решений уравнений Ф1(М)=0 на отрезке [НАЧ; КОН].

---

*) См., например, «Квант», 1976, № 5, с. 2.

**) Уравнение $F(X)=0$ называется *алгебраическим*, если $F(X)$ — многочлен.

```
ПРОЦ ПОИСК НАЧ КОН;
ПЕЧАТЬ ('РЕШЕНИЯ НА [',
НАЧ,';',КОН,']');
НАЧ—>М; 0—>СЧЕТКОР;
ПОКА М=<КОН::
   ЕСЛИ Ф1(М)=0 ТО ПЕЧАТЬ
   (М);
   СЧЕТКОР+1—>СЧЕТКОР ВСЕ;
   М+1—>М
ВСЕ;
ЕСЛИ СЧЕТКОР=0 ТО
ПЕЧАТЬ ('КОРНЕЙ НЕТ') ВСЕ;
КНЦ;
```

Задание 13.1. *Составить программу для поиска всех целых решений уравнения* $X^3-10X^2-27X+36=0$ *на отрезках* [—10; 0], [1; 100].

* Задание 13.2. *Составить программу, по которой будут найдены все пары целых чисел вида* (X; Y), *являющиеся решениями уравнения* $2Y-X^2=4$, *если* $X \in [-50; 25]$, $Y \in [100; 300]$.

Прежде, чем перейти к описанию других методов решения уравнений, сделаем несколько замечаний. Мы будем предполагать рассматриваемые функции непрерывными, то есть имеющими графики в виде линий без разрывов*). Кроме того, мы исключаем из рассмотрения случай, когда график функции касается оси OX с одной стороны (рис. 1). Тогда легко видеть **), что

1°. Если уравнение F(X)=0 имеет на некотором интервале N различных корней, то график функции F пересекает ось OX на этом интервале тоже N раз (рис. 2,*а*).

2°. Если на концах отрезка [A; B] функция F принимает значения разных знаков, то уравнение F(X)=0 имеет на этом отрезке нечетное число корней (рис. 2,*а*), а если — одного знака, то — четное число корней (рис. 2,*б*,*в*). Заметим, что в последнем случае корней может не оказаться (0 — тоже четное число!).

Проверить, одинаковы или различны знаки у F(A) и F(B), можно простым способом: если произведение F(A) · F(B) отрицательно, то F(A) и F(B) имеют разные знаки, а если положительно — одинаковые.

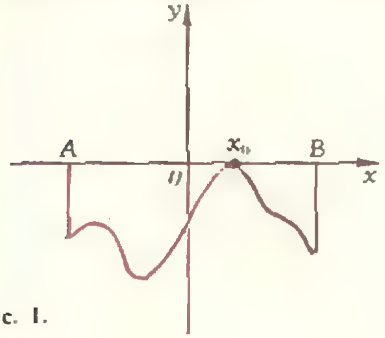


Рис. 1.

Метод половинного деления

Будем искать корни уравнения F(X)=0 на отрезке [A; B] с точностью до 0,001. Будем считать, что C — *корень уравнения с точностью* до 0,001, если |F(C)|<0,001. (Заметим, что в Рапире есть стандартная функция ABS(X), которая вычисляет модуль выражения X.)

Разумеется, |F(C)|<0,001 не означает F(C)=0; поэтому «корень уравнения с точностью до 0,01»

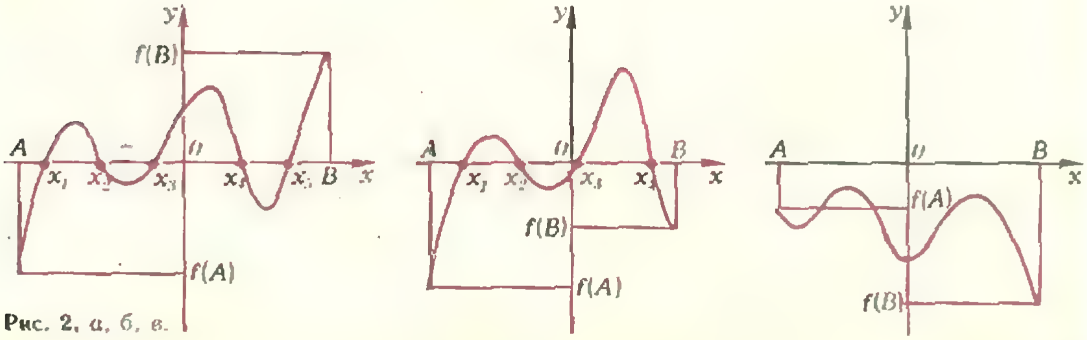


Рис. 2, *а*, *б*, *в*.

---

*) Точное определение непрерывности, которое здесь не требуется, можно прочитать в пособии «Алгебра и начала анализа 9—10», п. 13.

**) Доказательство мы приводить не будем.

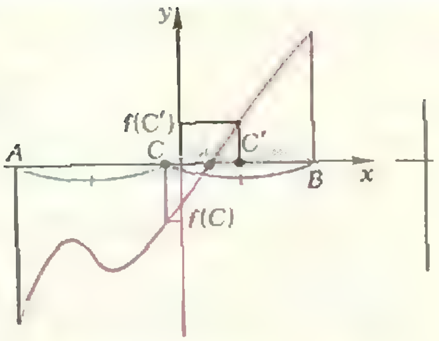


Рис. 3.

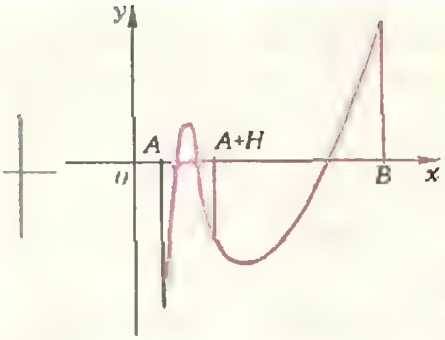


Рис. 5.

не обязательно является корнем.

Рассмотрим случай, когда на этом отрезке существует точно один корень данного уравнения (для того, чтобы выделить такой отрезок, существуют специальные методы; об одном из них рассказано ниже) и числа F(A) и F(B) имеют разные знаки. Предположим для определенности, что $F(A)<0$, $F(B)>0$ (рис. 3). Середина отрезка [A; B] имеет абсциссу $C=(A+B)/2$. Вычислим $|F(C)|$ и сравним его с 0,001. Если окажется, что $|F(C)|<0{,}001$, то C — искомое число. Если же $|F(C)|\geqslant 0{,}001$, поступим следующим образом: из отрезков [A; C], [C; B] выберем тот, на концах которого функция F принимает значения разных знаков; обозначим теперь его через [A; B]. Убедитесь, что нужный отрезок можно выбрать с помощью следующего предписания:

```
ЕСЛИ F(C)*F(B)<0 ТО C—>A
ИНАЧЕ C—>B ВСЕ;
```

По построению, для нового отрезка [A; B] справедливы соотношения. $F(A)<0$, $F(B)>0$. Читатель уже, наверное, догадался, что нужно делать дальше. Опять рассмотрим середину отрезка [A; B], вычислим в ней значение функции F и сравним модуль этого значения с 0,001. Если новое значение C удовлетворяет условию $|F(C)|<0{,}001$, то это и есть искомое число. В противном случае — опять из двух отрезков [A; C] и [C; B] нужно выбрать тот, на концах которого функция F принимает значения разных знаков. Описанный процесс нужно продолжать до тех пор, пока искомое число не будет найдено.

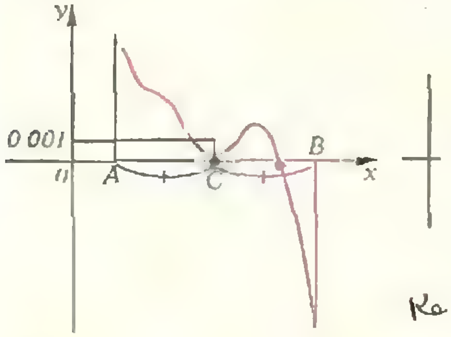
Внимательный читатель наверное заметил, что данный метод не всегда дает нужный ответ: случай, когда получается «ненастоящий» корень уже на первом шагу показан на рисунке 4.

Задание 13.3. *Запрограммировать решение уравнения* $X^3+3X-1=0$ *на отрезке* [A; B] *с точностью* ЭПСИЛОН *методом половинного деления.*

Метод перебора с возвратом

Снова рассмотрим задачу поиска корня уравнения $F(X)=0$ с точностью до 0,001 на отрезке [A; B], но на этот раз не будем делать никаких предположений о наличии корней на отрезке.

Рассмотрим отрезок [A; A+H], где H — произвольное «малое» чис-



Ка

Рис. 4.

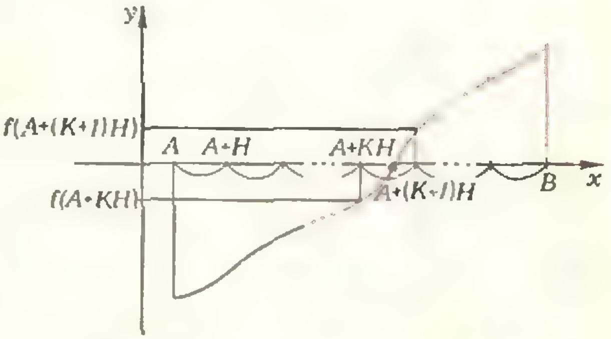


Рис. 6.

ло, называемое *шагом*. Если на концах этого отрезка функция F принимает значения одного знака, естественно ожидать, что уравнение $F(X)=0$ корней на нем не имеет, во всяком случае при малом H. Правда, это не всегда так (см. рис. 5), но подобные корни будут «пойманы» нашим методом позднее, при меньшем шаге H (конечно, если другой корень не будет найден раньше!).

Рассмотрим следующий отрезок длины H — отрезок $[A+H;\ A+2H]$ — и повторим все описанные рассуждения для него. Так будем поступать до тех пор, пока не найдем такой отрезок $[A+kH;\ A+(k+1)H]$, на концах которого функция F принимает значения разных знаков. Если такого отрезка на $[A;\ B]$ не окажется, мы уменьшим шаг H (скажем, в 10 раз) и начнем все сначала.

Пусть теперь $[A+kH;\ A+(k+1)H]$ — такой отрезок, на концах которого функция F принимает значения разных знаков. Значит, на этом отрезке есть, по крайней мере, один корень уравнения $F(X)=0$. Тогда в качестве приближенного значения корня можно попробовать взять любое число C из интервала $]A+kH;\ A+(k+1)H[$ (обычно берут либо один из концов интервала, либо его середину) (рис. 6).

Вычислим $F(C)$ и проверим неравенство $|F(C)|<0{,}001$. Если это неравенство истинно, то C — искомое число. Если же $|F(C)|\geqslant 0{,}001$, повторим для отрезка $[A+kH;\ A+(k+1)H]$ все рассуждения, проведенные для отрезка $[A;\ B]$. В качестве величины шага теперь выберем меньшее число, например поделим шаг H на 10.

Конечно, нужно указать условия, обеспечивающие остановку выполнения программы, которые необходимы, например, при отсутствии корней на данном интервале.

* Задание 13.4. *Запрограммировать решение уравнения* $F(X)=0$ *на отрезке* $[A;\ B]$ *с точностью* ЭПСИЛОН *методом перебора с возвратом.*

И. Юнерман

Ученый и революционер

У многих ученых была интересная судьба, но мало кто прожил такую захватывающую жизнь, полную приключений и превратностей, как Гаспар Монж.

Сын бедных родителей, благодаря своему таланту и трудолюбию ставший великим гражданином своей страны, академиком и министром, революционером, пославшим на смерть короля Людовика XVI, был не только математиком и механиком, химиком и металлургом, но и активным участником Великой французской буржуазной революции. Его жизнь драматична и противоречива. В последние годы жизни революционер, якобинец Монж — граф и личный друг Наполеона I.

О жизни и творчестве великого французского ученого, создателя начертательной геометрии Гаспара Монжа (1746—1818) популярно и увлекательно рассказывает В. П. Демьянов в своей книге «Геометрия и Марсельеза»*) Книга написана хорошим литературным языком, она очень познавательна, чувствуется, что автор хорошо знаком с излагаемым материалом и умеет его подать. На последнем конкурсе на лучшую научно-популярную книгу, который ежегодно проводит общество «Знание», книга В. П. Демьянова «Геометрия и Марсельеза» получила поощрительный диплом.

Книга читается с большим интересом, и автору можно сделать лишь единственный упрек. Жизнь Монжа он описал более ярко, чем его научную деятельность. А вклад Монжа в науку был огромен. Монж в науке был таким же революционером, как и в жизни.

В. Лишевский

---

*) Владимир Демьянов. «Геометрия и Марсельеза» (М., «Знание», 1979).

Книга о прошлом и будущем Вселенной

Строгая повторяемость небесных явлений и кажущаяся неизменность небесных объектов создавали иллюзию того, что окружающий нас мир стационарен, что Вселенная статична. «В продолжении всего прошедшего времени, согласно летописям, завещаемым потомкам от поколения к поколению, мы не находим следа изменений ни во всем удаленном небе в целом, ни в одной из подходящих частей неба», — писал великий Аристотель. Даже Эйнштейн — создатель самой поразительной и глубокой физической теории — вначале не поверил, что из уравнений его собственной теории следует нестационарность Вселенной. Но, оказывается, еще теория тяготения Ньютона предсказывала нестационарность мира...

В последние годы для интересующихся тайнами мироздания написан ряд книг. Среди них «Вселенная, жизнь, разум» И. С. Шкловского, «В глубины Вселенной» Ю. Н. Ефремова, «Извечные тайны неба» А. А. Гурштейна, «Астрофизика школьникам» и «Физика Вселенной» Е. П. Левитана, «Эволюция Вселенной» И. Д. Новикова. Расскажем немного о последней книге, выпущенной в 1979 году издательством «Наука». Автор книги — известный советский астрофизик и космолог И. Д. Новиков — пришел в большую науку из астрономического кружка Московского планетария. Выпускник МГУ, он стал не только одним из авторов фундаментальных монографий «Релятивистская астрофизика», «Теория тяготения и эволюция звезд» и «Строение и эволюция Вселенной», но и талантливым пропагандистом достижений современной астрономической науки.

В космологии рассматриваются столь большие области пространства, что вещество Вселенной напоминает однородную и непрерывную среду, роль «атомов» в которой играют галактики или даже гигантские скопления галактик. Космологическая модель такой однородной и изотропной Вселенной была построена в 1922—1924 годах замечательным советским ученым А. А. Фридманом, который, основываясь на теории Эйнштейна, показал необходимость глобальной эволюции Вселенной. Вскоре астрономические наблюдения подтвердили, что галактики разбегаются, и вся охваченная наблюдениями часть Вселенной (Метагалактика) расширяется.

И. Д. Новиков
ЭВОЛЮЦИЯ ВСЕЛЕННОЙ

Можно сказать, что в XX веке Вселенная предстала перед нами в новом виде. Человек ощутил себя жителем расширяющейся Метагалактики, осознал грандиозность нового видения мира. Из вечной и неизменной Вселенная как бы превратилась в свою противоположность. По выражению английского астрофизика Джеймса Джинса, нам открылась «великолепная, ошеломляющая и страшная Вселенная»... Идея развития, идея эволюции навсегда вошла в астрономическую картину мира. Глобально эволюционирующую Вселенную дополнили впечатляющие локальные катастрофы, которые сопровождают взрывы сверхновых звезд, феноменальные процессы в пульсарах, квазарах, ядрах активных галактик и пока еще гипотетических черных и белых дырах разного масштаба.

В книге об эволюции Вселенной все это, конечно, нашло определенное отражение. Автор не обошел вниманием и такие вопросы, как: почему расширяется Вселенная, что придало скорость галактикам и многие-многие другие.

Заметим, что в книге сравнительно мало формул, причем большинство из них выводится самым элементарным образом. Так, буквально «на пальцах» показывается, что сферическая оболочка не создает во внутренней полости никакого гравитационного поля; доказывается, что любые две галактики в однородной Вселенной испытывают относительное отрицательное ускорение (а значит — мир галактик нестационарен); вычисляется время, протекшее с начала расширения нашей Вселенной; определяется критическое значение средней плотности вещества (при меньшей плотности Вселенная должна неограниченно расширяться, а при большей — расширение когда-нибудь должно смениться сжатием); выводится формула, связывающая величину радиуса кривизны пространства Вселенной с величиной критической плотности; дается подкрепляемое необходимыми формулами описание «сценария», по которому шло расширение Метагалактики в первые мгновения после начала расширения (!), через три минуты (!), через миллион лет (!); делаются количественные оценки гравитационной неустойчивости, возникающей в процессе расширения неоднородного вещества.

Если все сказанное побудит вас отыскать и прочитать книгу И. Д. Новикова (которая, как нам кажется, очень скоро станет библиографической редкостью), цель написания этой статьи будет достигнута.

Е. Левитан

О приеме на биологическое отделение ВЗМШ

Хорошее знание математики и физики нужно в наше время не только специалистам в этих областях или инженерам, нужно оно и биологам. При Всесоюзной заочной математической школе уже шесть лет работает биологическое отделение. Ребятам, которые учатся на нем, приходится размышлять не только над чисто биологическими вопросами. Приведем одно из заданий биологического отделения, которое требует умения подойти к биологической проблеме с точки зрения физики и использовать при этом количественные соображения.

1. Абсолютная сила мышц муравья и человека примерно одинакова: 8—10 кг в расчете на 1 см^2 поперечного сечения мышц. Как объяснить, что муравей может переносить предметы, превосходящие вес его тела в десятки раз?

2. У птиц и млекопитающих частота сокращений сердца, как правило, тем выше, чем меньше животное. Как можно объяснить такую закономерность?

3. Придумайте способ измерения частоты, с которой машет крыльями комар.

4. Известно, что распространение возбуждения в нервных волокнах осуществляется при помощи электрического тока. В каком волокне — толстом или тонком — выше скорость распространения возбуждения и почему?

На биологическое отделение ВЗМШ принимаются школьники, оканчивающие восьмой класс. Школьникам высылаются вопросы по разным разделам биологии и пособия по отдельным трудным вопросам. Ответы школьников проверяют студенты биологического факультета МГУ. В школу принимаются как отдельные ученики, так и школьные кружки, работающие под руководством учителя. Для поступления в школу надо успешно выполнить конкурсное задание. Вместе с конкурсной работой надо прислать сведения о себе: фамилия, имя и отчество; школа и класс; место работы и должность родителей; полный почтовый адрес. Надеемся, что восьмиклассники, которые будут выполнять конкурсную работу, сделают это к концу весенних каникул: крайний срок присылки работы — 5 апреля. О результатах конкурса будет сообщено осенью. Конкурсные работы не рецензируются. Школьники Москвы и Ленинграда на биологическое отделение ВЗМШ не принимаются.

Хотя вступительная конкурсная работа составлена для ребят, интересующихся биологией, ответы на ее вопросы требуют учета ряда физических соображений (вопросы 1, 2 и 4) и некоторых математических рассуждений (вопрос 5).

Вопросы конкурсного задания

1. Известно, что у некоторых животных (зайцы, китообразные) очень жирное молоко, а у других (обезьяны, волки) — нет. Предложите объяснение этого факта и на основе вашего объяснения попробуйте предсказать, у каких еще конкретных животных должно быть жирное, а у каких — нежирное молоко.

2. В связи с переходом к наземному образу жизни у растений развился целый ряд структур: корни, проводящая система, специальные покровные ткани и т. д. Как вы полагаете — какие структуры и приспособления должны были появиться первыми, чтобы обеспечить выход растений на сушу? Ответ необходимо обосновать.

3. Некоторые животные, например хамелеон или осьминог, могут менять свой цвет в соответствии с изменением цвета окружающего фона. Представьте себе, что вы — ученый, которому поручено изучить физиологические основы такой реакции животного. Какие конкретные вопросы вы перед собой поставите? Какие эксперименты вы станете проводить, чтобы ответить на эти вопросы? Как вы истолкуете тот или иной результат этих экспериментов?

4. Расположите следующих животных в порядке снижения их кровяного давления: собака, жираф, курица, лягушка. Ответ обязательно поясните.

5. Для учета численности животных часто применяют следующий метод: некоторое число животных вылавливают, метят и выпускают на волю. Затем производят повторный отлов. Для оценки численности существенно отношение числа меченых животных в повторном отлове к общему числу пойманных во второй раз животных. а) Напишите формулу, по которой определяют численность, и объясните, как вы рассуждали при ее выводе. б) Укажите, какие причины могут приводить к ошибкам при использовании этого метода. Для каждой из причин постарайтесь указать, приведет ли она к завышению или к занижению оценки численности.

Наш адрес: 113149, Москва, ГСП, Нахимовский проспект 4, ВЗМШ «Биология».

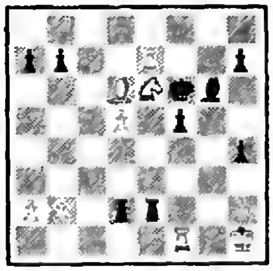
Биологическая комиссия ВЗМШ

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку — мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

Ласкер побеждает Стейница

В предыдущем номере мы рассказали о трех первых матчах на первенство мира. Теперь пойдем дальше...

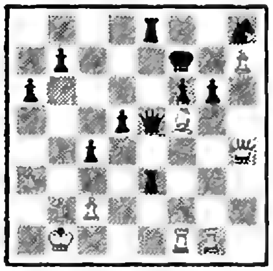
Второй матч В. Стейница с великим русским шахматистом М. Чигориным (1892 г.) проходил значительно напряженнее первого. Игра шла до десяти побед. После 23 партий Стейниц был впереди на очко, однако, если бы Чигорин выиграл очередную партию, счет побед становился 9:9 и по условиям матча игра продолжалась бы еще до трех побед. В этой партии произошел трагический случай, равного которому история борьбы за шахматную корону не знает.



Чигорин — Стейниц

У белых лишняя фигура, и после 32.Л:b7 они легко выигрывали (предлагаем вам убедиться в этом самостоятельно). Но последовало совершенно невероятное **32.Сb4??**, и после ответного **32...Л:h2+** матч тут же закончился (33.Крg1 Лdg2×).

Эммануил Ласкер, основатель психологического подхода к шахматной борьбе, был на 32 года моложе своего великого предшественника, и эта разница в возрасте являлась слишком большой форой в их сражении.

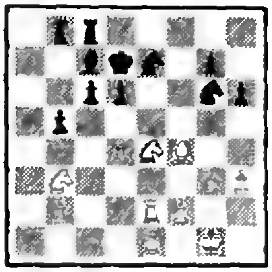


Ласкер — Стейниц

Это положение из седьмой партии матча 1894 года. Черные уже по дебюту получили огромный перевес, и, несмотря на отчаянные попытки противника запутать игру, ситуация не изменилась. Надвигая сейчас пешки ферзевого фланга (35.Фh6 не опасно из-за 35...Лg3), Стейниц мог взять верх и повести в счете. Однако его нервы не выдержали, следующим ходом он допустил решающую ошибку и вскоре сдал партию — первую в серии из пяти поражений.

34... gf? 35.Фh5+ Крe7 36.Лg8 Крd6 37.Л:f5 Фe6 38.Л:e8 Ф:e8 39.Л:f6+ Крc5 40.Фh6 Лe7 41.Фh2 Фd7 (41...Фd8 42.Фf2+ и 43.Лf8) **42.Фg1+ d4 43.Фg5+ Фd5 44.Лf5 Ф:f5 45.Ф:f5+ Крd6 46.Фf6+. Черные сдались.**

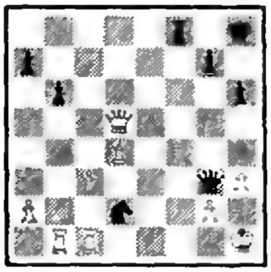
Проиграв матч, Стейниц провозгласил троекратное «ура» в честь второго чемпиона мира, но спустя два года вызвал Ласкера на матч-реванш. За всю последующую историю не было больше случая, чтобы в борьбу за мировую шахматную корону вступил 60-летний шахматист. Стейниц потерпел сокрушительное поражение. Любопытно, что этот матч проходил в Москве, а следующее состязание такого высокого ранга состоялось в нашей столице спустя более полувека. Во второй партии матча Ласкер провел знаменитую матовую комбинацию.



Ласкер — Стейниц

31.h4 h5 (взятие слона на f4 приводило к быстрому мату после Кf6+) **32.Сg5 Сd8 33.g4! hg 34.h5 Кf8 35.Кеc5+! dc 36.К:c5+ Крd6** (в случае 36...Крc7 достаточно для победы 37.С:e7 С:e7 38.Л:e7+ Крb6 39.Л:g7, но теперь следует форсированный мат) **37.Сf4+ Крd5 38.Лe5+ Крc4** (38...Крd6 39.Лf5×; 38...Кр:d4 39.Л1e4×) **39.Лc1× Кр:d4** (39...Крb4 40.Сd2+) **40.Кb3+ Крd3 41.Лe3×.** Заключительная матовая конструкция весьма эффектна.

Убедив шахматный мир в том, что он покорил его не случайно, Ласкер несколько снизил свою шахматную активность, сосредоточив основные усилия на математике и философии. Только через десять лет он сыграл новый матч за мировое первенство. Преимущество Ласкера над Маршаллом было бесспорным. Вот окончание третьей партии матча.



Маршалл — Ласкер

37...Кf3! 38.gf Ф:h3+ 39.Крg1 Фg3+ 40.Крh1 Лf4 41.Фd8+ (правильно было 41.Фh5 Лh4+ 42.Ф:h4) **41...Крh7 42.Лf1?** (последняя ошибка, шансы на ничью сохраняло 42.Лc2 Лh4+ 43.Ф:h4 Ф:h4+ 44.Крg2) **42...Лf5! Белые сдались** (мат неизбежен: 43.Фe8 Фh4+ 44.Крg2 Лg5×).

Закон сохранения энергии для тепловых процессов

1. $A=p_0V\Delta T/T\approx 3{,}4$ Дж.
2. $Q=C_V\Delta T+R\Delta T/2=3R\Delta T\approx 25$ Дж.
3. $n=-1/2$.
4. На участке *1—2* температура газа возрастала, при этом газ получал тепло. На участке *2—3* температура газа не менялась, но тепло он получал. На участке *3—4* температура уменьшалась, при этом газ отдавал тепло. На участке *4—1* температура не менялась, но газ отдавал тепло.
5. $A=\frac{m}{\mu}\frac{R\alpha}{2}(V_2^2-V_1^2)$; газ поглощает тепло.

Пригодны ли счеты?

1. Счеты будут иметь вид, показанный на рисунке 1. Наибольшее число, которое можно отложить на «испорченных» счетах,— это $7531_И=383_{10}$.
2. $3121_И=3\cdot 48+1\cdot 8+2\cdot 2+1=157_{10}$;

$$1401_И=1\cdot 48+4\cdot 8+0\cdot 2+1=81_{10};$$
$$230_И=2\cdot 8+3\cdot 2+0=22_{10}.$$

3. Число 37_{10} представим в виде суммы

$$37_{10}=4\cdot 8+2\cdot 2+1=421_И.$$

Аналогично:

$$59_{10}=1\cdot 48+1\cdot 8+1\cdot 2+1=1111_И;$$
$$101_{10}=2\cdot 48+0\cdot 8+2\cdot 2+1=2021_И;$$
$$269_{10}=5\cdot 48+3\cdot 8+2\cdot 2+1=5321_И.$$

4. $411_И$; $7010_И$; $5210_И$; $131_И$; $310_И$; $3310_И$.
5. $21_И\times 3_{10}=131_И$.
6. $7431_И$.

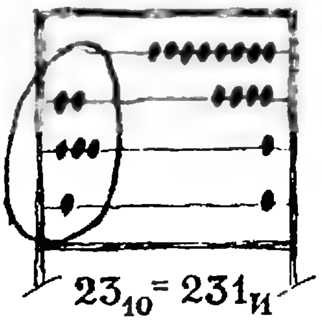


Рис. 1.

Московский физико-технический институт

Математика

Вариант 2

1. $\left]-\frac{4}{3};\,2\right[$.
2. $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi n$ $(n\in\mathbf{Z})$.
3. Площадь квадрата больше.
4. а) $\left]-\infty;\,\frac{-1-\sqrt5}{2}\right]\cup[-1;0[\,\cup$

$\cup\left]0;\,\frac{-1+\sqrt5}{2}\right]\cup[1;\,+\infty[$;

б) $\left]\frac{-1-\sqrt5}{2};\,-1\right[\cup\left]\frac{-1+\sqrt5}{2};\,1\right[$.

$\left\{\log_2\left(\frac{|a|-\sqrt{a-a^3}}{\sqrt{a-a^3}}\right);\right.$

$\left.\frac{\sqrt{a-a^3}+|a|^3-|a|}{|a|-\sqrt{a-a^3}}\right\}$;

в) $a=0$, $\{(\alpha;\,2^{-\alpha})\}(\alpha\in\mathbf{R})$.

5. Пусть SAD — грань, перпендикулярная плоскости проекций, MN — перпендикуляр на эту грань из середины M противоположного ребра, φ — угол между (AD) и плоскостью проекций, тогда $|MN|=\frac{2\sqrt2}{3}a$, $|SN|=\frac{7}{6}a$, длина высоты трапеции равна $|MN|$, длина меньшего основания — $a\cos\varphi$, и большего — $\frac{a}{2}(3\sin\varphi+\cos\varphi)$. Из равнобедренности трапеции следует, что $\operatorname{tg}\varphi=\frac{3}{5}$, поскольку проекция точки N — середина большего основания.

Ответ. $\frac{4}{\sqrt{17}}a^2$.

Вариант 3

1. $\{0, 3\}$.
2. $\left]-\infty;\,\frac{\sqrt6-1}{2}\right[\cup\left]\frac{6}{5};\,\frac{\sqrt6}{2}\right[$.
3. $\frac{5}{\pi}$.
4. а) да; б) $\frac{81}{5}$.
5. $\frac{\sqrt5}{2}$. Указание. $\left|\frac{AP}{PQ}\right|<\left|\frac{AP}{PQ_0}\right|$, где Q_0 — основание перпендикуляра из точки A на $[A_1F]$.

Физика

Вариант 2

1. Пороговая энергия $E_п$ — это минимальная энергия налетающей частицы, при которой происходит ядерная реакция. Она включает в себя энергию E, поглощаемую при реакции, и минимальную кинетическую энергию $E_к$ продуктов реакции ($E_к$ не может быть равной нулю, исходя из закона сохранения импульса). Эта кинетическая энергия минимальна, если ядро кислорода и протон движутся как единое целое, то есть с одинаковыми скоростями. Согласно закону сохранения энергии, в первом случае

$$E_п=E+\frac{m_\alpha E_п}{m_0+m_p},$$

где m_α, m_0 и m_p — массы α-частицы, ядра кислорода и протона соответственно. Во вто-

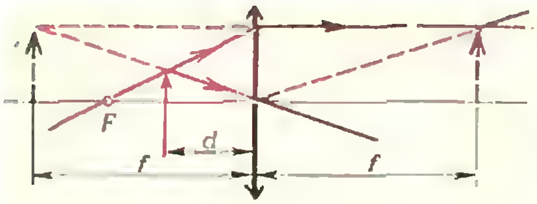


Рис. 2.

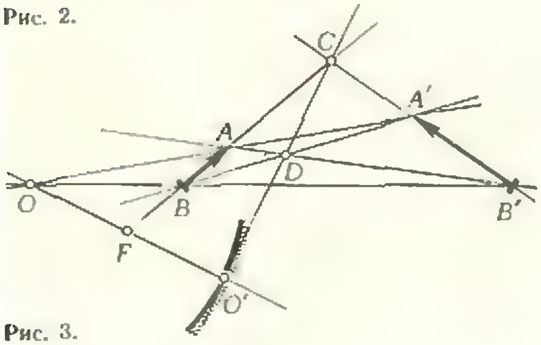


Рис. 3.

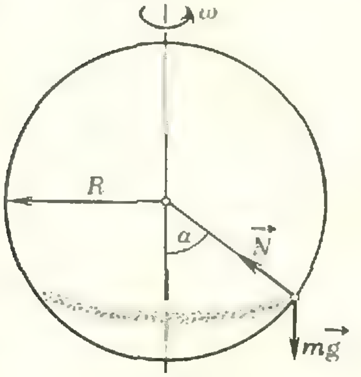


Рис. 4.

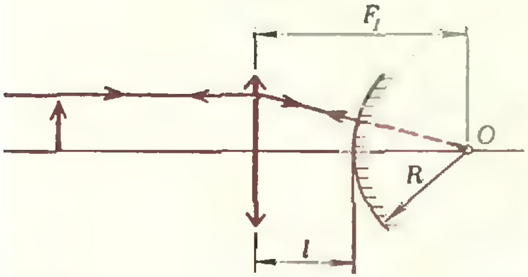


Рис. 5.

ром случае энергия E_α α-частицы будет равна

$$E_\alpha = E + \frac{m_\alpha E_\alpha}{m_0 + m_p}.$$

Тогда увеличение энергии α-частицы

$$\Delta E_\alpha = E_\alpha - E_n =$$

$$= E_n \frac{m_\alpha m_p}{(m_0 + m_p)(m_0 - m_\alpha)} \approx 25 \text{ кэВ}.$$

2. $l = l_0 \dfrac{p_0 + |\vec{F}|/S}{p_0}$. Указание. Скорость поршня будет максимальной в тот момент, когда давление воздуха в цилиндре станет равным атмосферному давлению.

3. $L = \dfrac{Trn}{2\pi}$; $C = \dfrac{T}{2\pi rn}$.

4. $F_л = 3$ см. Указание. Ход лучей для линзы показан на рисунке 2. При замене линзы сферическим зеркалом изображение в зеркале (мнимое, прямое и того же размера) будет расположено симметрично изображению в линзе.

Вариант 3

1. $|\vec{F}_{\min}| = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \mu}{1 + \mu \operatorname{tg}\alpha} mg \approx 3{,}3$ Н.

2. $T_2 = \dfrac{p_2 V_1}{\left(\dfrac{p_1 V_1}{RT_1} - \dfrac{V_2}{V_0}\right) R} \approx 254{,}8$ К (здесь $V_0 = 22{,}4$ л — объем, занимаемый одним молем любого газа при нормальных условиях).

3. Сила тока в цепи будет максимальной в те моменты, когда напряжение на катушке индуктивности, а значит, и суммарное напряжение на обоих конденсаторах будут равны нулю. Следовательно, в эти моменты напряжения на конденсаторах одинаковы по модулю и противоположны по знаку. Обозначим модуль этого напряжения через U'. Запишем законы сохранения заряда и энергии:

$$C_1 U' + C_2 U' = C_1 U,$$

$$\frac{C_1 U'^2}{2} + \frac{C_2 U'^2}{2} + \frac{L I_{\max}^2}{2} = \frac{C_1 U^2}{2}.$$

Отсюда

$$I_{\max} = U \sqrt{\frac{C_1 C_2}{L(C_1 + C_2)}}.$$

4. См. рис. 3 (прямая OO' перпендикулярна прямой CO'; O — оптический центр зеркала; O' — его полюс; F — фокус зеркала, причем $|OF| = |FO'|$).

Вариант 4

1. В силу симметрии при вращении сферы песчинки расположатся на ее внутренней поверхности вдоль тонкого кольца (рис. 4). На каждую песчинку действуют силы тяжести $m\vec{g}$ и сила нормальной реакции $\vec{N}$. Спроектируем силы на горизонтальную и вертикальную оси координат и запишем соответствующие уравнения второго закона Ньютона:

$$|\vec{N}| \sin\alpha = m\omega^2 R \sin\alpha,$$

$$|\vec{N}| \cos\alpha - mg = 0.$$

Решая совместно эти уравнения, получим

$$\left(m\omega^2 R - \frac{mg}{\cos\alpha}\right) \sin\alpha = 0,$$

откуда возможны два решения: 1) $\sin\alpha = 0$; 2) $\cos\alpha = \dfrac{g}{\omega^2 R}$. Если $\omega^2 R < g$, реализуется только первое решение, то есть песчинки так и остаются на дне сферы. Если же $\omega^2 R > g$, реализуются оба решения, причем первое соответствует неустойчивому равновесию, а второе — устойчивому положению равновесия.

2. $h_1 = \dfrac{m_1 + m_2}{2AV} - \dfrac{p_0}{A} - \dfrac{l}{2} \approx 27{,}5$ см;

$h_2 = h_1 + l \approx 32{,}5$ см.

3. $\lambda_0 = \dfrac{2\pi\hbar c}{(A + eU_3)} \approx 2{,}25 \cdot 10^{-7}$ м.

4. $l = F_1 - 2F_2 = 5$ см. Указание. Фокус линзы совпадает с оптическим центром зеркала (см. рис. 5).

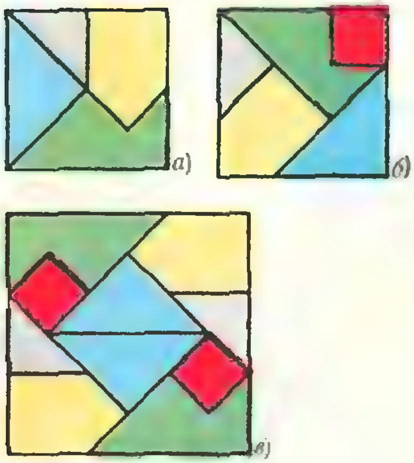


Рис. 6.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 1)

1. См. рис. 6а—в.
2. МИНУС = 14286.

Решение. Только цифра 6 вместо буквы С обладает тем свойством, что при умножении на нее трех других цифр (8, 4, 2) в произведениях на месте единиц получаются, соответственно, эти же цифры. Итак, С = 6. У = 8, поскольку второе произведение наибольшее. М = 1 (см. пятое произведение). Если И = 2, Н = 4, то второе произведение будет пятизначным. Поэтому Н = 2, И = 4.

3. Из вершины A к стороне BC путь проходит по цифрам

1—3—9—6—5—4—2—7—8;

из вершины B к стороне AC — по цифрам

7—1—5—3—2—4—6—8—9;

из вершины C к стороне AB — по цифрам

2—7—8—9—4—6—5—1—3.

4. Обозначим искомое число через $A=\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$. Его цифры a_i, как легко видеть, убывают слева направо.

Пятая цифра не может быть равна 1 или превосходить 1, так как тогда четвертая цифра $a_4 \geqslant 2$, третья $a_3 \geqslant 4$, вторая $a_2 \geqslant 8$ и первая $a_1 \geqslant (8+4+2+1)+1>9$ — противоречие.

Поэтому пятая цифра равна 0. Отсюда цифра $a_4 \geqslant 1$ и не может быть $a_4 \geqslant 2$, так как, рассуждая аналогично, получаем, что первая цифра $a_1 > 6+3+2 > 9$.

Итак, четвертая цифра $a_4=1$, третья $a_3 \geqslant 2$ и не может быть $a_3 \geqslant 3$ (тогда первая цифра $a_1 = (5+3+1)+1=10>9$), то есть третья цифра $a_3=2$. Следовательно, $a_2 \geqslant 4$ и $a_1 \geqslant 8$ и искомые числа таковы:

$$A_1=84210,\ A_2=94210,\ A_3=95210.$$

5. Масштаб 1:1 000 000 означает, что все линейные размеры на карте уменьшены в 10^6 раз. Поэтому площадь карты, пропорциональная, как известно, квадрату линейных размеров, меньше площади всей территории СССР в $(10^6)^2=10^{12}$ раз. Число же людей, которые могут поместиться на определенной территории, пропорционально не ее линейным размерам, а ее площади. Именно поэтому на карте СССР может поместиться малое число людей.

Как получают сильные постоянные магнитные поля

(см. «Квант» № 1)

1. Так как $P \sim I^2 \sim B^2$, мощность, которую придется отводить при $B_2=25$ Тл, равна

$$P_2=\frac{B_2^2}{B_1^2}P_1=6{,}25\ \text{МВт}.$$

Мощность же, отводимая водой, равна $P'=c\rho\frac{V}{3600}\Delta t$ (Вт), где $c=4\cdot10^3$ Дж/(кг · град), $\rho=10^3$ кг/м³, $V=50$ м³/ч, $\Delta t=80$ град. Подставив числа, найдем $P' \approx 4{,}4$ МВт $< P_2$ — система охлаждения «не справится», получить поле B_2 не удастся.

2. Производительность водопроводной магистрали — 56 м³/ч; расход жидкого азота — 32 м³/ч; расход жидкого водорода на алюминиевом соленоиде — 11 м³/ч.

Задачи о спутниках

(см. «Квант» № 1)

1. $t=\dfrac{2\pi}{\sqrt{g/(\alpha^3 r_З)}-2\pi/T_З}=10{,}5$ ч.

2. $v=\dfrac{2\pi}{T}r\sqrt{\dfrac{r}{r_Ю}}=39$ км/с.

3. $\beta=\dfrac{3}{2}\dfrac{|\vec{v}|\,\omega}{R}=1{,}05\cdot10^{-23}$ рад/с².

Показательные уравнения

(см. «Квант» № 1)

1. $\left\{1,\ \frac{1}{2}\right\}$. 2. $\left\{\log_2\frac{\sqrt5-1}{4}\right\}$.

3. $\left\{\frac{1}{2}\log_2 6,\ \log_6 5\right\}$. 4. $\{3,\ 2+\log_5 2\}$.

5. $\left\{\frac{3}{2}\right\}$. 6. $\{0,\ 1,\ 7\}$. 7. $\{-1,\ 2/3\}$.

8. Указание. Прологарифмируйте левую и правую части по основанию 2, после чего сделайте замену $y=\log_2 x$. Решив квадратное уравнение, получим $y_1=c+2$, $y_2=c-1$, где $c=\log_2 3$. Ответ. $\left\{\frac{3}{2},\ 12\right\}$. 9. $\left\{\frac{2}{3}\right\}$.

10. $\{1\}$. 11. $\{1\}$. 12. $\{2\}$.

Шахматный конкурс

(см. «Квант», 1980, № 10).

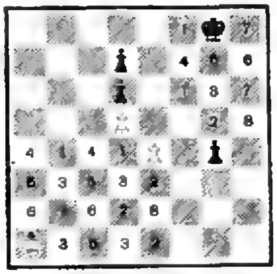
1. 1. **Крg3! Крe4 2. Крg2!** (2. Крf2 Крf4 и Крg4) **2...Крe3 3. Крf1 Крe4 4. Крe1 Крe3 5. Крd1 Крf4 6. Крd2 Крe4 7. e3 Крf3 8. Крd3 Крg3 9. Крe4! Крg4 10. Крe5 Кр:h4 11. Крf4 Крh3 12. e4 Крg2 13. e5 h4 14. e6 h3 15. e7 h2 16. e8Ф h1Ф 17. Фe2+** и белые дают мат в 4 хода. Мы привели лишь основной вариант решения: при подведении итогов конкурса будет учитываться, насколько подробно указано решение (это касается и других заданий конкурса).

2. Указываем центральный вариант этого весьма тонкого этюда: **1. g4! Kpa3! 2. Kpa5! Kpb2 3. Kpb6! Kpb3 4. Kpb5! Kpc2 5. Kpc6 Kpc3! 6. Kpc5! Kpd2! 7. Kpd6! Kpd3! 8. Kpd5! Kpe2! 9. Kpe6! Kpe3! 10. Kpe5! Kpf2 11. Kpf6! Kpf3 12. Kpf5!** (наконец, черные в цугцванге) **12...Kpg2 13. Kpg6 Kph3! 14. Kph5! Kp:h2 15. Kp:h6,** 16. Kp:g5 и т. д. Вся игра построена на том, что черному королю недоступно поле g3. Восклицательных знаков довольно много, но все они уместны — для белых это единственные ходы, достигающие цели, и для черных — ходы, создающие белым максимальные трудности. (В этюде имеется ряд ложных следов, которые мы опускаем.)

3. **1. Kpf5!** (1. Kpf6? ведет к ничьей) **1...Kpb6** (1...Kpc6 2. Kpe6! 1...Kpc7 2. Kpe5!) **2. Kpf6!** (2. Kpe6? Kpc6!, 2. Kpe5? Kpc7!) **2...Kpb7 3. Kpf7! Kpb8 4. Kpe6 Kpc7** (4...Kpc8 5. Kpd6!) **5. Kpe7! Kpc6 6. Kpd8 Kpd6** 7. **Kpc8 Kpc6 8. Kpb8 Kpb6 9. Kpa8** и белые выигрывают.

(см. «Квант», 1980, № 11)

1. Белые выигрывают, если при короле на d4 могут сыграть e4—e5 без шаха или вторгнуться на поле f4. Таблица соответственных полей нанесена прямо на диаграмму.



Подробное описание ее построения мы здесь опускаем. Если ход черных, то они играют **1...Kpg7!** и добиваются ничьей, занимая соответственные поля при любых маневрах белого короля. Если же ход белых, то **1.Kpb1** лишает черных возможности держать оппозицию. Вот примерный вариант: 1.Kpb1! Kpg7 2.Kpc1 Kpg6 3. Kpd1 Kpg5 4.Kpc2! Kph6 5.Kpd2! Kph5 6.Kpc3! Kpg5 7.Kpc4! Kpg6 8.Kpd3 и далее Kpd3 — d4 или Kpd3 — e3 — f4 с выигрышем.

2. Авторское решение таково: **1.Лf8! Cc6 2.Лe8 Cd5 3.Лd8 Ce4 4.Лc8 Cd5 5.Cf3 Cc6 6.Ce4 Cb7 7.Cd5 Cc6 8.Лh8 Cb7 9.Cc6 C:c6**×! Многие читатели нашли решение, состоящее всего из трех ходов: **1.Cd5! Cc6 2.Лh8! Cb7 3.Cc6 C:c6**×.

(см. «Квант», 1980, № 12)

1. (К.Фабель, 1949 г.). Последним ходом белых была короткая рокировка! Самое удивительное, что в ней участвовал один король, переместившийся с e1 на g1. Дело в том, что белые играли партию с форой в две ладьи, а ладья на h3 — превращенная! Вместо короткой рокировки белые теперь делают длинную, в результате чего их король попадает с e1 не на g1, а на c1 (ладья a1, как и h1, участвует в рокировке лишь символически). После **1.0 — 0 — 0** черный король вынужден отступить в угол **1...Kpa1**, где и получает мат **2.Лa3**×.

2. (Ф.Вайрд, 1910 г.). Последним ходом белый король взял черную ладью Kpg4:Лf5, которая перед этим побила белого ферзя — Лf1:Фf5. Вместо этого черные играют **1...Лh1** и получают мат — **2.Фf2**×.

В условии, конечно, опечатка (на доске стоит не конь, а король), но многие читатели «решили» и задачу с конем (что им зачтется при подведении итогов).

3. (Э.Погосянц, 1963 г.). Превращение пешки в ферзя можно разбить на две части: 1) с доски снимается собственная пешка; 2) на доску ставится превращенный ферзь. Белые уже успели сделать полхода — сняли с доски свою пешку h7. Теперь они заканчивают ход, водружая на h8 ферзя! Итак, полный ход белых — **1.h7 — h8Ф** ×!

4. (Э.Погосянц, 1980 г.). Ход, который заключается в превращении пешки со взятием, можно разбить на три части: 1) снятие с доски собственной пешки; 2) снятие с доски неприятельской фигуры; 3) на место взятой фигуры ставится превращенная. В данной позиции треть хода уже сделана — белые сняли с доски свою пешку g7. Осталось снять черного ферзя («треть» хода), и на его место поставить белую ладью или ферзя (еще «треть» хода). Полный ход **1.g7:h8Л**×!

Номер подготовили:
А. Виленкин, А. Егоров, И. Клумова, Т. Петрова,
А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шихапович

Номер оформили:
Л. Денисенко, М. Дубах, Г. Красиков,
С. Лухин, Э. Назаров, И. Смирнова

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор М. Медведская

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 22.12.80
Подписано в печать 4.2.81
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16 Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 6,89 Т-02976
Цена 30 коп. Заказ 3123 Тираж 235 652 экз.

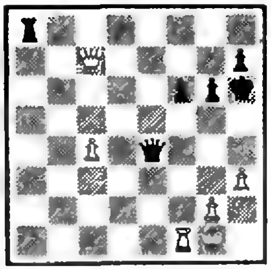
Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли,
г. Чехов Московской области

Зевки и комбинации гроссмейстеров

Комбинации Чигорина

На шахматной страничке этого номера вы познакомились с драматическим концом второго матча на первенство мира между В. Стейницем и основоположником отечественной шахматной школы М. Чигориным. И хотя Чигорин был ярче Стейница, превосходил его в понимании шахматного искусства, но когда дело касалось спортивной устойчивости и хладнокровия, в критические моменты борьбы Чигорин заметно уступал первому шахматному королю. Только недостатками характера можно объяснить тот факт, что Чигорин не стал чемпионом мира.

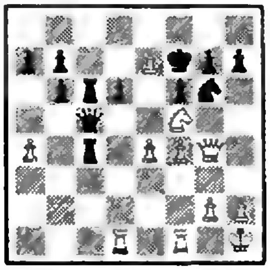
Прежде чем предложить вам несколько комбинаций Чигорина, приведем еще один редчайший пример «шахматной слепоты», взятый ни больше ни меньше, как из матча претендентов 1971 года (пятая партия).



Тайманов — Фишер

При анализе отложенной партии эта позиция стояла на доске у советской «бригады» в составе М. Тайманова и трех его тренеров В. Балашова, Е. Васюкова и А. Котова. Все четверо гроссмейстеров сочли единодушно, что Фишер не может идти на нее, так как теряет пешку после Л:f6. Когда американский гроссмейстер все же избрал этот вариант, удивленный Тайманов после некоторого размышления взял пешку — **1.Л:f6.** Шах ферзем **1...Фd4+** был для него как гром среди ясного неба. Оказалось, что четыре гроссмейстера просто-напросто зевнули ладью. После **2.Лf2 Лa1+** белые сдались. Подобные курьезы показывают, что не надо терять чувства юмора, когда вы зеваете мат или ладью — в этом отношении вы не отличаетесь от гроссмейстеров...

Рассмотрим теперь четыре известные комбинации Чигорина.

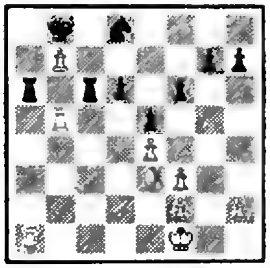


Чигорин — Поллок

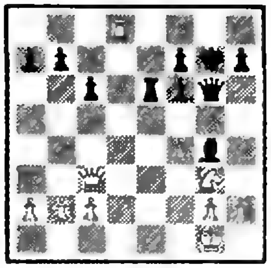
У черных лишняя пешка, кроме того под боем пешки a4 и e4. Кажется, что положение черных не внушает опасений, однако Чигорин находит великолепный решающий прорыв.

1.e5!! Этот удар производит сильное впечатление, ведь поле e5 защищено четыре раза! **1...fe** (остальные взятия не лучше — 1...de 2. Лd8 Лe6 3. Лf8+!; 1...К:e5 2. Ф:g7+; 1...Ф:e5 2. К:d6+! Л:d6 3. fe Л:g4 4. ed) **2. К:d6+! Л:d6 3. fe+ Лf6 4. e8Ф+! Кр:e8 5. Фd7+ Крf8 6. ef. Черные сдались.** Эта партия входит в золотой фонд шахматного искусства.

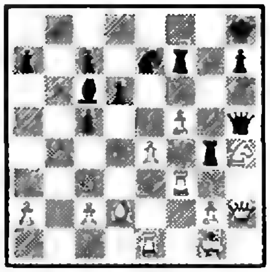
В трех следующих позициях белые (Чигорин) начинают и выигрывают.



1. Белые начинают и выигрывают.

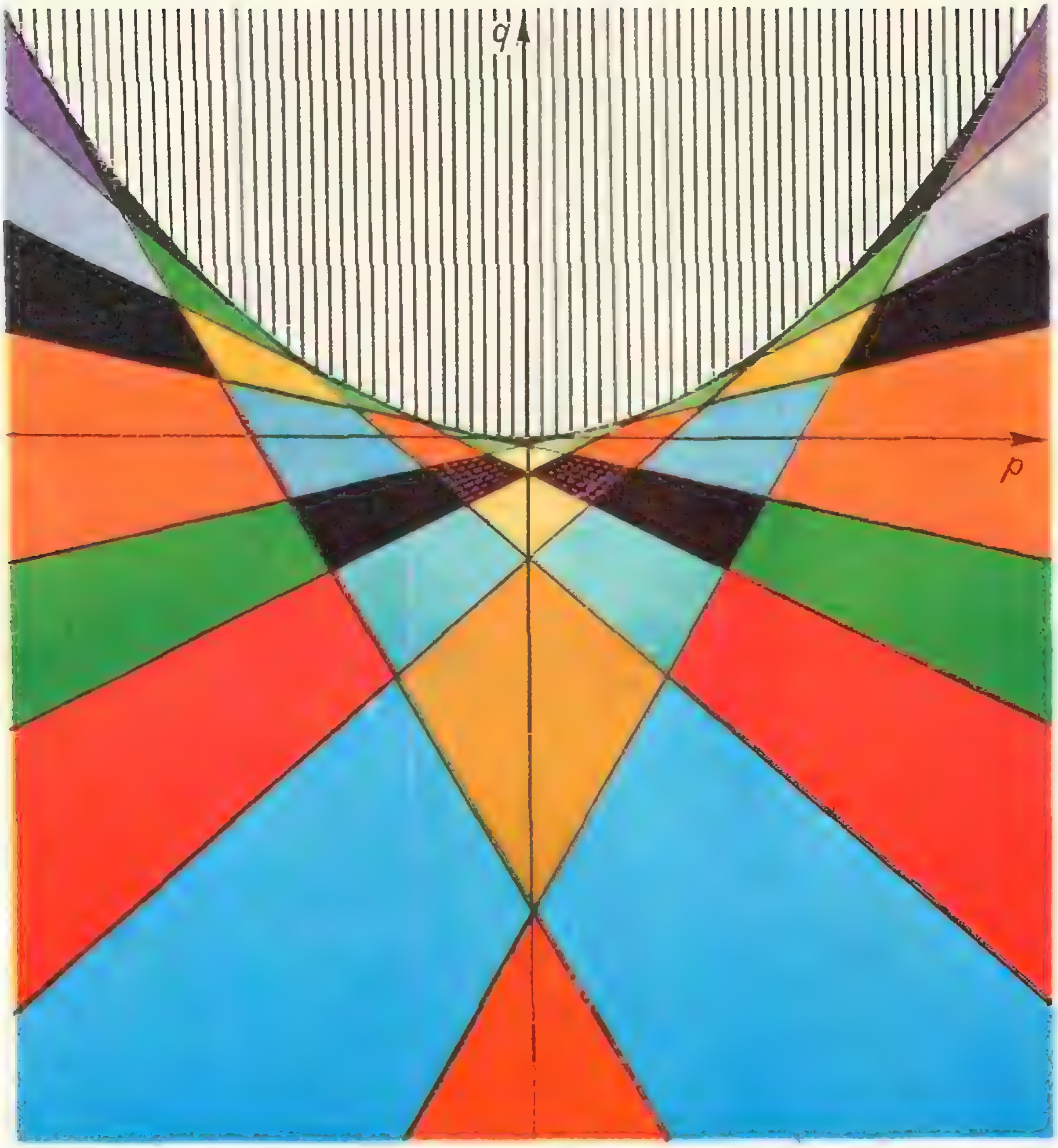


2. Белые начинают и выигрывают.



3. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 31 марта 1981 г.



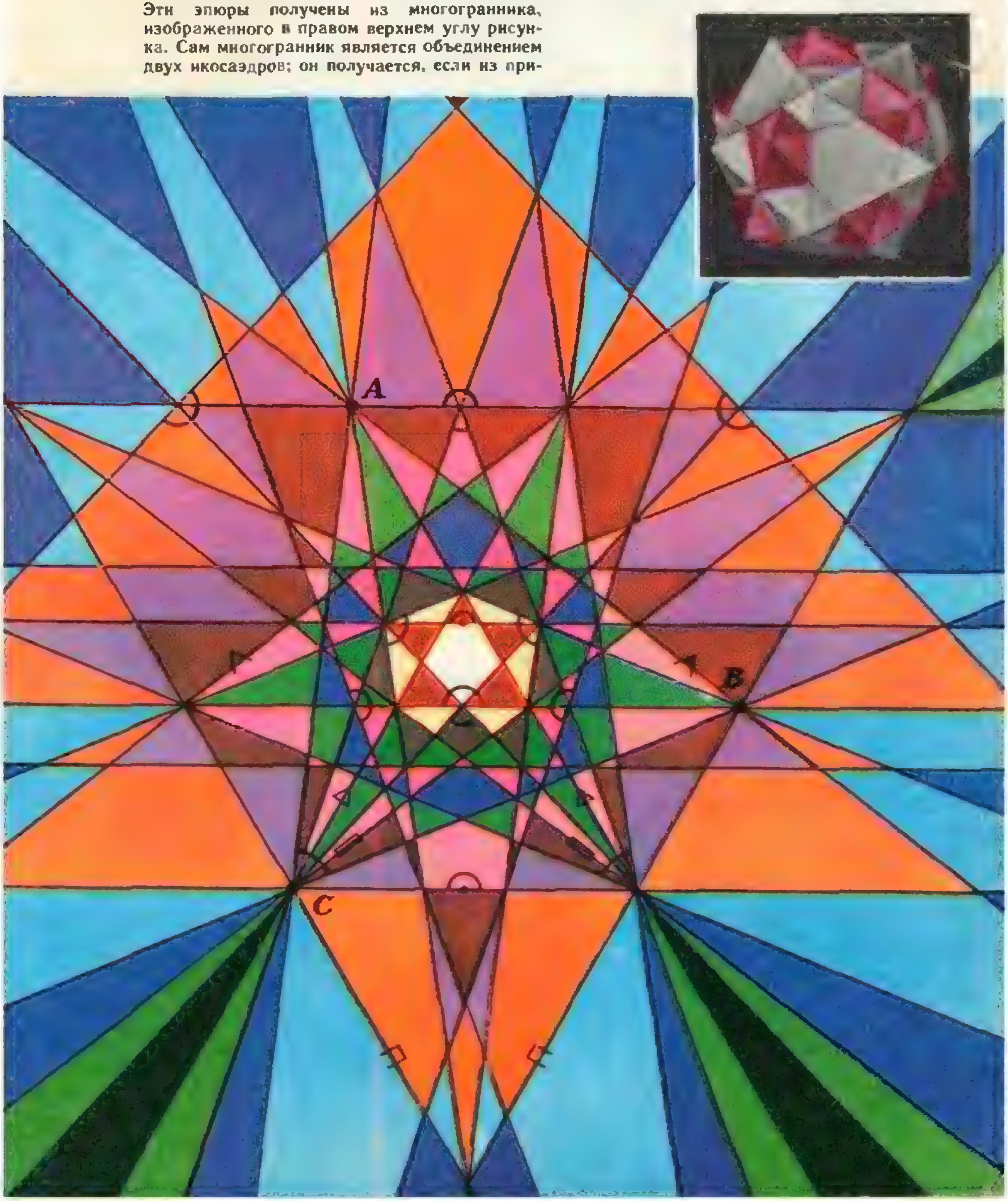
Поставим в соответствие каждому квадратному трехчлену $x^2+p_0x+q_0$ точку $(p_0;\ q_0)$ на плоскости $(p,\ q)$; это соответствие взаимно однозначно. Парабола $q=\frac{p^2}{4}$ на рисунке отделяет точки, соответствующие трехчленам с двумя корнями, от точек, соответствующих трехчленам без корней. Каждая прямая $c^2+pc+q=0$ состоит из точек, соответствующих трехчленам, один из корней которых равен c. Все эти «корневые прямые» касаются «дискриминантной параболы» (на рисунке изображены такие прямые для $c=\pm 1,\ \pm 2,\ \pm\frac{2}{3},\ \pm\frac{1}{2}$).

Каждая из областей, на которые плоскость делится корневыми прямыми, состоит из точек, соответствующих трехчленам, корни которых расположены определенным образом. Например, точкам желтого четырехугольника отвечают трехчлены, для корней x_1, x_2 которых $-\frac{3}{2}<x_1<-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}<x_2<\frac{2}{3}$.

Подумайте, что можно сказать о корнях трехчленов x^2+px+q, если точка $(p,\ q)$ принадлежит какой-нибудь из закрашенных областей. Более подробно о связи точек плоскости (p,q) и трехчленов x^2+px+q рассказано в статье В. Вавилова «Сетчатые номограммы» («Квант», 1978, №9).

Цена 30 коп.
Индекс 70465

С помощью красочных чертежей (эпюров), помещённых на первой и на этой страницах обложки, можно строить много различных красивых многогранников, в том числе звездчатых. Как это делать, рассказывается на с.39. Эти эпюры получены из многогранника, изображенного в правом верхнем углу рисунка. Сам многогранник является объединением двух икосаэдров; он получается, если из принадлежащей В. Гамаюнову модели объединения шести икосаэдров («Квант», 1980, № 11, Iс. обложки) выбросить любые четыре белых многогранника.



НОМЕР
3

Квант

3
1981

Основан в 1970 году

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ
МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:
М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

В НОМЕРЕ:

Ученые обращаются к молодежи

2 *С. Соболев.* На школьной парте будь исследователем

* * *

4 *А. Варламов.* О снежках, орехах, пузырьках и ... жидком гелии

8 *О. Виро.* Раскрашенные узлы

14 Амеба ... в пиджаке

Лаборатория «Кванта»

16 *Н. Ростовцев.* Сделать опыт Юнга? Это не так сложно

Математический кружок

18 *В. Евстигнеев.* Графы и программы

23 **Победители конкурса «Кванта»**

Задачник «Кванта»

24 Задачи М671—М675; Ф683—Ф687
26 Решения задач М622—М624, М626, М627; Ф631—Ф637
33 *Н. Васильев.* К центру тяжести
35 Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта»

«Квант» для младших школьников

37 Задачи
38 *Ф. Бартенев, И. Никольская.* О пользе нелепостей

По страницам школьных учебников

43 *О. Овчинников.* Что же покажет динамометр?

Практикум абитуриента

46 *В. Можаев.* Колебания

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1980 году

51 Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Искусство программирования

57 Заочная школа программирования. Урок 14

Информация

60 *В. Комаров.* Отдых и занятия наукой

61 **Шахматная страничка**

62 **Ответы, указания, решения**

Шахматный конкурс *(3-я с. обложки)*

Смесь *(15)*

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1981

С. Соболев

На школьной парте будь исследователем

В последнее время много внимания уделяется выбору жизненного пути, тому, как найти свою правильную дорогу. Иногда это бывает так трудно сделать! Ведь многое в жизни кажется интересным и увлекательным, не правда ли? Бывает так, что молодой человек больше всего любит стихи и музыку, но с увлечением решает трудные математические задачи, способен до поздней ночи сидеть с паяльником, сооружая свой собственный радиоприемник.

А другим выпускникам школы все равно куда идти, их ничего сильно не увлекает. Математика, в частности, рассуждают они, — это скука. История — еще хуже, чего стоят одни хронологические таблицы, обилие исторических имен...

Жизненный путь ученого начинается обычно рано. Еще в школьные годы, за партой, пробуждается у него жажда знаний. Одного юношу увлекают сложные математические построения, красота и стройность математических теорий. Другого тянет мир химических или физических явлений, третий с жадностью изучает египетские иероглифы.

Именно в школьные годы у будущего исследователя накопляется первый запас знаний, выковываются воля, характер, упорство и, наконец, укрепляется любовь к своему делу.

На школьной парте, в туристском походе, на колхозном поле, в цехе тебя, молодой друг, непрестанно должны волновать вопросы: как, почему, отчего? Разве не увлекательно, например, докопаться будущему математику, какие силы испытывает реактивный самолет со стороны воздуха, который он разрезает? Зачем у быстроходных самолетов делают загнутые

Академик Сергей Львович Соболев — Герой Социалистического Труда, директор Института математики Сибирского отделения Академии наук СССР.

Статья перепечатывается из сборника «Ленин. Наука. Молодежь», выпущенного в 1980 году издательством «Наука».

назад крылья? Как рассчитать частоту колебаний какой-либо детали машины, чтобы избежать резонанса?

Для достижения той или иной цели мало одного желания. Надо еще иметь крепкие знания, видеть интересующие тебя вещи в окружающей среде, уметь наблюдать их взаимосвязь. Это, конечно, трудно. Но ведь у советских людей, а тем более у советских ученых, есть хороший принцип: чем труднее, тем интереснее. Не пасовать перед трудностями, не огорчаться при неудачах.

Вспомните, например, знаменитого русского математика Александра Михайловича Ляпунова. В юности он получил от своего учителя, другого знаменитого математика Пафнутия Львовича Чебышева очень трудную задачу. Эта задача состояла в том, чтобы рассчитать устойчивость фигур равновесия вращающейся жидкости. Хотелось подойти к проблеме образования небесных тел, входящих в состав Солнечной системы. Если бы движение огненно-жидкого шара, каким представлялось Солнце, было неустойчивым, от него могли бы оторваться части и дать начало новым телам — планетам.

Ляпунов долго не мог справиться с этой задачей. Его попытки, одна за другой, были безуспешны. Только через двадцать лет после того, как он начал думать над этим вопросом, ученый дал, наконец, решение задачи, принесшее ему мировую славу. В процессе работы ему пришлось создать множество новых идей и понятий, до тех пор неизвестных. Он вывел общую теорию устойчивости движения, перестроил существовавшую к тому времени несовершенную теорию потенциала тяготения, заложил основы будущей теории интегральных уравнений и многое-многое другое. Этот пример — убедительное подтверждение того, как важно верить в свои силы, быть целеустремленным, стремиться дерзать.

Нам, кому выпала честь строить первое в мире социалистическое государство, по праву можно называть себя строителями коммунизма. Вам, кто сегодня еще учится, наверняка придется жить в этом обществе. Наше поколение немало потрудилось, но и для вас в любой отрасли науки, народного хозяйства будет еще немало увлекательных дел.

Если ты, юный друг, собираешься быть математиком, то не только сам стремись познавать эту замечательную науку, но и старайся быть хорошим организатором. Создавай школьные математические кружки, будь инициативным участником математических олимпиад, конкурсов, посещай те кружки, которые открыты при университетах и институтах. Как и у каждой науки, у математики славное прошлое и замечательное будущее.

За последнее время математика приобрела особую популярность. После создания математических машин всем стало ясно, каковы ее возможности. Вся история точных наук — это почти история математики: так тесно связана она с каждой из них. Дерзать на этом благодатном поприще — значит много и вдумчиво работать, неустанно искать. Стать разведчиком нового можно и в школьные годы.

А. Варламов

О снежках, орехах, пузырьках и... жидком гелии

Хотя гелий и находится почти в самом начале таблицы Менделеева, но с момента открытия он доставил физикам массу хлопот необычностью своих свойств. Правда, хлопоты с лихвой окупаются красотой и уникальностью физических явлений, происходящих в жидком гелии, а также использованием многих этих свойств в современных физических лабораториях. Это — и каждодневное получение низких температур (температура кипения жидкого гелия при атмосферном давлении — 4,2 K), и исследования явления сверхтекучести, открытого в жидком гелии П. Л. Капицей в 1936 году, и получение сверхнизких температур (вплоть до 0,001 K), и многое другое.

Одним из замечательных свойств жидкого гелия является необычный механизм переноса в нем заряда.

Носителями заряда в жидкости, как правило, служат электроны и ионы. Можно представить также процесс, при котором электрон «перепрыгивает» со своего атома на оказавшийся рядом ион, на его освободившееся место «перепрыгивает» электрон с соседнего атома, на место этого электрона — третий со следующего атома, и так далее. Со стороны такая чехарда электронов выглядит как движение положительного заряда в противоположную сторону. А так как на самом деле этого положительного заряда нет, а есть просто отсутствие электрона на своем «рабочем месте», то такой объект называют «дыркой». Движение как электронов, так и дырок происходит в очень сложных полях большого числа атомов. В свое время задачи такого сорта — о движении электронов в твердом теле или жидкости — доставили физикам много хлопот. Но в результате были созданы специальные методы расчета свойств систем многих частиц. Оказывается, в такой системе частицы в большой степени теряют свои индивидуальные качества. Даже понятие массы становится гораздо более сложным, чем привычное нам свойство инертности. В этих условиях частице приписывают так называемую эффективную массу, которая является важной характеристикой частицы, учитывающей ее взаимодействие с атомами окружающей среды. Если мысленно «выключить» все взаимодействия, то эффективная масса частицы переходит в ее обычную массу.

Была выдвинута гипотеза, что заряд в жидком гелии переносят электроны и дырки. Их движение должно было быть почти свободным из-за малой плотности гелия и слабого взаимодействия его атомов с заряженными частицами. Поэтому и эффективные массы таких заряженных частиц должны были бы быть близкими к массе свободного электрона.

Для измерения масс носителей положительного и отрицательного заряда исследовались их траектории в жидком гелии при наложении однородного магнитного поля. Зная начальную скорость частицы и величину магнитного поля, измерив радиус круговой траектории частицы, легко определить ее массу. Результаты этих экспериментов оказались весьма неожиданными: массы носителей положительного и отрицательного зарядов в десятки тысяч раз превышали массу свободного электрона!

Столь разительное отличие теоретических расчетов и экспериментальных данных непозволительно даже для необычного гелия. Поэтому необходимо было предложить какой-то другой, не такой, как у обычной жидкости, механизм переноса заряда в жидком гелии. Объяснение структуры носителя положительного заряда было предложено американским физиком Аткинсом. Оказалось, что вся «хитрость» заключена в сравнительно низком давлении затвердевания жидкого гелия: при достаточно низких температурах $p_{тв}=25$ атм. Именно этот факт и приводит к весьма необычной структуре носителей положительного заряда в жидком гелии.

Известно, что в жидком гелии существуют положительные ионы, которые достаточно хорошо сохраняют свой заряд. Взаимодействие положительного иона с молекулой He_2 приводит к тому, что ее электроны чуть-чуть изменяют свои орбиты, притягиваясь к положительному иону, а положительно заряженные ядра атомов, наоборот, отталкиваются от него. В результате, центры отрицательного и положительного зарядов в молекуле оказываются разнесенными на некоторое расстояние. Таким образом, наличие положительных ионов в толще жидкого гелия приводит к поляризации его молекул. Поляризованные молекулы притягиваются к положительному иону. Это притяжение приводит к повышению концентрации молекул (то есть к появлению избыточной плотности), а следовательно, и к повышению давления по мере приближения к иону. Графически зависимость избыточного давления от расстояния r до иона показана на рисунке 1.

Как мы уже говорили, при давлении в 25 атм жидкий гелий затвердевает. Поэтому как только давление вблизи положительного иона достигнет этой величины, соответствующий объем жидкого гелия затвердеет. Как видно из рисунка 1, при малом внешнем давлении затвердевание происходит на расстоянии $r_0=7$Å от иона. Таким образом, положительный ион оказывается как бы «вмерзшим» в «снежок» из твердого гелия. Так как центр этого снежка положительно заряжен, то при его движении в жидком гелии за ним «тянется хвост» избыточной плотности.

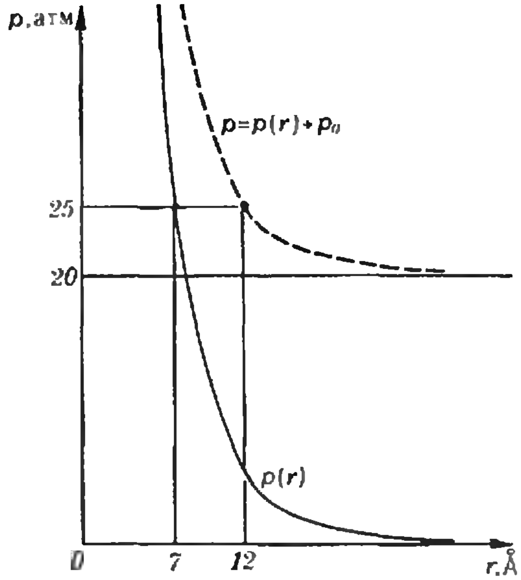


Рис. 1.

Теперь мы можем оценить массу положительного заряда, движущегося в жидком гелии. Масса самого снежка равна $\frac{4}{3}\pi\varrho r_0^3=32m_0$, где m_0 — масса атома гелия (ϱ — плотность твердого гелия). Массу «хвоста» избыточной плотности, который тянется за снежком, можно оценить так: зная зависимость давления от расстояния до центра снежка (то есть до самого иона), можно легко найти, как меняется в зависимости от этого расстояния избыточная плотность гелия; далее мысленно разбиваем жидкость вокруг снежка на сферические слои малой толщины (такие, что на толщине слоя плотность можно считать постоянной) и вычисляем массу каждого такого слоя; суммируя затем все эти массы, мы находим полную массу «хвоста», которая оказывается равной 28 m_0.

Кроме того, при движении тела в жидкости происходит перемещение ее слоев. Это приводит к тому, что тело движется так, как если бы его масса была на некоторую величину больше его истинной массы. Эту дополнительную массу, связанную с перемещением жидкости, называют присоединенной массой (см., например, статью Г. Коткина в «Кванте» № 1 за 1976 год). Для «снежка», движущегося в жидком гелии, присоединенная масса оказывается равной 15 m_0.

Итак, для полной массы положительного заряда, движущегося в жидком гелии, расчет дает значение 75 m_0. Это значение уже хорошо согласуется с величиной, найденной экспериментально.

Совсем по-другому обстоит дело с носителями отрицательного заряда. Оказывается, отрицательно заряженных ионов гелия не существует, и следовательно, построить «снежок» с отрицательным ионом внутри невозможно. Поэтому единственным претендентом в носители отрицательного заряда в жидком гелии остается электрон.

Из эксперимента известно, что электрон не может беспрепятственно проникнуть в жидкий гелий через его поверхность. Этот факт качественно нетрудно понять. Как вы знаете из курса химии, гелий — инертный газ, поэтому его первая электронная оболочка полностью застроена, а следующей застраиваться еще рано — заряд ядра всего лишь $2e^+$, и появление третьего электрона в оболочке энергетически невозможно. Поэтому электрон не может приближаться к атому гелия слишком близко (точно так же обстоит дело и с молекулой гелия) — на близких расстояниях он отталкивается. Таким образом, чтобы загнать электрон через поверхность в толщу жидкого гелия, необходимо совершить некоторую «работу входа». Итальянские физики Каррери, Фазоли и Гаэта предположили, что именно благодаря этой энергии электрон, проникающий в толщу гелия через поверхность, «расталкивает» молекулы гелия, к которым он не имеет права приблизиться слишком близко, и образует вокруг себя сферически-симметричную полость — своеобразный пузырек (рис. 2).

Размеры такого пузырька можно оценить, рассматривая условие равновесия его границы. Хоть на близких расстояниях электрон и отталкивается от молекул гелия, но с достаточно удаленными молекулами он поступает точно так же, как и положительный ион — он поляризует их. Поэтому на больших расстояниях взаимодействие электрона с молекулой He_2 будет точно таким же, как и в рассмотренном уже случае «снежка». Следовательно, по мере приближения к «пузырьку» избыточное давление в гелии возрастает по тому же закону (см. рис. 1). Однако в случае малого внешнего давления на границе пузырька оно еще остается гораздо меньше 25 атм из-за сравнительно большого размера пузырька. Кроме этого давления, связанного с избыточной плотностью поляризованного гелия, на границе пузырька действуют силы поверхностного натяжения, направленные так же, как и силы избыточного давления — к центру пузырька. Что же уравновешивает эти силы? Оказывается, противодействие им создает сам электрон. Находясь внутри пузырька, электрон как бы «мечется» по нему, отражаясь от границ. В результате соударения со стенками создается некоторое давление, которое и компенсирует полное давление извне. Иными словами, электрон внутри пузырька «ведет себя» подобно газу в закрытом сосуде. Расчеты показывают, что при малом внешнем давлении радиус R_0 такого пузырька оказывается порядка 20 Å.

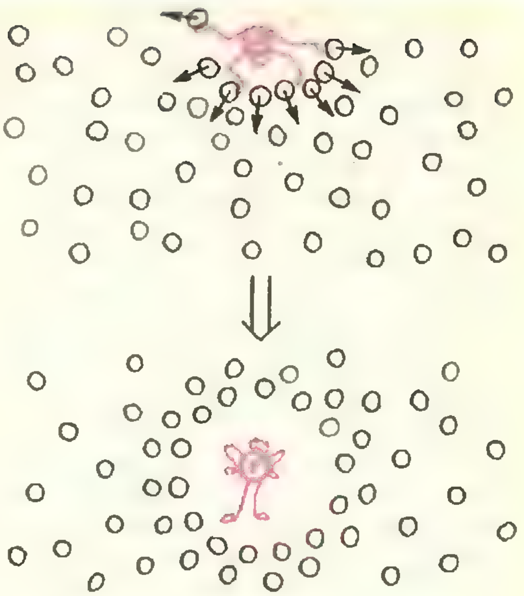


Рис. 2.

Итак, мы выяснили, что носителями отрицательного заряда в жидком гелии являются пузырьки с электроном внутри. Масса таких носителей вычисляется так же, как и масса «снежков». Однако теперь собственной массы пузырька практически нет — она равна массе электрона и пренебрежимо мала по сравнению с массой увлекаемой жидкости. Аналогичный вышеизложенному метод расчета дает для полной массы носителя отрицательного заряда величину 245 m_0.

Теперь посмотрим, как влияет на носителей зарядов рост внешнего давления p_0. На рисунке 1 показана зависимость полного давления в гелии (с учетом внешнего давления) от расстояния до иона для $p_0^*=20$ атм. Такая зависимость для произвольного внешнего давления $p_0<25$ атм получается переносом зависимости для $p_0=0$ вдоль оси ординат. Как видно из рисунка 1, чем больше внешнее давление, тем на большем расстоянии от иона полное давление становится равным 25 атм. Поэтому с ростом внешнего давления «снежок» ведет себя подобно снежному кому: он стремительно обрастает «снегом» — твердым гелием, становясь все больше и больше в размере. Зависимость $r(p_0)$ размера «снежка» от внешнего давления показана на рисунке 3.

А как ведет себя с ростом внешнего давления пузырек? До поры до времени, подобно любому пузырьку в жидкости, при нарастании внешнего давления он просто сжимается. Его радиус R уменьшается, как это показано на рисунке 3. Но вот при давлении $p_0^*=20$ атм графики $r(p_0)$ и $R(p_0)$ пересекаются — размеры пузырька и «снежка» становятся одинаковыми и равными 12 Å. Что будет делать «снежок» при дальнейшем увеличении давления, мы знаем — он будет стремительно наращивать свои размеры за счет затвердевающего на его поверхности гелия. А как вести себя пузырьку — сжиматься дальше (пунктирная линия на рисунке 3)? Но вот тут-то пузырек и проявляет свой норов — при дальнейшем повышении давления он подобно «снежку» начинает обрастать ледяной коркой из твердого гелия. Действительно, как это видно из рисунка 1, при внешнем давлении 20 атм полное давление на границе пузырька (12 Å от его центра) становится равным 25 атм, то есть достигает давления затвердевания жидкого гелия. Пузырек при этом «одевается в ледяную скорлупу», внутренний радиус которой при дальнейшем повышении давления остается приблизительно постоянным, а внешний в точности равен размеру «снежка» при соответствующем давлении.

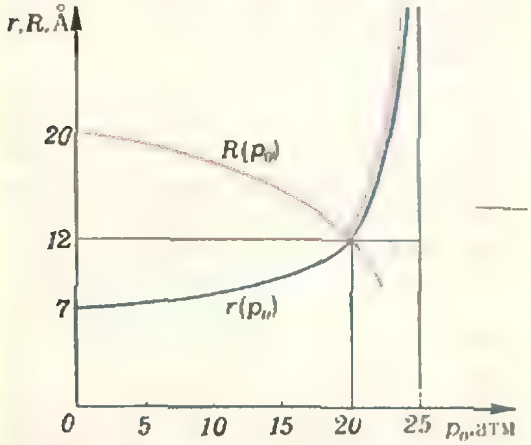
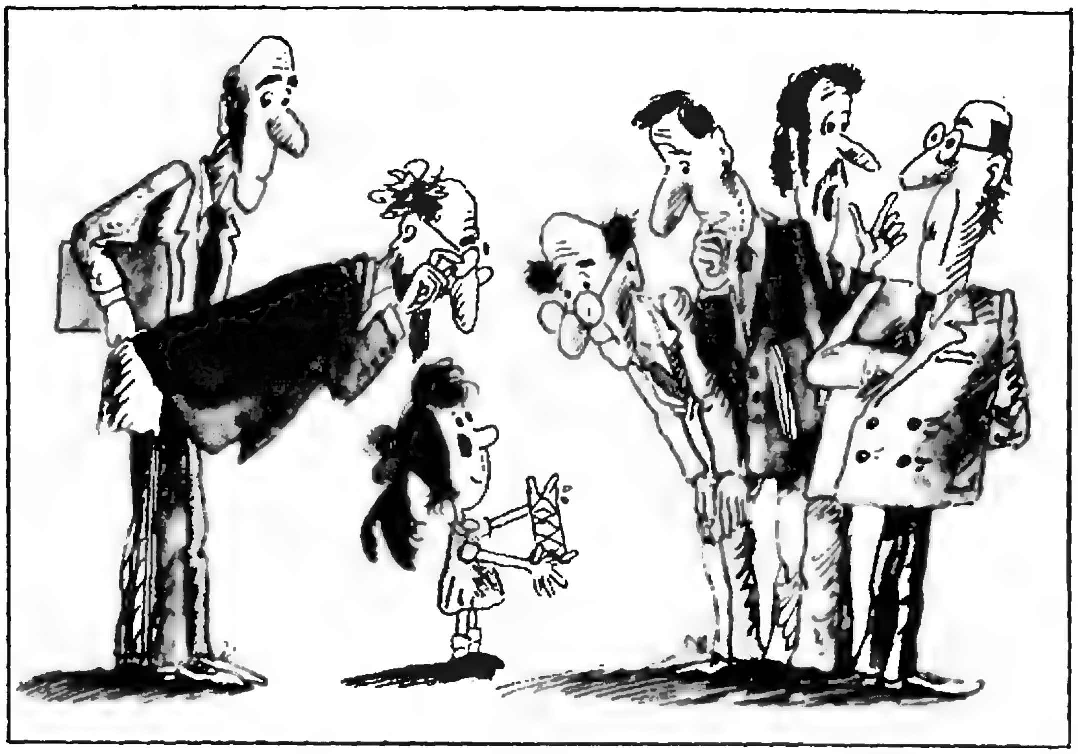


Рис. 3.

Итак, при внешних давлениях больше $p_0^*=20$ атм пузырьки обрастают ледяной скорлупой и превращаются, таким образом, в некое подобие орехов. Однако ядрышко у этих «орехов» весьма своеобразное — это электрон, который «мечется» внутри скорлупы из твердого гелия.

Остается добавить, что при $p_0 \to 25$ атм внешний радиус «ореха», как и «снежка», стремится к бесконечности, что соответствует полному затвердеванию жидкого гелия во всем объеме. В твердом гелии носителями отрицательного заряда оказываются вмерзшие пузырьки с размерами, равными внутреннему радиусу бывшего «ореха» — примерно 12 Å. Положительный заряд переносят вмерзшие ионы гелия — остатки бывших «снежков». Однако теперь переносить заряды не так-то просто — ведь они находятся в твердом веществе. Поэтому и подвижность у этих носителей гораздо ниже, чем у «снежков» и пузырьков в жидком гелии.



О. Виро

Раскрашенные узлы

Что такое узел

Занимаясь каким-нибудь предметом из реальной жизни, математики обычно заменяют его подходящим математическим объектом. Не избежал этой участи и веревочный узел — он был превращен в узел математический.

Прототип математического узла — это заузленный кусок веревки с закрепленными концами.

Одним из вопросов, побудивших математиков заняться узлами, был вопрос, какие узлы можно развязать, не порвав, и какие нельзя.

Концы веревки приходится закреплять, потому что если не запретить ими манипулировать, все узлы окажутся одинаково завязанными (в самом деле, любой узел на веревке можно развязать, протягивая конец веревки поочередно через петли узла).

Более удобный способ избавиться от заботы о концах веревки — соединить их друг с другом. Эта операция показана на рисунке 1. В результате кусок веревки превращается в заузленное кольцо.

Следующий шаг к математическому узлу — замена веревки линией — осью веревки.

Не всякая линия способна быть осью веревки. Например, кривую с бесконечной последовательностью бесконечно убывающих узелков (рис. 2) невозможно «нарастить» до веревки конечной толщины. Кривые такого рода рассматриваются в математике; они называются *дикими узлами*.

Мы не будем здесь заниматься дикими узлами и, чтобы исключить их, примем следующее определение: *полигональным узлом* называется замкнутая, связная, не имеющая точек самопересечения пространственная ломаная, составленная из конечного числа прямолинейных отрезков.

Это определение вполне соответствует нашему наглядному представлению об узлах. Любой полигональный узел можно нарастить до веревочного кольца и в любом веревочном кольце можно найти ось, составленную из конечного числа отрезков.

Слово «связная» в определении полигонального узла означает, что ломаная не представляется в виде объединения нескольких замкнутых ломаных. Если не настаивать на связности, то получится определение *полигонального зацепления*. На рисунке 3 изображены полигональные узлы, и на рисунке 4 — полигональные зацепления, не являющиеся узлами.

Поскольку в этой статье все узлы и зацепления будут полигональными, слово «полигональный» будет для краткости опускаться.

Как нарисовать узел

При изображении узла выбирают такую точку наблюдения, чтобы, во-первых узел лежал по одну сторону от некоторой плоскости, проходящей через эту точку, и, во-вторых, чтобы никакие три звена узла не казались из нее проходящими через одну точку. Выполнения первого условия можно достичь, выбрав точку наблюдения достаточно далеко от узла. Из удовлетворяющей этому условию точки весь узел можно спроектировать на плоскость, то есть как бы охватить одним взглядом. Для выполнения второго условия нужно, чтобы всякая прямая, проходящая через точку наблюдения, задевала не более двух звеньев узла. Выполнения этого условия можно достичь сколь угодно малым смещением точки наблюдения.

В том месте, где изображения двух непересекающихся звеньев узла пересекаются, нужно указать, какое звено проходит ближе, а какое — дальше. Для этого изображение дальнего звена прерывают, как это сделано на рисунках 3 и 4.

Изображение узла, выполненное с соблюдением этих правил, называется *диаграммой* узла.

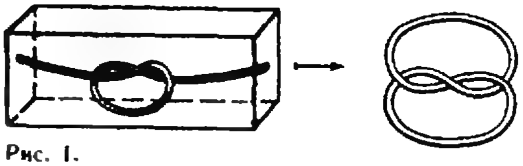


Рис. 1.

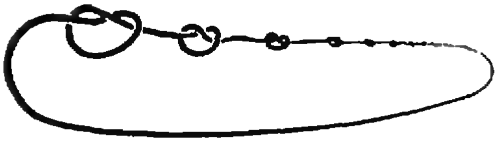
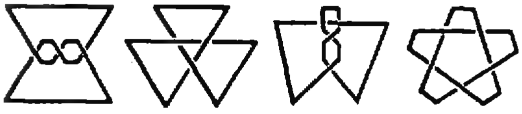
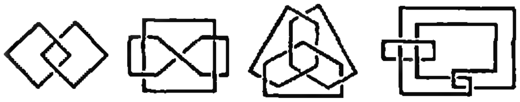


Рис. 2.



а) б) в) г)

Рис. 3.



а) б) в) г)

Рис. 4.

Что значит «одинаково заузленные» узлы

Веревочные кольца, которые получаются друг из друга в результате изгибов, растяжений, сжатий и других непрерывных деформаций, естественно считать *одинаково заузленными*. Это наглядное представление об одинаковой заузленности при переходе к полигональным узлам превращается в понятие изотопности: два узла (или, более общо, два зацепления) называются *изотопными*, если от одного к другому можно перейти, последовательно выполняя преобразования, которые называются элементарными изотопиями. *Элементарная изотопия* — это или замена одного из звеньев узла двумя новыми отрезками, которые вместе с ним образуют контур треугольника, пересекающегося с прежним узлом только по замененному звену*), или обратная операция — замена двух соседних звеньев одним отрезком, который вместе с ними образует контур треугольника, пересекающегося с прежним узлом только по заменяемым звеньям. На рисунке 5 показаны два узла, получающиеся друг из друга элементарной изотопией.

---

*) Эти «два новых отрезка» вместе с заменяемым звеном могут образовывать «вырожденный» треугольник — отрезок. В этом случае элементарная изотопия сводится к добавлению внутри звена новой вершины.

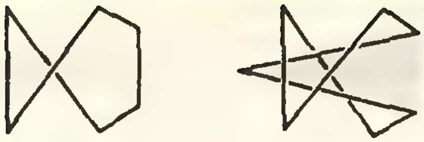


Рис. 5.

Треугольник, участвующий в определении элементарной изотопии, нужно воспринимать как траекторию деформации.

Упражнение 1. Докажите, что узлы с одинаковыми диаграммами изотопны.

Узел, изотопный контуру треугольника, называется *тривиальным*. Узлы, изображенные на рисунке 5, тривиальны. Последовательность элементарных изотопий, соединяющих их с контуром треугольника, показана на рисунке 6.

Ясно, что контуры любых двух треугольников изотопны, так что все тривиальные узлы изотопны друг другу. Тем не менее, тривиальные узлы могут быть весьма замысловатыми.

Упражнения

2. Докажите тривиальность узлов, изображенных на рисунке 7.

3. Докажите, что узлы, изображенные на рисунках 3,*а* и 3,*б*, изотопны.

Как доказывать неизотопность узлов

Определение изотопности немедленно ставит перед нами проблему: *существуют ли неизотопные узлы?*

Пока мы не сможем ответить на этот вопрос, все узлы будут для нас «на одно лицо».

Мы знаем, что очень затейливые узлы могут оказаться тривиальными. С другой стороны, если мы попытаемся развязать веревочное кольцо, изображенное на рисунке 8,*а*, то скоро придем к убеждению, что это невозможно. Но как доказать соответствующее математическое утверждение? Как доказать, что изображенный на рисунке 8,*б* узел нетривиален? (Этот узел носит название *трилистник*.)

Напомню, что нетривиальность узла — это невозможность его превращения при помощи элементарных изотопий в контур треугольника. Сложность знакомых нам примеров тривиальных узлов (см. рис. 7) показывает, как нелегко по виду узла узнать, тривиален он или нет. Единственный мыслимый способ доказательства нетривиальности узла — найти какое-нибудь свойство узлов, сохраняющееся при элементарных изотопиях, которым наш узел обладает, а контур треугольника не обладает.

Свойство узла, сохраняющееся при элементарных изотопиях, называется *инвариантным свойством* или просто *инвариантом* узла (инвариант — слово латинского происхождения, буквально означает «неизменный»).

В теории узлов изучаются главным образом их инвариантные свойства. Примером инвариантного свойства может служить тривиальность. Легко определить и много других инвариантов. Например, инвариантами узла являются наименьшее из чисел звеньев и наименьшее из чисел скрещиваний в диаграммах изотопных ему узлов.

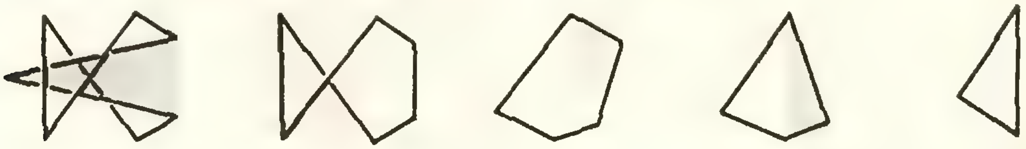
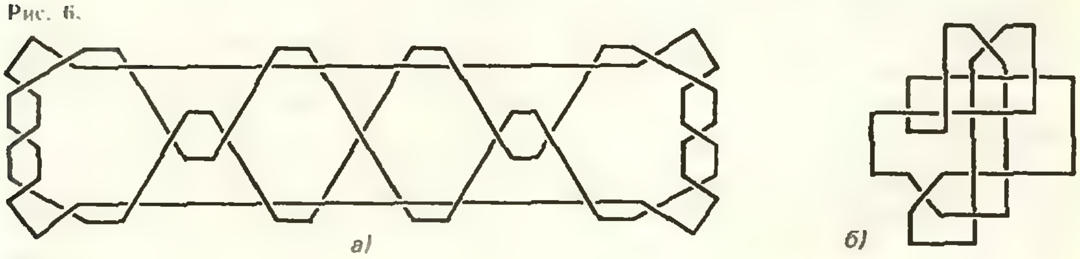


Рис. 6.



а) *б)*

Рис. 7.

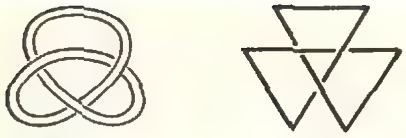

а) б)

Рис. 8.

Однако введение этих и многих аналогичных инвариантов не помогает решить старые вопросы, *а приводит* к постановке новых. Дело в том, что вычисление этих инвариантов вызывает те же затруднения, что и доказательство нетривиальности узла.

Помочь при доказательстве нетривиальности узла может только легко вычислимый инвариант, определяющийся не через целый класс изотопных узлов, а непосредственно *по диаграмме узла.* Такой инвариант мы сейчас введем.

Раскрашиваем диаграммы узлов в три цвета

Напомню, что диаграмма узла — это его изображение на плоскости, в котором изображения никаких трех звеньев не проходят через одну точку и в местах, где должны были бы пересекаться изображения непересекающихся звеньев, изображение дальнего звена прерывается. Из-за этих прерываний диаграмма узла оказывается составленной из нескольких непересекающихся ломаных. Эти ломаные будем называть *участками* диаграммы. Их число равно числу прерываний, *то есть* числу скрещиваний.

Для доказательства неизотопности узлов оказывается полезно раскрашивать их диаграммы, соблюдая некоторые правила.

Раскраску диаграммы узла в черный, красный и синий цвета будем *называть правильной,* если каждый ее участок окрашен в один цвет и вблизи каждой точки скрещивания либо все три участка окрашены в один цвет, либо встречаются все три цвета. Примеры правильной раскраски показаны на рисунке 9, примеры *неправильной — на рисунке 10.*

Упражнения

4. Докажите, что диаграммы узлов, *изображенные* на рисунках 6 и 7, нельзя правильно раскрасить, использовав все три цвета, то есть докажите, что эти диаграммы допускают только три одноцветные правильные раскраски.

5. Докажите, что число правильных раскрасок диаграммы трилистника (рис. 8,б) равно девяти.

Теорема 1 (Основная теорема о трехцветных раскрасках). *Число правильных раскрасок диаграммы узла в три цвета является инвариантом узла.*

Прежде чем доказывать теорему 1, обсудим некоторые ее применения. Вот простейшее следствие:

Следствие 1. *Если диаграмма узла допускает правильную раскраску, в которой участвуют все три цвета, то узел нетривиален.*

Это следствие сразу позволяет получить результат, сформулированный в упражнении 4 (узлы, о которых там идет речь, тривиальны). Но неизмеримо важнее то, что из него вытекает нетривиальность трилистника и многих других узлов.

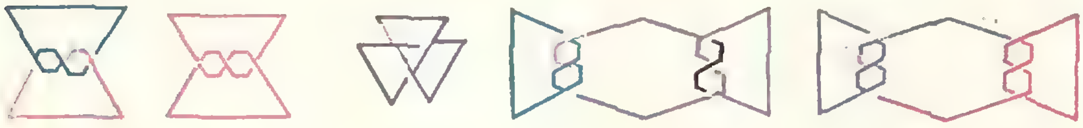

а) б) в) г) д)

Рис. 9.

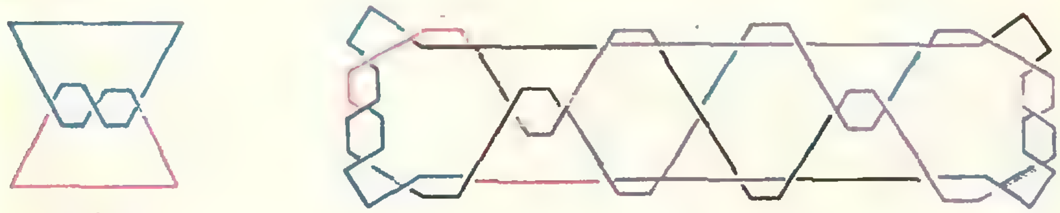

а) б)

Рис. 10.

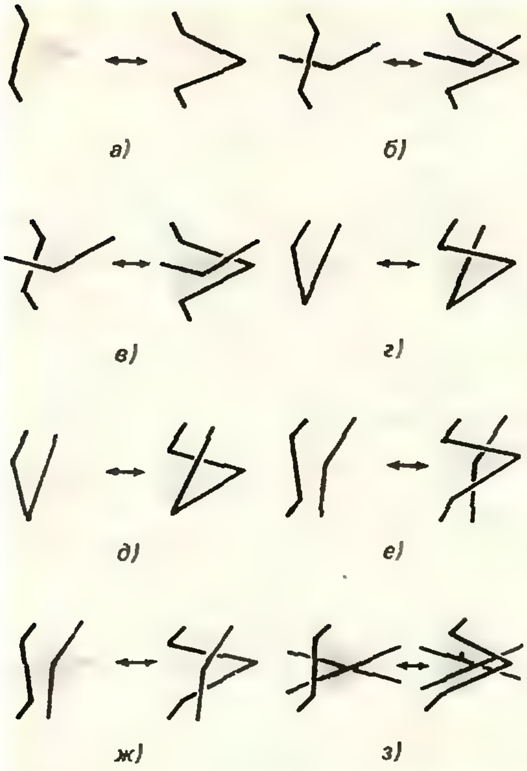


Рис. 11.

Упражнение 6. Докажите (опираясь на теорему 1), что трилистник не изотопен узлам, изображенным на рисунках 3,*в* и 3,*г*, и что узел, изображенный на рисунке 9,*г*, не изотопен ни трилистнику, ни этим узлам.

Узлы, изображенные на рисунках 3,*в* и 3,*г*, нетривиальны. Однако это невозможно доказать правильными трехцветными раскрашиваниями, так что теорема 1, хотя и позволяет доказывать неизотопность узлов во многих случаях, не дает универсального способа доказательства.

Упражнение 7. Постройте бесконечную последовательность узлов, у которых числа правильных трехцветных раскрасок диаграмм попарно различны. (По теореме 1 любые два узла этой последовательности неизотопны.)

Теорема 1 останется верной, если в ней вместо слова «узел» написать слово «зацепление».

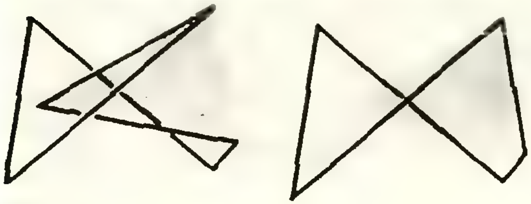


Рис. 12.

Замечание. *Если диаграмма зацепления не допускает правильной раскраски, в которой присутствовало бы более одного цвета, то зацепление невозможно расцепить* (то есть оно не изотопно никакому зацеплению, состоящему из узлов, которые располагаются по разные стороны от некоторой плоскости).

Упражнение 8. Докажите, что зацепления, изображенные на рисунке 4, не расцепляются.

Как доказать теорему 1

Теорема 1 очевидным образом вытекает из следующих двух теорем, доказательства которых несложны, но довольно громоздки; прилежный читатель, несомненно, найдет их самостоятельно.

Теорема 2. *Всякую элементарную изотопию зацепления можно заменить конечной последовательностью элементарных изотопий, каждая из которых изменяет диаграмму зацепления одним из способов, изображенных на рисунке 11.*

Например, элементарную изотопию, изображенную на рисунке 12, можно заменить последовательностью элементарных изотопий, показанных на рисунке 13 (цифрами указан порядок выполнения элементарных изотопий).

Теорема 3. *Между правильными трехцветными раскрасками диаграмм, получающихся друг из друга, операциями, изображенными на рисунке 11, существует взаимно однозначное соответствие, при котором в соответствующих раскрасках неизменяющиеся части диаграмм окрашены одинаково.*

Для всех операций, кроме операции, изображенной на рисунке 11,*з*, утверждение теоремы 3 очевидно. В последнем случае доказательство легко сводится к картинкам, показанным на рисунке 14.

Почему же число правильных раскрасок диаграммы — инвариант узла?

Я надеюсь, что читатель доказал теоремы 2 и 3, а вместе с ними и теорему 1. Однако что же ответить на вопрос, вынесенный в заголовок этого параграфа?

Вы убедились в инвариантности числа правильных раскрасок, но, ве-

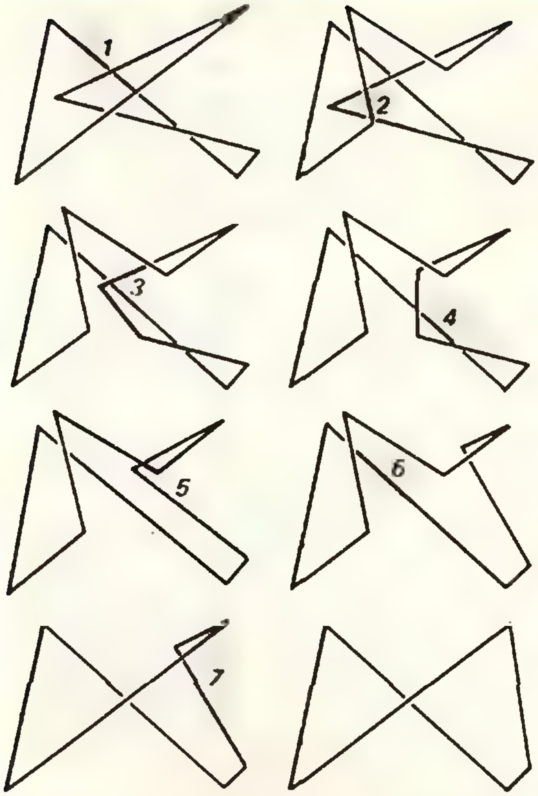


Рис. 13.

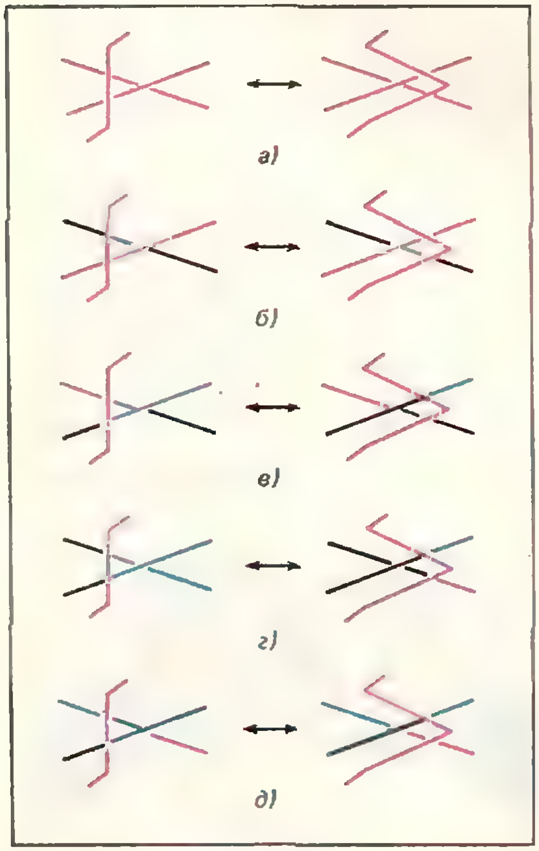


Рис. 14.

роятно, скажете, что хотели бы узнать о настоящих причинах этого удивительного явления. Вы ждете объяснений и хотите понять, как математики додумались раскрашивать диаграммы узлов. Не могло же, кроме того, это доказательство быть первым доказательством! Так можно доказать инвариантность любого *инварианта, определяемого по диаграмме* узла, совершенно не понимая, откуда он взялся! Ведь непонятно, почему нужно раскрашивать в три цвета и как возникли правила раскраски. Наконец, неясно, как это обобщить, а это — верный признак непонимания.

Почему же я выбрал такой путь доказательства? На то были две причины. Во-первых, настоящие доказательства теоремы 1, проясняющие суть дела, связаны со сложными вспомогательными объектами, которые занимают почетное место в современной математике, но которых нет в школьной математике. Мне же хотелось представить чисто элементарное доказательство существования нетривиальных узлов. В литературе, а тем более в популярной литературе, таких доказательств не было. Во-вторых, опираясь на теорему 2, действительно можно доказать инвариантность любого инварианта, определяемого по диаграмме. Попытайтесь придумать совершенно новый инвариант и доказать его инвариантность таким образом. Если получится, сообщите, это может оказаться очень интересным! Известно много инвариантов, определяемых по диаграмме узла, но в определениях большей их части встречаются неэлементарные математические понятия. Поэтому опасность придумать что-нибудь известное не велика.

Чем в действительности объясняется инвариантность числа правильных раскрасок? Важнейшим *инвариантом узла является его группа*. Сама по себе группа узла — непростой объект. Это множество, в котором определена операция, своими свойствами напоминающая сложение целых чисел. Доказать, что группы двух узлов различны, может быть очень трудно. Один из простейших способов сделать это состоит в изучении отображений групп узлов в более простые множества с операциями. Например, в множество всех перемещений плоскости, переводящих в себя некоторый правильный треугольник. Оказывается, правильные трехцветные раскраски диаграммы узла — это отображения группы узла в множество этих перемещений, обладающие специальными свойствами, и, поскольку группа узла не изменяется при изотопиях, число правильных трехцветных раскрасок тоже остается неизменным. Таков план «более правильного» доказательства теоремы 1*).

Амеба... в пиджаке

Эта история произошла в Москве летом 1966 года на Международном конгрессе математиков.

После одного из рабочих дней Конгресса в непринужденной обстановке собрались несколько математиков-топологов. Кроме советских ученых, среди них были выдающийся алгебраический тополог Дж. Ф. Адамс из Великобритании, его соотечественник, не менее известный геометрический тополог Е. К. Зиман и аспирант последнего Колин Рурк. Продолжался извечный спор о взаимоотношениях геометрии и алгебры. Темпераментный геометр Зиман нападал на алгебраиста Адамса, обвиняя его (а в его лице и всех алгебраистов) в отсутствии воображения и в практической беспомощности.

— Со всеми вашими изощренными алгебраическими инвариантами вы не в состоянии решить простейшие практические задачи,— сказал Зиман.— Вот, например, такую:

Зиман соединил большой и указательный пальцы на левой и на правой руках так, что получились два зацепленных кольца (рис. 1).

— Могу ли я расцепить эти кольца, не разжимая пальцы? — спросил он.— Я имею в виду, разумеется, что мое тело можно свободно деформировать (без разрывов и склеек), как тело амебы.

Адамс не спешил с ответом, и тут вступил в разговор доселе скромно молчавший аспирант Рурк.

— Нельзя,— уверенно заявил он.

— Как! — воскликнул Зиман.— Вы, мой ученик, геометр, не можете правильно решить такую простую задачу?! Я понимаю — эти беспомощные алгебраисты... Но вы!

Однако Рурк упорствовал. Вскоре, как водится среди англичан, было заключено пари. Тут же, на бумажной салфетке, Зиман нарисовал серию превращений амебы (рис. 2) и потребовал немедленной выплаты условленной суммы. Ответ Рурка был лаконичным:

— Да, но... вы — в пиджаке.

Зиман призадумался, а затем стал рассуждать вслух:

— Да, конечно, все эти деформации можно проделать и под пиджаком, но после этого пиджак уже не будет сидеть как прежде на амебе. Он будет связывать ей руки... Даже одного рукава для этого хватит.

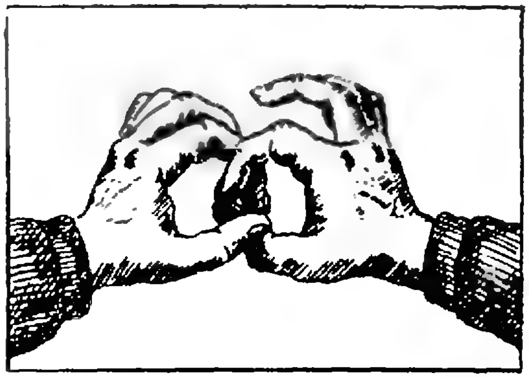


Рис. 1.

---

*) Такое доказательство и сама идея раскрашивать диаграммы узлов принадлежат американскому топологу Р. Фоксу — см. его статью «Metacyclic invariants of knots and links» (Canadian Journal of Mathematics, 1980, № 2, vol. 22, pp. 193—201). Об узлах с несколько иной точки зрения можно прочитать в статье «Узел на столе математика» («Квант», 1975, № 7).

Пока Зиман нехотя доставал из кармана бумажник, его окончательно расстроила завершающая эту историю реплика Адамса:

— Кстати, хотел бы я знать, как вы это докажете без инвариантов?

Опираясь на инвариант, описанный в статье О. Виро, докажем, что амеба в пиджаке не может расцепить пальцы.

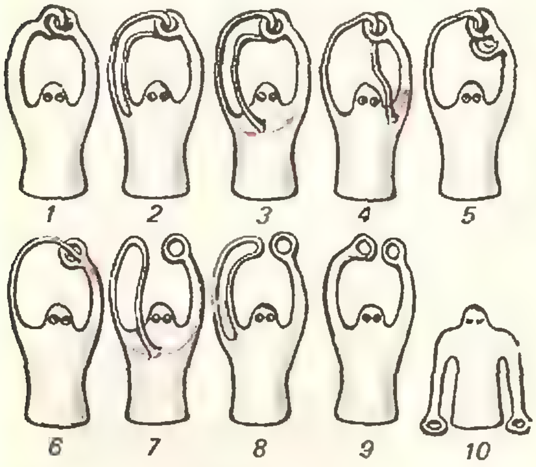


Рис. 2.

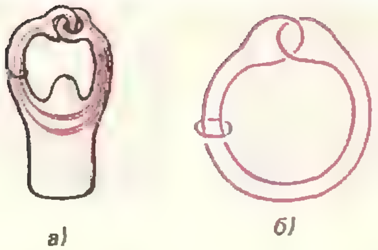


Рис. 3.

Проведем мысленно две замкнутые кривые: синюю — по пиджаку вокруг правой руки (рукав) и красную, соединяющую внутри амебы большие и указательные пальцы правой и левой рук (рис. 3,*а*). Эти две кривые образуют зацепление (рис. 3,*б*), изотопное изображенному на рисунке 4,*г* на с. 9. Если бы амеба смогла разнять руки, то она смогла бы снять пиджак. Но это невозможно, поскольку зацепление рисунка 4,*г* расцепить нельзя (см. упражнение 8 на с. 12).

О. В.

Задачи наших читателей

1. а) Возьмем число 16. Между единицей и шестеркой вставим число 15 — получим число 1156. В середину этого числа снова вставим 15 — получим 111556 и т. д. Докажите, что все такие числа (вида 11...155...56) являются квадратами целых чисел.

б) То же про числа 4489, 444889, ..., получающиеся из 49 вставкой в середину числа 48.

2. а) Между цифрами числа 961 вставили по n нулей. Докажите, что при любом n получится квадрат целого числа.

б) Найдите другие трехзначные числа, обладающие тем же свойством.

3. а) Докажите, что дроби

$$\frac{19}{95}, \frac{199}{995}, \frac{1999}{9995}, \ldots, \frac{199\ldots9}{99\ldots95}, \ldots$$

можно «сократить», «зачеркнув» все девятки.

б) Есть ли еще дроби, допускающие подобное обращение?

И. Суев

4. Обозначим через $S(n)$ сумму цифр числа n. Докажите, что последовательность $S(1979)$, $S(1979^2)$, $S(1979^3)$, ... не ограничена.

А. Келирен

Н. Ростовцев

Сделать опыт Юнга? Это не так сложно

На достаточно большом расстоянии от экрана для наблюдений расположите рядом две одинаковые лампочки, например лампочки для карманного фонаря. Зажгите вначале одну из них, а затем обе одновременно. Вы увидите, что *в любом месте экрана* освещенность больше при двух горящих лампочках, чем при одной.

Однако это не всегда так. При наложении двух световых пучков может оказаться, что *в одних местах пространства* они усиливают друг друга, *в других* — ослабляют или даже гасят друг друга. Это явление называют ***интерференцией света***, а световые пучки, которые дают такую картину, называют ***когерентными***.

Впервые экспериментальное изучение интерференции света было проведено английским ученым Томасом Юнгом в самом начале XIX века. Схема опыта, носящего его имя, приведена на рисунке 1,*а*. Свет от ярко освещенного Солнцем малого отверстия (или узкой щели) A попадал на два близко расположенных друг к другу малых отверстия (или узкие щели) B и C ($|BC|\approx 2$ мм). На удаленном экране ($l\approx 2$ м) в месте перекрытия световых пучков, выходящих из B и C, наблюдались чередующиеся друг с другом светлые и темные полосы (рис. 1, *б*). Если одну из щелей B или C загораживали, темные полосы исчезали и на экране оставалось лишь светлое пятно.

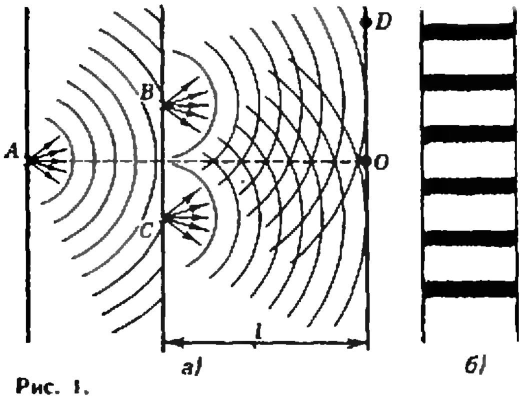


Рис. 1.

Как можно объяснить результаты опыта Юнга? Согласно принципу Гюйгенса — Френеля, малые отверстия B и C, до которых дошла волна от отверстия A, становятся точечными источниками вторичных волн. Из-за общности происхождения эти волны когерентны и при наложении они интерферируют. В тех местах, куда волны приходят в одинаковых фазах, они усиливают друг друга и образуют максимумы освещенности. Там же, куда волны приходят в противоположных фазах, они ослабляют друг друга и образуют минимумы освещенности. Так как колебания в отверстиях B и C совпадают по фазе, ясно, что результат интерференции целиком зависит от разности хода Δ интерферирующих волн до рассматриваемой точки.

В точку O, равноудаленную от отверстий, волны приходят в одинаковых фазах и усиливают друг друга — там наблюдается центральный максимум освещенности. При удалении от точки O вверх или вниз разность хода волн $\Delta=|BD-CD|$ постепенно увеличивается и последовательно принимает значения $\lambda/2$, λ, ${}^3/_2\lambda$, 2λ, ..., где λ — длина волны. Максимумы освещенности наблюдаются в тех местах, для которых выполняется условие

$$\Delta=0,\ \lambda,\ 2\lambda,...$$

В точках, для которых

$$\Delta=\lambda/2,\ {}^3/_2\lambda,\ {}^5/_2\lambda,...,$$

наблюдаются минимумы освещенности.

Можно ли самому воспроизвести опыт Юнга? Оказывается, сделать это, правда, в несколько другом варианте, довольно просто.

Приготовьте одну или две одинаковые ручные швейные иголки диаметром 0,6—0,8 мм и лист бумаги. Лучше воспользоваться черной бумагой, применяемой для упаковки фотопленки или фотобумаги. Роль точечного источника света может играть лампочка для карманного фонаря (если наблюдения проводить на расстоянии, не меньшем 2—3 м от нее) или малое отверстие (диаметром 2—3 мм) в куске картона, установленного непосредственно перед лампочкой так, чтобы через отверстие была видна нить накаливания. В вечернее время можно воспользоваться светом от удаленного фонаря. Самым же лучшим источником света является изображение Солнца в стальном шарике (диаметром 10—20 мм).

Если у вас все готово, приступайте к опытам.

1. Вырежьте из бумаги полоску шириной 1—2 см и иглой проколите в ней отверстия все уменьшающихся диаметров, начиная с диаметра иглы 0,6—0,8 мм. Чтобы отверстия получились круглыми, полоску бумаги при прокалывании поворачивайте вокруг иглы или иглу вращайте вокруг ее оси.

Посмотрите на точечный источник последовательно через каждое отверстие, помещая его непосредственно перед глазом. Вы увидите, что через самое большое отверстие источник будет выглядеть практически так же, как и без отверстия. При меньшем диаметре отверстия картина будет другой: светлое круглое пятно будет окружено темными и светлыми кольцами (рис. 2). По мере уменьшения диаметра отверстия диаметр центрального светлого пятна и окружающих его колец будет увеличиваться, а их интенсивность — уменьшаться.

2. Теперь изготовьте так называемое двойное отверстие, чтобы провести непосредственно опыт Юнга. В правую и левую руки возьмите одинаковые иглы. На полоске бумаги шириной 1—2 см установите острие одной иглы, а на расстоянии долей миллиметра от него установите острие другой иглы. Иглы должны составлять небольшой угол с вертикалью. Постарайтесь одновременно и одинаково сильно нажать на обе иглы — вы получите двойное отверстие. (Конечно, двойное отверстие можно сделать и одной иглой, но, как показывает практика, качество его будет хуже.) Хорошо, если диаметры отверстий будут порядка 0,2—0,3 мм, а расстояние между ними — порядка 0,4—0,6 мм.

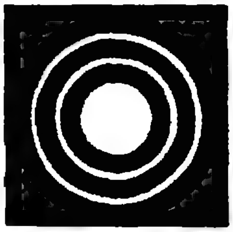


Рис. 2.

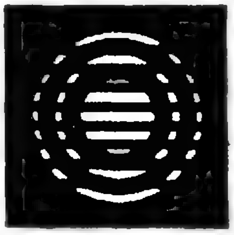


Рис. 3.

Посмотрите через эти отверстия на точечный источник света. Вы увидите, что центральное светлое пятно, получаемое при предыдущем наблюдении, будет разбито темными полосами на ряд светлых полос (рис. 3). Темные полосы (минимумы освещенности) и есть те места, где свет от одного отверстия гасится светом от другого отверстия. Если отверстия круглые и одинакового диаметра, линии минимумов хорошо видны не только на центральном светлом пятне, но и на окружающих его светлых кольцах

В центре интерференционной картины всегда видна светлая полоса. Число всех светлых полос, укладывающихся на центральном пятне, может быть равным 3,5,7,... Это зависит от отношения расстояния между центрами отверстий к их диаметру. Если диаметр отверстий оставить неизменным, а расстояние между отверстиями уменьшать, число светлых полос тоже уменьшается, а их ширина соответственно увеличивается.

Поверните полоску бумаги с двойным отверстием вокруг прямой, соединяющей источник света и глаз, — повернется и система светлых и темных полос.

В. Евстигнеев

Графы и программы

Теория графов оформилась как самостоятельная ветвь математики в середине тридцатых годов и продолжает интенсивно развиваться по сей день. Большой интерес к теории графов сегодня основан в первую очередь на ее широких и плодотворных применениях к проектированию и анализу сложных систем самой различной природы: транспортных сетей, электрических цепей, электронных схем, механических систем, химических реакций, управляющих систем, социальных групп и коллективов и т. д.
На этом занятии математического кружка мы разберем несколько задач программирования, в которых применяются графы.

Графы и ориентированные графы

Граф — это набор элементов, некоторые пары которых выделены. Граф G, таким образом, определяется двумя множествами:

$$G=(X,\ U);$$

первое состоит из элементов произвольной природы (они называются *вершинами*), а второе — из всех выделенных пар вершин. Если каждая выделенная пара упорядочена, граф G называется ***ориентированным графом*** или ***орграфом***, пары называют *дугами*; говорят, что дуга $(x,\ y)$ направлена от своего ***начала*** x к своему ***концу*** y и пишут

$$U\ni u=(x,\ y).$$

В этом случае говорят еще, что дуга u *исходит* (*выходит*) из x и *заходит* (*входит*) в y. Изображают орграф на плоскости в виде точек, соединенных дугами со стрелками (рис. 1). Заметьте на этом рисунке, что дуга, выходящая из вершины x_3, заходит в нее же; такая дуга называется *петлей*.

Если пары $(x,\ y)$ не упорядочены, то их называют *ребрами*, вершины ребра $u=\{x,\ y\}$ называются ***концами***, а сам граф $G=(X,\ U)$ называется ***неориентированным графом*** или просто *графом*. Пример такого графа — так называемый *граф Петерсона* — показан на рисунке 2.

Граф данной программы

Пусть дана некоторая программа P, например, в виде *блок-схемы* («Алгебра 8», п. 50). Сопоставим каждому блоку вершину графа и соединим вершины в соответствии с последовательностью действий (указанной стрелками) в блок-схеме. Полученный орграф назовем ***орграфом программы*** P ***или*** p***-графом***.

Упражнение 1. Нарисуйте *р-граф*, отвечающий блок-схеме программы сортировки шаров, показанной на рисунке 3.

Если программа P записана на каком-либо алгоритмическом языке,

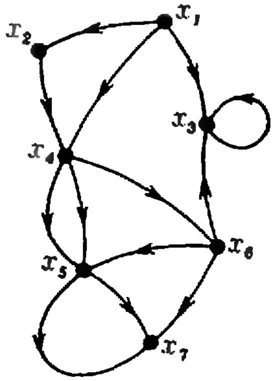


Рис. 1.

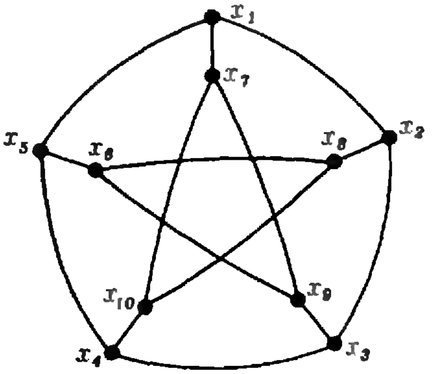


Рис. 2.

то ей тоже можно сопоставить некоторый p-граф: каждому оператору отвечает вершина, две вершины a и b соединяются дугой (a, b), если управление передается от оператора, изображенного вершиной a, к оператору, изображенному вершиной b.

Еще один пример p-графа показан на рисунке 4. Обратите внимание на две особые вершины: *вход* s (соответствующий входным данным программы), в который не заходит ни одна дуга, и *выход* t (соответствующий выходным данным программы), из которого не исходит ни одна дуга.

На данном p-графе $G=(X, U)$ (и вообще на любом орграфе) часто рассматривают *путь*, соединяющий данные вершины $a, b \in X$, то есть последовательность вершин

$$\mu[a, b]=(a=x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n=b),$$

поочередно соединенных дугами

$$(x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots, (x_{n-1}, x_n) \in U.$$

Путь $\mu[a, b]$ называется *простым* путем, если в нем вершины не повторяются, *контуром*, если $a=b$, и *простым контуром*, если $a=b$, но других повторений вершин нет. Так, на рисунке 4 путь (x_1, x_3, x_6, t) — простой, $(x_1, x_4, x_6, x_3, x_6, t)$ — не простой путь, (x_3, x_6, x_3) — простой контур, $(x_3, x_6, x_3, x_6, x_3)$ — контур, но не простой, а (x_2, x_7, x_6) — даже не путь.

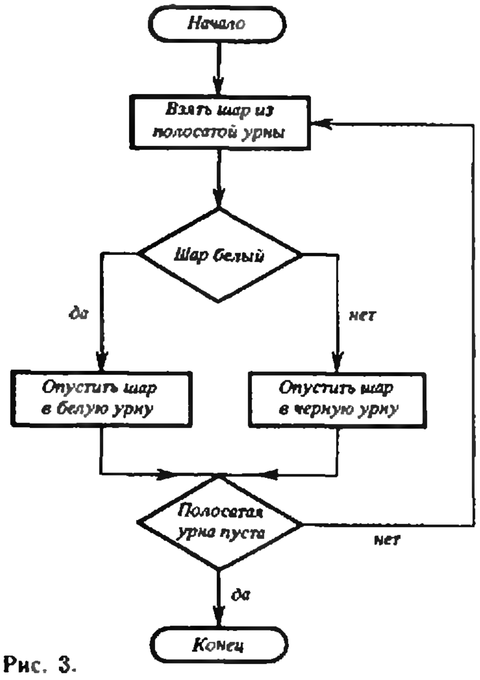

Начало
Взять шар из полосатой урны
Шар белый
да
нет
Опустить шар в белую урну
Опустить шар в черную урну
Полосатая урна пуста
нет
да
Конец

Рис. 3.

2·

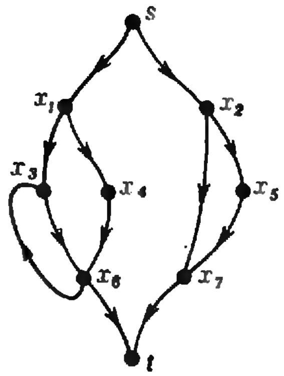


Рис. 4.

Упражнение 2. Перечислите все простые пути и все простые контуры p-графа, построенного при решении упражнения 1.

Все ли пути ведут в Рим?

В p-графе, отвечающем хорошо составленной программе, «все пути ведут в Рим», то есть любой путь с началом в s можно продолжить до выхода t, обозначающего конец работы программы. Поэтому p-граф естественно назвать *правильным*, если любая вершина лежит на пути (не обязательно простом), ведущем из s в t.

Конечно, правильность p-графа еще не гарантирует успешную работу программы: если в нем есть хотя бы один контур, из которого не выходит ни одна дуга, программа может *зациклиться*, то есть крутиться по этому контуру. Но так как не существует общего алгоритма, проверяющего правильность работы программ (об этом мы расскажем в «Кванте» в другой раз), важно уметь проверять хотя бы правильность p-графа.

Как проверить правильность p-графа? В простых случаях это легко делается «вручную».

Упражнение 3. Проверьте правильность p-графа программы сортировки шаров (см. упражнение 1). Удостоверьтесь в неправильности p-графа на рисунке 5, найдя на нем «тупики», «тупиковые контуры» и «недостижимые контуры».

В сложных же случаях, например, в современных больших программах, ручная проверка слишком трудоемка и ненадежна — приходится прибегать к помощи ЭВМ. Поэтому необходимо иметь подходящие для этой цели алгоритмы. Задачу о построении таких алгоритмов мы сформулируем в виде трех упражнений (4—6) и для первого из них подскажем решение.

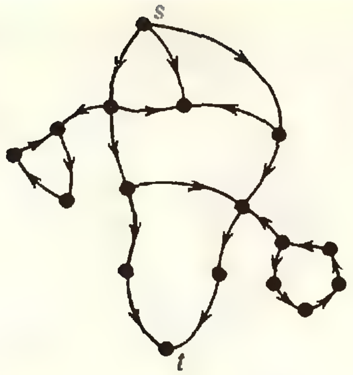


Рис. 5.

Упражнение 4. Найти все простые пути, соединяющие вход p-графа с его выходом.

Один из наиболее красивых алгоритмов для решения этой задачи основан на последовательном устранении вершин p-графа. На рисунке 6 показано его применение к p-графу из рисунка 4. На каждом шагу устраняется одна из вершин $x \in X$ (отличная от s и t); вместо простых путей, соединяющих вершины, соседние с x и проходящие через x, строится новая дуга (рядом с которой записывается название удаленной вершины). Возникающие в этом процессе петли отбрасываются. В результате получается набор дуг, соединяющих s с t, притом на каждой из этих дуг последовательно выписаны вершины, через которые проходит один из искомых путей.

В заключение этого раздела предлагается найти алгоритмы, решающие упражнения 5, 6. Записать их можно в виде блок-схемы, в табличном виде («Алгебра 8», п. 49) или, для учащихся ЗШП, на языке Рапира.

Упражнение 5*. Найти все простые контуры p-графа.

Упражнение 6*. Построить систему путей (не обязательно простых), соединяющих вход p-графа с его выходом, покрывающую все вершины p-графа. Построить минимальную (по числу путей) такую систему.

Орграф арифметического выражения

При вычислении арифметических выражений на ЭВМ в произвольном порядке, когда этих выражений много и они достаточно громоздки, исходные данные и промежуточные результаты вычислений могут занять недопустимо большой объем памяти ЭВМ; как говорят программисты, «программа забивает оперативную память машины». Как с этим бороться? Здесь на помощь приходит теория графов.

Оказывается, с каждым арифметическим выражением можно свя-

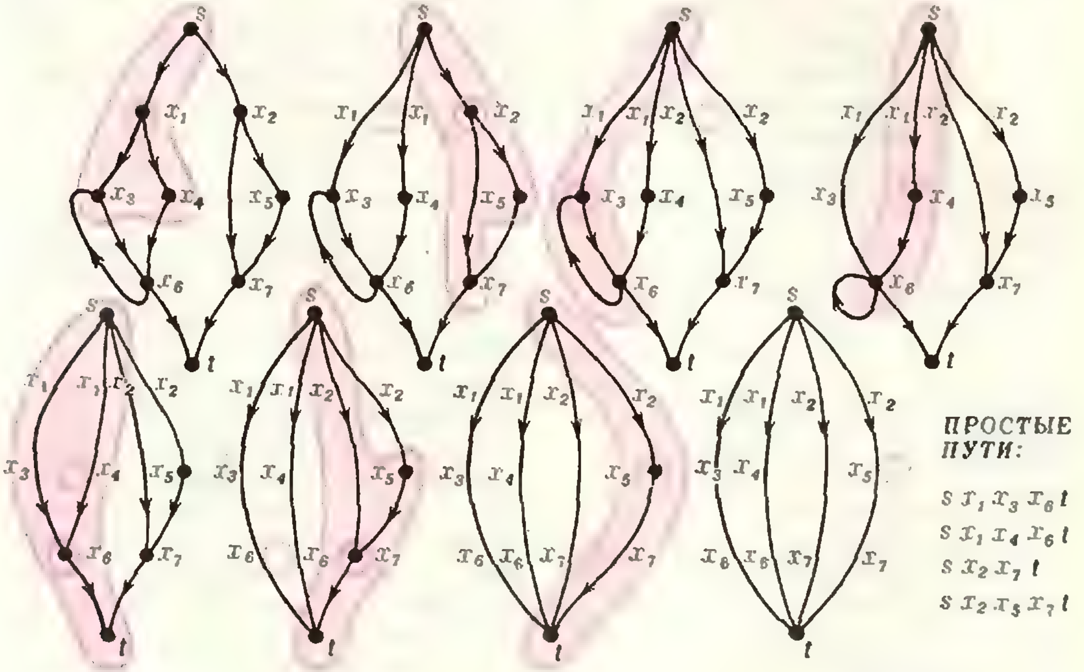


Рис. 6.

зать орграф специального вида. Например, с выражением

$$((a+b)\cdot(c-d))/(g+f)+h=L$$

можно связать граф, показанный на рисунке 7. Если в формуле буквы не повторяются, подобные графы имеют специальное название. *Ордеревом* (*ориентированным деревом*) называется орграф, в котором выделена одна вершина — *корень* ордерева и от любой другой вершины ордерева к корню идет единственный путь. Из корня ни в одну вершину пути нет.

Так, в нашем примере (см. рис. 7) показано ордерево с корнем L. Вершины a, b, c, d, f, g, h называются *висячими*.

Упражнение 7. Постройте ордерево выражения

$$\frac{\sqrt{x+y}}{z^2+5at+7k}+\frac{b+c}{r}=L.$$

Возвращаясь к рисунку 7, представим себе, что отдельные операции производятся в моменты времени, показанные красными вертикальными линиями. Тогда в памяти приходится держать до 6 чисел одновременно. Правда, это число можно снизить до 4, если ввести в память числа g, f в момент времени $t=2$ (вместо $t=1$).

Нельзя ли изобразить наше выражение еще более экономным (в этом смысле) ордеревом?

Протащим верблюда через игольное ушко

Рассмотрим дискретную шкалу времени $t=1, 2, 3, \ldots$ Пусть вычислительный процесс организован так, что ячейки памяти заполняются (вводятся исходные данные, записывается вычисленный промежуточный результат и т. д.) в целочисленные моменты времени и остаются заняты ми в течение нескольких интервалов времени выбранной шкалы. Когда содержимое ячейки используется, она освобождается. Предположим также, что в каждый момент времени производится засылка только в одну ячейку памяти. Последнее условие позволяет занумеровать вершины соответствующего ордерева, используя для этого номера, равные времени появления данной вершины.

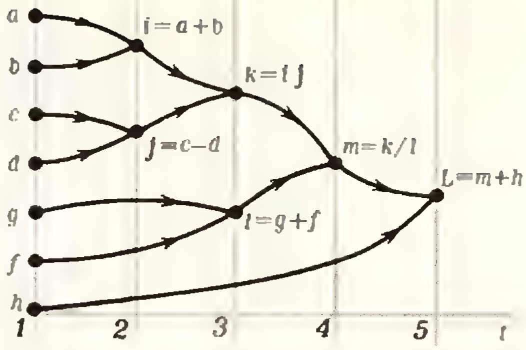


Рис. 7.

Укладкой ордерева $T=(V,E)$ назовем такую нумерацию его вершин, то есть отображение $Y: V\to\{1, \ldots, n\}$, при которой номер начала дуги $u=(x,y)\in E$ меньше номера ее конца, то есть $Y(x)<Y(y)$.

Будем говорить, что дуга (x,y) *проходит над* вершиной z, если $Y(x)<Y(z)<Y(y)$. Обозначим через $W(x)$ число дуг, проходящих над вершиной x, и назовем *шириной* $W(Y,T)$ укладки Y ордерева T наибольшее из чисел $W(x)+1$, то есть

$$W(Y,T)=\max_{x\in V}(W(x)+1)$$

Упражнение 8. Найдите вершину ордерева, показанного на рисунке 7. При решении упражнения 7 попробуйте построить по возможности «узкое» ордерево.

Как связаны между собой требуемый объем памяти и ширина укладки? Очевидно, если в дереве имеется дуга $u=(x,y)$, данное в вершине x требуется для вычисления данного в вершине y и хранится столько времени, над сколькими вершинами $(+1)$ проходит дуга u. Следовательно, число $W(x)+1$ равно числу ячеек памяти, занятых в момент появления данного в вершине x и, значит, *ширина укладки ордерева T равна числу ячеек памяти, требуемых при данной организации процесса.*

Идея построения укладок ордерева, ширина которых мала, была высказана А. П. Ершовым в 1958 году и оказалась чрезвычайно полезной. Для сложных задач удаются такие узкие укладки, что впору говорить о протаскивании верблюда через игольное ушко!

a	0	a
b	0	b
c	0	c
d	0	d
i	1	abi
j	1	cdj
f	0	f
g	0	g
k	2	abicdjk
l	1	fgl
m	2	abicdjkfglm
h	0	h
L	2	abicdjkfglmhL

Рис. 8.

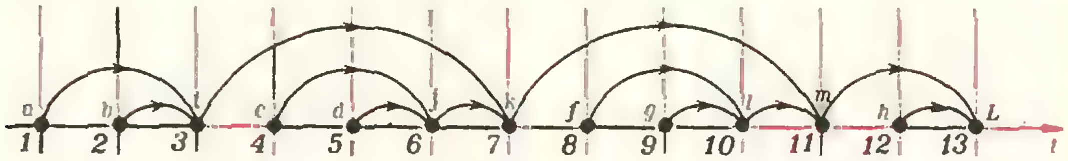


Рис. 9.

Один из алгоритмов построения таких укладок, известный под названием *алгоритма Реджеевского,* мы сейчас опишем.

Шаг 1. Построим таблицу с n строками и тремя столбцами, где n — число вершин ордерева.

Шаг 2. Заполним первый столбец таблицы снизу вверх, поместив в самой нижней строке корень x_0 ордерева, затем в произвольном порядке его предшественников, лишь бы нигде не нарушалась очередность вычислений (то есть любые данные, нужные для очередной операции, должны быть получены раньше ее выполнения).

Далее через $p(x)$ и $q(x)$ мы будем обозначать записи во втором и третьем столбцах строки, начинающейся с буквы x. Значениями функции p будут числа, функции q — последовательности букв. Пусть уже заполнены r первых строк.

Шаг 3. Приступаем к заполнению очередной строки (предыдущие уже заполнены); обозначим через x ее первую букву. Если вершина x — висячая, переходим к шагу 4, в противном случае — к шагу 5.

Шаг 4. Во втором столбце пишем 0, в третьем — x. (Таким образом, мы положили $p(x)=0$, $q(x)=x$.) Переходим к шагу 3.

Шаг 5. Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_k$ — вершины ордерева, непосредственно предшествующие x, упорядоченные так, что $p(y_1) \geqslant p(y_2) \geqslant \ldots$ $\ldots \geqslant p(y_k)$. Найдем

$$p(x) = \max_{1\leqslant s\leqslant k}\{p(y_s)+s-1\}$$

$$q(x) = q(y_1)\,q(y_2)\ldots q(y_k)\,x,$$

и внесем найденные значения во второй и третий столбцы рассматриваемой строки. Переходим к шагу 3.

Повторяем шаги 3—5, пока не будет заполнена вся таблица. Тогда в последней строке во втором столбце мы получим ширину укладки, то есть $p(x_0) = W(Y, T)$, а в третьем — саму укладку дерева T, если вершины в последовательности $q(x_0)$ занумеровать слева направо.

Таблица, полученная при применении алгоритма Реджеевского к ордереву на рисунке 7, показана на рисунке 8, а «уложенное» ордерево — на рисунке 9.

Упражнение 9. Примените алгоритм Реджеевского к ордереву, полученному в упражнении 7.

Победители конкурса «Кванта»

Ежегодно наш журнал проводит конкурс среди школьников по решению задач из Задачника «Кванта». В соответствии с решением оргкомитета Всесоюзной олимпиады школьников победители этого конкурса получают право участвовать в четвертом (республиканском) туре Всесоюзной олимпиады.

Ниже публикуется список победителей конкурса «Кванта» 1980 года, получивших право участвовать в республиканских олимпиадах 1981 года.

Математика

Э. АБДУЛЛАЕВ — Масаллы, с. ш. № 2, 10 кл.
А. БАРГ — Киев, ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.
Ю. БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ — Минск, с. ш. № 64, 10 кл.
В. БЕРЕЖНОЙ — Киев, ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.
А. БРУДНЫЙ — Ярославль, с. ш. № 33, 10 кл.
М. ГАЙСИНСКИЙ — Ташкент, с. ш. № 103, 10 кл.
Д. ГРИГОРЬЕВ — Москва, с. ш. № 57, 10 кл.
О. ЕРОШКИН — Днепропетровск, с. ш. № 15, 8 кл.
А. ЗЕГЕ — Минск, с. ш. № 50, 10 кл.
А. ЗОЛОТЫХ — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
З. ИБРАГИМОВ — Масаллы, с. ш. № 2, 10 кл.
А. КАГАРМАНОВ — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
С. КИМ — Бектемир, с. ш. № 2, 10 кл.
И. КОЛПАКОВ — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
Д. КОРОТКИН — Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ, 9 кл.
С. ЛАМИХОВ — Ташкент, с. ш. № 103, 10 кл.
Л. МЕРКЯВИЧЮС — Лентварис, с. ш. № 2, 11 кл.
Ю. НАЗАРЕНКО — Киев, ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.
П. ОВЧИННИКОВ — Вязники, с. ш. № 11, 10 кл.
М. ОКРОЯН — Ереван, ФМШ при ЕрГУ, 10 кл.
В. РОМАНЮК — с. Куснище Волынской обл., 10 кл.
Б. РУБЛЕВ — Киев, ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.
А. СПИВАК — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 9 кл.
С. СПИЧАК — Киев, ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.
Э. СТЕПАНЯН — Баку, с. ш. № 5, 10 кл.
В. ТИТЕНКО — д. Блужа Минской обл., 9 кл.
Р. УГРИНОВСКИЙ — Хмельник, с. ш. № 3, 9 кл.
О. ФОНАРЕВ — Сумгаит, с. ш. № 11, 10 кл.
А. ХАРИТОНСКИЙ — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
О. ЧАЛЫХ — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 9 кл.
Л. ЭЛЬКУН — Ташкент, с. ш. № 189, 10 кл.

Физика

В. АВЕТИСОВ — Баку, с. ш. № 145, 10 кл.
В. БЕРЕЖНОЙ — Киев, ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.
В. ВАСИЛЬЕВ — Великие Луки, с. ш. № 3, 10 кл.
Б. ВЕЙЦМАН — Одесса, с. ш. № 53, 9 кл.
И. ГУБИН — Ереван, ФМШ при ЕрГУ, 10 кл.
И. ЕЛИШЕВИЧ — Чернигов, с. ш. № 3, 10 кл.
М. ЗЕЙФМАН — Вологда, с. ш. № 9, 10 кл.
И. КОМПАНЕЙЦЕВ — Алма-Ата, РФМШ, 10 кл.
А. ЛЯПИН — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
О. МАНУЙЛЕНКО — Киев, ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.
А. ОСИПОВ — Сосновый Бор, с. ш. № 5, 10 кл.
В. ПЕНТЕГОВ — Киев, с. ш. № 145, 9 кл.
А. ПОНОМАРЕНКО — Киев, ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.
А. САНЖУР — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
А. СМИРНОВ — Курган, с. ш. № 28, 10 кл.
Ю. ТАЛДЕНКО — Сумы, с. ш. № 10, 9 кл.
В. ФЕДЮКОВИЧ — Киев, ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.
А. ЦЕХАНСКИЙ — п. Запрудня Московской обл., с. ш. № 1, 10 кл.
И. ШКРАДЮК — Ногинск, с. ш. № 83, 10 кл.

задачник Кванта

Задачи

М671—М675; Ф683—Ф687

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 мая 1981 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 3—81» и номера задач, решения которых вы посылаете, например М671, М672 или Ф683. Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

М671. Во вписанном четырехугольнике одна диагональ делит вторую пополам. Докажите, что квадрат длины первой диагонали равен половине суммы квадратов длин всех сторон четырехугольника.

Р. Мазов

М672*. Пусть a — натуральное число такое, что 2^a-2 делится на a (например, $a=3$). Определим последовательность (x_n) условиями

$$x_1=a,\ x_{k+1}=2^{x_k}-1.$$

Докажите, что $2^{x_k}-2$ делится на x_k при любом k.

Вальтер Яноус (Инсбрук, Австрия)

М673. На плоскости в вершинах треугольника лежат три шайбы A, B, C. Хоккеист выбирает одну из них и бьет по ней так, что она проходит между двумя другими и останавливается в какой-то точке.

а) Покажите, как после пяти ударов шайба C может вернуться на свое место, а шайбы A и B поменяться местами.

б) Могут ли все три шайбы A, B, C вернуться на свои прежние места после 25 ударов?

А. Разборов

М674. На сторонах BC, AC и AB остроугольного треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1 соответственно. Известно, что центр описанной около треугольника ABC окружности совпадает с точкой пересечения высот треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны.

Д. Изаак

М675. Системой разновесов называется совокупность натуральных чисел, из которой нельзя извлечь два различных набора с одинаковой суммой (например, числа 24, 23, 22, 20, 17, 11 образуют систему разновесов, а числа 1, 2, 3, 4, 5, 8 — не образуют: $2+3+4=1+8$). Докажите, что из чисел, меньших 1000, можно выделить систему разновесов из: а) 10 чисел, б) 11 чисел.

в) Докажите, что 14 чисел из них выбрать нельзя.
г) Докажите, что если числа образуют систему разновесов, то сумма их обратных величин не превосходит 5/2.
д) Выберите из чисел, меньших 700, систему разновесов из 11 чисел.

Г. Гуревич, А. Колотов

Ф683. На рисунке 1 показаны источник AB и его изображение $A'B'$, полученное в линзе. Определить построением расположение линзы и ее фокусное расстояние.

Ф684. Схема имеет N входных зажимов, один выходной и один общий («земля»). На каждом из входных зажимов потенциал относительно «земли» составляет от $+50$ до $+200$ В.
1) Нарисуйте вариант схемы, который обеспечит на выходном зажиме максимальный из приложенных ко входам потенциалов.
2) Нарисуйте другой вариант — обеспечивающий на выходном зажиме минимальный из приложенных потенциалов.
Постарайтесь обойтись без применения дополнительных источников питания.

А. Зильберман

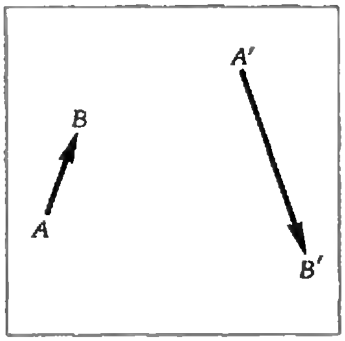


Рис. 1.

Ф685. Между стенкой и кубом массы $M=10$ кг летает на гладком столе упругий шарик массы $m=0{,}1$ г. Его скорость вначале, когда куб покоился, составляла $v_0=100$ м/с. Найти скорость куба в тот момент, когда он будет в 2 раза дальше от стенки, чем вначале.

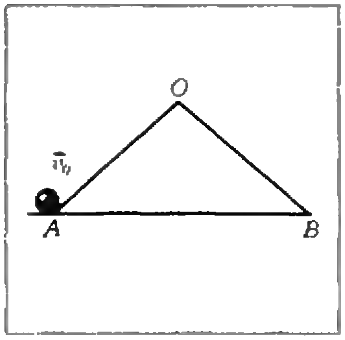


Рис. 2.

Ф686. Тонкий обруч массы M и радиуса R поставлен на горизонтальную плоскость. По гладкому каналу, проходящему внутри обруча, соскальзывает из верхней точки без начальной скорости небольшое тело массы m. Определить скорость центра обруча в тот момент, когда тело находится в точке обруча A, радиус-вектор которой образует угол φ с вертикалью. В начальный момент обруч покоится. Трение между обручем и плоскостью отсутствует.

С. Кротов

Ф687. Стальному шарику, находящемуся в точке A основания AB равнобедренного прямоугольного клина, сообщают скорость v_0 в направлении стороны AO (рис. 2). При каких значениях v_0 шарик из точки A попадает в точку B? Длина ребра клина l.

Е. Рабкин,
ученик 9 кл.

Решения задач

М622—М624, М626, М627; Ф631—Ф637

М622. *Докажите, что количество решений уравнения*

$$x^3+y^2=z^3+t^2+1$$

в натуральных числах, не превосходящих 10^6, меньше, чем количество решений уравнения

$$x^3+y^2=z^3+t^2$$

в натуральных числах, не превосходящих 10^6.

Для заданного натурального числа k обозначим через l_k количество решений уравнения $u^3+v^2=k$ в натуральных числах, не превосходящих 10^6. Тогда количество рассматриваемых решений уравнения $x^3+y^2=z^3+t^2$ равно

$$l_2^2+l_3^2+l_4^2+\ldots+l_r^2=\sum_{k=2}^{r} l_k^2,$$

где r — наибольшее из k, для которых $l_k\neq 0$ (ясно, что начиная с некоторого достаточно большого k наши уравнения не будут иметь решений в натуральных числах, не превосходящих 10^6). Количество же рассматриваемых решений уравнения $x^3+y^2=z^3+t^2+1$ равно

$$l_2l_3+l_3l_4+\ldots+l_{r-1}l_r=\sum_{k=3}^{r} l_{k-1}l_k.$$

Из неравенства

$$l_2^2+(l_2-l_3)^2+(l_3-l_4)^2+\ldots+(l_{r-1}-l_r)^2+l_r^2>0,$$

получаем

$$\sum_{k=2}^{r} l_k^2>\sum_{k=3}^{r} l_{k-1}l_k,$$

откуда и следует утверждение задачи.

В связи с задачей **М622** возникает следующий, по-видимому, очень трудный, вопрос:

Для каких натуральных k существуют такие натуральные числа n и m, что $n^3+m^2=k$?

В. Вавилов

◆

М623. *а) Сколько осей симметрии имеет куб? Правильная треугольная пирамида?*
б) Докажите, что если некоторый многогранник имеет k осей симметрии ($k\geqslant 1$), то k нечетно.

а) Нетрудно указать девять осей симметрии куба. Это — прямые, соединяющие центр куба O с центрами граней (их три: Ox, Oy, Oz на рисунке 1) и с серединами ребер (их шесть).

Других осей симметрии у куба нет; это можно доказать, опираясь на такое наблюдение: при любом самосовмещении куба каждая из трех осей Ox, Oy и Oz должна отображаться на одну из этих же осей, причем если это самосовмещение — симметрия (поворот на 180°) S_l относительно некоторой прямой l, отличной от Ox, Oy и Oz, то одна из этих трех осей должна переходить в себя, а две остальные — друг в друга.

У правильного тетраэдра три оси симметрии — прямые, соединяющие середины его ребер. Чтобы убедиться в этом, удобно достроить тетраэдр до куба, проведя через каждое ребро тетраэдра плоскость, параллельную противоположному ребру (рис. 2). Ясно, что любое самосовмещение тетраэдра будет также самосовмещением этого описанного куба. Из девяти осевых симметрий, отображающих куб на себя, лишь три будут переводить в себя тетраэдр.

б) Пусть дан многогранник M, у которого более одной оси симметрии.

Лемма 1. *Если l и m — оси симметрии многогранника M, то $S_l(m)=m'$ — также ось симметрии M.*

В самом деле, если точки P и P' многогранника M сим-

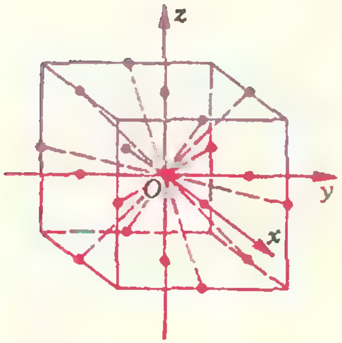


Рис. 1.

Задача **М625** решена в статье Ю. Михеева «Одной линейкой» («Квант», 1980, № 10).

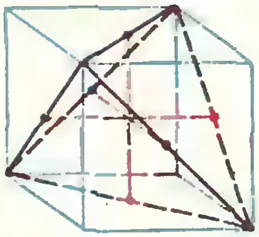


Рис. 2.

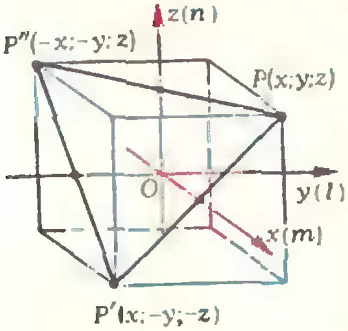


Рис. 3.

метричны относительно m, то $S_l(P)$ и $S_l(P')$ будут симметричны относительно m'. Короче: $S_{m'}=S_l \circ S_m \circ S_l$.

Лемма 2. *Если l и m — оси симметрии многогранника M, пересекающиеся в точке O и перпендикулярные друг к другу, то прямая n, перпендикулярная им обоим и проходящая через точку O, также служит осью симметрии M.*

Действительно, $S_n=S_m \circ S_l$. Это легко проверить, приняв данные прямые за оси координат, или построив прямоугольный параллелепипед с центром в точке O и осями симметрии l, m, n с произвольной вершиной P (рис. 3).

Леммы 1 и 2 позволяют, фиксировав какую-то одну ось симметрии l, разбить все остальные на пары: если m удовлетворяет условиям леммы 2, то пару с ней образует n, а если нет, то $m'=S_l(m)\neq m$. Отсюда сразу следует утверждение задачи б).

Возникает естественный вопрос: какое вообще (конечное) множество прямых может быть множеством всех осей симметрии некоторого многогранника?

Различные примеры даются множеством осей симметрии n-угольной правильной призмы (здесь количество осей $p=n$ при n нечетном и $p=n+1$ при n четном), тетраэдра (или прямоугольного параллелепипеда с разными ребрами, $p=3$), куба (или октаэдра, $p=9$) и додекаэдра (или икосаэдра, $p=15$). Попробуйте доказать, что других множеств осей симметрии (состоящих более чем из одной прямой) не бывает. Конечно, тут не обойтись без такой очень полезной леммы, которую многие читатели применяли и в решении задачи б).

Лемма 3. *Оси симметрии любого многогранника пересекаются в одной точке.*

Предположим, что l, m — непересекающиеся оси симметрии многогранника M. Пусть n — общий перпендикуляр l, m; рассмотрим прямоугольную систему координат с началом в точке $O=l\cap n$, с осью Oz, направленной по лучу OA, где $A=n\cap m$; пусть $|OA|=a$. Тогда при симметрии относительно оси l координата z любой точки переходит в $(-z)$, а при симметрии относительно m — в $(2a-z)$. Поэтому при композиции этих двух симметрий z изменяется на $2a$. Повторяя эту композицию достаточное число раз, мы «выгоним» любую точку за пределы многогранника M. Противоречие!

Вот еще более короткое доказательство леммы 3 (правда, использующее понятие, заимствованное из механики): пусть O — центр масс одинаковых грузиков, помещенных в вершинах многогранника M; ясно, что при любом самосовмещении многогранника M грузики лишь меняются местами, поэтому точка O переходит в себя; в частности, все оси симметрии многогранника M проходят через точку O.

Н. Васильев, В. Сендерон, А. Сосинский

◆

М624. *Найдите последовательность (a_n), определяемую условиями $a_1=1$,*

$$1+\sum_d (-1)^{n/d}a_d=0, \quad (*)$$

где сумма $\sum$ берется по всем делителям d числа n (включая $d=1$ и $d=n$).

Например, если $n=p$ — простое число, то $(*)$ принимает вид $1+(-1)^{p/1}a_1+(-1)^{p/p}a_p=0$, откуда $a_p=2$, если $p=2$, и $a_p=0$, если $p>2$.

Перепишем соотношение $(*)$ в виде формулы

$$a_n=1+\sum_{1<d<n}(-1)^{n/d}a_d, \qquad (**)$$

которую можно рассматривать как рекуррентную для вычисления a_n ($n=2, 3, 4, \ldots$).

Найдя несколько первых членов последовательности (a_n):

$$a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=0,\ a_4=4,\ a_5=a_6=a_7=0,\ a_8=8,\ \ldots,$$

можно предположить, что верно следующее общее утверждение:

$$a_p=\begin{cases} n, \text{ если } n=2^m,\\ 0, \text{ если } n\neq 2^m.\end{cases} \qquad (1)$$

Докажем это, используя метод математической индукции. Пусть утверждение (1) верно для всех $n\leqslant k$. Докажем его для $n=k+1$. Рассмотрим два случая.

а) $n=k+1=2^m$, $m\geqslant 1$.

Согласно предположению индукции, (1) верно для всех делителей числа $n=k+1$, не превосходящих k. В данном случае для чисел $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{m-1}$.

Применяя соотношение (*), определяющее последовательность (a_n), получаем

$$1+a_1+a_2+\ldots+a_{2^m-1}-a_{2^m}=0,$$

откуда

$$a_{k+1}=a_{2^m}=1+1+2+\ldots+2^{m-1}=2^m,$$

— утверждение в случае а) доказано.

б) $n=k+1\neq 2^m$.

Запишем $k+1$ в виде

$$k+1=2^r\cdot s,$$

где 2^r — максимальная степень двойки, на которую делится $k+1$, а s — нечетное число, большее единицы.

Согласно предположению индукции делителями d числа $k+1$ (отличными от $k+1$), для которых $a_d\neq 0$, являются лишь числа 1, 2, 2^2, ..., 2^r.

Из соотношения (*)

$$1+a_1+a_2+\ldots+a_{2^r-1}-a_{2^r}-a_{k+1}=0,$$

то есть

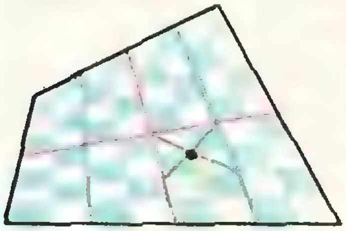
$$a_{k+1}=1+1+2+\ldots+2^{r-1}-2^r=0,$$

— и утверждение (1) в случае б) также доказано.

В. Абрамович

◆

М626. *Каждая сторона выпуклого четырехугольника разделена на 8 равных частей. Соответствующие точки деления на противоположных сторонах соединены друг с другом, и полученные клетки раскрашены в шахматном порядке. Докажите, что сумма площадей синих клеток равна сумме площадей белых клеток.*



Поскольку середины сторон выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма, его средние линии (красные отрезки на рисунке) в точке пересечения делятся пополам. Применяя это соображение к образовавшимся четырехугольникам, получим то же утверждение для их средних линий и т. д., так что каждый из отрезков, соединяющих точки деления на противоположных сторонах данного выпуклого четырехугольника, оказывается разбитым на восемь равных частей.

Рассмотрим теперь «удвоенную клетку» разбиения (размером 2×2; на рисунке в ней выделены зеленым цветом диагонали). То, что суммы площадей синих и белых полей этой удвоенной клетки равны, очевидно (площади соответствующих синих и белых треугольничков с общей вершиной и попарно конгруэнтными основаниями одинаковы). Из этого замечания следует утверждение задачи.

В. Произволов

◆

М627. *В каждой клетке бесконечного листа клетчатой бумаги записано натуральное число.*

а) Пусть каждое из этих чисел встречается ровно один раз. (Приведите примеры такой расстановки чисел!) Докажите, что для любого заданного m найдутся две соседние (имеющие общую сторону) клетки, разность чисел в которых не меньше m.

*б) Пусть каждое число $n\in$ **N** встречается ровно n раз (то есть 1 — один раз, 2 — два раза и т. д.). Укажите наибольшее число k такое, что обязательно найдутся две соседние клетки, разность чисел в которых не меньше k. (Приведите при-*

а) Пример расстановки чисел, удовлетворяющей условию а), изображен на рисунке 1.

Докажем утверждение задачи а). Возьмем на нашем листе клетчатой бумаги произвольный квадрат размером $2m\times 2m$ $(m>1)$ клеток. В клетках этого квадрата стоит $4m^2$ различных чисел, так что наибольшее из них отличается от наименьшего по крайней мере на $4m^2-1$. Соединим теперь клетки, в которых стоят наибольшее и наименьшее числа, «дорожкой», как показано на рисунке 2. Длина этой «дорожки» не превосходит $4m-1$, и поэтому хотя бы некоторые из разностей соседних на этой «дорожке» чисел не меньше $\frac{4m^2-1}{4m-1}$, то есть больше m.

б) На рисунке 3 натуральные числа расположены так, что каждое число $n\in\mathbb{N}$ встречается ровно n раз и разности чисел в соседних клетках не превосходят 2. Уменьшить $k+1=2$ нельзя уже потому, что рядом с единицей — четыре клетки, а двоек только две, так что две из соседних с единицей клеток придется заполнить тройками.

Таким образом, искомое k равно 2.

Попробуйте разобраться самостоятельно в следующих вопросах:

мер такой расстановки, в которой разность чисел в любой паре соседних клеток не больше $k+1$.)

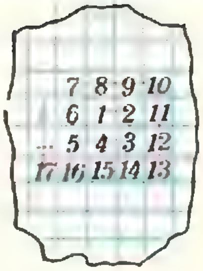


Рис. 1.

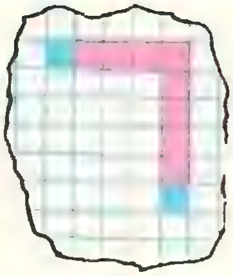


Рис. 2.

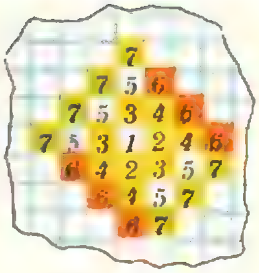


Рис. 3.

1. Можно ли расставить числа в клетках бесконечного листа клетчатой бумаги так, чтобы разности чисел, стоящих в соседних клетках, не превосходили 1, если каждое число $n \in \mathbf{N}$ встречается n^2 раз? А $(n+100)$ раз?

2. Пусть пространство разбито на кубические ящички, и в каждый ящичек помещено натуральное число так, что каждое число $n \in \mathbf{N}$ встречается ровно n раз. Каким будет ответ на вопрос, аналогичный вопросу задачи М627?

А. Толпыго

◆

Ф631. *Проволочная спираль, присоединенная к городской сети, нагревается электрическим током. Половину спирали начинают охлаждать (например, водой). Как это отражается на количестве тепла, выделяемого этой половиной спирали? другой половиной? всей спиралью?*

Обозначим сопротивление каждой половины спирали до начала охлаждения через R. Так как сопротивление металлов зависит от температуры (увеличивается при нагревании и уменьшается при охлаждении), охлаждение одной из половин спирали приведет к уменьшению сопротивления этой половины до некоторой величины $R_1<R$. Поскольку напряжение сети U неизменно, это вызовет увеличение тока в цепи и, следовательно, дополнительное нагревание другой половины спирали. Сопротивление этой половины увеличится и станет равным $R_2>R$.

Новое значение силы тока в цепи $I=\dfrac{U}{R_1+R_2}$ будет больше прежнего $I_0=\dfrac{U}{2R}$. Действительно, предположим что $I \leqslant I_0$. Тогда сопротивление неохлаждаемой половины спирали останется прежним или уменьшится ($R_2 \leqslant R$), а сопротивление охлаждаемой половины $R_1<R$. Следовательно, общее сопротивление $R_1+R_2<2R$ и новое значение тока $I>I_0$, что противоречит нашему предположению.

Итак, $I>I_0$, и поэтому выделяемая во всей цепи мощность (то есть количество тепла в единицу времени) $P=IU$ увеличится.

Так как $I>I_0$ и $R_2>R$, количество тепла $P_2=I^2R_2$, выделяемое в неохлаждаемой половине, также увеличится.

Мощность $P_1=I^2R_1=\dfrac{U^2R_1}{(R_1+R_2)^2}$, выделяемая в охлаждаемой половине, наоборот, уменьшится по сравнению с начальной мощностью $P_0=I_0^2R=\dfrac{U^2}{4R}$. Покажем это.

Найдем отношение P_0/P_1:

$$\frac{P_0}{P_1}=\frac{U^2}{4R}:\frac{U^2R_1}{(R_1+R_2)^2}=\frac{(R_1+R_2)^2}{4R_1R}.$$

Очевидно, что

$$\frac{(R_1+R_2)^2}{4R_1R}>\frac{(R_1+R_2)^2}{4R_1R_2},$$

а последнее выражение больше или равно 1, так как среднее геометрическое двух величин ($\sqrt{R_1R_2}$) не превышает их среднего арифметического $\left(\dfrac{R_1+R_2}{2}\right)$.

Таким образом, действительно $P_1<P_0$, то есть мощность, выделяемая в охлаждаемой половине спирали, уменьшится.

Б. Буховцев

Ф632. *Оценить, во сколько раз освещенность солнечного зайчика, который получают на вертикальной стене в полдень, меньше освещенности прямыми солнечными лучами, если солнечный зайчик посылается на стену зеркалом с диаметром $d=10$ см с расстояния $l=50$ см.*

В наших широтах лучи Солнца в полдень падают на Землю примерно под углом 60° к горизонту. Значит, освещенность стены

$$E=E_0\cos 60^\circ=\frac{1}{2}E_0,$$

где E_0 — освещенность перпендикулярной к лучам площадки.

Зеркало нужно расположить так, чтобы отраженные лучи Солнца падали на стенку перпендикулярно. В этом случае освещенность зайчика будет максимальной и равной E_0 (напомним, что при отражении от плоского зеркала сила света изображения такая же, как у источника). Итак, освещенность зайчика может оказаться примерно в 2 раза больше, чем освещенность всей стенки (без учета прямых лучей Солнца).

На экваторе это отношение в полдень будет совсем большим — ведь лучи Солнца практически касаются стенки.

Мы посчитали лучи Солнца параллельными — на расстояниях порядка $l\approx0{,}5$ м расходимость $\Delta=l\cdot\varphi\approx0{,}5$ см (φ — угловой диаметр Солнца) существенно меньше размеров зайчика.

А. Зильберман

◆

Ф633. *Три одинаковых резистора, конденсатор емкостью C и катушка индуктивностью L соединены в цепь, как показано на рисунке 1. Частота ω переменного тока в цепи такова, что $\omega L=1/\omega C$. При каком сопротивлении R резисторов ток в неразветвленной части цепи в n раз меньше тока в каждой из ветвей?*

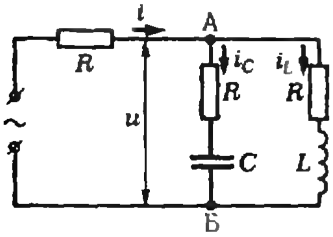


Рис. 1.

На рисунке 1 обозначены мгновенные значения токов в неразветвленной части цепи (i) и в ветвях (i_C, i_L), а также мгновенное значение напряжения u на разветвлении (между точками А и Б).

Для решения задачи построим векторные диаграммы для действующих значений напряжений и токов. Колебания напряжения на активном сопротивлении совпадают по фазе с колебаниями тока через него; колебания напряжения на конденсаторе отстают по фазе на $\pi/2$ от колебаний тока через него; колебания напряжения на катушке опережают по фазе на $\pi/2$ колебания тока через нее. Векторная диаграмма (см. Г. Я. Мякишев, Б. Б. Буховцев «Физика 10», 1980, § 26) для емкостной ветви — на рисунке 2, *а*, для индуктивной — на рисунке 2, *б*, а для разветвления — на рисунке 2, *в*, на котором вектор $\vec{U}$ есть вектор действующего напряжения на разветвлении.

По условию задачи $\omega L=1/\omega C$, то есть $X_L=X_C$. Значит, токи в ветвях одинаковы по величине — $I_C=I_L$, ток I_C в емкостной ветви опережает на угол φ напряжение на ней, а ток I_L в индуктивной ветви отстает от того же напряжения на такой же угол.

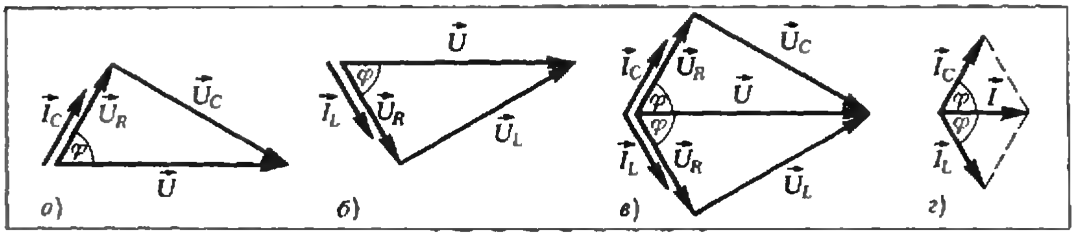


Рис. 2.

Из рисунка 2, в находим:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{U_C}{U_R}=\frac{I_CX_C}{I_CR}=\frac{X_C}{R}=\frac{X_L}{R}. \qquad (1)$$

На векторной диаграмме для токов (рис. 2, *г*) вектор $\vec{I}$ есть вектор действующего значения тока в неразветвленной части цепи. По условию задачи $I:I_C=\frac{1}{n}$. Из рисунка 2, *г* находим:

$$\cos\varphi=\frac{1}{2}I:I_C=\frac{1}{2n} \qquad (2)$$

Из (1) и (2) получаем:

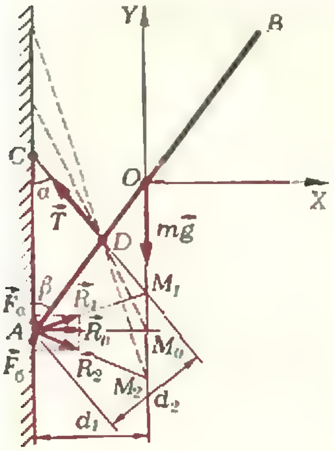
$$R = \frac{X_C}{\sqrt{4n^2-1}} = \frac{1}{\omega C\sqrt{4n^2-1}} = \frac{\omega L}{\sqrt{4n^2-1}}.$$

Резистор в неразветвленной части цепи влияет только на величину напряжения на зажимах всей цепи. Если в качестве резисторов взять три одинаковые лампы накаливания, то лампа в неразветвленной части цепи может быть *темной при полном накале ламп* в ветвях (при достаточно большом n).

Г. Савкун

◆

Ф634. *Стержень AB длиной l и массой m нижним концом опирается на стену и с помощью нити удерживается в наклонном положении (см. рисунок). Нить привязана к стене в точке C, а к стержню — в точке D такой, что $|AD|={}^1/_3|AB|$. Углы, составляемые нитью и стержнем со стеной, равны α и β соответственно. Найти возможные значения коэффициента трения между стержнем и стеной.*



На стержень действуют три силы: *сила $\vec{T}$ натяжения нити*, сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции со стороны стенки $\vec{R}=\vec{N}+\vec{F}_{тр}$ ($\vec{N}$ — сила нормальной реакции, $|F_{тр}|\leq\mu|\vec{N}|$ — сила трения). В состоянии равновесия стержня сумма моментов этих сил относительно любой точки равна нулю. Чтобы это условие выполнялось, линия действия силы $\vec{R}$ должна проходить через точку пересечения линий действия сил $\vec{T}$ и $m\vec{g}$ (моменты сил $\vec{T}$ и $m\vec{g}$ относительно этой точки равны нулю).

В зависимости от соотношения между углами α и β точка пересечения линий действия сил $\vec{T}$ и $m\vec{g}$ может лежать: *а*) выше перпендикуляра AM_0 к стене (точка M_1 на рисунке), *б*) ниже этого перпендикуляра (точка M_2), *в*) на нем (точка M_0). Соответственно сила трения направлена либо вдоль AC вверх ($\vec{F}_а$), либо вдоль AC вниз ($\vec{F}_б$), либо равна нулю. Рассмотрим каждый из этих случаев отдельно

а) Условие равновесия стержня:

$$T\cos\alpha+F_а-mg=0,\quad N-T\cos\alpha=0 \qquad (1)$$

— *равенство нулю* суммы проекций всех сил на оси Y и X соответственно;

$$d_1mg=d_2T, \text{ или } \frac{mgl}{2}\sin\beta=\frac{Tl}{3}\sin(\alpha+\beta) \qquad (2)$$

(см. рисунок). Из (1) и (2) имеем

$$\mu_а\geq\frac{F_а}{N}=\frac{2}{3}\,\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{\operatorname{tg}\beta}-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right).$$

(Случай *а*) осуществляется при условии $2\operatorname{tg}\alpha>\operatorname{tg}\beta$.)

б) Записав условия равновесия, найдем:

$$\mu_б\geq\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}-\frac{2}{\operatorname{tg}\beta}\right).$$

(Этому случаю соответствует условие $\operatorname{tg}\beta>2\operatorname{tg}\alpha$.)

в) В этом случае стержень находится в равновесии при любом значении $\mu_в$ ($2\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\beta$).

Таким образом, при произвольном соотношении между углами α и β стержень находится в равновесии при

$$\mu\geq\frac{1}{3}\left|\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}-\frac{2}{\operatorname{tg}\beta}\right|.$$

К. Сергеев

◆

Ф635. *Два одинаковых автомобиля массой $m=10^3$ кг движутся вверх по одной и той же горной дороге. Зависимость высоты h дороги от расстояния x до начала подъема показана на рисунке. Каждый автомобиль развивает постоянную мощность $P=12$ кВт, а сила сопротивления движению автомобиля пропорциональна квадрату его скорости: $|\vec{F}|=\alpha|\vec{v}|^2$, где $\alpha=1{,}4$ кг/м. На последнем го-*

Так как автомобили проходят подъем в одном и том же режиме, расстояние между ними на горизонтальном участке *I* (до подъема; см. рисунок) такое же, как на участке *IV* (после подъема), а именно $l=100$ м. При въезде первого автомобиля на участок *II* его скорость падает, и расстояние между автомобилями уменьшается. Когда первый автомобиль въезжает на участок *III*, его скорость возрастает, и расстояние увеличивается; то же самое происходит при въезде на участок *IV*. Следовательно, минимальное расстояние между автомобилями будет на участке *II*.

За время τ, в течение которого первый автомобиль движется по участку *II*, а второй — еще по участку *I*, второй автомобиль проходит расстояние l, а первый — некоторое расстояние $l'<l$. Очевидно, расстояние l' между автомобиля-

ризонтальном участке дороги расстояние между автомобилями равно 100 м. Каким было минимальное расстояние между автомобилями при их движении?

ми на участке *II* и есть искомое минимальное расстояние между автомобилями.

Найдем скорости автомобилей на участках *I* и *II*. На участке *I* работа совершается только против сил сопротивления. На этом участке баланс энергии можно записать следующим образом:

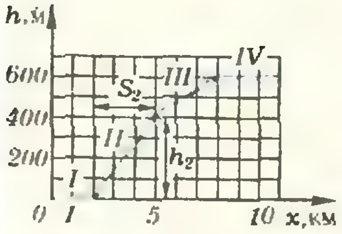
$$P=|\vec{F}_1||\vec{v}_1|=a|\vec{v}_1|^3. \qquad (1)$$

На участке *II* добавляется работа против силы тяжести:

$$P=|\vec{F}_2||\vec{v}_2|+m|\vec{g}|\frac{h_2}{S_2/|\vec{v}_2|}=a|\vec{v}_2|^3+m|\vec{g}||\vec{v}_2|\frac{h_2}{S_2}. \qquad (2)$$

Наклон h_2/S_2 определяем из графика: $h_2/S_2=\frac{4}{30}$.

Из уравнения (1) находим: $|\vec{v}_1|\approx 20{,}5$ м/с. Следовательно, $\tau=\frac{l}{|\vec{v}_1|}\approx 4{,}9$ с. Из уравнения (2) находим: $|\vec{v}_2|\approx 8{,}5$ м/с. За время τ первый автомобиль пройдет расстояние $l'=|\vec{v}_2|\tau=41{,}6$ м. Это и есть минимальное расстояние между автомобилями.

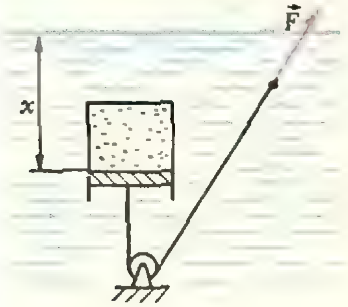


Рекомендуем самостоятельно проанализировать движение автомобилей при переходе с горизонтального участка *I* на участок *II* и убедиться, что учет плавного характера изменения скорости от значения $|\vec{v}_1|$ до значения $|\vec{v}_2|$ не меняет ответа задачи.

В. Белонучкин

◆

Ф636. *Цилиндрический сосуд, закрытый невесомым поршнем площадью сечения S, содержит газ под атмосферным давлением p_0. Объем газа при этом равен V_0. Сосуд погружают в воду (плотностью ϱ_0) так, как показано на рисунке. Найти зависимость расстояния x между поршнем и поверхностью воды от модуля F силы, удерживающей нить, которая привязана к поршню.*



Запишем уравнение состояния газа в цилиндре (закон Бойля — Мариотта), когда поршень находится на некоторой глубине *x* под водой:

$$p_0V_0=pV=phS, \qquad (1)$$

где *p* — давление в цилиндре, а *h* — расстояние от днища цилиндра до поршня. Условие равновесия поршня на глубине *x* —

$$pS+F=(p_0+\varrho_0gx)S. \qquad (2)$$

Условие равновесия цилиндра —

$$pS=[p_0+\varrho_0g(x-h)]S+Mg, \qquad (3)$$

где *M* — масса цилиндра.

Решая совместно уравнения (1), (2), (3), получим:

$$x=\frac{p_0V_0\varrho_0gS+MgF+F^2-p_0SF-p_0SMg}{\varrho_0gS(F+Mg)}, \qquad (4)$$

или, если цилиндр невесом,

$$x=\frac{p_0V_0\varrho_0gS+F^2-p_0SF}{\varrho_0gSF}. \qquad (5)$$

Соотношения (4) и (5) справедливы, очевидно, лишь тогда, когда цилиндр полностью погружен в воду.

В. Белонучкин

◆

Ф637. *В сверхпроводящих катушках с индуктивностями L_1 и L_2, включенных параллельно, возбужден ток. Индуктивность L_1 одной из катушек уменьшается до нуля. Во сколько раз изменятся при этом ток в цепи и энергия системы?*

Будем считать, что катушки разнесены достаточно далеко и взаимную индукцию можно не учитывать. Так как катушки сверхпроводящие, магнитный поток Φ, пронизывающий их, остается постоянным. Из этого условия находим:

$$\Phi=L_1I_0+L_2I_0=L_2I_{(1)} \qquad (1)$$

— в случае, когда обмотки катушек одинаково ориентированы относительно направления тока в цепи (рис. 1), и

$$\Phi=L_1I_0-L_2I_0=L_2I_{(2)} \qquad (2)$$

— когда обмотки ориентированы по-разному (рис. 2). В (1) и (2) I_0—начальный ток в цепи, I — ток в конце процесса. Энергия системы в начале процесса равна $E_0=\frac{L_1+L_2}{2}I_0^2$.

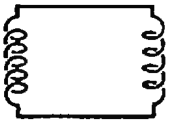


Рис. 1.

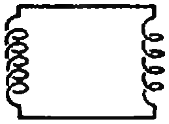


Рис. 2.

В первом случае

$$\frac{I_{(1)}}{I_0}=1+\frac{L_1}{L_2}.$$

Энергия системы в конце процесса в этом случае равна

$$E_{(1)}=\frac{L_2I_{(1)}^2}{2}=\frac{L_1+L_2}{2}I_0^2\left(1+\frac{L_1}{L_2}\right)=E_0\left(1+\frac{L_1}{L_2}\right),$$

откуда

$$\frac{E_{(1)}}{E_{(0)}}=1+\frac{L_1}{L_2}.$$

Во втором случае

$$\frac{I_{(2)}}{I_0}=1-\frac{L_1}{L_2}.$$

$$E_{(2)}=\frac{L_2I_{(2)}^2}{2}=\frac{(L_2-L_1)^2}{2L_2}I_0^2,$$

$$\frac{E_{(2)}}{E_0}=\frac{(L_2-L_1)^2}{L_2(L_1+L_2)}.$$

П. Зубков

К центру тяжести

Как ведет себя система одинаковых частиц, правила движения каждой из которых зависят лишь от небольшого числа ее соседей? Такие вопросы возникают во многих математических моделях физических, химических, биологических объектов, и ответы на них, как правило, получить очень трудно. В этой заметке мы решим одну задачу такого типа (М604 из Задачника «Кванта»), где правила движения частиц выражаются линейными функциями, что позволяет получить простой ответ: частицы сближаются к общему центру тяжести.

Формулировка задачи

а) Андрей, Виктор, Сергей, плавающие под водой, одновременно вынырнули в точках A_0, B_0, C_0 и тут же нырнули снова, причем Андрей решил проплыть за минуту треть пути до Виктора, Виктор — треть пути до Сергея, Сергей — треть пути до Андрея. Через минуту они вынырнули вновь (точки A_1, B_1, C_1 — см. рис. 1) и решили повторить этот маневр — уже за полминуты; потом за четверть минуты и т. д.

Где и когда они встретятся?

б) Внутри сферы радиуса 1 км расположен миллион точек, занумерованных числами от 1 до миллиона. Каждую секунду одновременно каждая точка движется к следующей по номеру на 1/3 расстояния до этой точки; последняя точка точно так же движется к первой. Докажите, что через некоторое время все точки соберутся внутри некоторой сферы радиуса 1 см.

Решение задачи а)

Докажем, что *все точки A_k, B_k и C_k стремятся в пределе к центру тяжести Q треугольника* — точке пересечения его медиан; в этом смысле можно сказать, что Андрей, Виктор и Сергей встретятся через $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+$ $+\frac{1}{8}+\ldots=2$ минуты в точке Q (хотя, конечно, даже дельфины не смогли бы так быстро поворачиваться и кувыркаться, как это придется делать нашим пловцам к концу второй минуты).

Примем Q за начало координат и воспользуемся векторной записью преобразования

$$(A_k, B_k, C_k)\xrightarrow{L}(A_{k+1}, B_{k+1}, C_{k+1}).$$

Как нетрудно видеть (рис. 2), для каждого $k=0, 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QA}_{k+1}&=\frac{2\overrightarrow{QA}_k+\overrightarrow{QB}_k}{3},\\ \overrightarrow{QB}_{k+1}&=\frac{2\overrightarrow{QB}_k+\overrightarrow{QC}_k}{3},\qquad (L)\\ \overrightarrow{QC}_{k+1}&=\frac{2\overrightarrow{QC}_k+\overrightarrow{QA}_k}{3}.\end{aligned}$$

Из этих формул сразу следует, что точка Q является общим центром тяжести всех треугольников $A_kB_kC_k$: $\overrightarrow{QA}_k+\overrightarrow{QB}_k+\overrightarrow{QC}_k=\vec{0}$ (рис. 3).

Более того, преобразование $L^2=L\circ L$, как видно из формул

$$\overrightarrow{QA}_{k+2}=\frac{4\overrightarrow{QA}_k+4\overrightarrow{QB}_k+\overrightarrow{QC}_k}{9}=-\frac{\overrightarrow{QC}_k}{3},$$

$$\overrightarrow{QB}_{k+2}=-\frac{\overrightarrow{QA}_k}{3},\quad \overrightarrow{QC}_{k+2}=-\frac{\overrightarrow{QB}_k}{3},$$

— гомотетия с коэффициентом $(-1/3)$ и центром Q (см. рис. 1). Таким образом, если треугольник $A_0B_0C_0$ лежит в круге радиуса R с центром в точке Q, то треугольник $A_{2k}B_{2k}C_{2k}$ и все следующие треугольники будут

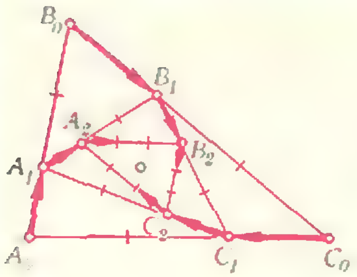


Рис. 1.

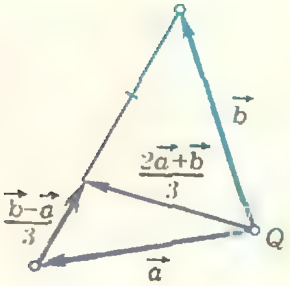


Рис. 2.

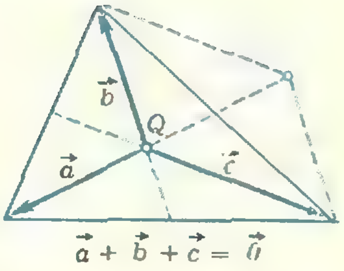


Рис. 3.

лежать в круге радиуса $\frac{R}{3^2}$ с тем же центром. Это означает, что общим пределом последовательностей (A_k), (B_k), (C_k) служит точка Q.

Решение задачи б)

Докажем, что и в этом случае все точки со временем соберутся вблизи центра тяжести Q.

Центр тяжести системы m точек — это такая точка Q, что $\vec{OQ}=\frac{1}{m}\Sigma\vec{OA_i}$ при любой точке O; легко доказать, что в любой системе $Oxyz$ центр тяжести Q точек $A_i(x_i; y_i; z_i)$ имеет координаты $\left(\frac{\Sigma x_i}{m}; \frac{\Sigma y_i}{m}; \frac{\Sigma z_i}{m}\right)$. (Здесь и далее сумма Σ берется по всем i от 1 до m.) Мы должны доказать, что точки стремятся к общему пределу Q.

Если принять центр тяжести Q за начало координат, то формулы для координат «продвинутых» m точек будут аналогичны формулам (L) для векторов:

$$\bar{x}_1=\frac{2x_1+x_2}{3},\ \bar{x}_2=\frac{2x_2+x_3}{3},\ \ldots\ \bar{x}_m=\frac{2x_m+x_1}{3}\quad (L)$$

(формулы для координат y и z точно такие же). Конечно, преобразование $(x_1, x_2, \ldots, x_m)\xrightarrow{L}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m)$ сохраняет центр тяжести Q: если $\sum x_i=0$, то и $\sum\bar{x}=0$. Однако объяснить, почему преобразование L для $m>3$ точек будет «сжимающим», значительно сложнее. Приведем два, по-видимому, наиболее изящных доказательства.

I. Докажем, что существует такое (зависящее от m) число $q<1$, что, каков бы ни был набор m чисел $(x_1, \ldots, x_m)$ с $\sum x_i=0$, для преобразованного набора чисел $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m)$ будет $\sum\bar{x}_i^2<q\sum x_i^2$.

Как легко проверить*),

$$\sum\bar{x}_i^2=\sum x_i^2-\frac{2}{9}\sum(x_i-x_{i+1})^2.$$

Положим $\sum x_i^2=R^2$ и грубо оценим снизу последнюю сумму. Поскольку среди x_i встречаются числа разных знаков, а наибольшее из них по модулю меньше $R/\sqrt{m}$, хотя бы одна разность $|x_i-x_{i+1}|$ больше $R/m\sqrt{m}$. В самом деле, предположим противное: пусть для всех k разности $|x_k-x_{k+1}|$ меньше $R/m\sqrt{m}$. Возьмем то i, для которого координата x_i максимальна по модулю; тогда $|x_i|>R/\sqrt{m}$. По предположению, соседние точки отстоят на расстоянии, меньшем $R/m\sqrt{m}$. Переходя от точки x_i к точке x_{i+1}, мы за m шагов пройдем расстояние, меньшее $R/\sqrt{m}$, то есть не перейдем через 0, что и даст нужное противоречие. Поэтому $\sum(x_i-x_{i+1})^2>R^2/m^3$, так что $\sum\bar{x}^2<\left(1-\frac{2}{9}m^3\right)\sum x_i^2$.

II. (основано на письме десятиклассника *Д. Короткина* из Ленинграда). Запишем формулы для *итерации* (повторения) преобразования L:

$$x_1^{(1)}=\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2,$$

$$x_1^{(2)}=\frac{4}{9}x_1+\frac{4}{9}x_2+\frac{1}{9}x_3,$$

$$x_1^{(3)}=\frac{8}{27}x_1+\frac{12}{27}x_2+\frac{6}{27}x_3+\frac{1}{27}x_4,$$

вплоть до $(m-1)$-го шага:

$$x_1^{(m-1)}=\left(\frac{2}{3}\right)^{m-1}x_1+\ldots+\left(\frac{1}{3}\right)^{m-1}x_m.$$

В последнем равенстве, как и в предыдущих, сумма всех коэффициентов равна 1, но, в отличие от предыдущих, коэффициенты при всех $x_1, \ldots, x_m$ в нем строго больше нуля*); наименьший из них $a=\left(\frac{1}{3}\right)^{m-1}$. Вычтя почленно из последнего равенства такое:

$$0=ax_1+ax_2+\ldots+ax_{m-1}+ax_m,$$

мы получим для $(m-1)$-кратной итерации $\bar{L}^{(m-1)}$ формулы $x_i^{(m-1)}=\sum_j b_j x_{i+j-1}$, где все $b_j\geqslant 0$ и $\sum_j b_j=b$ строго меньше 1. Отсюда уже легко вывести, что за $m-1$ итераций преобразования L величина $\sum|x_i^{(m-1)}|$ (или $\max_i|x_i^{(m-1)}|$) станет не больше $b\sum|x_i|$ (соответственно, $b\max_i|x_i|$).

---

*) Ниже x_{m+1} означает x_1 и вообще $x_{m+i}=x_i$ (индексы складываются «по модулю m»).

*) Коэффициенты в формуле для $x_i^{(k)}$ равны коэффициентам при степенях u многочлена $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}u\right)^k$, то есть $C_k^j\left(\frac{2}{3}\right)^j\left(\frac{1}{3}\right)^{k-j}$ $(j=0, 1, \ldots, k)$; впрочем, эти формулы в дальнейшем не используются.

Обсуждение

Каждое из двух рассуждений **I**, **II** показывает, что последовательности точек $(A_i^{(k)})$ ($i = 1, 2, \ldots, m$), получаемые итерациями ($k = 1, 2, 3, \ldots$) нашего преобразования, стремятся к Q не медленнее, чем некоторая геометрическая прогрессия (со знаменателем q в случае **I**, $\sqrt[m]{b}$ — в случае **II**). Конечно, эти оценки скорости сходимости довольно грубы. Методами анализа и линейной алгебры, выходящими за рамки школьной программы, можно найти точную оценку вида Cq_m^k для расстояния точек от центра Q (через k шагов). Оказывается, значение константы $q_m < 1$, определяющей скорость сходимости для всех начальных расположений, остается таким же для плоского правильного m-угольника.

Упражнение 1. а) Докажите, что если точки $A_1, A_2, \ldots, A_m$ расположены в вершинах правильного m-угольника, вписанного в окружность с центром Q и радиусом 1, то точки $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \ldots, \tilde{A}_m$, которые получаются из них под действием преобразования L, расположены в вершинах правильного m-угольника, вписанного в окружность с тем же центром Q и радиусом

$$q_m = \sqrt{5 + 4\cos 2\pi/m}/3 < 1$$

(в частности, $q_3 = \sqrt{3}/3$, $q_4 = \sqrt{5}/3$, $q_6 = \sqrt{7}/3$ и при больших m величина $q_m \approx 1 - 4\pi^2/9m^2$ близка к 1).

б) Какова будет константа q_m для аналогичной задачи, в которой A_i проходит не 1/3, а $1/q$ расстояния до A_{i+1} ($q > 0$)? Рассмотрите частный случай $q = 2$, для которого константы q_m наименьшие.

Более того, если посмотреть на наши m точек через большой промежуток времени k в микроскоп с увеличением $1/q_m^k$, то мы увидим, что они (при начальных данных «общего положения») находятся вблизи вершин некоторого «сжатого» правильного m-угольника, вписанного в эллипс (сжатую окружность). Так будет, если дело происходит на плоскости или в пространстве. А для аналогичной задачи на прямой m точек будут близки к проекциям вершин некоторого правильного m-угольника на эту прямую.

Упражнение 2. а) Пусть из m чисел $(x_1, \ldots, x_m)$ получаются новые m чисел по правилам $\tilde{x}_i = \alpha x_i + \beta x_{i+1}$ ($i = 1, 2, \ldots, m-1$), $\tilde{x}_m = \alpha x_m + \beta x_1$ ($\alpha + \beta \leq 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$). Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ после некоторого количества таких преобразований все числа будут меньше ε.

б) Докажите, что набор ($x_i = a\cos(\varphi + 2\pi i/m)$, $i = 1, 2, \ldots, m$) переходит в аналогичный набор с другими «амплитудой» a и «фазой» φ. Во сколько раз уменьшается амплитуда a за один шаг?

Н. Васильев

Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта»

В этом номере мы публикуем фамилии читателей, приславших правильные решения задач М616—М625 и Ф618—Ф632 (жирные цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Большинство читателей, приславших решения задач **М616—М625**, успешно справились с задачами **М617**, **М621**. Остальные задачи решили: *Э. Абдулаев* (Масаллы) **9,0,4**; *И. Азаренко* (Саратов) **9**; *А. Аралкин* (Новокузнецк) **6**; *М. Арасланов* (Запорожье) **9,0**; *Я. Базалий* (Донецк) **4**; *А. Барг* (Николаев) **6, 9, 0,4**; *Ю. Белоцерковский* (Минск) **9, 0, 3, 4, 5а)**; *В. Бережной* (Киев) **4**; *И. Блувштейн* (Жмеринка) **4**; *А. Болдырихин* (Могилев-Подольский) **0**; *А. Брудный* (Ярославль) **6, 8—0, 3, 5а)**; *В. Валуев* (Тула) **4**; *А. Вольнов* (Киев) **0**; *М. Гайсинский* (Ташкент) **8, 0**; *В. Гешкенбейн* (Москва) **4**; *М. Гликман* (Кишинев) **4, 5а)**; *Г. Головин* (Славянск) **4**; *С. Горшков* (Москва) **4**; *Е. Горшкова* (Пермь) **4**; *О. Гринив* (Киев) **4**; *А. Гутин* (Клинцы) **6, 9, 4**; *В. Денисов* (Кашира) **3, 4**; *В. Денисов* (Москва) **6**; *А. Дернов* (Череповец) **4**; *Ю. Дибнер* (Москва) **6, 4**; *О. Дранко* (Киев) **9, 4**; *О. Ерошкин* (Днепропетровск) **6, 8, 0, 2, 4**; *И. Жуков* (Ленинград) **6, 0, 2, 4**; *А. Зеге* (Минск) **6, 9**; *А. Золотых* (Курск) **6, 4**; *З. Ибрагимов* (Масаллы) **9, 4**; *В. Ильев* (Донецк) **9**; *А. Кагарманов* (Белорецк) **6, 9, 0, 4, 5а)**; *А. Каплан* (Сумгаит) **9**; *Е. Карпова* (Ленинград) **9**; *А. Карпович* (Киев) **6**; *В. Ким* (Бектемир) **6**; *С. Ким* (Бектемир) **6, 9, 0, 4**; *Л. Киричук* (с. Мошурово Черкасской обл.) **4**; *В. Кисиль* (Одесса) **4**; *И. Колпаков* (Сочи) **9, 0, 2—4**; *А. Коньшин* (Ростов-на-Дону) **0**; *А. Корнилов* (Ростов-на-Дону) **6**; *Д. Короткин* (Ленинград) **6, 8—0, 4**; *А. Коротков* (Горький) **3**; *С. Краус* (Караганда) **9**; *С. Ламихов* (Ташкент) **0, 3, 4, 5а)**; *И. Ланджев* (Бургас, НРБ) **9**; *В. Левин* (Москва) **4**; *С. Леник* (с. Горячевка Винницкой обл.) **9**; *О. Малов* (Казань) **4**; *С. Мамедов* (Баку) **9, 4**; *В. Мангазеев* (Кемерово) **9, 4, 5а)**; *С. Матюшов* (Вологда) **4**; *Л. Меркявичус* (Линтварис) **6, 8—0, 3, 4, 5а)**; *С. Мокроусов* (Ленинград) **6, 3, 4**; *С. Морейно* (Москва) **6, 8, 4**; *Ю. Назаренко* (Киев) **6, 8—0, 4, 5а)**; *А. Никонов* (Кировоград) **9, 0**; *П. Овчинников* (Вязники) **6, 9, 4**; *М. Окроян* (Ереван) **9, 0, 4**; *К. Пелих* (Павловский Посад) **4, 5а)**; *Г. Перельман* (Ленинград) **9, 2—4, 5а)**; *А. Поезд* (Москва) **6, 9, 0, 4**; *Е. Попов* (Белорецк) **4**; *Ю. Рачинский* (Москва) **3**; *В. Романюк* (с. Кусвище Волынской обл.) **0, 3**; *Н. Сайгина* (Саратов) **9**; *Э. Силимов* (Кировабад) **9**; *М. Сафаров* (Фрунзе) **6, 3**; *В. Светлицкий* (Запорожье) **4**; *А. Слинкин* (Москва) **0**; *А. Смирнов* (Курган) **4**; *А. Спивак* (Стерлитамак) **0, 2, 4**; *С. Спичак* (Припять) **9, 0, 4**; *А. Сромин* (Ленинград) **9**; *Э. Степанян* (Баку) **9, 0, 4**; *С. Стрельцов* (с. Ивановка Запорожской обл.) **4**; *Д. Суворов* (Свердловск) **4**; *А. Тажка* (Краков, ПНР) **8**; *С. Тимофеев* (с/х Сахавка Донецкой обл.) **8, 9;** *В. Титенко* (д. Блужа Минской обл.) **9, 3, 4;** *С. Ткаченко* (Могилев-Подольский) **0;** *К. Томилин* (Москва) **9, 4;** *Р. Угриновский* (Хмельник) **9, 4;** *О. Фонарев* (Сумгаит) **4;** *А. Харитонский* (Киев) **9, 4;** *А. Хилков* (Новомосковск) **2, 4;** *С. Хосид* (Алма-Ата) **9, 4;** *В. Цекановский* (Донецк) **9, 4;** *С. Цветков* (Ленинград) **4;** *И. Цимох* (Кировоград) **9, 4;** *В. Цыгикало* (Грозный) **9;** *О. Чалых* (Витебск) **6, 9, 0, 4, 5а);** *А. Чистоклетов* (п. Мулловка Ульяновской обл.) **6;** *З. Шибзухов* (Нальчик) **9;** *Л. Элькун* (Ташкент) **0, 5а);** *Л. Эпремидзе* (Тбилиси) **9;** *В. Юдаков* (п. Армянск Крымской обл.) **6, 8.**

Физика

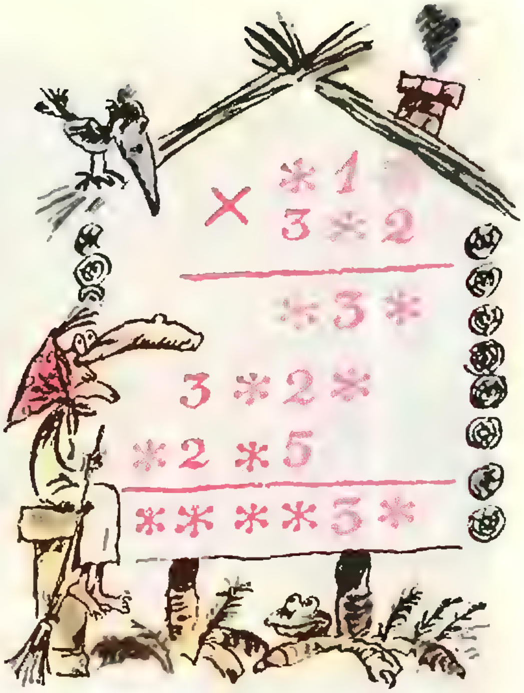
Почти все читатели, приславшие решения задач **Ф618—Ф632**, справились с задачами **Ф622, Ф624, Ф626** и **Ф630**. Остальные задачи правильно решили: *В. Аветисов* (Баку) **18, 19, 23, 27, 28, 31;** *И. Аглиуллин* (Москва) **18, 21,27, 31;** *А. Аккозов* (Фрунзе) **23;** *А. Акопян* (Ереван) **27;** *З. Али-Заде* (Баку) **27;** *К. Аракелов* (Моздок) **25;** *А. Арзуманов* (Тбилиси) **27;** *А. Ахметзянов* (Уральск) **18—20, 27, 28;** *А. Бабаев* (Баку) **27;** *О. Бабий* (Киев) **18, 19, 21;** *А. Баглюк* (Киев) **18;** *П. Байков* (Балашиха) **17—19, 21;** *О. Барабаш* (Киев) **27;** *С. Барабаш* (Калинин) **25, 27;** *Е. Бегманов* (Нукус) **25;** *В. Белоцерковский* (Донецк) **25, 27;** *В. Бережной* (Киев) **18, 20, 21, 27;** *А. Благодарев* (Пенза) **27;** *В. Бобов* (Ленинград) **23;** *И. Богаевский* (Калининград Московской обл.) **23;** *Г. Бордаков* (Куйбышев) **23, 27;** *А. Бунятин* (Ереван) **31;** *О. Буракова* (Алма-Ата) **25;** *Е. Буторгин* (Казань) **18, 27;** *С. Бучнев* (Суходольск) **25;** *Э. Вайслеб* (Киев) **18, 19, 21;** *М. Вакула* (Одесса) **25, 27;** *В. Вальков* (Краснодон) **27;** *А. Вальков* (Киев) **23;** *В. Васильев* (Великие Луки) **18, 20;** *В. Васильев* (д. Тобурданово ЧувАССР) **19, 23;** *В. Вачев* (Ямбол, НРБ) **20, 25;** *Б. Вейцман* (Одесса) **18, 21, 25, 27, 29;** *А. Вернета* (ст. Староминская Краснодарского кр.) **21, 27;** *В. Вишневский* (Андрушевка) **25;** *А. Владимиров* (Пущино) **18, 21, 28, 29;** *Ю. Вовкогон* (п. Любеч Черниговской обл.) **23, 25, 27;** *Ю. Воеводов* (Гомель) **28, 31;** *С. Вознюк* (Харьков) **18, 19;** *Е. Войтенко* (Киев) **19, 27, 29, 31;** *А. Вольнов* (Киев) **19, 21;** *А. Воробьев* (Ярославль) **18;** *В. Воробьев* (Киев) **18, 21, 27;** *В. Ворона* (Славянск) **18, 19, 21, 23, 25, 27, 31;** *Р. Върбанов* (Тервил, НРБ) **19—21, 28;** *Г. Гаев* (Саратов) **25, 27;** *О. Гайсинский* (Запорожье) **31;** *И. Галич* (Москва) **19, 21—23, 27, 29, 32;** *М. Гапонова* (Горький) **25, 27, 31;** *Е. Гисанова* (п. Ярдымлы АзССР) **18;** *М. Гликман* (Кишинев) **25, 27;** *А. Гоголин* (Тбилиси) **21;** *С. Голощапов* (Запорожье) **18, 21;** *А. Голубков* (Щелково) **25;** *С. Голубничий* (Казатинский р-н Винницкой обл.) **25, 27;** *С. Горбачевский* (Минск) **18;** *М. Горбунов* (Горький) **25;** *А. Григоренко* (Макеевка) **23, 25, 29, 31;** *Д. Григорьев* (Москва) **18, 20, 21, 23, 27—29, 31, 32;** *И. Гру* (Северодонецк) **31;** *С. Грязнов* (Киев) **19, 21, 27, 31;** *И. Губин* (Ереван) **18, 25, 27, 28, 31;** *И. Гунромский* (Минск) **18, 19, 21;** *А. Гутик* (Клинцы) **20, 21, 23, 27, 28, 31;** *С. Давыдов* (Ташкент) **18;** *И. Далин* (Черновцы) **23, 27, 31;** *В. Дворцевой* (Липецк) **18, 25, 27, 29, 31, 32;** *Т. Демьянков* (Ровно) **25;** *И. Деребас* (Магнитогорск) **27;** *С. Джакелов* (Алма-Ата) **25;** *М. Джикия* (Цхалтубо) **18;** *И. Дмитриев* (Донецк) **25, 31;** *В. Добрецов* (Москва) **23;** *А. Долгополов* (Дрокия) **23, 28, 31;** *С. Долгополов* (Полтава) **28;** *С. Дорфман* **21, 27;** *Д. Дубсон* (Кривой Рог) **27;** *А. Дурбак* (Рогатин) **18, 27;** *В. Дятьков* (Кировабад) **19, 28;** *С. Евдокимов* (Витебск) **23, 25, 27, 31;** *И. Елишевич* (Чернигов) **18, 21, 25, 27;** *И. Ельканович* (Баку) **23;** *В. Емец* (Днепропетровск) **18, 19;** *Л. Есикович* (Минск) **27, 28;** *В. Ефремов* (Апрелевка) **23;** *А. Жупинский* (Молодечно) **23, 25, 27;** *В. Забросаев* (Бендеры) **25;** *М. Заялютдинов* (Магнитогорск) **23;** *А. Заневский* (Ленинград) **21;** *М. Заплетин* (Алма-Ата) **18;** *В. Зац* (Ташкент) **27;** *Ю. Звягинцев* (Харьков) **21, 25, 29, 31;** *М. Зейфман* (Вологда) **18, 25, 27—29, 31, 32;** *И. Златогорская* (Саратов) **25, 27, 29;** *В. Золотаревский* (п/о Березовское Харьковской обл.) **23, 27;** *А. Золотых* (Курск) **28, 31;** *В. Зубяк* (Нововолынск) **20;** *И. Зыбцев* (Ужур) **25, 27;** *Н. Иванов* (с. Мошенское Новгородской обл.) **27;** *В. Ивахненко* (Киев) **18, 21;** *В. Изергин* *(Новосибирск)* **23;** *А. Изимберов* (Оренбург) **19;** *В. Израилит* (Днепропетровск) **18, 19, 23, 25, 31;** *В. Истретий* (п. Глодяны МССР) **27;** *О. Исупова* (Оренбург) **18, 25;** *В. Кагаловский* (Харьков) **25, 28, 31;** *В. Каллер* (Киев) **21;** *С. Калмыков* (Копейск) **25, 27;** *В. Калинин* (Ленинград) **27;** *А. Калиниченко* (Сумы) **27;** *Б. Калмахелидзе* (Тбилиси) **27;** *Ю. Канский* (с. Городовка Винницкой обл.) **25, 31;** *А. Каплан* (Сумгаит) **25;** *М. Качкачишвили* (Рустави) **27;** *А. Кечеджян* (Ереван) **28, 31;** *С. Кемельбаев* (Темиртау) **27;** *Ю. Кирпач* (Киев) **23, 28;** *А. Коган* (Одесса) **27, 31, 32;** *С. Козлов* (Москва) **18, 19, 28, 31, 32;** *Ю. Кокшаров* (Мытищи) **23, 25;** *В. Комов* (Александров) **18, 19, 21, 23, 25, 27;** *И. Компонейцев* (Алма-Ата) **18, 27, 31;** *О. Конорчук* (Запорожье) **29;** *И. Констанкевич* (Львов) **18, 19;** *В. Коробов* (Кировоград) **18, 23, 25, 27, 31, 32;** *А. Коровин* (Мичуринск) **27;** *К. Корчагин* (Ереван) **23, 25;** *А. Костерин* (Владимир) **25;** *А. Костюковский* (Харьков) **25, 28, 31;** *А. Кравчук* (Симферополь) **25;** *М. Кравцов* (Коммунарск) **23, 25;** *А. Крейнес* (Кольчугино) **29, 31;** *Е. Кренцель* (Москва) **18, 27;** *Р. Крис* (Киев) **27;** *И. Круглова* (Череповец) **25, 27;** *А. Кубышкин* (Киев) **18, 21, 25, 27;** *Л. Кудрявцев* (Нефтекамск) **20;** *А. Кулыгин* (Москва) **25;** *Д. Курышев* (Горький) **18;** *Л. Кучук* (Минск) **18, 31;** *А. Кясов* (Нальчик) **25;** *Б. Ланидзе* (Москва) **23, 25, 27;** *В. Левин* (Москва) **25;** *С. Левит* (Ангарск) **18, 19, 25;** *С. Летягин* (п. Страшены МССР) **23, 31;** *И. Лисовский* (Минск) **25, 27;** *Ю. Логвин* (Лида) **28, 31;** *А. Лубин* (Чирчик) **18, 20;** *И. Лукьянчук* (Киев) **18;** *О. Лысенко* (Мичуринск) **27;** *В. Любовицкий* (Кострома) **25;** *А. Ляпин* (Москва) **18, 19, 21, 23, 25, 28, 29, 31, 32;** *О. Малов* (Казань) **21, 27, 31;** *А. Малыгин* (Горький) **18, 23, 25;** *И: Мандриченко* (Киев) **27;** *О. Мануйленко* (Херсон) **18, 21, 27—29, 31, 32;** *Н. Мартыненко* (Лисичанск) **19;** *С. Медведев* (Дмитров) **25, 27;** *Г. Мелконян*

(Продолжение см. на с. 45)

КВАНТ для младших школьников

Задачи

1. В примере, изображенном на рисунке, некоторые цифры заменены звездочками. Восстановите недостающие цифры.

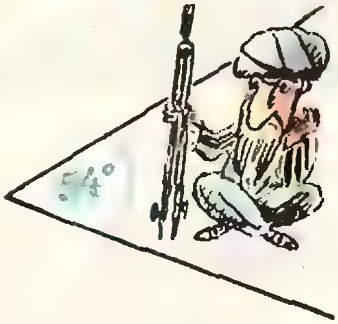


2. При каком основании системы счисления число 1111 является полным квадратом? А число 11111?

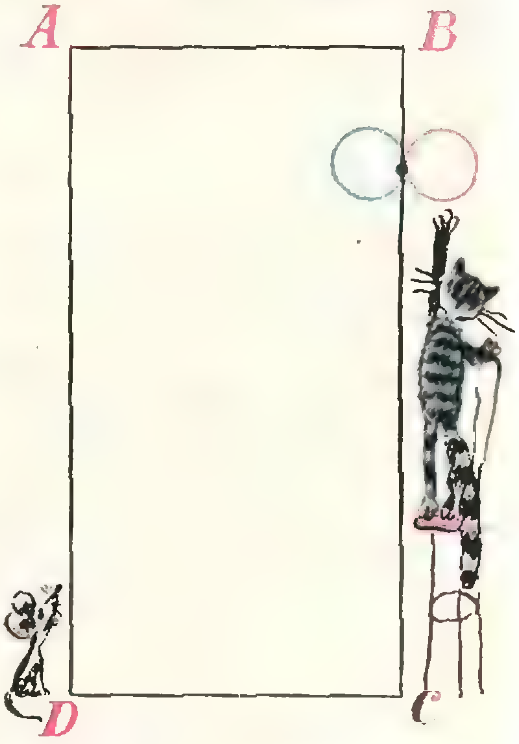
3. Из девяти цифр 1,2,3,...,8,9 составьте три трехзначных числа, которые относятся, как а) 1:3:5; б) 1:2:3.
Сколько решений имеет задача б)?

4. Сумма цифр трехзначного числа, все цифры которого различны, кратна 7; само число также делится на 7. Найдите все такие числа.

5. Дан угол величиной 54°. Пользуясь только циркулем, разделите его на три равные части (то есть найдите точки так, чтобы лучи, проходящие через вершину данного угла и эти точки, разделили его на три равные части).

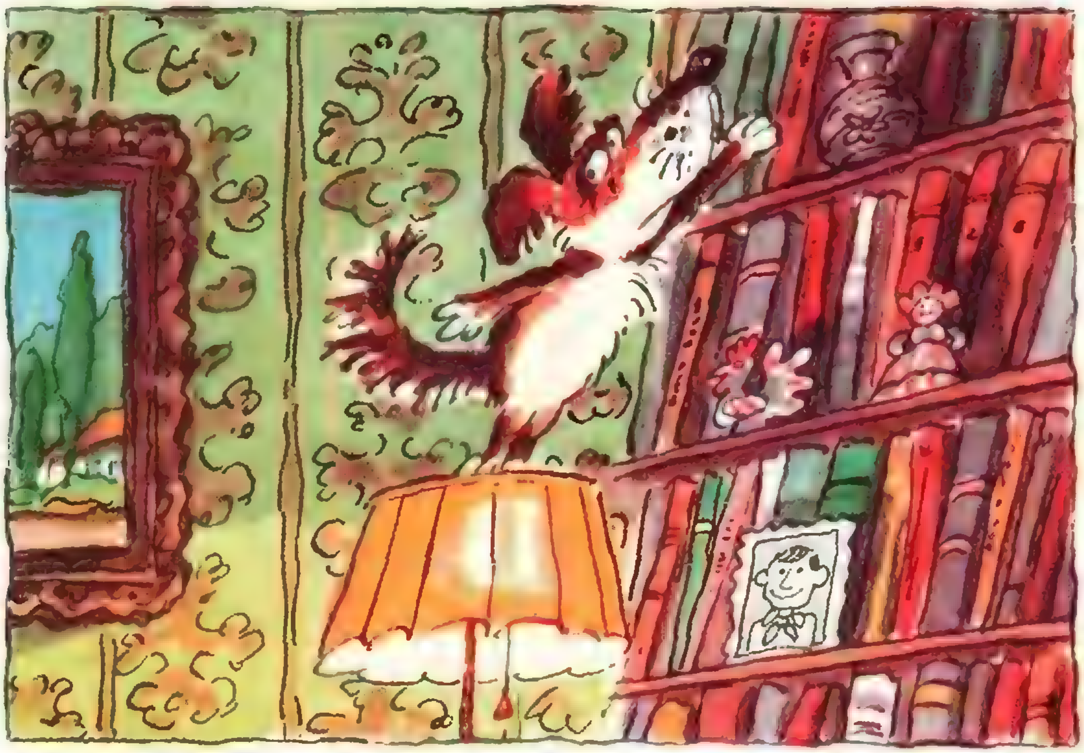


6. Две окружности, длина каждой из которых равна 0,5 м, касаются стороны BC прямоугольника $ABCD$ ($|AB|=1$ м, $|BC|=2$ м) в одной и той же точке: одна с внешней стороны, другая — изнутри (см. рисунок). Окружности начинают перекатываться по сторонам прямоугольника (находясь в одной с ним плоскости). Сколько оборотов сделает каждая из окружностей к моменту возвращения в исходное положение?



7. По окружности расположены семь монет, лежащих вверх «решкой». Одним ходом разрешается перевернуть любые пять подряд лежащих монет. Можно ли добиться того, чтобы все монеты лежали вверх «орлом»?

Эти задачи нам предложили
Ф. Бартенев, А. Кабризон, Ю. Метт,
А. Швецов, Л. Яковлева



Ф. Бартенев, И. Никольская

О пользе нелепостей

Как-то раз мама с Катей ушли в гости, а Петя, предвкушая приятный вечер, полез на верхнюю полку за томиком увлекательнейших историй о Шерлоке Холмсе. Доставая книгу, он нечаянно смахнул с полки вазочку, которая разбилась вдребезги. Хорошее настроение Пети было несколько омрачено, но, решив не расстраиваться заранее, он смел черепки в угол и уютно устроился с книгой на диване. Рядом примостился Дружок. Едва раскрыв книгу, Петя тотчас же позабыл обо всем на свете и с головой погрузился в мир загадочных преступлений, которые так ловко распутывал Шерлок Холмс с помощью своего дедуктивного метода. К действительности его вернул возмущенный возглас Кати:

— Мама, смотри, Петька разбил вазочку, которую я тебе подарила!

— А ты видела? — по привычке запротестовал Петя. — Докажи, что это я!

— Что же тут доказывать? — пожала плечами Катя. — Дома были только ты и Дружок. Допустим, что не ты разбил вазочку; значит, ее разбил Дружок. Но не станешь же ты утверждать, что Дружок смог добраться до верхней полки. Это было бы нелепо: Дружок все-таки собака, а не кошка. Значит, вазочку разбил ты, больше некому.

— Да, — подумал Петя, — с ней не поспоришь, логика — как у Шерлока Холмса; да и спорить нечего — вазочку действительно разбил я. Пойду-ка к Мите, спрошу, что задано по математике.

У Мити он узнал, что по геометрии им задали теорему *Две прямые имеют не более одной общей точки*, доказательство которой Митя уже разобрал и выучил.

— Расскажи, — попросил Петя (чтение учебника геометрии, которую они только начали изучать, казалось ему делом трудным и скучным).

— Пожалуйста, — согласился Митя. — Допустим, что утверждение теоремы неверно; тогда...

— Постой, постой, — прервал его Петя, — дальше я сам расскажу. Если неверно, что две прямые имеют не более одной общей точки, значит они имеют более одной общей точки, то есть две или три, а может, и больше. Но тогда получится, что две точки соединяют две прямые. А этого не может быть — мы уже знаем, что через две точки проходит одна-единственная прямая. Значит, две прямые не могут иметь более одной общей точки, то есть общих точек у них не более одной.

— Ну, ты молодец, — удивился Митя. — Где это ты так насобачился?

— Именно насобачился, — засмеялся Петя. — Только что Катька таким же способом доказала, что вазочку разбил я, а не собака.

— Каким это способом? — заинтересовался Митя. — В чем он состоит? И вообще, что общего между доказательством геометрической теоремы и следствием по делу о разбитой вазочке?

Петя немного растерялся, но только на секунду. Воодушевленный успехом и похвалой друга, он стал думать вслух:

— В обоих случаях доказывалось некоторое утверждение P (в первом случае — *Вазочку разбил Петя*, во втором — *Две прямые имеют не более одной общей точки*);

— доказательство начиналось с того, что допускалась истинность *не* P (отрицания предложения P);

— допущение истинности *не* P в обоих случаях привело к нелепости (в первом — к тому, что собака может вскарабкаться на верхнюю полку, а это противоречит нашим представлениям о способностях и привычках собак; во втором — к тому, что через две точки можно провести две прямые, а это противоречит известной аксиоме).

— Ну и что? — спросил Митя. — Почему же этим доказано P?

— А вот почему: раз допущение, что *не* P истинно, привело к нелепости, значит, *не* P истинным быть не может. Но если *не* P ложно, то P истинно!

— Все правильно, — сказал Митя. — Если отрицание предложения P ложно, то само предложение P истинно; помнишь, мы с тобой об этом говорили?*). Поэтому вместо того, чтобы доказывать истинность P, можно доказывать ложность *не* P, а уж отсюда делать вывод об истинности P.

— Можно-то можно, — заметил Петя, — да нужно ли? Не проще ли идти прямым путем? Вот так, например, как мы с Катей в контрольной по алгебре доказывали, что число 13 не является корнем уравнения $x^3-17x^2+119x-1000=0$: подсчитали значение выражения в левой части уравнения при $x=13$ и убедились, что оно не равно 0.

— И не лень вам было умножать и складывать? — усмехнулся Митя. — Ведь стоило только предположить, что 13 — корень этого уравнения, как сразу получился бы нелепый вывод: 1000 делится на 13 $(13^3-17\cdot13^2+119\cdot13=1000)$. Следовательно, 13 — не корень данного уравнения.

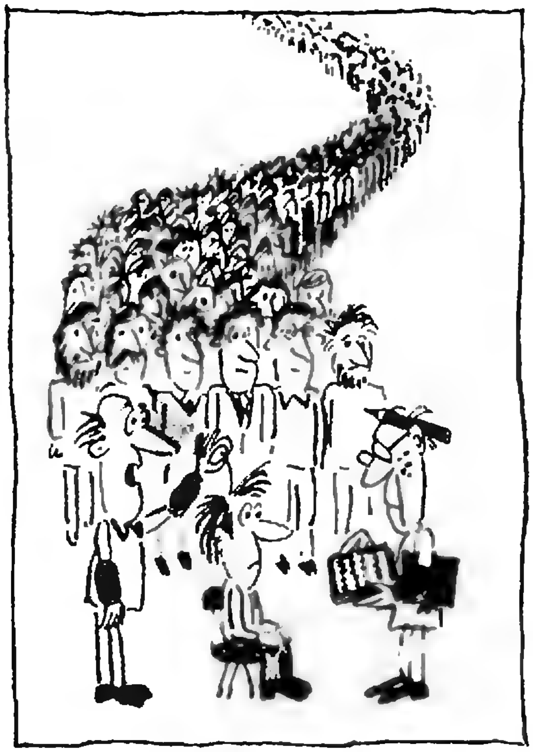
— И что же, — осведомился Петя, — такой путь доказательства всегда короче прямого?

— Нет, не всегда, — ответил Митя, — но довольно часто. Попробуй, докажи, например, что в Москве есть люди с одинаковым количеством волос на голове (лысые не считаются). Не станешь же ты у всех подряд перебирать шевелюру по волоску. А вот если предположить, что таких людей нет, то, приняв во внимание, что в Москве живет около 8 миллионов, а число волос на голове у человека не превосходит 500 000, мы придем к нелепому выводу: $500\,000\geqslant8\cdot10^6$. Следовательно, в Москве есть жители с одинаковым числом волос на голове.

Доказательство утверждения P путем доказательства ложности его отрицания *не* P называется *косвенным доказательством;* называют его также *доказательством от противного.* А теперь попробуй, докажи от противного, что не существует наибольшего четного числа.

---

*) См. статью «Неверно, что... — как это понимать?» («Квант», 1980, № 9)



— Ну, что ж, — сказал Петя, — это нетрудно. Допустим, что такое число n существует. Тогда всякое другое четное число должно быть меньше n. Однако, прибавив к числу n двойку, получим четное число $n+2$, большее, чем n. Полученное противоречие доказывает, что предположение о существовании наибольшего четного числа ложно; значит, наибольшего четного числа не существует.

— Знаешь, — сказал Митя, — еще в третьем веке до нашей эры Евклид доказал, что наибольшего простого числа не существует. Предположив, что такое число p_n существует, он построил число $p=p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n+1$, где $p_1, p_2, \ldots$ — простые числа, предшествующие p_n; p не делится ни на одно из чисел $p_1, p_2, \ldots p_n$ (в остатке всегда будет 1), а значит, либо оно само — простое, либо делится на простое число q, большее, чем p_n. Полученное противоречие (p_n — наибольшее простое число и, одновременно, либо p, либо q — простое число, большее p_n) доказывает ложность сделанного допущения и, тем самым, истинность утверждения *Наибольшего простого числа не существует.*

— Бывает так, — продолжал Митя, — что ложность *не P* столь очевидна, что можно сразу сделать вывод об истинности *P*. Помнишь, в четвертом классе нам говорили, что пустое множество является подмножеством любого множества? Это звучало как-то странно, неубедительно. Попробуем доказать это утверждение от противного. Вспомним, что множество *M* называется подмножеством множества *N*, если всякий элемент множества *M* принадлежит множеству *N*. Допустим, что пустое множество *M* не есть подмножество множества *N*, то есть найдется такой элемент множества *M*, который не принадлежит *N*. Но это — очевидная нелепость, так как в пустом множестве согласно его определению вообще нет никаких элементов. Следовательно, пустое множество есть подмножество множества *N*.

— И в самом деле убедительно, — согласился Петя.

Друзья расстались, весьма довольные друг другом.

Вскоре на уроке физики учитель рассказал ребятам, как Галилей логически доказал свою гипотезу о том, что в пустоте все тела падают одинаково быстро, и опроверг тем самым гипотезу Аристотеля, полагавшего, что тело падает тем быстрее, чем оно тяжелее.

— Допустим, — сказал Галилей, — что тяжелое ядро падает быстрее, чем легкое. Что будет, если связать эти два ядра вместе? С одной стороны — легкое ядро должно замедлять падение тяжелого, с другой же — скорость падения связанных ядер должна быть больше скорости падения тяжелого ядра. Полученное противоречие доказывает, что предположение о различии скоростей падения тяжелого и легкого ядер ложно. Следовательно, ядра должны падать с одинаковой скоростью.

— Значит, приведение к противоречию бывает полезно и в физике, — отметил про себя Петя.

Спустя некоторое время учительница русского языка попросила Петю доказать, что в предложении *Почти все пионеры нашего класса увле-*

каются спортом слово *почти* — частица.

— Вот те на, — подумал Петя. — Я понимаю, *же* — частица, *ли* — частица, *бы* — частица, а *почти* — какая же это частица? Слово как слово. Впрочем, это, несомненно, служебная часть речи, то есть либо предлог, либо союз, либо междометие, либо частица. Допустим, что слово *почти* — не частица; тогда оно — предлог, или союз, или междометие. Но это слово не служит для связи слов или частей предложения; значит, оно — не предлог и не союз. Неверно и то, что слово *почти* — междометие: оно не выражает никаких чувств и не побуждает к действию. Следовательно, слово *почти* — частица, и я доказал это, рассуждая от противного. Учительница похвалила Петю за толковый ответ.

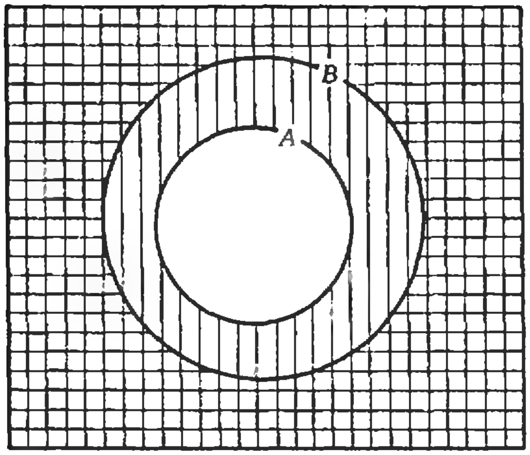
Прошло много времени. Петя и Митя окончили шестой класс и перешли в седьмой. На одном из первых уроков геометрии в седьмом классе разбиралась теорема: *Если две прямые перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны.* Доказывалась эта теорема так: Предположим, что прямые a и b, перпендикулярные прямой p, пересекаются в точке M. Тогда через точку M проходят два перпендикуляра к прямой p, что противоречит теореме «Через любую точку проходит один и только один перпендикуляр к данной прямой». Учительница сказала, что это — доказательство от противного.

— Ага, — подумал Петя, вспомнив прошлогоднюю беседу с Митей,— эта теорема сформулирована в виде условного предложения: *Если A, то B*, а отрицанием такого предложения является предложение *A и (не B)*, то есть *Прямые a и b перпендикулярны прямой p и пересекаются.* Мы доказали, что утверждение *A и (не B)* ложно, так как противоречит ранее доказанной теореме. Значит, *Если A, то B* истинно. Все правильно.

На уроке алгебры нужно было доказать утверждение: *Если натуральное число* n *меньше* 1, *то* $\frac{1}{n} > n$.

Учительница назвала доказательством от противного такое рассуждение: допустим, что $\frac{1}{n} \leqslant n$; тогда $\frac{1}{n} - n \leqslant 0$; отсюда следует, что $\frac{1-n^2}{n} \leqslant 0$, откуда $1-n^2 \leqslant 0$, $1 \leqslant n^2$ и $n \geqslant 1$. Пете показалось, что это не совсем то, что он привык считать доказательством от противного, и он решил обсудить этот вопрос с Митей. Тот рассеял его сомнения.

— Посмотри, — сказал он, — мы предположили, что истинно отрицание исходного утверждения *Натуральное число* n *меньше* 1 *и* $\frac{1}{n} \leqslant n$. Из этого предложения вытекает опровергающее его противоречие: $n < 1$ и $n \geqslant 1$ одновременно. Следовательно, исходное предложение истинно. Как видишь, это самое настоящее доказательство от противного. Но к этому вопросу можно подойти и иначе. Мы недавно проходили тему «Равносильные предложения». Так вот, предложения *Если A, то B* и *Если (не B), то (не A)* равносильны, то есть при любых A и B они либо одновременно истинны, либо одновременно ложны. Значит,



вместо того, чтобы доказывать утверждение *Если A, то B*, можно доказать утверждение *Если (не B), то (не A)*. Так мы, в сущности, и поступили, решая эту задачу. Понять, почему такая равносильность имеет место, тебе поможет рисунок, из которого видно, что если из A следует B (множество истинности предложения A есть подмножество множества истинности предложения B), то из *не B* следует *не A* (множество истинности предложения *не B* есть подмножество множества истинности предложения *не A*). Верно и обратное. Равносильность предложений *Если A, то B* и *Если (не B), то (не A)* называется в логике *законом контрапозиции*.

* * *

Итак, что мы теперь знаем о косвенных доказательствах? Доказательство утверждения P от противного состоит, вообще говоря, в доказательстве ложности *не P*. Ложность предложения *не P* доказана, если из него выведено ложное следствие Q. Предложение Q ложно, если оно является отрицанием предложения, истинность которого ранее установлена, либо если оно само имеет форму противоречия *R и (не R)*.

Отрицанием условного предложения *Если A, то B* является *A и (не B)*. Доказать ложность предложения *A и (не B)* можно еще и так: вывести из него следствие *не A* (противоречащее A), либо B (противоречащее *не B*).

Согласно закону контрапозиции, предложение *Если A, то B* будет доказано и в том случае, если удастся доказать предложение *Если (не B), то (не A)*.

Добавим к этому, что в основе всех форм доказательства от противного лежит *закон исключенного третьего*. Этот логический закон утверждает, что из двух высказываний P и *не P* всегда либо первое истинно, а второе ложно, либо, наоборот, первое ложно, а второе истинно; никакой третьей возможности нет. Именно на основании этого закона мы из ложности *не P* делаем вывод об истинности P.

Как видите, в математике на каждом шагу используются законы логики, а, как сказано в книге А. Реньи «Трилогия о математике» (советуем прочесть!)*), — «Тот, кто постиг искусство логического мышления в математике, может использовать его в любой области жизни». Так давайте поупражняйтесь в этом искусстве и решите несколько задач.

1. Докажите, что не существует треугольника а) с углами 40°, 60°, 70°; б) со сторонами длины 7 см, 10 см, 18 см.

2. Докажите, что при любом натуральном m равенство $m(m+1)=27\,381$ неверно.

3. Докажите, что не существует такого числа, которое при делении на 21 дает в остатке 1, а при делении на 14 дает в остатке 3.

4. Для натуральных m и n докажите следующие утверждения: а) если m^2 нечетно, то m нечетно; б) если m нечетно и n нечетно, то произведение mn нечетно.

5. Точки A, B и C лежат на одной прямой; $|AB|=5$ см, $|AC|=7$ см. Лежит ли точка C между точками A и B? Ответ обоснуйте.

6. Если прямая пересекает одну из параллельных прямых, то она пересекает и другую. Докажите.

7. Если функция f — возрастающая, то из $f(x_2)>f(x_1)$ следует $x_2>x_1$. Докажите.

8. Является ли в предложении *Люблю грозу в начале мая* слово *грозу* подлежащим? Правильность ответа докажите от противного.

9. Сережа вадумал соорудить во дворе песочницу для малышей и стал искать подходящие доски. Ему удалось найти четыре доски длиной по 1 м, две доски по 2 м, и одну доску длиной в 3 м. Можно ли всеми этими досками, не распиливая их, огородить прямоугольную песочницу?

10. Можно ли разменять 20 копеек семью монетами достоинством 1, 3 и 5 копеек?

---

*) М., «Мир», 1980.

О. Овчинников

Что же покажет динамометр?

На гладкой горизонтальной поверхности лежит динамометр. К одному концу динамометра прикладывают силу $F_1 = 5$Н, к другому — силу $F_2 = 8$Н (рис. 1). Что покажет динамометр?

Задачи подобного содержания можно встретить в задачниках и учебных пособиях по физике. Ответ, как правило, приводится такой: динамометр будет показывать 5Н. Подтвердить это можно следующим рассуждением. Если к обоим концам динамометра прикладывают силы, равные 5Н, то динамометр показывает 5Н. Если же одну из сил увеличить на 3Н, то равновесие нарушится, и динамометр, показывая 5Н, начнет двигаться в направлении действия большей силы с ускорением $a = (F_2 - F_1)/m$, где m — масса динамометра.

Казалось бы, все очевидно. Однако...

Давайте разберемся в этом вопросе детально. Начнем с такой простой задачи:

на гладком горизонтальном столе лежит пружина с жесткостью k. К одному из концов пружины прикладывают силу F_0, направленную горизонтально (рис. 2). На сколько удлинится пружина?

Найдем силу упругости F_x, которая возникает в сечении, находящемся на расстоянии x от конца нерастянутой пружины. Поскольку пружина однородна, масса участка пружины длиной x равна

$$m_x = \frac{m_0}{l_0}x,$$

где m_0 — масса пружины, l_0 — длина пружины в нерастянутом состоянии. Ускорение, с которым будет двигаться вся пружина под действием силы F_0, равно

$$a = \frac{F_0}{m_0}.$$

С таким же ускорением будет двигаться рассматриваемый нами участок пружины длиной x. На этот участок со стороны остальной части пружины действует сила, равная силе упругости F_x, возникающей в сечении на расстоянии x от свободного конца пружины. Следовательно, значение силы упругости F_x равно

$$F_x = m_x a = \frac{F_0 x}{l_0}.$$

Мы получили интересный результат. Во-первых, сила упругости, возникающая в данном сечении пружины, пропорциональна его координате при нерастянутой пружине, или длине участка, отсекаемого этим сечением. Во-вторых, значение этой силы не зависит от массы пружины. Масса пружины может принимать любые значения, отличные от нуля. В случае $m_0 = 0$ ускорение, приобретаемое пружиной, обращается в бесконечность.

Возникающая вследствие удлинения пружины сила упругости пропорциональна этому удлинению: $F = k\Delta l$, где k — жесткость пружины. Однако рассчитывать показания динамометра по этой формуле можно лишь тогда, когда в любом сечении пружины

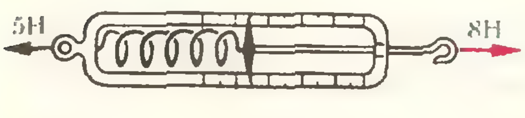


Рис. 1.

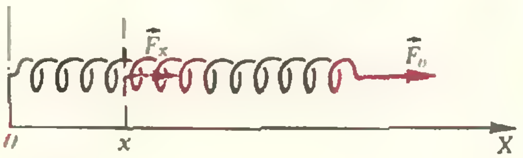


Рис. 2.

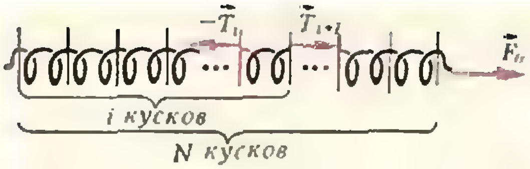


Рис. 3.

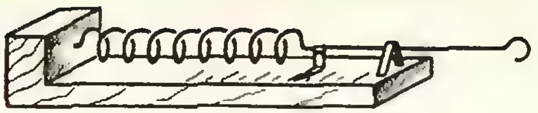


Рис. 5.

возникает одна и та же сила упругости. Именно такая ситуация осуществляется в том случае, когда на оба конца пружины действуют одинаковые по абсолютной величине силы (например, когда к одному концу пружины приложена сила F, а другой конец закреплен).

В нашем случае при ускоренном движении пружины силы упругости, возникающие в различных сечениях пружины, различны. Это означает, что удлинения отдельных участков пружины, вследствие которых и возникают соответствующие силы упругости, различны.

Для расчета удлинения всей пружины воспользуемся следующими рассуждениями. Мысленно разделим нерастянутую пружину на N одинаковых частей. Рассмотрим кусочек пружины, отделенный от свободного ее конца i кусочками (рис. 3). Сила T_i, с которой выделенный участок пружины действует на эти i кусочков с массой $\frac{m_0}{N}i$, сообщает им ускорение $a=F_0/m_0$; следовательно,

$$T_i=\frac{i}{N}\,m_0a=\frac{i}{N}\,F_0.$$

Такая же по абсолютной величине сила действует на выделенный участок пружины. Пусть справа на этот участок действует сила T_{i+1}. Тогда

$$T_{i+1}-T_i=m_i\,a=\frac{F_0}{N}\,.$$

С ростом N величина F_0/N уменьшается, и при достаточно больших N можно считать, что $T_{i+1}-T_i\approx 0$, то есть $T_{i+1}\approx T_i=\frac{i}{N}\,F_0$. Иными словами, при большом N можно считать, что сила упругости, возникающая в различных сечениях внутри отдельного участка пружины, постоянна. Жесткость же каждого такого участка, как известно, равна kN. Следовательно, $T_i=kN\cdot\Delta l_i$, и удлинение отдельного участка пружины равно

$$\Delta l_i=\frac{T_i}{kN}=\frac{i}{kN^2}\,F_0.$$

Чтобы найти удлинение всей пружины, нам надо просуммировать удлинения отдельных участков:

$$\Delta l=\sum_{i=1}^{N}\Delta l_i=\frac{F_0}{kN^2}\sum_{i=1}^{N}i=$$

$$=\frac{F_0}{kN^2}\,\frac{N(N-1)}{2}=\frac{F_0}{2k}$$

(мы помним, что $N\gg 1$).

Итак, один шаг на пути решения нашей проблемы — что покажет динамометр, если к пружине и корпусу его приложить различные силы,— мы сделали. Теперь — следующий шаг. Рассмотрим такую задачу: *к концам пружины с жесткостью k, лежащей на гладком горизонтальном столе, приложены силы F_1 и F_2 (рис. 4), причем $F_1>F_2$. На сколько удлинится пружина?*

Рассуждая точно так же, как в предыдущей задаче, мы найдем, что сила упругости, возникающая в отдельном малом участке пружины, равна

$$T_i=\frac{F_1-F_2}{N}\,i+F_2=kN\cdot\Delta l_i.$$

Удлинение такого участка равно

$$\Delta l_i=\frac{(F_1-F_2)i+F_2N}{kN^2}\,.$$

Следовательно, удлинение всей пру-

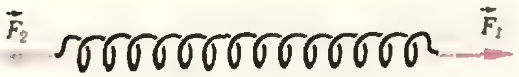


Рис. 4.

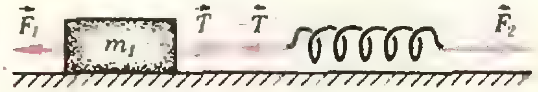


Рис. 6.

жины равно

$$\Delta l=\sum_{i=1}^{N}\Delta l_i=\frac{1}{kN^2}\sum_{i=1}^{N}(F_1-F_2)i+F_2N=$$

$$=\frac{F_2}{kN}+\frac{F_1-F_2}{kN^2}\sum_{i=1}^{N}i=\frac{F_1-F_2}{2k}$$

(поскольку по-прежнему N очень велико).

Теперь мы перейдем от простой пружины к динамометру. Вспомним, что представляет собой простой школьный динамометр. Это стальная пружина с крючком, прикрепленная к корпусу с нанесенной на него шкалой (рис. 5). Так что условие нашей самой первой задачи можно сформулировать так:

на гладкой горизонтальной поверхности лежит динамометр. К корпусу его прикладывают силу F_1, а к пружине (к крючку) — силу F_2. Что покажет динамометр?

Чтобы предсказать показания динамометра, представим его в виде такой системы, как на рисунке 6. Кубик слева — это корпус динамометра; его масса m_1. Пружина справа — это пружина динамометра; ее масса m_2. Запишем уравнения движения корпуса и пружины:

$$T-F_1=m_1a,$$
$$F_2-T=m_2a,$$

где a — ускорение, с которым движется динамометр.

Из этих уравнений находим

$$T=F_2-\frac{(F_2-F_1)m_2}{m_1+m_2}.$$

На пружину динамометра действуют две силы — F_2 и T, причем $T<F_2$. А удлинение пружины в таком случае, как мы выяснили, равно $\Delta l=\frac{T+F_2}{2k}$. Подставив найденное значение T, получим

$$\Delta l=\frac{F_2}{k}-\frac{(F_2-F_1)m_2}{2k(m_1+m_2)}.$$

Из этого выражения видно, что при $m_2=0$ (то есть в том случае, когда массой пружины можно пренебречь) удлинение пружины равно $\Delta l=F_2/k$.

Итак, результат наших рассуждений следующий: удлинение пружины, а следовательно, и показания динамометра зависят не только от величин сил, действующих на корпус и пружину, но и от массы корпуса и пружины динамометра. Мало этого. Показание зависит и от того, к чему (к корпусу или к пружине) приложены силы F_1 и F_2. Если поменять в рассмотренной нами задаче силы F_1 и F_2 местами, показание изменяется. (Проверьте сами, что это действительно так.)

Мы приходим к выводу, что задача, сформулированная в начале статьи, не может быть решена строго до тех пор, пока не будут заданы массы корпуса и пружины динамометра. И ответ, приведенный нами в самом начале, не верен. Чтобы еще раз убедиться в этом, решите задачу, воспользовавшись реальными данными, характерными для знакомого вам школьного динамометра.

Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта»

(Начало см на с 35)

(Кировакан) 27; *А Мельник* (Житомир) 27; *Е Мельничук* (Черновцы) 25, 27; *О Меркулов* (Муром) 25; *С Милованов* (Запорожье) 23, 25, 27; *А Мигько* (Гомель) 31; *С Михайловский* (с Конщегорье Архангельской обл) 19, 23, 28; *М Мочульский* (Запорожье) 18, 21; *П Муталиев*(Джизак) 25; *М Найговзин* (Баку) 18, 19, 23, 27, 28, 31; *А Найден* (Берлин, ГДР) 23; *А Николаев* (Чебоксары) 25; *А Нозин* (Минск) 18, 21, 23; *С Обогуев* (Ленинград) 25, 27, 31; *А Осипов* (Сосновый Бор) 25, 29, 31, 32; *И Осовяк* (с В Дедеркалы Тернопольской обл) 23; *Ю Остапчук* (Здолбунов) 31; *Ю Павлов* (Ленинград) 18, 23, 27; *А Павлычев* (Рига) 19, 25, 27, 28, 31; *Л Пастухов* (Челябинск) 18; *С Пащенко* (Киев) 18, 19, 21, 23, 25, 27, 28; *А Пелех* (Казатин) 18, 21, 23, 25, 27, 28; *[illegible] Пентегов* (Киев) 19—23, 28, 31; *В Петров* (Свердловск) 27; *И Пиковский* (Киев) 19, 21; *С Пишенин* (Черновцы) 28, 31; *С Погорелов* (Киев) 27; *Г Поде* (Ворошиловград) 27; *Г Подчурский* (Бельцы) 31; *А Полисский* (Киев) 18, 21; *Е Поляков* (Калининград Московской обл) 18; *А Пономаренко* (Киев) 18, 21, 23; *А Посметюко* (Минск) 25; *В Потылицын* (п/о Савинское Архангельской обл) 25, 27; *О Потылицына* (Жуковский) 25, 27; *В Прилипко* (Киев) 28; *К Протасов* (Москва) 27; *О Райчев* (Киев) 23, 25, 27; *И Решетов* (Мелитополь) 27; *Г Розикян* (Ереван) 23; *Е Розман* (Киев) 25, 31; *И Салахов* (Ташкент) 18; *А Салтанов* (Новополоцк) 18, 25, 31; *Ю Самохин* (Москва) 25, 27;

(Окончание см на с 50)

В. Можаев

Колебания

С колебаниями мы сталкиваемся повсюду. Это, например, колебания различных маятников и струн музыкальных инструментов, молекул газа в звуковой волне и молекул жидкости в морских волнах. Колебательные движения совершают атомы в твердых телах и электроны, входящие в состав атомов. Колебания электрического заряда и тока происходят в контурах радиоприемников и телевизоров. По таким же законам происходят изменения напряженности электрического поля и индукции магнитного поля в электромагнитной волне.

Самое удивительное, что все эти совершенно различные физические явления описываются одними и теми же математическими уравнениями, то есть подчиняются единым законам. Именно с такой позиции мы и рассмотрим ряд примеров простейших колебательных систем. Ограничимся рассмотрением только свободных колебаний, когда внешние воздействия на колебательную систему отсутствуют, параметры системы и условия, в которых совершаются колебания, со временем не изменяются. Потерями энергии в колебательной системе будем пренебрегать, то есть будем полагать, что полная энергия системы остается постоянной. Это, конечно, идеализация, но, если потери энергии существенно меньше полной энергии системы, колебания реальной системы в течение достаточно длительного времени будут мало отличаться от колебаний идеализированной системы.

Задача 1. *Груз массой m, находящийся на гладкой горизонтальной поверхности, прикреплен к неподвижной стенке с помощью пружины жесткостью k (рис. 1, а). Груз смещают от положения равновесия OO' на величину A_0 и отпускают без начальной скорости. Найдите: 1) смещение груза от положения равновесия в зависимости от времени; 2) временнýю зависимость скорости груза; 3) зависимость от времени кинетической энергии груза и потенциальной энергии пружины; 4) среднюю (за период) кинетическую и среднюю потенциальную энергии данной системы.*

1) Пусть в некоторый произвольный момент времени t груз находится в точке с координатой x (рис. 1, б). Запишем уравнение движения груза вдоль оси X. В этом направлении на груз действует только одна сила — сила упругости пружины $\vec{F}$, направленная к положению равновесия ($x=0$). Проекция этой силы $F=-kx$, поэтому уравнение движения будет иметь вид

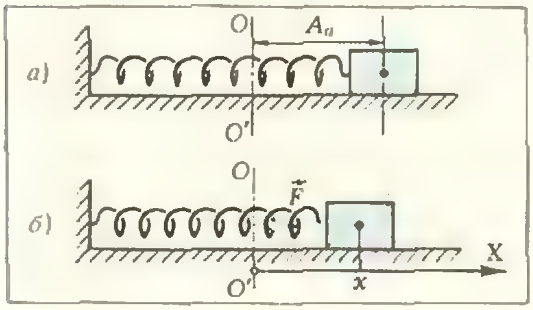


Рис. 1.

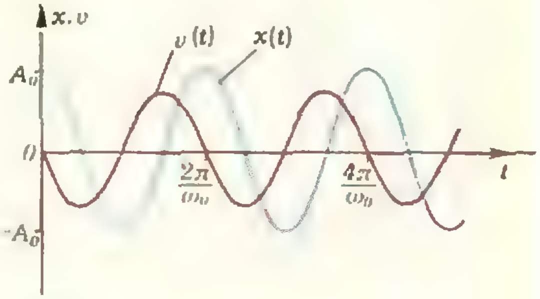


Рис. 2.

$$ma=-kx, \qquad (1)$$

где a — проекция ускорения груза в данный момент времени. Учитывая, что ускорение — это вторая производная координаты по времени ($a=x''$), перепишем уравнение (1) так:

$$x''+\frac{k}{m}x=0,$$

или, обозначив постоянный коэффициент $\frac{k}{m}$ через ω_0^2, —

$$x''+\omega_0^2x=0. \qquad (2)$$

Полученное уравнение описывает гармонические колебания груза, то есть колебания, при которых смещение груза от положения равновесия изменяется со временем по закону

$$x=x_м\cos(\omega t+\varphi_0). \qquad (3)$$

Выражение (3) является решением уравнения (2). Здесь $x_м$ — амплитуда, ω — круговая частота, $(\omega t+\varphi_0)$ — фаза и φ_0 — начальная фаза колебаний.

Чтобы найти круговую частоту, подставим решение (3) в уравнение (2):

$$-x_м\,\omega^2\cos(\omega t+\varphi_0)+$$
$$+\omega_0^2x_м\cos(\omega t+\varphi_0)=0,$$

или

$$x_м\cos(\omega t+\varphi_0)\cdot(\omega_0^2-\omega^2)=0.$$

Это равенство справедливо для любого момента времени t, если $x_м=0$ либо $\omega_0^2-\omega^2=0$. Поскольку амплитуда колебаний не может быть равна нулю, остается

$$\omega_0^2-\omega^2=0, \text{ или } \omega=\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Мы получили очень важный результат: коэффициент при x в уравнении (2) есть не что иное, как квадрат круговой частоты колебаний.

Теперь найдем амплитуду колебаний и начальную фазу. Для этого используем начальные условия: в момент времени $t=0$ смещение $x=A_0$ и скорость, которая является первой производной координаты по времени, $v=x'=0$. Из второго условия получим, что $\varphi_0=0$, а из первого — что $x_м=A_0$.

Таким образом, смещение груза со временем изменяется по закону

$$x=A_0\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t.$$

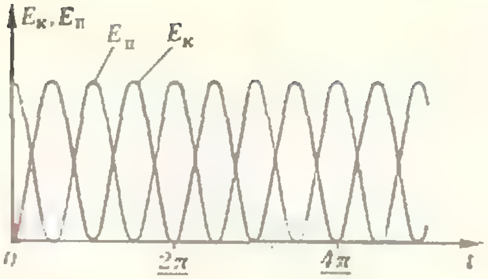


Рис. 3.

2) Скорость (точнее, ее проекция) является первой производной координаты по времени, поэтому зависимость скорости от времени будет такой:

$$v=-A_0\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t.$$

Графики $x=x(t)$ и $v=v(t)$ показаны на рисунке 2.

3) Кинетическая энергия груза в произвольный момент времени t равна

$$E_к=\frac{mv^2}{2}=\frac{A_0^2k}{2}\sin^2\sqrt{\frac{k}{m}}\,t,$$

а потенциальная энергия пружины —

$$E_п=\frac{kx^2}{2}=\frac{A_0^2k}{2}\cos^2\sqrt{\frac{k}{m}}\,t.$$

На рисунке 3 изображены соответствующие графики.

4) Средние (за период) значения кинетической и потенциальной энергии равны соответственно

$$\overline{E}_к=\frac{A_0^2k}{2}\overline{\sin^2\sqrt{\frac{k}{m}}\,t}=\frac{A_0^2k}{4}$$

и

$$\overline{E}_п=\frac{A_0^2k}{2}\overline{\cos^2\sqrt{\frac{k}{m}}\,t}=\frac{A_0^2k}{4}$$

— средние значения $E_к$ и $E_п$ одинаковы. (Здесь было использовано то, что среднее за период значение квадрата синуса равно среднему значению квадрата косинуса и равно 1/2.)

Задача 2. *Тонкий обруч радиусом r катается без скольжения по внутренней поверхности цилиндра радиусом R, совершая малые колебания около положения равновесия (рис. 4). Найдите период этих колебаний.*

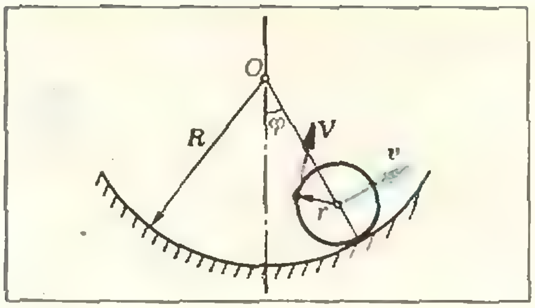


Рис. 4.

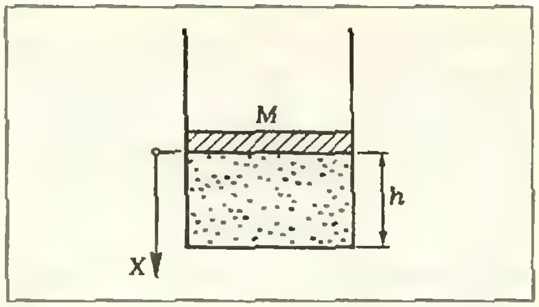


Рис. 5.

Из решения предыдущей задачи ясно, что для нахождения частоты ω колебательной системы или периода T $(T=2\pi/\omega)$ достаточно составить уравнение движения и привести его к виду (2). Тогда коэффициент при втором члене даст квадрат частоты.

Понятно, что в уравнении (2) роль смещения x может играть любая другая физическая величина. Выберем в качестве таковой угол φ, который прямая, соединяющая центр масс обруча и точку O, образует с вертикалью.

Для составления уравнения движения центра масс обруча воспользуемся энергетическими соображениями. В некоторый произвольный момент времени t обруч обладает кинетической энергией $E_{к1}$, связанной с движением центра масс по окружности радиусом $R-r$, кинетической энергией $E_{к2}$ вращательного движения относительно центра масс и потенциальной энергией $E_{п}$ в поле тяжести Земли. Пусть скорость центра масс обруча равна v; тогда кинетическая энергия $E_{к1}=mv^2/2$ (m — масса обруча). Поскольку обруч тонкий, то есть вся его масса сосредоточена в тонком кольце, кинетическая энергия $E_{к2}=mV^2/2$, где V — линейная скорость вращательного движения обруча. При качении без проскальзывания $V=v$, поэтому

$$E_{к2}=\frac{mv^2}{2}=E_{к1}.$$

За нулевой уровень потенциальной энергии выберем уровень центра масс обруча в положении устойчивого равновесия, тогда потенциальная энергия обруча в данный момент времени будет равна

$$E_{п}=mg((R-r)-(R-r)\cos\varphi)=$$
$$=mg(R-r)(1-\cos\varphi)=\frac{mg(R-r)\varphi^2}{2}$$

(последнее приближенное равенство записано с учетом малости угла φ: $1-\cos\varphi=2\sin^2\varphi/2=\varphi^2/2$). Полная энергия обруча

$$E_{к1}+E_{к2}+E_{п}=\frac{mv^2}{2}+\frac{mv^2}{2}+$$
$$+\frac{mg(R-r)\varphi^2}{2}=mv^2+\frac{mg(R-r)\varphi^2}{2}$$

остается постоянной во времени. Учитывая связь между скоростью v и угловой скоростью движения центра масс по окружности радиусом $R-r$: $v=(R-r)\omega=(R-r)\varphi'$ (угловая скорость есть первая производная угла по времени), окончательно получим

$$m(R-r)^2(\varphi')^2+\frac{mg(R-r)\varphi^2}{2}=\mathrm{const}.$$

Продифференцируем обе части этого выражения по t:

$$2m(R-r)^2\varphi'\varphi''+mg(R-r)\varphi\varphi'=0,$$

или

$$\varphi'\left(\varphi''+\frac{g}{2(R-r)}\varphi\right)=0.$$

Поскольку угловая скорость φ' не равна нулю, справедливо равенство

$$\varphi''+\frac{g}{2(R-r)}\varphi=0.$$

Это и есть уравнение движения обруча. Следовательно, круговая частота

$\omega=\sqrt{\frac{g}{2(R-r)}}$, а период колебаний

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{2(R-r)}{g}}.$$

Задача 3. *В вертикально расположенном цилиндрическом сосуде с площадью сечения S может перемещаться без трения массивный поршень массой M (рис. 5). Сосуд заполнен газом. В положении равновесия расстояние между поршнем и дном сосуда равно h. Определите период малых колебаний, которые возникают при отклонении поршня*

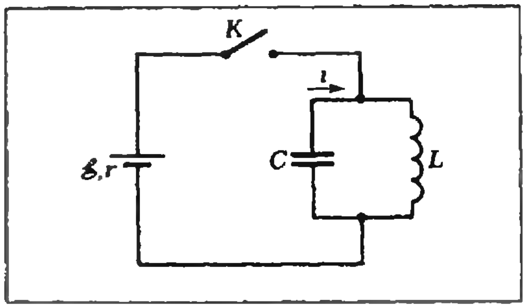


Рис. 6.

из положения равновесия. Атмосферное давление равно p_0, газ идеальный, температура газа постоянна.

Пусть в некоторый момент времени поршень сместился вниз на малую величину x. Уменьшение объема газа под поршнем будет равно $\Delta V=Sx$, что вызовет увеличение давления газа Δp. Найдем связь между ΔV и Δp. Поскольку процесс изотермический, $pV=\mathrm{const}$, а $\Delta(pV)=0$. Следовательно, $V\Delta p+p\Delta V=0$, или

$$\Delta p=-\frac{\Delta V}{V}p=-\frac{Sp}{V}x.$$

При малых колебаниях $\Delta V\ll V$ и $\Delta p\ll p$, поэтому

$$\Delta p=-\frac{(p_0+Mg/S)}{h}x.$$

Запишем уравнение движения поршня:

$$Mx''=\Delta pS,$$

или

$$x''+\frac{p_0S+Mg}{Mh}x=0.$$

Отсюда найдем круговую частоту $\omega=\sqrt{\frac{p_0S+Mg}{Mh}}$ и период колебаний

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{Mh}{p_0S+Mg}}.$$

Задача 4. *Колебательный контур, состоящий из конденсатора емкостью C и катушки индуктивностью L, подключен через ключ K к источнику с постоянной ЭДС $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r (рис. 6). Ключ замыкают, а после того как в цепи установится стационарный режим, размыкают его. Найдите зависимость напряжения на конденсаторе от времени после размыкания ключа. Омическим сопротивлением катушки пренебречь.*

При замкнутом ключе в стационарном режиме через катушку течет постоянный ток $I=\mathscr{E}/r$. Напряжение на конденсаторе и, следовательно, заряд на нем равны нулю, поскольку напряжение на конденсаторе равно напряжению на катушке, а оно, при отсутствии активного сопротивления катушки, равно нулю.

После размыкания ключа в контуре начнутся свободные колебания. Пусть в некоторый момент времени заряд на конденсаторе равен q, а напряжение на конденсаторе равно u. Очевидно, что при этом напряжение на катушке тоже равно u. Будем считать напряжение на конденсаторе положительным, когда верхняя пластина заряжена положительно; за положительное направление тока выберем направление, указанное стрелкой на рисунке 6. При таком выборе знаков связь между зарядом q, напряжением u и током i будет такой: $i=-q'$, $q=Cu$, $u=Li'$.

Отсюда $i=-Cu'$, $u=-LCu''$, или

$$u''+\frac{1}{LC}u=0.$$

Мы опять получили уравнение, которое описывает гармонические колебания. В данном случае по гармоническому закону изменяется со временем напряжение u на конденсаторе. Легко показать, что и ток i в цепи, и заряд q на конденсаторе изменяются по аналогичному закону. Убедитесь в этом самостоятельно.

В общем виде зависимость напряжения от времени выглядит так:

$$u=U_{\text{м}}\cos(\omega t+\varphi_0).$$

Частота колебаний в данном случае равна

$$\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

Амплитуду и начальную фазу можно найти из начальных условий: в момент времени $t=0$ $u=0$ и $i=\mathscr{E}/r$. Нетрудно показать, что решение, удовлетворяющее таким начальным условиям, будет иметь вид

$$u=\frac{\mathscr{E}}{r}\sqrt{\frac{L}{C}}\sin\sqrt{\frac{1}{LC}}\,t.$$

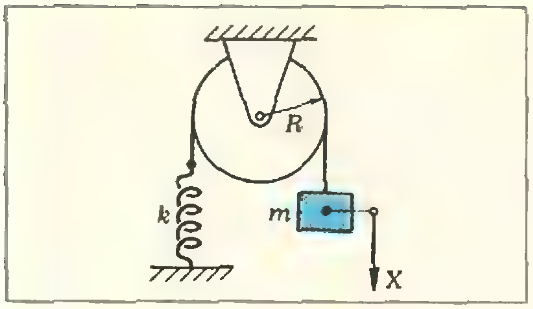


Рис. 7.

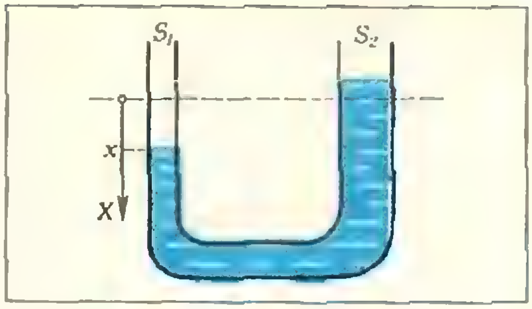


Рис. 8.

Упражнения

1. Твердый шарик, подвешенный на невесомой пружине, совершает гармонические колебания в вертикальном направлении с периодом T_0 и амплитудой A. Каким станет период колебаний, если снизу к шарику поднести массивную твердую горизонтальную плиту, с которой он будет периодически упруго сталкиваться? Расстояние от положения равновесия шарика до плиты равно $A/2$, масса шарика мала по сравнению с массой плиты.

2. Через неподвижный блок в виде диска с массой M и радиусом R переброшена нить, на одном конце которой висит груз массой m, а другой конец через пружину с жесткостью k закреплен (рис. 7). Найдите период малых колебаний груза относительно положения равновесия. Нить относительно блока не проскальзывает. Указание. Используйте энергетический метод составления уравнения движения. Кинетическая энергия диска, вращающегося с угловой скоростью ω относительно оси, проходящей через центр масс диска и перпендикулярной к плоскости диска, равна $MR^2\omega^2/4$.

3. В сообщающиеся сосуды с поперечными сечениями S_1 и S_2 (рис. 8) налита жидкость с плотностью ρ. Масса всей жидкости равна M. Пренебрегая поверхностным натяжением и вязкостью, определите период колебаний жидкости около положения равновесия.

4. В колебательном контуре, состоящем из катушки индуктивности и воздушного конденсатора, величина тока меняется со временем по гармоническому закону: $i = I_\text{м} \cos \omega t$. Когда ток в контуре оказывается равным нулю, в пространство между пластинами конденсатора быстро вводят диэлектрическую пластину с диэлектрической проницаемостью ε. Время этого внешнего воздействия мало́ по сравнению с периодом колебаний в контуре. Найдите зависимость тока в контуре от времени после внесения пластины.

Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта»

(Начало см. на с. 35)

А. Санжур (Киев) **18—31**; *А. Сафонов* (Барнаул) **18**; *С. Светлицкий* (Запорожье) **19, 21**; *Ю. Свистунов* (Запорожье) **25**; *В. Семенов* (Владимир) **23**; *А. Середа* (Донецк) **25, 27, 31**; *О. Середа* (Бердянск) **19**; *В. Середа* (Львов) **23, 27**; *А. Сидоренков* (Смоленск) **19, 21, 27—29, 31**; *В. Сидорин* (Реутов) **19, 31**; *В. Симонов* (Москва) **18, 25, 27, 28**; *А. Скок* (Талгар) **19, 21**; *О. Скопцов* (Ангарск) **18, 19, 21**; *А. Смирнов* (Курган) **21, 25, 27, 28, 31**; *Н. Смоляренко* (Минск) **23, 25, 28, 31**; *А. Сокол* (п. Черноголовка Московской обл.) **18, 25, 28, 29, 31**; *Н. Соловей* (Донецк) **25, 27**; *В. Соловьев* (Рыбное) **23**; *С. Солоенко* (Мелеуз) **19**; *Ю. Спиридонов* (Загорск) **25, 27, 28, 31**; *Д. Степанов* (Арзамас) **25, 29, 31**; *А. Стрелец* (Киев) **18, 21**; *Д. Суворов* (Свердловск) **28, 31**; *Т. Сурова* (Ступино) **25, 27**; *Е. Сырычева* (Вышний Волочек) **18, 25**; *Н. Тавин* (Ковров) **21, 25, 27**; *С. Тиковицкий* (Жуковский) **18**; *Ю. Талденко* (Сумы) **18, 19, 23, 25, 27, 31**; *В. Танасийчук* (Городенка) **23, 27**; *А. Терещенко* (Киев) **25, 27—29**; *С. Тимофеев* (Новоазовский р-н Донецкой обл.) **19**; *Ю. Топчиев* (Светлый) **21**; *В. Фабер* (Баку) **23, 25, 29, 31**; *Н. Федин* (Омск) **18, 19, 20, 23, 25, 27, 31**; *В. Федюкович* (Киев) **18, 20, 21, 27—29, 31, 32**; *С. Федяков* (Ефремов) **28**; *Н. Фесун* (Киев) **21, 25, 27**; *А. Флеров* (Рига) **18, 19, 27**; *О. Фонарев* (Сумгаит) **18, 25, 26**; *М. Фридман* (Львов) **28, 31**; *А. Фролов* (Тула) **20, 21, 28**; *С. Фролов* (Москва) **25, 28, 29, 31**; *И. Харин* (Сухуми) **23, 25, 27**; *И. Хасанов* (Коканд) **25, 31**; *С. Хосид* (Алма-Ата) **23, 25**; *А. Цеханский* (п. Запрудня Московской обл.) **18, 23, 25, 27—29, 31**; *Ю. Цыганков* (Дрожжановский р-н ТАССР) **19—21, 27—29, 31, 32**; *О. Червяков* (Архангельск) **27**; *Е. Чулкин* (с. Рябово УдАССР) **18, 19, 25, 26, 28**; *А. Чуяков* (п. Мучкапский Тамбовской обл.) **18—21, 27, 28, 31, 32**; *В. Шаповал* (Винница) **18, 19, 23, 25, 27, 28**; *Ю. Шаповалов* (Серпухов) **18, 23, 25, 27**; *А. Шапоренко* (Орск) **18, 19**; *С. Шарый* (Новосибирск) **23**; *А. Шевченко* (Артемовск Донецкой обл.) **19, 28, 29**; *М. Шевченко* (Артемовск Донецкой обл.) **19, 28, 29**; *Б. Шерман* (Ереван) **27**; *И. Шкридюк* (Ногинск) **18, 19, 21, 23, 31**; *С. Шмаков* (Саратов) **23, 25, 27, 31**; *Ю. Шпагин* (Шумерля) **18, 19, 23, 25, 27**; *И. Шувалова* (Москва) **25, 27**; *О. Юсифов* (Акстафа) **19**; *В. Яковлев* (Москва) **27, 31**; *К. Яковлев* (Киев) **23, 25, 27, 28, 31, 32**; *С. Якуш* (Краснодар) **23, 25**; *Л. Ящук* (Ровно) **25**.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математика

Письменный экзамен

Вариант I

(механико-математический факультет)

1. Найти все значения x, удовлетворяющие условию

$$(x^2-4)\sqrt{x+1}=0.$$

2. Найти все решения уравнения

$$\sin 2x=\sqrt{3}\sin x.$$

3. В трапеции длина средней линии равна 4, а углы при одном из оснований имеют величину 40° и 50°. Найти длины оснований трапеции, если длина отрезка, соединяющего середины этих оснований, равна 1.

4. Касательная к графику функции $\sqrt[3]{x^2}$ такова, что абсцисса c точки касания принадлежит отрезку $\left[\frac{1}{2},\ 1\right]$. При каком значении c площадь треугольника, ограниченного этой касательной, осью Ox и вертикальной прямой $x=2$, будет наименьшей и чему равна эта наименьшая площадь?

5. Найти все значения a, при каждом из которых неравенство

$$\log_{\frac{1}{a}}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+1\right)\cdot\log_5\left(x^2+ax+6\right)+\log_a 3\geqslant 0$$

имеет ровно одно решение.

Разбор задач варианта I

1. Ответ. $\{-1,\ 2\}$.

Почти все абитуриенты успешно справились с этой задачей. Однако некоторые писали

$$(x^2-4)\sqrt{x+1}=0\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}x^2-4=0\\ \sqrt{x+1}=0\end{array}\right.;$$

при этом, даже если в окончательный ответ значение $x=-2$ не включалось, экзаменаторы не могли считать задачу решенной безупречно.

2. Ответ. $x_1=\pi m$, $x_2=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n\ (m,\ n\in\mathbf{Z})$.

Указание. Данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos x=\sqrt{3}/2.\end{array}\right.$$

3. Ответ. 3 и 5.

Решение. Пусть KM — средняя линия трапеции $ABCD$, LN — отрезок, соединяющий середины оснований BC и AD, $\widehat{BAD}=50°$, $\widehat{CDA}=40°$. Отметим, что $|AD|>|BC|$, поскольку $\widehat{BAD}+\widehat{CDA}=90°<180°$ (рис. 1). Пусть Q — точка пересечения прямых AB и DC. Поскольку $CB\parallel AD$, треугольник AQD подобен треугольнику BQC. Поэтому

$$\frac{|BQ|}{|AQ|}=\frac{|BC|}{|AD|}=\frac{|BC|/2}{|AD|/2}=\frac{|BL|}{|AN|}.$$

Так как $\widehat{QBC}=\widehat{QAD}$ и $\frac{|BQ|}{|AQ|}=\frac{|BL|}{|AN|}$, треугольники QBL и QAN подобны. Поэтому $\widehat{BQL}=\widehat{AQN}$ и, следовательно, точки Q, L, N лежат на одной прямой. Треугольник AQD — прямоугольный, поскольку $\widehat{AQD}=180°-\widehat{QAD}-\widehat{QDA}=90°$. Поэтому N — центр описанной вокруг него окружности; значит, $|QN|=\frac{|AD|}{2}$. Аналогично, $|QL|=\frac{|BC|}{2}$. Итак,

$$\frac{|AD|}{2}-\frac{|BC|}{2}=|QN|-|QL|=|LN|=1.$$

По свойству средней линии трапеции $\frac{|AD|+|BC|}{2}=|KM|=4.$

Из системы $\left\{\begin{array}{l}|AD|-|BC|=2,\\ |AD|+|BC|=8\end{array}\right.$ находим $|AD|=5$, $|BC|=3$.

С этой задачей полностью справились лишь около половины абитуриентов. Некоторые абитуриенты, получившие правильный ответ, не смогли его обосновать. Например, без доказательства принималось, что точки Q, L, N лежат на одной прямой.

4. Ответ. Наименьшая площадь $\sqrt[3]{\frac{5}{4}}\cdot\frac{48}{25}$ получается при $c=\frac{4}{5}$.

Решение. Уравнение касательной к графику функции $y(x)=\sqrt[3]{x^2}$ в точке с абсциссой c имеет вид

$$y=\sqrt[3]{c^2}+\frac{2}{3\sqrt[3]{c}}\,(x-c).$$

Касательная пересекается с осью абсцисс в точке $x=-\frac{c}{2}$. Площадь треугольника ABC (рис. 2) равна $S(c)=\frac{1}{2}|AB|\cdot|BC|=$

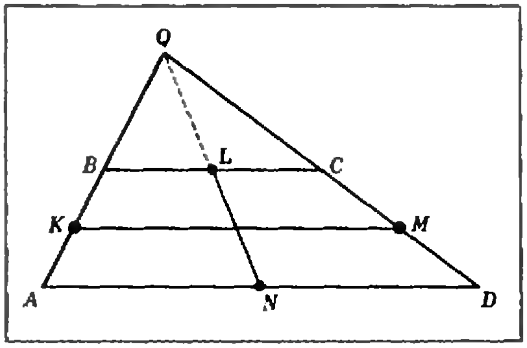


Рис. 1.

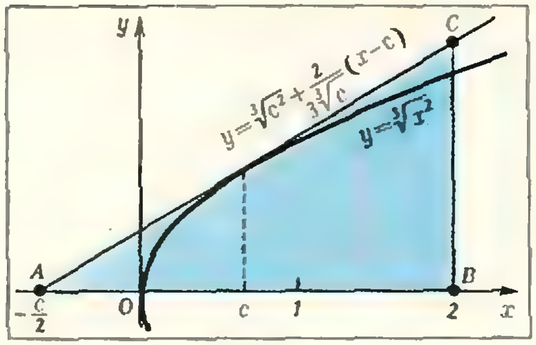


Рис. 2.

$=\frac{1}{2}\left(2+\frac{c}{2}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{c^2}+\frac{2}{3\sqrt[3]{c}}(2-c)\right)=$ $=\frac{(c+4)^2}{12\sqrt[3]{c}}$. Поскольку $S'(c)=\frac{1}{36}c^{-\frac{4}{3}}(c+4)\times$ $\times(5c-4)$ при $c>0$, на промежутке $]0;+\infty[$ функция $S(c)$ имеет только одну критическую точку $c=\frac{4}{5}$, причем $S'(c)<0$ при $0<c<\frac{4}{5}$ (функция убывает) и $S'(c)>0$ при $c>\frac{4}{5}$ (функция возрастает). Кроме того, функция $S(c)$ непрерывна при $c=\frac{4}{5}$. Поэтому на отрезке $\left[\frac{1}{2};1\right]$ функция $S(c)$ принимает наименьшее значение при $c=\frac{4}{5}$; $S\left(\frac{4}{5}\right)=$ $=\sqrt[3]{\frac{5}{4}}\cdot\frac{48}{25}$. Многие абитуриенты не справились с этой задачей из-за ошибок, допущенных ими в вычислениях и преобразованиях. Значительная часть ошибок, допущенных при ее решении, связана с формальным усвоением соответствующих разделов школьной программы. Многие абитуриенты не смогли правильно объяснить, почему точка $c=\frac{4}{5}$ является точкой, в которой функция $S(c)$ принимает наименьшее значение на отрезке $\left[\frac{1}{2};1\right]$. Некоторые путали понятия «наименьшее значение» и «точка минимума».

5. Ответ. $a=2$.

Решение. Левая часть данного неравенства определена при $a\in]0;1[\bigcup]1;+\infty[$.

Пусть сначала $a>1$. Перейдя в первом логарифме к основанию 3 и умножая обе части неравенства на $\log_3\frac{1}{a}<0$, получим равносильное неравенство

$\log_3(\sqrt{x^2+ax+5}+1)\cdot\log_5(x^2+ax+6)\leqslant 1$.

Здесь мы использовали тот факт, что $\log_a 3\cdot\log_3\frac{1}{a}=-1$. Пусть $u=x^2+ax+5$. Тогда последнее неравенство перепишется в виде

$$\log_3(\sqrt{u}+1)\cdot\log_5(u+1)\leqslant 1.$$

Функция $f(u)=\log_3(\sqrt{u}+1)\cdot\log_5(u+1)$ определена и возрастает на $[0;+\infty[$. Заметим, что $f(4)=1$. Поэтому $f(u)\leqslant 1$ тогда и только тогда, когда $0\leqslant u\leqslant 4$. Следовательно, исходное неравенство равносильно системе неравенств

$$0\leqslant x^2+ax+5\leqslant 4.$$

Решая эту систему, получим

1) $\left[\frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2};\frac{-a-\sqrt{a^2-20}}{2}\right]\cup$ $\cup\left[\frac{-a+\sqrt{a^2-20}}{2};\frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right]$,

если $a^2-20\geqslant 0$

2) $\left[\frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2};\frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right]$,

если $\begin{cases}a^2-4\geqslant 0\\a^2-20<0.\end{cases}$

3) Решений нет, если $a^2-4<0$.

Таким образом, система имеет ровно одно решение, если $a^2-4=0$. Учитывая, что $a>1$, получаем $a=2$.

Если $0<a<1$, то исходное неравенство равносильно неравенству

$\log_3(\sqrt{x^2+ax+5}+1)\cdot\log_5(x^2+ax+6)\geqslant 1$,

которое в свою очередь равносильно неравенству

$$x^2+ax+5\geqslant 4.$$

Последнее неравенство при любом a имеет бесконечно много решений; поэтому никакие a из рассматриваемого промежутка условию задачи не удовлетворяют.

С этой задачей большинство абитуриентов не справилось.

Вариант 2

(механико-математический факультет)

1. Найти все значения x, удовлетворяющие условию

$$(9-x^2)\sqrt{2-x}=0.$$

2. Найти все решения уравнения

$$\sin x=\sqrt{5}\cos\frac{x}{2}.$$

3. Окружность радиуса 3, вписанная в треугольник ABC, касается стороны BC в точке D. Окружность радиуса 4 касается продолжения сторон AB и AC и касается стороны BC в точке E. Найти $|ED|$, если величина угла BCA равна $\frac{2}{3}\pi$.

4. Касательная к графику функции $\frac{1}{x^2}$ такова, что абсцисса c точки касания принадлежит отрезку $[5, 9]$. При каком значении c площадь треугольника, ограниченного этой касательной, осью Ox и вертикальной прямой $x=4$, будет наибольшей и чему равна эта наибольшая площадь?

5. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение

$$4^{-|x-a|}\cdot\log_{\sqrt{3}}(x^2-2x+3)+$$
$$+2^{-x^2+2x}\cdot\log_{\frac{1}{3}}(2|x-a|+2)=0$$

имеет ровно три решения.

Вариант 3

(химический факультет)

1. Решить уравнение

$$\log_7\left(\frac{x+3}{21}\right)=\log_7\left(\frac{2}{3x-6}\right).$$

2. Найти все решения уравнения

$$2\cos^2(3x) - \cos(3x) = 0.$$

3. На координатной плоскости рассматриваются прямоугольные треугольники ABC ($ACB = 90°$), у каждого из которых вершина A имеет координаты $(-4;\ 0)$, вершина C лежит на отрезке $[0;\ 4]$ оси Ox, а вершина B лежит на параболе $y = 4x - x^2$. Какие координаты должна иметь вершина B, чтобы площадь прямоугольного треугольника ABC была наибольшей?

4. В равнобедренный треугольник ABC с основанием AC вписана окружность, которая касается боковой стороны AB в точке M. Через точку M проведен перпендикуляр ML к стороне AC треугольника ABC (точка L — основание этого перпендикуляра). Найти величину угла BCA, если известно, что площадь треугольника ABC равна 1, а площадь четырехугольника $LMBC$ равна S.

5. Найти все такие значения a, для каждого из которых число решений относительно x уравнения

$$3(x^2 + a^2) = 1 - (9a^2 - 2)x$$

не превосходит числа решений относительно y уравнения

$$y + (3a - 2)^2 3^y = (8^a - 4)\log_3\left(3^a - \frac{1}{2}\right) - 3y^3.$$

Вариант 4

(биологический факультет)

1. Решить уравнение

$$1 + 2\cos 3x \cos x - \cos 2x = 0.$$

2. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 10$ на отрезке $[-5;\ 4]$.

3. Решить неравенство

$$\sqrt{-x^2 + 6x - 5} > 8 - 2x.$$

4. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 26 м. Величина угла ABC равна 120°. Радиус окружности, вписанной в треугольник BCD, равен $\sqrt{3}$ м. Найти длины сторон параллелограмма, если известно, что длина стороны AD больше длины стороны AB.

5. Найти все те решения уравнения

$$3\sin^3 x - 3\cos^2 x + 7\sin x - \cos 2x + 1 = 0,$$

которые являются также решениями уравнения

$$\cos^2 x + 3\cos x \sin 2x - 8\sin x = 0.$$

Вариант 5

(факультет почвоведения)

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = 6, \\ x^3 - y^3 = 126. \end{cases}$$

2. Найти все значения x, при которых производная функции

$$y = 4x - \sin 2x + 4\sqrt{2}\cos x$$

равна нулю.

3. Хорды AB и AC имеют одинаковую длину. Величина образованного ими вписанного в окружность угла равна $\frac{\pi}{6}$. Найти отношение площади той части круга, которая заключена в этом угле, к площади всего круга.

4. Решить неравенство

$$(4x^2 - 16x + 7)\log_2(x - 3) > 0.$$

Вариант 6

(географический факультет)

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и параболой

$$y = -2(x - 1)^2 + 8.$$

2. Решить уравнение

$$\log_{x-1} 3 = 2.$$

3. В правильную шестиугольную пирамиду вписан прямой конус и около нее описан прямой конус. Даны высота пирамиды H и радиус основания описанного конуса R. Найти разность объемов описанного и вписанного конусов.

4. Решить уравнение

$$\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{15}{8}\cos 2x - \frac{1}{2}.$$

5. Найти все пары чисел $(x;\ y)$ удовлетворяющие условиям $x < 0$, $y > 0$ и системе

$$\begin{cases} \left|y + \dfrac{1}{x}\right| + \left|\dfrac{13}{6} + x - y\right| = \dfrac{13}{6} + x + \dfrac{1}{x}, \\ x^2 + y^2 = \dfrac{97}{36}. \end{cases}$$

Вариант 7

(экономический факультет, отделение политической экономии)

1. Решить уравнение

$$\log_2\left(\frac{1}{|x-1| - 1}\right) = 1.$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной четырьмя линиями: $y = -x^2 + x + 2$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 1$.

3. На плоскости даны две окружности радиусов 12 см и 7 см с центрами в точках O_1 и O_2, касающиеся некоторой прямой в точках M_1 и M_2 и лежащие по одну сторону от этой прямой. Отношение длины отрезка M_1M_2 к длине отрезка O_1O_2 равно $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. Вычислить длину отрезка M_1M_2.

4. Имеются два сплава, состоящие из цинка, меди и олова. Известно, что первый сплав содержит 40% олова, а второй — 26% меди. Процентное содержание цинка в первом и втором сплавах одинаково. Сплавив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 30% цинка. Определить, сколько кг олова содержится в получившемся новом сплаве.

5. Найти все целые значения параметра k, при каждом из которых уравнение

$$5 - 4\sin^2 x - 8\cos^2\frac{x}{2} = 3k$$

имеет решение. Найти все эти решения.

Вариант 8

(экономический факультет, отделение планирования и экономической кибернетики)

1. Решить неравенство

$$\log_5(26 - 3^x) > 2.$$

2. В прямоугольный треугольник, периметр которого равен 36 см, вписана окружность. Точка касания с окружностью делит гипотенузу в отношении 2:3. Найти длины сторон треугольника.

3. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3x^2+2xy-9x-4y+6=0, \\ 5x^2+2xy-12x-4y+4=0. \end{cases}$$

4. На отрезке $\left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right]$ найти наибольшее значение функции

$$y=5\cos x-\cos 5x.$$

5. На прямой дороге расположены последовательно пункты A, B, C, D. Расстояния от пункта A до пунктов B, C и D находятся в отношении 1:2:4. В направлении от A к D по дороге через равные промежутки времени с одной и той же скоростью едут автобусы. Из A в D вышли в разное время три пешехода и пошли по дороге с одной и той же скоростью. Первого пешехода в пути между A и B обогнали 3 автобуса. Второго пешехода между A и C обогнали 4 автобуса. Третий пешеход вышел из A и прибыл в D, когда через эти пункты проезжали очередные автобусы. Сколько автобусов обогнали третьего пешехода в пути между A и D?

Вариант 9

(факультет психологии)

1. Решить уравнение

$$(\sqrt{3})^{\operatorname{tg} 2x}-\frac{3\sqrt{3}}{3^{\operatorname{tg} 2x}}=0.$$

2. Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2u+v=7, \\ |u-v|=2. \end{cases}$$

3. В прямоугольном треугольнике ABC угол A прямой, величина угла B равна 30°, а радиус вписанной окружности равен $\sqrt{3}$. Найти расстояние от вершины C до точки касания вписанной окружности и катета AB.

4. Вычислить площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной к графику функции $y=\frac{x}{2x-1}$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

5. Доказать, что для любых действительных чисел p и t справедливо неравенство

$$2(2p-1)^4+1+[1-2(2p-1)^4]\sin 2t>0,$$

и найти все пары чисел $(p,\ t)$, для которых это неравенство превращается в равенство.

И. Мельников,
А. Мищенко

Физика

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. В системе, изображенной на рисунке 3, грузы с массами m_1 и m_2 лежат на гладкой горизонтальной плоскости. Невесомая и нерастяжимая нить, соединяющая грузы, перекинута через невесомые блоки. Трение в осях блоков отсутствует. В определенный момент времени на ось верхнего блока начинают действовать силой $\vec{F}$, направленной вертикально вверх. Найдите зависимость проекции и относительной скорости грузов от времени.

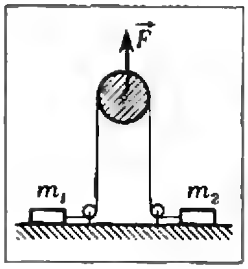


Рис. 3.

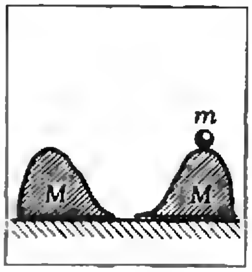


Рис. 4.

2. Два конькобежца с массами $m_1=40$ кг и $m_2=60$ кг встали на лед друг против друга, держась за легкий шнур и слегка натянув его. Затем один из них начинает укорачивать шнур, наматывая его на руку. Какую работу A он совершит к тому моменту, когда будет выбирать шнур со скоростью $|\vec{v}|=2$ м/с? Трением о лед пренебречь. Укорачивание шнура происходит при постоянном натяжении.

3. На гладкой горизонтальной плоскости на некотором расстоянии друг от друга стоят две одинаковые гладкие горки массой M и высотой H (рис. 4). На вершине одной из них находится небольшое тело массой m. После легкого толчка тело соскальзывает с этой горки и поднимается на другую. На какую максимальную высоту h поднимется тело по второй горке?

4. Камеру объемом $V=10$ л наполнили сухим воздухом при нормальных условиях и, закрыв после введения $M=3$ г воды, нагрели до $t=100°$ С. Определите давление p в камере.

5. Идеальный газ массой m, находящийся при температуре T_0, охлаждается изохорически так, что давление падает в k раз. Затем газ расширяется изобарически, пока его температура не станет равной первоначальной. Определите работу газа A. Молярная масса газа равна μ.

6. В цилиндр объемом V с теплонепроницаемыми стенками, заполненный газом с молярной массой μ, находящимся при температуре T и давлении p, внесен медный шар малого объема массой M при температуре T_1. Какая температура T_2 установится в цилиндре, если удельная теплоемкость газа равна c, а меди — c_1?

7. Определите заряд q конденсатора емкостью $C=3$ мкФ (рис. 5). Внутренним сопротивлением батарей пренебречь. $\mathcal{E}=2$ В.

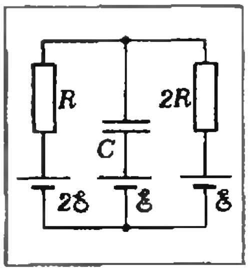


Рис. 5.

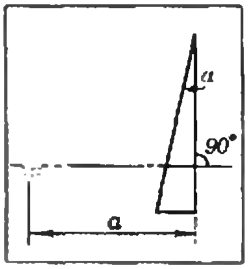


Рис. 6.

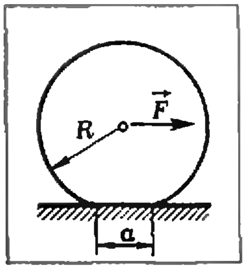


Рис. 7.

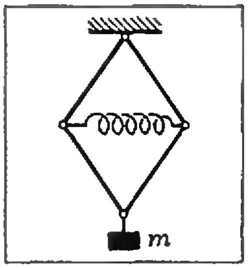


Рис. 8.

8. На отстоящие друг от друга на расстояние $a=10$ см горизонтальные рельсы положен медный стержень, который может катиться вдоль них. Рельсы подключены к батарее с ЭДС $\mathscr{E}=3$ В и внутренним сопротивлением $r=5$ Ом; перпендикулярно к плоскости рельсов создано магнитное поле. Определите индукцию $|\vec{B}|$ поля, при которой стержень будет двигаться с наибольшей установившейся скоростью, и эту скорость $|\vec{v}_{\max}|$. Сопротивлением рельсов и стержня пренебречь; силу сопротивления движению стержня считать равной $|\vec{F}|=0,06$ Н ($\vec{F}$ — механическая сила).

9. Прямоугольный стеклянный сосуд наполнен жидкостью и освещается снизу маленькой лампочкой, расположенной под сосудом вблизи его дна. Каково минимальное значение показателя преломления жидкости $n_{\min}$, при котором лампочку нельзя увидеть сквозь боковые стенки сосуда?

10. На какую величину x смещается изображение малого предмета относительно самого предмета при рассматривании его через тонкую призму с малым преломляющим углом α (рис. 6)? Расстояние между предметом и призмой равно a, показатель преломления стекла призмы равен n. Лучи на призму падают под малыми углами.

Механико-математический факультет и факультет вычислительной математики и кибернетики

1. Поезд массой $M=1000$ т двигался равномерно по горизонтальному пути. От поезда отцепилась часть вагонов массой $m=100$ т. По какому закону будет изменяться со временем расстояние s между частями состава (до остановки отцепившейся части состава)? Тяга локомотива остается постоянной, коэффициент трения $\mu=5\cdot10^{-3}$, ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2.

2. На колесе радиусом $R=10$ см имеется плоская часть длиной $a=1$ см (рис. 7). При какой величине коэффициента трения μ колесо будет скользить, а не катиться по гладкой горизонтальной поверхности, если его плавно тянуть за ось вращения?

3. Система, изображенная на рисунке 8, состоит из четырех шарнирно соединенных одинаковых невесомых стержней и невесомой пружины. В ненагруженном состоянии ($m=0$) стержни образуют квадрат и длина пружины $l=9,8$ см. При подвешивании к нижнему шарниру груза массой $m=500$ г острый угол между стержнями $\alpha=60°$. Найдите коэффициент жесткости пружины k, считая ускорение свободного падения $g=9,8$ м/с^2.

4. Два одинаковых сосуда соединены трубкой с краном. В первом сосуде находится 1 моль идеального одноатомного газа при давлении $p=100$ кПа и температуре $t_1=27°$ С. В другом — такой же газ при том же давлении и температуре $t_2=227°$ С. Кран открыли и температуры газов выравнялись. Какое давление p' установится в системе? Теплообменом с окружающей средой можно пренебречь.

5. Два металлических шара с радиусами $r_1=0,01$ м и $r_2=0,05$ м находятся друг от друга на расстоянии много большем их радиусов. Шары несут заряды $q_1=8\cdot10^{-8}$ Кл и $q_2=4\cdot10^{-8}$ Кл соответственно. Их поместили в жидкий диэлектрик и измерили силу взаимодействия. Затем шары извлекли из диэлектрика, соединили проводником на короткое время и вновь измерили силу взаимодействия. Она осталась неизменной. Найдите диэлектрическую проницаемость ε диэлектрика.

6. Чему равно сопротивление $R_ц$ цепи между точками A и B, если она составлена из одинаковых элементов, сопротивление каждого из которых равно R? Варианты соединения элементов показаны на рисунках 9,*а* и *б*.

7. Электрическая цепь имеет форму окружности радиусом $R=0,5$ м (рис. 10). Четыре гальванических элемента с ЭДС $\mathscr{E}_1=2$В, $\mathscr{E}_2=4$ В, $\mathscr{E}_3=3$ В и $\mathscr{E}_4=5$ В соединены последовательно друг с другом и имеют внутренние сопротивления $r_1=1$ Ом, $r_2=2$ Ом, $r_3=1$ Ом, $r_4=0,5$ Ом соответственно. Однородное магнитное поле перпендикулярно к плоскости цепи, направлено за чертеж и возрастает со временем по закону $|\vec{B}|=kt$, где $k=4$Тл/с. Чему равна сила тока I в цепи? Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

8. Какова глубина бассейна H, если человек, глядя под углом $\alpha=30°$ к поверхности

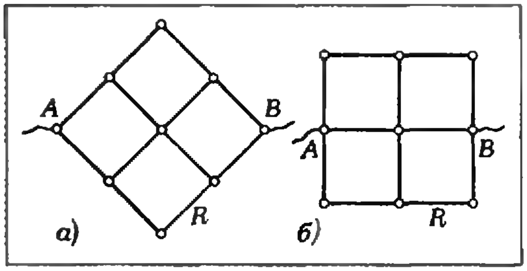


Рис. 9.

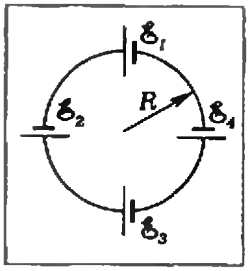


Рис. 10.

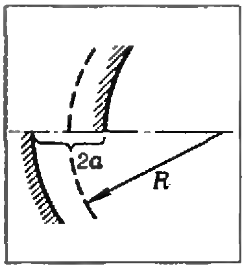


Рис. 11.

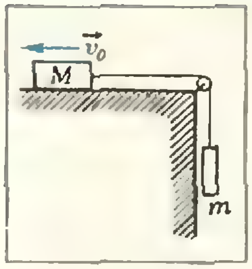


Рис. 12.

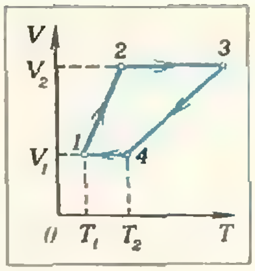


Рис. 13.

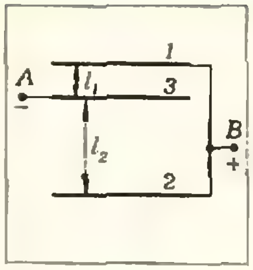


Рис. 14.

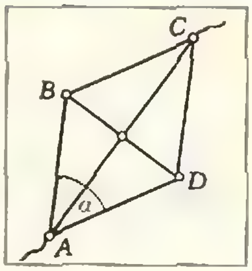


Рис. 15.

воды, видит монету лежащей на дне на расстоянии $l=0{,}5$ м дальше от себя, чем она есть на самом деле? Показатель преломления воды $n=1{,}3$.

9. В фокусе вогнутого сферического зеркала радиусом $R=0{,}3$ м расположен точечный источник света. Зеркало разрезают пополам плоскостью, в которой лежит главная оптическая ось, и симметрично раздвигают полученные половинки на расстояние $2a=20$ см вдоль плоскости разреза (рис. 11). Определите расстояние s между изображениями источника в верхней и нижней частях зеркала.

10. На главной оптической оси перед рассеивающей линзой с фокусным расстоянием $F=20$ см расположен источник света. По другую сторону линзы перпендикулярно главной оптической оси линзы расположено плоское зеркало. Найдите расстояние s между источником и его изображением в зеркале. Источник удален от зеркала на расстояние $L=1$ м, а от линзы — на расстояние $l=30$ см.

Географический, геологический и химический факультеты, факультет почвоведения

1. Расстояние между двумя железнодорожными станциями, равное $s=18$ км, поезд проходит за время $t=20$ мин. Первые $t_1=5$ мин он идет равноускоренно (без начальной скорости), а затем — равнозамедленно, пока не остановится. Определите ускорение поезда на пути разгона.

2. На гладком горизонтальном столе лежит брусок массой $M=300$ г. (рис. 12). На краю стола укреплен невесомый блок, способный вращаться без трения. Брусок связан нитью, перекинутой через блок, с телом массой $m=100$ г. Начальная скорость $\vec{v}_0$ бруска направлена от блока и равна $|\vec{v}_0|=4{,}9$ м/с. Определите следующие величины через время $t=4$ с после начала движения бруска: 1) модуль и направление скорости $\vec{v}$ бруска; 2) расстояние s бруска от его начального положения.

3. Частота малых колебаний математического маятника в лифте, спускающемся с постоянной скоростью, равна $\nu_0=1$ Гц. Чему будет равна частота ν_1 колебаний, если лифт замедляет свое движение с ускорением $a=-9{,}8$ м/с^2? Ускорение свободного падения тел считать равным $g=9{,}8$ м/с^2.

4. В латунном цилиндрическом сосуде находится вода. При температуре $t_1=15$° С высота столба воды $h_1=1$ м. На сколько поднимется уровень воды в сосуде, если температура воды и сосуда повысится на $\Delta t=5$° С? Коэффициент объемного расширения воды $\alpha=1{,}5\cdot10^{-4}$ К$^{-1}$, коэффициент линейного расширения латуни $\beta=2\cdot10^{-5}$ К$^{-1}$.

5. В цилиндре тепловой машины находится 1 моль идеального газа. Найдите работу газа A за один цикл, диаграмма которого показана на рисунке 13.

6. Конденсатор составлен из трех плоских параллельных прямоугольных пластин, как показано на рисунке 14. Расстояния между пластинами $l_1=1$ мм и $l_2=10$ мм. Площадь пластин $S=500$ см^2. Определите заряд q на средней пластине, если разность потенциалов между точками A и B $U=100$ В. Пространство между пластинами заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=2$. Электрическая постоянная $\varepsilon_0=8{,}85\times10^{-12}$ ф/м.

7. Электрическая цепь представляет собой ромб с двумя диагоналями, изготовленный из одинаковых проволочек (рис. 15). Угол $\gamma=60$°. Цепь в точках A и C подключена к источнику с напряжением $U=100$ В. Определите количество теплоты q, выделяемое в единицу времени в каждой из проволочек: AB, BC, CD, AD, BD и AC. Сопротивление стороны ромба $R=250$ Ом.

8. Аккумулятор, имеющий ЭДС $\mathcal{E}_1=12$ В, заряжается от источника с ЭДС $\mathcal{E}=18$ В через лампу накаливания, потребляющую при этом мощность $P=24$ Вт. Какое время t будет заряжаться аккумулятор, если его емкость $C=40$ ампер-часов? Внутренними сопротивлениями источника и аккумулятора пренебречь.

9. Два плоских зеркала образуют двугранный прямой угол. Луч света падает на одно из зеркал под углом $\alpha=\pi/6$ на расстоянии $a=20$ см от ребра угла. Плоскость падения перпендикулярна ребру. Определите расстояние x между падающим и выходящим (после двукратного отражения) лучами.

10. Точечный источник света помещен на главной оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F=10$ см на расстоянии $d=30$ см от линзы. Линза сместилась в направлении, перпендикулярном своей оптической оси, на расстояние $a=2$ см. На какое расстояние x сместилось при этом изображение источника?

Заочная школа программирования

Урок 14: Работа с графами

На страницах «Кванта» за последние годы много раз публиковались статьи о графах и связанных с ними математических задачах. Почти в каждой статье говорилось, что для решения таких задач широко используются вычислительные машины. Сегодня мы рассказываем о том, как работать с графами на ЭВМ, используя возможности языка Рапира.

Учащиеся ЗШП, не знакомые с основными определениями теории графов, могут их прочитать в статье В. Евстигнеева на с. 18 этого номера*).

Нагруженные графы

Структура самых разнообразных систем, с которыми приходится иметь дело на практике, может быть описана при помощи графов. Очень часто встречаются задачи, в условиях которых нужно учитывать не только наличие связей между элементами системы, но и свойства этих связей, а также свойства самих элементов. Для описания условий таких задач приходится «нагружать» графы, то есть ставить в соответствие их ребрам или вершинам (а иногда и тем, и другим) какие-то числа, тексты или другие объекты. Например, если систему дорог Шпаговского сельсовета (рис. 1, *а*) нужно представить в виде графа и не потерять при этом информацию о длине каждой дороги, то получится граф с нагруженными ребрами (рис. 1, *б*).

Задание 14.1. *Изобразите в виде нагруженного графа схему авиалиний между столицами союзных республик СССР с указанием расстояний.*

Графы в памяти ЭВМ

Если в ходе решения задачи вам понадобится записать в память ЭВМ несколько множеств и выполнить над ними обычные математические опе-

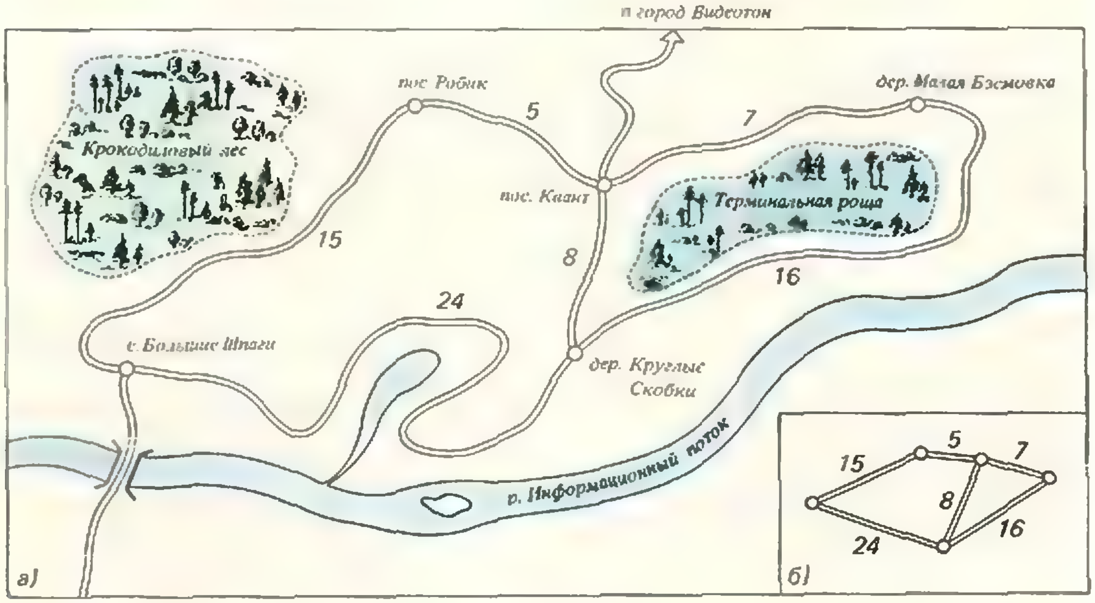


Рис. 1.

---

*) Для выполнения заданий 14-го урока нет необходимости читать всю указанную статью; нужны только основные определения, данные в начале. Однако мы очень советуем учащимся ЗШП прочитать и подробно разобрать статью целиком.

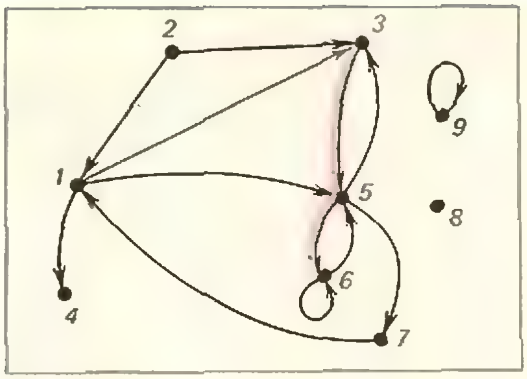


Рис. 2.

рации, то на языке Рапира вы сумеете это сделать без труда. Но специальных средств для работы с графами на Рапире нет, поэтому способ описания графа на этом языке программирования нужно придумать самим.

Посмотрим, что должна помнить машина, чтобы знать об ориентированном графе все, что нужно для решения задач. Во-первых, она должна помнить множество вершин. Для этого, конечно, нужно как-то обозначить каждую вершину, например, занумеровать, как на рисунке 2. Во-вторых, необходимо помнить, где начинается и где заканчивается каждая дуга. Чаще всего дугу описывают при помощи кортежа, составленного из обозначений ее начальной и конечной вершин. Например, на том же рисунке дугу, связывающую вершины 1 и 5, можно описать кортежем ⟨1,5⟩.

Информацию о всех дугах орграфа можно запомнить в виде множества, составленного из таких кортежей. Наконец, кортеж, составленный из двух описанных множеств — множества вершин и множества дуг,— это и есть полное описание орграфа на Рапире. Например, орграф, изображенный на рисунке 2, может быть описан так:

```
⟨⟨*1,2,3,4,5,6,7*⟩,
⟨*⟨1,3⟩,⟨1,5⟩,⟨1,4⟩,⟨2,1⟩,
  ⟨2,3⟩,⟨3,5⟩,⟨5,3⟩,⟨5,6⟩,
  ⟨5,7⟩,⟨6,5⟩,⟨6,6⟩,⟨7,1⟩*⟩⟩.
```

Задание 14.2. *Нарисуйте ориентированный граф, описание которого на Рапире выглядит так:*

```
⟨⟨*1,2,3,4,5,6*⟩,⟨*⟨1,4⟩,⟨2,1⟩,
  ⟨3,1⟩,⟨3,2⟩,⟨3,4⟩,⟨3,5⟩,⟨4,5⟩,
  ⟨5,6⟩,⟨6,2⟩,⟨6,3⟩*⟩⟩.
```

Если нужно описать орграф с нагруженными дугами, то в кортежах, описывающих дуги, появляется третий элемент — значение нагрузки.

Задание 14.3. *Граф* БУКОВКИ *описан на Рапире так:*

```
⟨⟨* 1,2,3,4,5,6*⟩,
 ⟨*⟨1,2,'T'⟩,⟨2,3,'P'⟩,⟨2,5'K'⟩,⟨3,5,'A'⟩,
⟨4,1,'H'⟩,⟨4,4,'T'⟩,⟨5,6,'B'⟩,⟨6,4,'A'⟩*⟩⟩
—>БУКОВКИ;
```

Нагрузкой каждой дуги является текст. Двигаясь вдоль любого пути в графе и выписывая подряд соответствующие дугам тексты, можно получать различные слова.

а) *Какой текст соответствует пути, проходящему через вершины 2,5, 6,4,1,2?*

б) *По какому пути нужно двигаться, чтобы получилось слово* ВАТА?

в) *Существует ли в графе путь, двигаясь вдоль которого можно было бы получить слово* РАК? *Слово* ТРАВА?

Для того чтобы облегчить ввод сведений о графе в память ЭВМ, удобно описать функцию, которая будет запрашивать в диалоговом режиме все нужные сведения. Для ориентированного графа с занумерованными вершинами и дугами с числовой нагрузкой эта функция могла бы выглядеть так:

```
ПРОЦ ЗАПРОС=>ГРАФ;
   ⟨**⟩ —>ВЕРШИНЫ;⟨**⟩ —>ДУГИ;
   ПЕЧАТЬ('СКОЛЬКО ВЕРШИН В
   ГРАФЕ?');
   ВВОД(1)—>ЧИСВЕР;1—>НОМВЕР;
   ПОКА НОМВЕР=<ЧИСВЕР::
     ВЕРШИНЫ+⟨*НОМВЕР*⟩
     —>ВЕРШИНЫ;
     НОМВЕР+1—>НОМВЕР
   ВСЕ;
   'ДА'—>ПРОДОЛЖЕНИЕ;
   ПОКА ПРОДОЛЖЕНИЕ='ДА'::
     ПЕЧАТЬ('НАЗОВИТЕ НАЧАЛЬНУЮ
     ВЕРШИНУ');
     ВВОД(1)—>НАЧВЕР;
     ПЕЧАТЬ('НАЗОВИТЕ   КОНЕЧНУЮ
     ВЕРШИНУ');
     ВВОД(1)—>КОНВЕР;
     ПЕЧАТЬ('НАЗОВИТЕ  НАГРУЗКУ');
     ВВОД(1)—>НАГРУЗКА;
     ЕСЛИ (НАЧВЕР ИЗ ВЕРШИНЫ)
     И (КОНВЕР ИЗ ВЕРШИНЫ) ТО
        ДУГИ+⟨*⟨НАЧВЕР,КОНВЕР,
        НАГРУЗКА⟩*⟩—>ДУГИ;
        ПЕЧАТЬ('ЕСТЬ ЛИ ЕЩЕ
        ДУГИ?');
        ВВОД(0)—>ПРОДОЛЖЕНИЕ
```

```
          ИНАЧЕ ПЕЧАТЬ('ОШИБКА
          В НОМЕРЕ ВЕРШИНЫ')
          ВСЕ
          ВСЕ;
   (ВЕРШИНЫ, ДУГИ)—>ГРАФ
КНЦ.
```

Задание 14.4 *Придумать способ хранения в памяти машины сведений о графе с нагруженными вершинами и описать функцию для диалогового ввода сведений о таком графе.*

Простейшие задачи

В ориентированных графах *степенью входа* называется число входящих в вершину дуг, *степенью выхода* — число выходящих дуг. Сумма этих двух чисел называется *полной степенью* вершины. Вершина называется *источником*, если ее степень входа равна нулю, *стоком*, если нулю равна степень выхода, и *изолированной*, если ее полная степень равна нулю. Так, на рисунке 2 имеется ровно один сток (вершина 4), один источник (2) и одна изолированная вершина (8; вершина 9 не считается изолированной, ибо ее полная степень равна двум).

Будем считать, что кортеж ГРАФ содержит сведения об ориентированном графе с нагруженными дугами (нагрузка каждой дуги — натуральное число). Попробуем составить программы для решения некоторых задач, связанных с этим графом.

Задача 1. Найти все источники, стоки и изолированные вершины.

Алгоритм решения очевиден: для каждой вершины подсчитываем ее степень входа и степень выхода. Для этого просматриваем все дуги и находим те, которые начинаются или заканчиваются в этой вершине;

```
ДЛЯ ВЕРШ ИЗ ГРАФ[1]::
0—>ВХОД; 0—>ВЫХОД;
ДЛЯ ДУГА ИЗ ГРАФ[2]::
   ЕСЛИ ДУГА[1]=ВЕРШ ТО
   ВЫХОД+1—>ВЫХОД ВСЕ;
   ЕСЛИ ДУГА[2]=ВЕРШ ТО
   ВХОД+1—>ВХОД ВСЕ;
ВСЕ;
ЕСЛИ (ВЫХОД+ВХОД)=0
   ТО ПЕЧАТЬ('ВЕРШИНА',
   ВЕРШ,'—ИЗОЛИРОВАННАЯ')
   ИНАЧЕ
   ЕСЛИ ВЫХОД=0
      ТО ПЕЧАТЬ('ВЕРШИНА',
      ВЕРШ,'—СТОК')
      ИНАЧЕ ЕСЛИ ВЫХОД=0
         ТО ПЕЧАТЬ('ВЕРШИНА',
         ВЕРШ,'—ИСТОЧНИК')
      ВСЕ ВСЕ ВСЕ;
ВСЕ;
```

Задание 14.5. *Составить программу, которая для каждой вершины отпечатает ее степень входа, степень выхода и полную степень.*

Задача 2. Путь в графе задан кортежем вершин под названием ПУТЬ. Найти полную нагрузку пути, то есть сумму нагрузок по всем его дугам.

Программа, решающая эту задачу, может выглядеть так:

```
0—>СУММА; 1—>НОМЕР;
ПОКА НОМЕР <(#ПУТЬ)::
   0—>КОНТРОЛЬ;,
   ДЛЯ ДУГА ИЗ ГРАФ[2]::
      ЕСЛИ   ДУГА[1]=ПУТЬ[НОМЕР])
      И(ДУГА[2]=ПУТЬ[НОМЕР+1])
      ТО   СУММА+ДУГА[3]—>СУММА;
      КОНТРОЛЬ+1—>КОНТРОЛЬ
      ВСЕ
    ВСЕ;
    ЕСЛИ КОНТРОЛЬ=0
      ТО ПЕЧАТЬ('ОШИБКА!
      ПУТИ НЕ СУЩЕСТВУЕТ');
      #ПУТЬ—>НОМЕР
      ИНАЧЕ НОМЕР+1—>НОМЕР
    ВСЕ
ВСЕ;
ЕСЛИ КОНТРОЛЬ =0 ТО
    ПЕЧАТЬ('ПОЛНАЯ НАГРУЗКА
    РАВНА',СУММА);
ВСЕ;
```

Задание 14.6. *Поясните, как поведет себя эта программа, если некоторые из вершин в графе соединены несколькими дугами?*

Задание 14.7. *Описать на Робике функцию для построения множества вершин, в которые можно попасть из данной вершины за один шаг (то есть двигаясь по одной дуге).*

И в заключение — несколько заданий повышенной трудности.

Задание 14.8. *Указать алгоритм для нахождения множества вершин, в которые можно попасть из данной вершины*

а) *не более чем за N шагов;*

б) *за какое-нибудь число шагов.*

Задание 14.9. *Составить программу для отыскания кратчайшего пути между двумя заданными вершинами* (то есть пути с наименьшей полной нагрузкой — см. задачу 2).

Г. Звенигородский

Отдых и занятия наукой

На южном берегу Крыма, между Ялтой и Алуштой, расположились многочисленные корпуса Всесоюзного пионерского лагеря Артек. В эту своеобразную пионерскую республику приезжают ребята из разных концов нашей страны. Здесь они отдыхают, набираются сил и здоровья, приобретают навыки, необходимые для успешной работы в своих школьных пионерских отрядах и дружинах, разучивают новые песни, учатся танцевать, принимают участие в спортивных соревнованиях.

Однако пребывание в Артеке это не только активный отдых, но и приобщение к новым знаниям. Для этого в лагере созданы все необходимые условия. Развернуты превосходные, содержательные выставки, действуют различные музеи, созданы прекрасно оснащенные кабинеты для работы научно-технических кружков.

Летние смены в Артеке длятся 30 дней, зимние — 40. Жизнь юных артековцев насыщена множеством интересных повседневных дел. К тому же — экскурсии, поездки по памятным и историческим местам Крыма, морские прогулки. В этих условиях на кружковые занятия удается выделить не так уж много времени: пять полуторачасовых занятий в летний период и восемь в зимний. Естественно, перед руководителями кружковой работы встал вопрос: как ее построить? За несколько часов радиоэлектронике, электронно-вычислительной технике, фотографированию или методам астрономических наблюдений обучить невозможно. Нельзя за такой короткий срок и сообщить ребятам сколько-нибудь систематизированные знания. Стоит ли тогда вообще проводить кружковую работу?

В Артеке твердо решили — стоит. И цель кружковой работы была определена так: дать представление, заинтересовать, предоставить возможность непосредственно прикоснуться к тому, что составляет существо данной области науки и техники.

Как выглядит осуществление этой цели на практике? Вместе с заведующим отделом кружковой работы Артека Н. И. Первухиным мы поднимаемся на второй этаж Дома пионерской учебы в лабораторию вычислительной техники. Идет очередное занятие. За столом человек двадцать ребят, перед ними разнообразные вычислительные устройства. У доски с куском мела в руке руководитель кружка кандидат технических наук Е. В. Кадушкин. Он охотно знакомит нас с программой кружковых занятий и особенностями их проведения.

Начинаются они с того, что ребята, решившие заниматься в кружке вычислительной техники, знакомятся с историей ее развития, ролью в современной науке и народном хозяйстве, а также с основными типами вычислительных устройств — от арифмометров до электронно-вычислительных машин.

Затем ребятам рассказывается о двоичной системе счисления и основных арифметических операциях, осуществляемых в этой системе. Теоретические занятия сопровождаются практическими: кружковцы учатся самостоятельно выполнять арифметические операции на различных вычислительных устройствах.

Следующий этап — знакомство с принципами работы ЭВМ и их основных блоков, а также с порядком выполнения команд и различными способами ввода и вывода информации. Сопутствующая практическая работа — вычисления на электронно-клавишных вычислительных машинах с использованием памяти.

В заключение членам кружка дается представление об алгоритмах и принципах программирования, о машинном языке. В качестве практического примера составляются алгоритм и программа для решения задачи извлечения квадратного корня из любого числа с заданной точностью. Это занятие завершается практической работой — решением оригинальных примеров на электронно-клавишных вычислительных машинах (ЭКВМ).

Вообще каждое занятие кружка строится приблизительно так: вводная теоретическая часть, игровая часть, когда руководитель разбирает с кружковцами ряд интересных математических примеров и шуток, и практическая работа.

По аналогичному принципу строятся и занятия кружка радиоэлектроники, которым руководит А. М. Пожарский. Только здесь еще большее значение придается самостоятельной практической работе. Это не случайно — тот, кто всерьез интересуется радиоэлектроникой, должен дружить с паяльником, хорошо знать основные требования безопасности при работе с инструментами, разбираться в различных деталях, уметь читать и собирать современные схемы.

Кружковцы знакомятся с основными сведениями о современной радиоэлектронике и ее теоретических основах, успевают на занятиях кружка подержать в руках различные радиодетали, собрать простейший телефон с угольным микрофоном, смонтировать сначала детекторный, потом транзисторный приемник, а затем и такие электронные устройства как триггер, мультивибратор и реле времени.

Отличительной особенностью всех научно-технических кружков Артека является конкурсный характер заключительного занятия. В частности, члены кружка вычислительной техники участвуют в конкурсе на быстрое, правильное решение оригинальных примеров на ЭКВМ, а члены кружка радиоэлектроники — на скоростную сборку предложенного руководителем радиоэлектронного устройства. Победители конкурса и активные кружковцы награждаются грамотами и памятными сувенирами.

В. Комаров

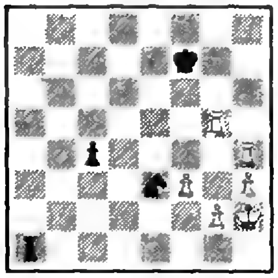
Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку — мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

Майя жертвует коней

В «Кванте» № 9 за 1980 год мы рассказали о четвертьфинальных матчах претендентов среди мужчин. В сегодняшнем, мартовском номере журнала хочется вспомнить, как складывались дела на подступах к шахматному трону у женщин.

Экс-чемпионка мира Н. Гаприндашвили победила Н. Гуриели 6:3. Н. Иоселиани с тем же счетом обыграла Ж. Верещ из Венгрии. В двух других четвертьфиналах Н. Александрия взяла верх над Е. Ахмыловской 5,5:3,5, и М. Литинская — над Т. Лемачко из Болгарии 5,5:2,5.

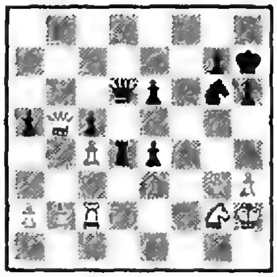
Полуфинальные матчи проходили на редкость напряженно. После восьми партий Нона Гаприндашвили вела 5:3 и ей достаточно было сделать одну ничью. Однако Нана Иоселиани проявила необычайную твердость духа и сравняла счет со своей именитой соперницей — 5:5. Две дополнительные партии заканчиваются вничью. Назначаются еще две, решающие. В 13-й снова ничья. Теперь Ноне необходима победа — она меньше партий выиграла черными и по положению при счете 7:7 выбывает из борьбы. При доигрывании последней партии возникла следующая позиция.



Н. Гаприндашвили — Н. Иоселиани

Перевес белых бесспорен. Быстрее всего вело к цели 1. Лe5 Лc1 2. Лh6, после чего черный король получал линейный мат. Гаприндашвили избирает более спокойный путь: **1.Лf4+ Крe6 2.Лe4+ Крf6 3.Л:e3 Кр:g5.** Здесь легко выигрывало 4.Лe5+ Крf6 5.Лc5 Лc1 6.h4 c3 (6...Крe6 7.h5 Крd6 7.h6!) 7.g4 c2 8.Крg2 и т. д. Однако нервы Ноны не выдерживают, и она вновь действует неточно — **4.h4+ Крf5 5.Лe4 c3 6.g4+ Крf6 7.Лc4 Лc1 8.Крg3 Крe5 9.Лe4+ Крd5 10.Крf4 Лh1 11.Лe5+ Крd4.** Теперь уже выигрыш проблематичен (проанализируйте позицию самостоятельно). Во всяком случае белые его не нашли и через 20 ходов вынуждены были смириться с ничьей.

Исход другого полуфинала, после того как счет стал 3:1 в пользу Александрии, не вызывал сомнения. Но в этот момент Литинская одерживает три победы подряд и выходит вперед. После такого поворота событий трудно устоять, и Нана с трудом спасает следующие две партии. Однако в заключительном поединке она показывает себя замечательным бойцом и сравнивает счет, и затем, воодушевленная успехом, выигрывает обе дополнительные встречи. Вот как эффектно закончился этот матч.



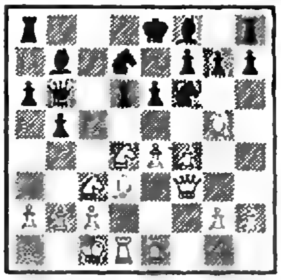
М. Литинская — Н. Александрия

После отступления ладьи позиция еще оставалась острой, однако было сыграно **1...Кe5!,** и Литинская поздравила соперницу с выходом в финал. На 2.ed следует 2...Кf3+ 3.Крh1 Ф:g3, и мат следующим ходом; 2.Кf4 Лd2+ и т. д.; 2.h4 Кf3+ 3.Крh3 Лd1 4.Кf4 Лh1+ 5.Крg4 Фe5.

Удивительны все-таки достижения грузинской шахматной школы. Если в двух предыдущих циклах борьбы за шахматную корону ее судьба решалась в споре грузинских шахматисток, то теперь и финальный матч претенденток стал их внутренним делом! В нем верх взяла Н. Александрия (6,5:2,5).

Звание чемпионки мира по шахматам начало разыгрываться в 1927 году. К сегодняшнему дню на троне побывало шесть шахматных королев: Вера Менчик (1927—1944 г.), Людмила Руденко (1950 г.), Елизавета Быкова (1953, 1958 г.), Ольга Рубцова (1956 г.), Нона Гаприндашвили (1962—1978 г.) и Майя Чибурданидзе (1978 г.).

Пока соперницы Майи выясняли отношения, чемпионка мира участвовала в мужских турнирах. Без преувеличения можно сказать, что ее выступление в полуфинале первенства СССР и в первой лиге сенсационно! В полуфинале она лидировала на протяжении всей длинной дистанции и лишь в последнем, 15-м туре позволила себя обойти. А при удаче она сразу выходила в высшую лигу — самый сильный турнир в нашей стране. Приводим окончание партии, ставшей жемчужиной таллинского полуфинала.



М. Чибурданидзе — С. Двойрис

1.Кd5!! ed 2.Кc6!! С:c6 3.ed+ (не проходит 3...Крd8 4.dc Кc5 5.c7+) **3...Сe7 4.dc Кc5 5.С:f6 gf 6.Сf5! Фc7 7.b4 Кe6 8.Фh5 Кg7 9.Сd7+ Крf8 10. Фh6 d5 11.Л:e7! Кр:e7 12.Лe1+ Крf8 13.Ф:f6 Крg8 14.Лe7 Лf8 15.Сe6! Ф:e7 16.Ф:e7 fe 17.c7 h5 18.Ф:f8+! Черные сдались.** Такой победой мог бы гордиться и Михаил Таль.

О пользе нелепостей

3. Пусть существует такое число M. Тогда $M=21a+1$ и $M=14b+3$, откуда $21a+1=14b+3$, $7(3a-2b)=2$, что невозможно.

9. Нельзя.

Допустим, что можно. Тогда полупериметр песочницы будет равен 5,5 м, но это невозможно, поскольку все доски имеют целочисленные длины.

10. Нельзя.

Допустим, что можно. Тогда существуют такие натуральные числа x, y и z, что

$$\begin{cases} x+3y+5z=20, \\ x+y+z=7. \end{cases}$$

Для выполнения первого равенства необходимо, чтобы нечетное число слагаемых (одно или три) в его левой части были четными; в обоих этих случаях левая часть второго равенства будет числом четным. Следовательно, таких чисел x, y, z не существует, то есть размен невозможен.

Колебания

1. $T=2T_0/3$.

2. $T=2\pi\sqrt{\frac{2m+M}{2k}}$.

3. $T=2\pi\sqrt{\frac{M}{\varrho g(S_1+S_2)}}$.

4. Зависимость тока от времени будет иметь вид

$$i=\frac{I_м}{\sqrt{\varepsilon}}\sin\frac{\omega}{\sqrt{\varepsilon}}\,t.$$

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математика

Вариант 2

1. $\{-3; 2\}$. 2. $x=\pi+2\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$. 3. $|ED|=3\sqrt{3}$. 4. При $c=8$ площадь треугольника будет наибольшей и она равна $\frac{1}{8}$. 5. $\left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right\}$.

Вариант 3

1. $\{4\}$. 2. $x_1=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k$, $x_2=\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi l}{3}$ $(k, l\in\mathbf{Z})$. 3. $B\left(\frac{4}{\sqrt{3}};\ \frac{16}{3}(\sqrt{3}-1)\right)$. Указание. Пусть x — абсцисса точки B. Нужно найти такое x из отрезка $[0; 4]$, при котором площадь треугольника ABC принимает наибольшее значение, то есть принимает наибольшее значение функция $S(x)=\frac{(x+4)(4x-x^2)}{2}$. 4. $\widehat{BCA}=\arccos\sqrt{2(1-S)}$. Указание. Пусть BD — высота треугольника ABC. Из подобия треугольников AML и ABD имеем $\frac{1-S}{\frac{1}{2}}=\frac{S_{AML}}{S_{ABD}}=\frac{|AM|^2}{|AB|^2}=\frac{|AD|^2}{|AB|^2}=\cos^2(\widehat{BAC})=\cos^2(\widehat{BCA})$. 5. $a=\frac{2}{3}$. Указание. Сначала, рассуждением от противного, покажем, что второе уравнение при любом допустимом значении a более одного решения иметь не может. Первое уравнение — квадратное с дискриминантом $(9a^2-4)^2$, и поэтому при всех $a\neq\pm\frac{2}{3}$ имеет два решения. Задача сводится к анализу двух точек $a=-\frac{2}{3}$ и $a=\frac{2}{3}$.

Вариант 4

1. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$ $(n\in\mathbf{Z})$. 2. $\min\limits_{[-5;4]} y(x)=y(-5)=-135$; $\max\limits_{[-5;4]} y(x)=y(-2)=54$.

3. $[3; 5]$. 4. $|AB|=|CD|=5$ м; $|AD|=|BC|=8$ м. Указание. Из треугольника OMC (рис. 1) находим $|MC|=3$ м $=|CN|$, $|BC|+|CD|=13$ м, поэтому $|BD|=|BK|+|KD|=|BM|+|DN|=|BC|-3+|DC|-3=7$ м. По теореме косинусов из треугольника BCD имеем $49=|BD|^2=|BC|^2+|CD|^2-|BC|\cdot|CD|$. Осталось решить систему уравнений

$$\begin{cases} |BC|+|CD|=13, \\ |BC|^2+|CD|^2-|BC|\cdot|CD|=49. \end{cases}$$

5. $x=(-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n$ $(n\in\mathbf{Z})$. Указание. Решения задачи есть решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3\sin^3 x-3\cos^2 x+7\sin x-\cos 2x+1=0, \\ \cos^2 x+3\cos x\cdot\sin 2x-8\sin x=0. \end{cases}$$

После замены $t=\sin x$ получим систему

$$\begin{cases} 3t^3+5t^2+7t-3=0, \\ 6t^3+t^2+2t-1=0, \end{cases}$$

которая равносильна системе

$$\begin{cases} 9t^2+12t-5=0, \\ 6t^3+t^2+2t-1=0. \end{cases}$$

Решением последней системы будет $t=\frac{1}{3}$.

Вариант 5

1. $\{(1; -5), (5; -1)\}$. 2. $x=(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n$

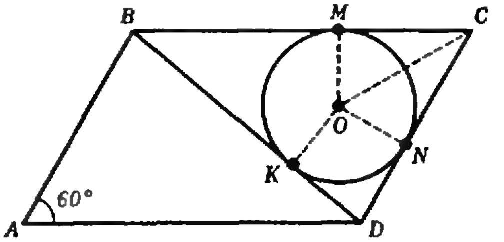


Рис. 1.

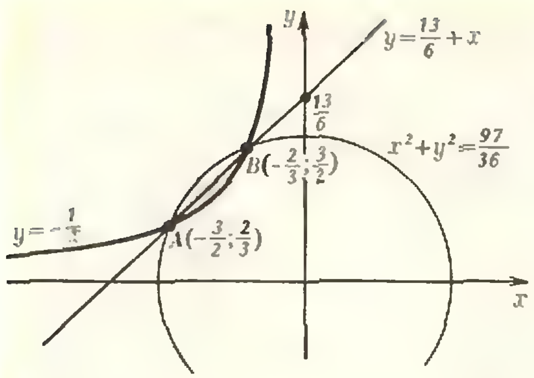


Рис. 2.

$(n\in\mathbf{Z})$. **3.** $\frac{\pi+3}{6\pi}$. **4.** $]3;\frac{7}{2}[\,\cup\,]4;+\infty[$.

Вариант 6

1. $2\frac{1}{3}$. **2.** $\{1+\sqrt{3}\}$. **3.** $\frac{1}{12}\pi HR^2$.

4. $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$ $(n\in\mathbf{Z})$. Указание. Левую часть уравнения разложить как сумму кубов; в результате получится биквадратное уравнение относительно $\sin x$ или $\cos x$.

5. $\left(-\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right)$, $\left(-\frac{3}{2};\frac{2}{3}\right)$. Указание. $|a|+|b|=a+b\Leftrightarrow\begin{cases}a\geqslant 0\\ b\geqslant 0\end{cases}$, поэтому $\left|y+\frac{1}{x}\right|+$

$$+\left|\frac{13}{6}+x-y\right|=\frac{13}{6}+x+\frac{1}{x}\Leftrightarrow\begin{cases}y+\frac{1}{x}\geqslant 0\\ \frac{13}{6}+x-y\geqslant 0.\end{cases}$$

Таким образом, нужно найти все пары чисел $(x;y)$, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases}y+\frac{1}{x}\geqslant 0;\\ \frac{13}{6}+x-y\geqslant 0,\\ x^2+y^2=\frac{97}{36},\\ x<0,\\ y>0.\end{cases}$$

На рисунке 2 закрашена область, удовлетворяющая системе

$$\begin{cases}y+\frac{1}{x}\geqslant 0,\\ \frac{13}{6}+x-y\geqslant 0,\\ x<0,\\ y>0.\end{cases}$$

Вариант 7

1. $\left\{-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right\}$. **2.** $2\frac{1}{6}$. **3.** 10 см. **4.** 170 кг.

5. При $k=-1$ $x_1=2\pi m$, $x_2=\frac{\pi}{2}+\pi n$ $(m, n\in\mathbf{Z})$. При $k=0$ $x=\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi n$ $(n\in\mathbf{Z})$. При $k=1$ $x=\pi\pm\arccos\frac{\sqrt{7}-1}{2}+2\pi n$ $(n\in\mathbf{Z})$. Указание. Уравнение привести к квадратному относительно $\cos x$. Отбросить те значения параметра k, при которых дискриминант получившегося квадратного уравнения отрицателен или корни по модулю превосходят единицу.

Вариант 8

1. $]-\infty;0[$. 2. 9 см, 12 см, 15 см.

3. $\left\{\left(-\frac{1}{2};\frac{9}{4}\right),\ (2;y)\right\}$, где y — любое действительное число. Указание. Вычесть из первого уравнения второе. **4.** $3\sqrt{3}$.

5. 8. Указание. За единицу длины выберем расстояние между точками обгона пешехода следующими друг за другом автобусами. Положим $S=|AB|$. Тогда по условию $2<S<4$, $3<2S<5$, откуда $2<S<\frac{5}{2}$ и $8<4S<10$, то есть $4S=9$. Но $|AD|=4S=k+1$, где k — количество автобусов, которые обогнали третьего пешехода в пути между A и D.

Вариант 9

1. $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$ $(n\in\mathbf{Z})$. **2.** $\left\{(3;1),\ \left(\frac{5}{3};\frac{11}{3}\right)\right\}$.

3. $\sqrt{15+6\sqrt{3}}$. **4.** 2. 5. $\left(\frac{1}{2};-\frac{\pi}{4}+\pi k\right)$, где $k\in\mathbf{Z}$. Указание. Левая часть неравенства равна

$$2(2p-1)^4(1-\sin 2t)+(1+\sin 2t).$$

Из того, что $|\sin 2t|\leqslant 1$ и $(2p-1)^4\geqslant 0$, вытекает неотрицательность каждого слагаемого в полученном выражении.

Физика

Физический факультет

1. $v=\frac{|\vec{F}|(m_1+m_2)}{2m_1m_2}t$.

2. $A=\frac{m_1m_2|\vec{v}|^2}{2(m_1+m_2)}=48$ Дж.

3. $h=\frac{H}{(1+m/M)^2}$.

4. $p=p_0\frac{T}{T_0}+\frac{MRT}{\mu V}\approx 190$ кПа.

5. $A=\frac{m}{\mu}RT_0\frac{k-1}{k}$.

6. $T_2=\frac{c_1MT_1+cpV\mu/R}{c_1M+\frac{cpV\mu}{RT}}$.

7. $q=2/3C\mathcal{E}=4$ мкКл.

8. $|\vec{B}|=\frac{2|\vec{F}|r}{a\mathcal{E}}=2$ Тл; $|\vec{v}_{\max}|=\frac{\mathcal{E}^2}{4|\vec{F}|r}=7{,}5$ м/с. Указание. При установившейся скорости $|\vec{F}|=Ia|\vec{B}|$, где $I=\frac{\mathcal{E}-|\vec{B}|a|\vec{v}|}{r}$. Отсюда найдите $|\vec{B}|$ как функцию от $|\vec{v}|$ и исследуйте ее на максимум.

9. $n_{\min}=\sqrt{2}\approx 1{,}4$.

10. $x=a(n-1)\alpha$.

Механико-математический факультет и факультет вычислительной математики и кибернетики

1. $s=\frac{\mu Mg}{2(M-m)}t^2\approx 2{,}8\cdot 10^{-2}t^2$.

2. $\mu < \frac{a}{\sqrt{4R^2-a^2}} \approx 0{,}05.$

3. $k = \frac{mg\,\mathrm{tg}\,\alpha/2}{l(1-\sqrt{2}\sin\alpha/2)} \approx 10^2$ Н/м.

4. $p' = p = 100$ кПа.

5. $\varepsilon = \frac{q_1q_2}{(q_1+q_2)^2}\,\frac{(r_1+r_2)^2}{r_1r_2} = 1{,}6.$

6. а) $R_ц = 1{,}5\,R$; б) $R_ц = R$.

7. $I = \frac{\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2-\mathcal{E}_3-\mathcal{E}_4+k\pi R^2}{r_1+r_2+r_3+r_4} \approx 0{,}25$ А.

8. $H = \frac{l\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\frac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2-\cos^2\alpha}}} \approx 0{,}6$ м.

9. $s = \frac{R^2-4a^2}{2a} = 0{,}25$ м.

10. $s = 2L - l + \frac{Fl}{F+l} = 1{,}82$ м.

Географический, геологический и химический факультеты, факультет почвоведения

1. $a = \frac{2s}{tt_1} = 0{,}1$ м/с^2.

2. 1) $|\vec{v}| = \left|\,|\vec{v}_0| - \frac{mg}{M+m}t\,\right| = 4{,}9$ м/с; скорость $\vec{v}$ направлена вправо; 2) $s = |\vec{v}_0|t - \frac{mg}{M+m}\,\frac{t^2}{2} = 0.$

3. $\nu_1 = \nu_0\sqrt{\frac{g-a}{g}} = 1{,}4$ Гц.

4. $\Delta h = h_1\,\frac{(\alpha-2\beta)\Delta t}{1+2\beta\Delta t} \approx h_1\Delta t(\alpha-2\beta) = 5{,}5\cdot 10^{-5}$ м.

5. $A = -R(T_2-T_1)(V_2/V_1-1).$

6. $q = \varepsilon_0\varepsilon SU\,\frac{l_1+l_2}{l_1l_2} \approx 9{,}7\cdot 10^{-8}$ Кл.

7. $Q_{1н} = Q_{нс} = Q_{сп} = Q_{1п} = \frac{U^2}{4R} = 10$ Дж;

$Q_{нп} = 0$; $Q_{1с} = \frac{U^2}{2R\sin\alpha} \approx 23{,}1$ Дж.

8. $t = \frac{C(\mathcal{E}-\mathcal{E}_1)}{P} = 10$ ч.

9. $x = 2a\cos\alpha \approx 34$ см.

10. $x = a\,\frac{d}{d-F} = 3$ см.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 2)

1. 24 представителя.

2. В ситуации, изображенной на рисунке 3, количество воды в цилиндрическом сосуде равно половине его емкости. Нальем таким способом в кастрюлю 3 л, в банку — 2 л. Перельем теперь воду из кастрюли в банку — в кастрюле останется 1 л.

3. Отложим временно из двух рублей сдачи копейку, «двушку» и трехкопеечную монету.

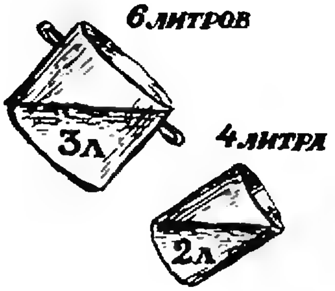


Рис. 3.

Из остальных монет будем брать по одной, пока не наберем не меньше 96 коп. и не больше рубля. Если набрался рубль — все в порядке. Если же набралось

96 коп.— добавим из отложенных трех монет 1 коп. и 3 коп;

97 коп.— добавим 3 коп.;

98 коп.— добавим 2 коп.;

99 коп.— добавим 1 коп.

Номер подготовили:
А. Виленкин, А. Егоров, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Е. Зеленая, Т. Кольченко, Г. Красиков, Э. Назаров, И. Смирнова

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Н. Дорохова

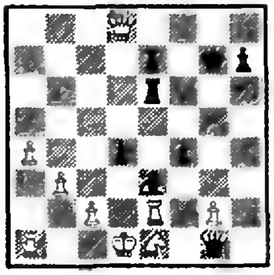
113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16.
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 23.1.81
Подписано в печать 26.2.81
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16 Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 6,97 Т-05707
Цена 30 коп. Заказ 77
Тираж 236782 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли,
г. Чехов Московской области

ЕЩЕ ТРИ МАТЧА ЛАСКЕРА

Эм. Ласкер (1868—1941)

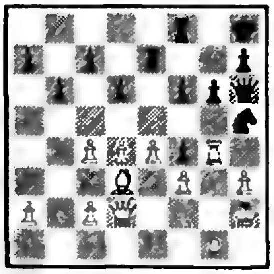
Продолжаем наш рассказ о матчах за мировую шахматную корону. В восьмом по счету поединке встретились Ласкер и Тарраш. В творческом отношении гроссмейстер Тарраш многие годы был противником чемпиона мира. Он искал в шахматах абсолютную истину, в любой позиции стремился сделать лучший ход. Ласкер отрицал такой метод игры и к каждому партнеру стремился подобрать индивидуальные ключи. Как и в трех предыдущих матчах, Ласкер добился убедительной победы (со счетом 10,5:5,5).



Тарраш — Ласкер

40...f3! (40...Cf2 41. Л:e6 Л:e6 42. Фd7+ приводило к вечному шаху) **41. gf Cg5. Белые сдались** (42. Л:e6 Л:e6 43. Фd7+ не спасает из-за 43...Лe7).

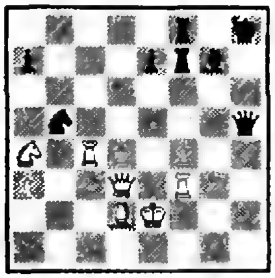
В 1909 году Яновский сыграл вничью показательный матч с чемпионом мира. Успех окрылил его, и он вызвал Ласкера на матч. Однако ничего, кроме разочарований, этот матч Яновскому не принес — Ласкер выиграл матч со счетом 8:2.



Яновский — Ласкер

Положение белых выглядит довольно прочным, но в результате тонкого перевода коня черные получают решающую атаку. **24...Kg7! 25. c3** (упорнее 25. d5) **25...Ke6 26. Cf1 f5 27. Л4g2 Лf6! 28. Cd3 g5! 29. Лh1** (эффектно завершался поединок после 29. ef Ф:h3+!! 30. Кр:h3 Лh6+ 31. Крg4 Лh4×) **29...g4! 30. Ce2 Kg5** (в случае 30...Ф:h3+ 31. Крg1 черный ферзь в западне) **31. fg f3 32. Лg3 fe2. Белые сдались.**

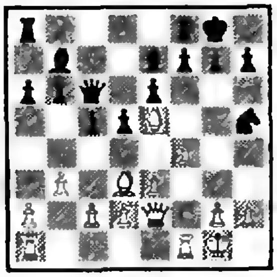
В десятом, юбилейном матче Ласкер отстаивал свой титул в борьбе с К. Шлехтером. Первоначально планировалось провести тридцать партий, однако из-за недостатка средств пришлось ограничиться десятью. Учитывая такую короткую дистанцию, Ласкер поставил условие, по которому претенденту для общей победы необходим был перевес не менее чем в два очка. Перед последней встречей Шлехтер был впереди 5:4. Вот критический момент последней партии.



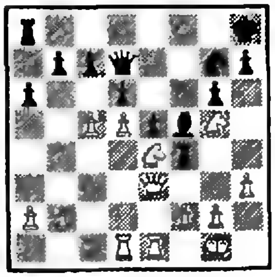
Ласкер — Шлехтер

Продолжая 35...Лd8 36. Ce3 c5! 37. d5 Kd6! или 37. Лc5 K:d4+ 38. C:d4 Л:f4, черные сохраняли все шансы на победу. Шлехтер жертвует качество, упуская шансы стать третьим шахматным королем. **35...Л:f4? 36. C:f4 Л:f4 37. Лc8+ Cf8 38. Крf2! Фh2+** (после 38...Фf4+ 39. Крg2 Фg4+ 40. Лg3 Ф:c8 41. Фg6 черный король получал мат) **39. Крe1 Фh1+** (выигрыша у черных уже не было, но ничью сохраняло 39...Фh4+ 40. Крd2 Фh2+ 41. Крe3 Л:f3+ 42. Кр:f3 Фh3+ 43. Крe2 Ф:c8) **40. Лf1 Фh4+ 41. Крd2 Л:f1 42. Ф:f1 Ф:d4+ 43. Фd3 Фf2+ 44. Крd1 Kd6 45. Лc5.** Имея лишнее качество, белые выиграли на 71-м ходу, счет сравнялся и Ласкер сохранил звание чемпиона мира.

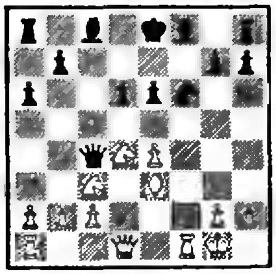
В качестве конкурсных заданий мы предлагаем вам сегодня найти три знаменитые комбинации, принадлежащие Эм. Ласкеру.



1. Белые начинают и выигрывают.



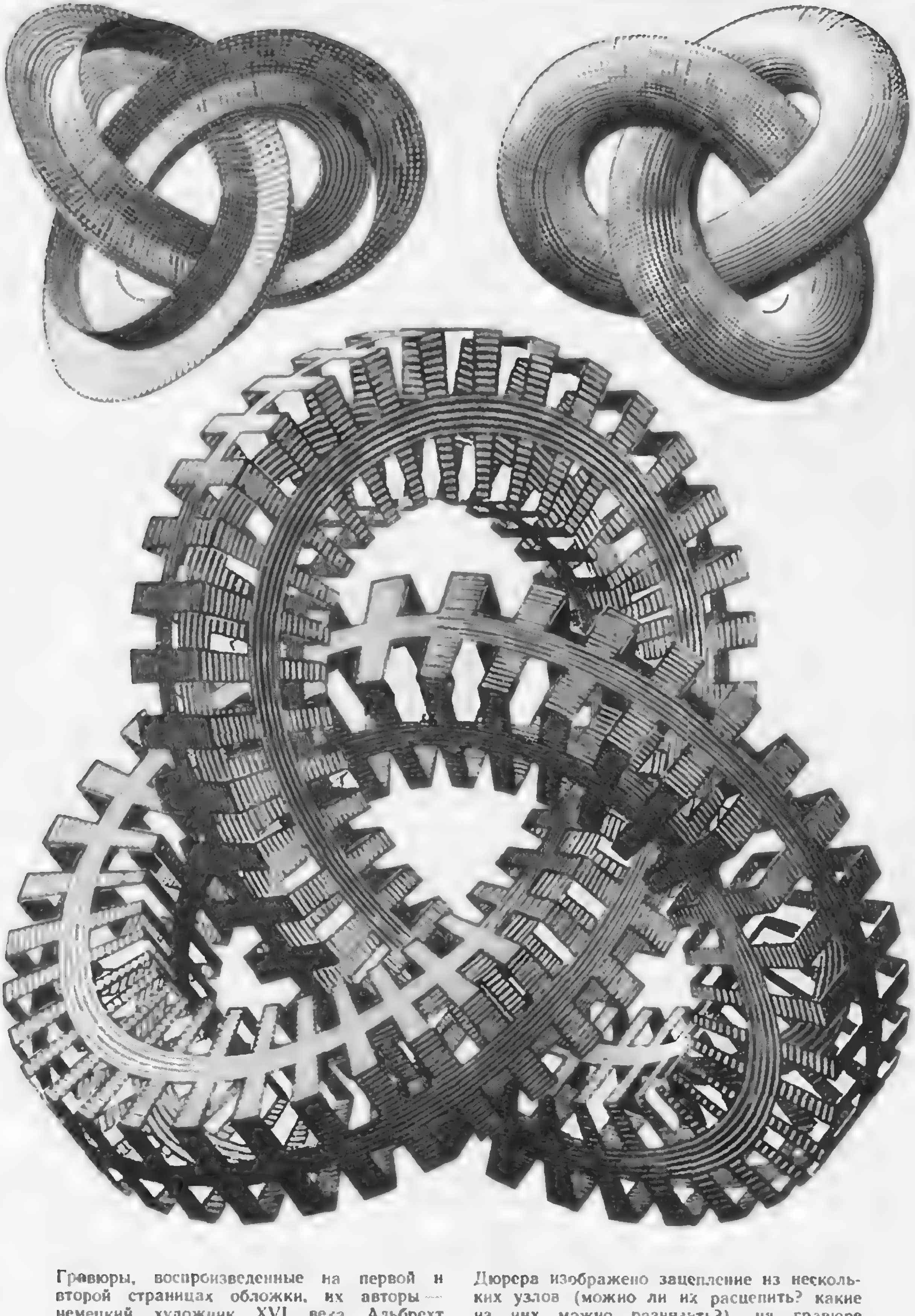
2. Белые начинают и выигрывают.



3. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 30 апреля 1981 г.

Шахматный конкурс ·Кванта·



Гравюры, воспроизведенные на первой и второй страницах обложки, их авторы — немецкий художник XVI века Альбрехт Дюрер и современный голландский художник Морис Эшер — назвали одинаково: «Узел». На языке математики на гравюре Дюрера изображено зацепление из нескольких узлов (можно ли их расцепить? какие из них можно развязать?), на гравюре Эшера — узел «трилистник» (можно ли развязать его?). Ответить на эти вопросы вам поможет статья «Раскрашенные узлы».

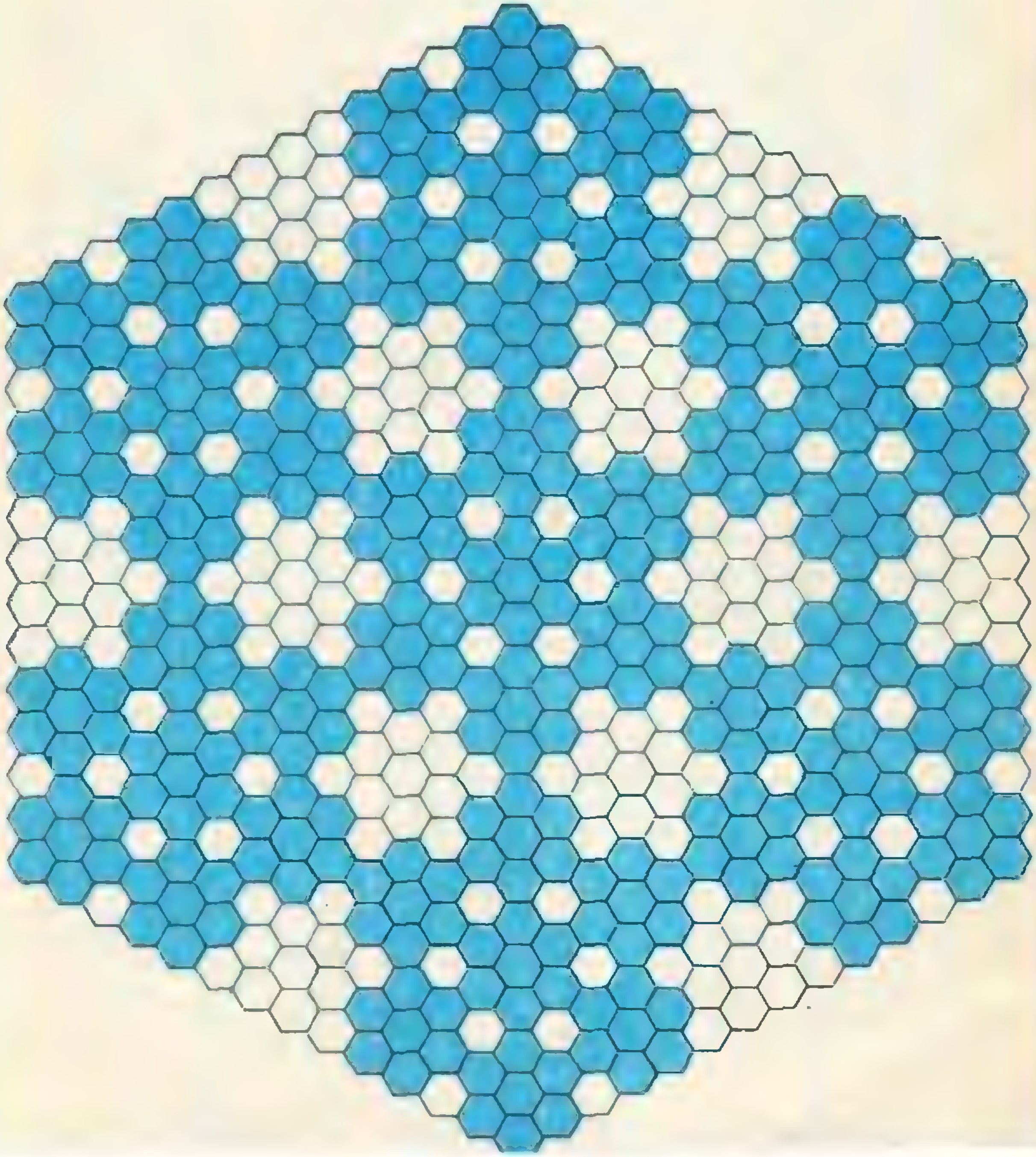
Цена 30 коп.

Индекс 70465

Орнамент, изображенный на этой странице обложки, получается последовательным повторением двух простых операций. Вначале закрашенный правильный шестиугольник отражают относительно каждой из его сторон. Полученный «цветочек», состоящий из исходного шестиугольника и шести его конгруэнтных отпечатков того же цвета, вписывают в правильный шестиугольник больших размеров (при этом образуются незакрашенные участки), к которым повторяют операцию отражения относительно каждой стороны (с сохранением раскраски). Новую фигуру вновь вписывают в правильный шестиугольник и т. д. (Изображенный на обложке орнамент является результатом трех шагов.)

Аналогичные интересные орнаменты можно получить, взяв в качестве исходного n-угольника правильный треугольник или квадрат. Постарайтесь их нарисовать.

В. Чванов



НОМЕР
4

Основан в 1970 году

Квант

4
1981

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:
М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора),
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

В НОМЕРЕ:

2 Подвиг Гагарина бессмертен

Ученые обращаются к молодежи

3 *А. Прохоров.* О становлении молодого ученого

* * *

6 Международные космические экипажи
8 Малый интеркосмос
9 *В. Ланге, Т. Ланге.* Об удельной мощности человека и Солнца (или почему у комара «холодная кровь»)
12 *И. Яглом.* Соединим две точки отрезком

Математический кружок

17 *Н. Вагутен.* Формула площади
20 *С. Сефибеков.* О площади многоугольника

Задачник «Кванта»

22 Задачи М676 — М680; Ф688 — Ф692
24 Решения задач М628, М630 — М635; Ф638 — Ф646

«Квант» для младших школьников

33 Задачи
34 *Г. Гальперин.* Бильярд

По страницам школьных учебников

38 *В. Рыжик.* Задача как задача

Практикум абитуриента

40 *Н. Ростовцев.* Приближенные вычисления при решении задач по физике
43 *Н. Розов.* Читатели советуют

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1980 году

48 Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола

Искусство программирования

51 *Ю. Первин.* Трехадресные, одноадресные и ... безадресные машины

Информация

55 *В. Орлов.* VII Всероссийский слет юных рационализаторов и конструкторов
58 **Шахматная страничка**
59 **Ответы, указания, решения**
Шахматный конкурс *(3-я с. обложки)*
Смесь *(39, 57)*

На первой странице обложки — космонавты Виктор Горбатко и Фам Туан в кабине космического корабля «Союз».
Фото А. Моклецова

© Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1981

Подвиг Гагарина бессмертен

«12 апреля 1961 года первый в мире советский космический корабль «Восток» с человеком на борту, совершив полет вокруг земного шара, благополучно вернулся на священную землю нашей родины. Первый человек, проникший в космос,— гражданин Союза Советских Социалистических Республик Юрий Алексеевич Гагарин». Так писала газета «Правда» на следующий день после полета.

Спросите своих родителей, какие чувства овладели ими, когда они узнали об этом событии. Огромная радость, гордость за нашу родину, за все человечество, сделавшее первый и самый трудный шаг в космос — вот что испытали очевидцы этого великого события. Невозможно было оставаться дома. Люди хлынули на улицы городов и сел, и на страницах того же номера «Правды» мы видим толпы сияющих людей на Манежной площади, на улице Горького и на Невском проспекте.

Трудно поверить, что с тех пор прошло всего лишь двадцать лет — так много было сделано в исследовании космоса за эти годы. Немало космических аппаратов различной конструкции побывало на Луне, Венере и Марсе. Вступил на поверхность Луны человек. Космические зонды пролетели вблизи Сатурна и Юпитера. Более трех лет успешно действует долговременная космическая станция «Салют-6», на которой работали семь международных космических экипажей братских социалистических стран. Более тысячи советских искусственных спутников Земли побывали в космосе, выполняя обширную программу разнообразных научных исследований. Более двадцати международных искусственных спутников было запущено по программе «Интеркосмос».

День ото дня растет роль космических исследований в нашей земной жизни. Космические спутники революционно изменили современную технику связи, позволили одновременно транслировать телевизионные передачи на огромные пространства земного шара. Метеорологические спутники помогают ученым глубже проникнуть в «кухню» погоды, в тайны земного климата. Космонавты исследуют мировые запасы льда и пресной воды, обнаруживают лесные пожары в отдельных районах нашей планеты, скопления рыб в океанах и морях, прогнозируют урожай и следят за состоянием посевов. Спутники помогают обнаруживать богатые месторождения полезных ископаемых, облегчают проводку судов в океанах, заблаговременно предупреждают о возникновении очагов распространения сельскохозяйственных вредителей. Выполнено много ценных медицинских, биологических и технологических экспериментов в космосе.

Наша страна прилагает огромные усилия к тому, чтобы исследования космоса носили сугубо мирный характер, помогали всему человечеству улучшать и совершенствовать жизнь на Земле.

Космос неисчерпаем, и нет конца его исследованиям. Человечество, говоря словами Константина Эдуардовича Циолковского, уже вышло из своей земной колыбели и устремилось к далеким звездным мирам. Впереди — огромный объем работы, множество интереснейших задач, которые придется решать вдали от родной Земли. И хочется верить, что многие наши читатели станут активными участниками будущих исследований космоса.

А. Прохоров

О становлении молодого ученого

Обращаясь к молодежи, считаю необходимым обсудить вопрос об авторитете старших и самостоятельности молодых.

Надо сказать, что этот крайне важный вопрос возникает очень рано, при выборе молодым человеком поля деятельности. Этот выбор должен делаться по призванию, а не по принятому мнению среды, ближнего окружения, не по мнению родителей, не из престижных соображений. Авторитеты надо уважать, прислушиваться к их мнению, учиться у них и использовать их опыт, но не следовать им слепо, если есть способность к собственному мышлению, если есть собственное мнение. Другое дело, что это собственное мнение не должно быть капризом или данью моде, оно должно быть творчески сформировано и даже выстрадано молодым человеком при всестороннем полном и глубоком учете опыта, мнений, советов авторитетных для него людей.

Надо сказать, что без способности к собственному мышлению, без умения вырабатывать собственное мнение, без желания это мнение отстаивать бессмысленно даже пытаться выбирать для себя в качестве поля деятельности научно-исследовательскую работу.

Но вот выбор сделан, необходимое для начала образование получено, молодой человек приступает к научно-исследовательской работе. Крайне важно для него теперь сохранить и дальше развивать умение учиться, ос-

---

Академик Александр Михайлович Прохоров — лауреат Нобелевской, Ленинской и Государственных премий, академик-секретарь Отделения общей физики и астрономии, заместитель директора Физического института имени П. Н. Лебедева Академии наук СССР.

Статья перепечатывается из сборника «Ленин. Наука. Молодежь» (М., «Наука», 1980).

мысливая опыт старших и вырабатывая свое собственное отношение к этому опыту.

Надо сказать, что роль руководителя исключительно важна именно на начальном этапе работы молодого научного работника. При этом неважно, называется ли молодой человек студентом-дипломником, стажером-исследователем, аспирантом или младшим научным сотрудником. Особое значение на этом этапе имеет постановка задачи исследования. Именно в ней концентрируется накопленный руководителем опыт, его понимание сути дела, проявляется его интуиция и, если хотите, его прозорливость. В момент постановки задачи и на первых шагах ее исследования руководитель, кроме того, обладает бо́льшим объемом конкретных знаний по разрабатываемой теме, чем молодой исследователь. Но если дело поставлено правильно, если руководитель воспитывает в молодом человеке самостоятельность, а тот ее проявляет, то к моменту решения задачи именно он обладает наибольшим объемом конкретных знаний по этой проблеме. Долг руководителя — активно интересоваться ходом выполнения исследования, тщательно смотреть за стилем и характером работы молодого исследователя и аккуратно направлять его усилия.

Здесь снова встает вопрос об авторитете и самостоятельности. Нельзя слепо следовать первоначально поставленной задаче. Исследование, процесс познания закономерностей объективного мира, процесс открытия новых явлений имеет свою собственную логику. При проведении фундаментальных исследований и опытный руководитель, и творчески одаренный молодой исследователь должны следовать этой логике познания, не отбрасывать новые возможности, неожиданно возникающие при проведении исследования, смело идти новыми путями, казалось бы уводящими в сторону от первоначально поставленной цели.

Прекрасным примером правильного сочетания такта руководителя и упорства исследователя является открытие С. И. Вавиловым и П. А. Черенковым явления, получившего впоследствии название эффекта Черенкова. Задача была поставлена С. И. Вавиловым в плане исследования люминесценции жидкостей под воздействием быстрых электронов. Очень скоро было выяснено, что имеется слабое свечение, которое не является примесной люминесценцией, да и вообще не является люминесценцией вещества под воздействием электронов. Казалось бы, исследования надо было прекратить. С точки зрения поставленной задачи работа зашла в тупик. Но П. А. Черенков проявил упорство и самостоятельность мышления. Так новое слабое явление было превращено в сильный эффект, играющий, как это хорошо известно, крайне важную роль в современной физике. Надо сказать, что произошло все это при полной поддержке академика С. И. Вавилова — руководителя аспирантской работы П. А. Черенкова.

Очень часто исследователю в своей работе приходится преодолевать такое психологическое явление, которое можно назвать авторитетом общественного мнения, нередко играющим консервативную роль. Это самое труднопреодолимое препятствие. Только ученый, умеющий самостоятельно мыслить, выработавший в себе, в том числе и под влиянием опытного и тактичного учителя, способность формировать свое собственное мнение и умение это мнение отстаивать, может успешно преодолевать такое препятствие.

Великолепным примером является создание академиком П. Л. Капицей и внедрение им в производство турбодетандерного ожижителя. Все специалисты по машинам глубокого охлаждения, все зарубежные фирмы, работающие в этой области, отвергали идею П. Л. Капицы просто как несерьезную. Только упорство, настойчивость, талант физика-экспериментатора и инженера, глубокое понимание физики процессов, играющих крайне важную роль при ожижении газов, позволили П. Л. Капице полностью решить поставленную проблему.

Приведенные яркие примеры относятся к работам, удостоенным Нобелевских премий по физике. Это выдающиеся работы, и именно поэтому они привлечены в качестве наглядных примеров для иллюстрации простой мысли: плодотворная научная работа немыслима без самостоятельного мышления, и учиться этому надо смолоду.

Надо сказать, что роль руководителя не исчерпывается постановкой задачи и направлением работы молодого исследователя. Точно так же молодой человек должен не только упорно работать над поставленной задачей, воспринимая опыт старших и развивая только свою самостоятельность. Современная исследовательская работа носит по большей части коллективный характер. Научно-исследовательская работа осуществляется в больших лабораториях, часто работа идет над многими разными темами, связанными, однако, общей большой «сверхзадачей». И здесь крайне важно развивать дух доброжелательства и товарищеской взаимопомощи, уметь радоваться успехам друг друга, поддерживать и ободрять друг друга, критиковать друг друга, имея прежде всего в виду пользу дела, уметь слушать критику и правильно воспринимать ее. Всему этому надо учиться.

Роль авторитетного руководителя в создании и сохранении такой подлинно творческой обстановки в коллективе трудно переоценить. С другой стороны, именно молодые исследователи составляют бóльшую и, в силу своей молодости, перспективную часть коллектива. Поэтому их моральный уровень в значительной мере определяет моральный климат коллектива. В вопросах нравственного воспитания коллектива авторитет настоящего руководителя должен быть непререкаемым.

Надо сказать, что крайне эффективно коллективизм и правильная система оценок воспитываются на научных семинарах. Руководитель должен так вести семинар, делая это не навязчиво, но строго, чтобы молодежь на деле видела доброжелательность и поддержку нового, принципиальность и объективность, высокую требовательность и конструктивность критики. С другой стороны, именно на семинарах научная молодежь должна учиться не замыкаться только в своей задаче, только в себе, должна учиться приобретать широту взглядов и кругозор, должна обогащать свой опыт опытом товарищей.

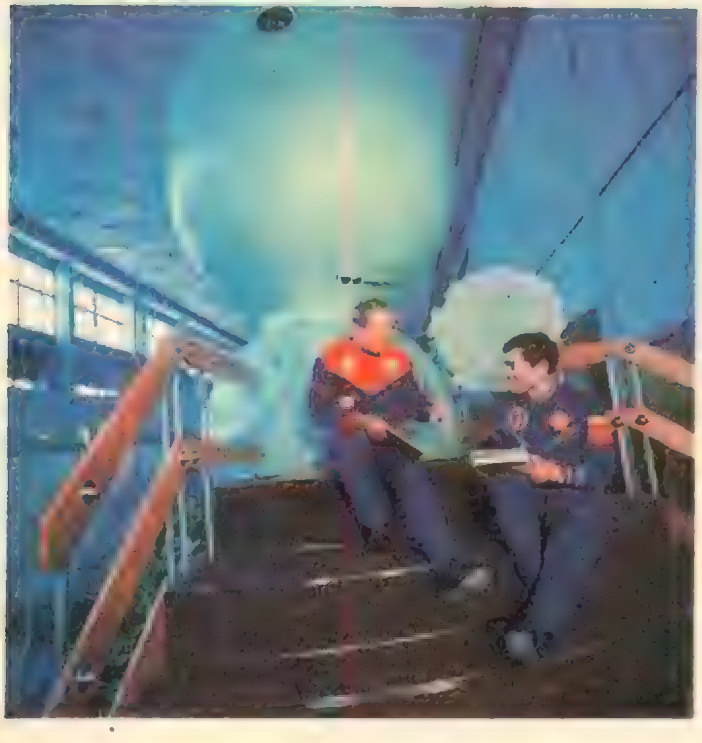
Сказанное относится к тем сторонам становления личности ученого, которые прямо связаны отношениями учитель — ученик. В этих отношениях большое значение имеют авторитет учителя и самостоятельность ученика.

Говоря кратко, авторитет учителей и самостоятельность их учеников необходимы и для старших и для младших, для успешной работы всего научно-исследовательского коллектива в целом.

МЕЖДУНАРОДНЫЕ КОСМИЧЕСКИЕ ЭКИПАЖИ

1

2



3

4

5

Наш фотоочерк посвящен трем международным космическим экипажам, которые в 1980 году работали на гостеприимной советской космической станции «Салют-6», пилотируемой Леонидом Поповым и Валерием Рюминым. В состав этих экипажей входили Валерий Кубасов и венгерский космонавт Берталан Фаркаш (26 мая — 3 июня), Виктор Горбатко и вьетнамский космонавт Фам Туан (23 июля — 31 июля), Юрий Романенко и кубинский космонавт Арнальдо Тамайо Мендес (18 сентября — 26 сентября).

Советский Союз еще в 1976 году выдвинул идею совместных полетов международных космических экипажей социалистических стран. Дружеская помощь наших специалистов обеспечила успешную ускоренную подготовку зарубежных космонавтов.

В результате выполнения обширной программы научно-технических исследований, *разработанной* совместно учеными Советского Союза и социалистических стран, получено много ценной информации, которая принесет огромную помощь науке и народному хозяйству стран социалистического содружества.

Фото 1. Валерий Кубасов и **Берталан Фаркаш около тренажера космической станции «Салют».**

Фото 2. Виктор Горбатко и Фам Туан в зале тренажеров.

Фото 3. Юрий Романенко и Арнальдо Тамайо Мендес отрабатывают приводнение.

Фото 4. Леонид Попов и **Валерий Рюмин возле стыковочного узла.**

Фото 5. Встреча в Звездном. С букетом цветов Арнальдо Тамайо Мендес.

В. Лешковцев
Фото А. Моклецова

Малый интеркосмос

Центральный Комитет ВЛКСМ, Академия наук СССР, Министерство просвещения СССР, Государственный комитет СССР по профессионально-техническому образованию и Всесоюзное общество «Знание» совместно с Федерацией космонавтики СССР и Выставкой достижений народного хозяйства СССР проводят с февраля по ноябрь 1981 года Всесоюзный конкурс учащихся школ и профтехучилищ на лучший проект космического эксперимента, посвященный 20-летию со дня полета Ю. А. Гагарина. Конкурс носит название «Малый интеркосмос». Он проводится в целях дальнейшего развития познавательной активности, фантазии, углубления общественно полезной направленности научно-технического творчества учащихся, подготовки их к труду, пропаганды среди школьников и учащихся ПТУ достижений Советского Союза и стран социалистического содружества в освоении космического пространства.

В конкурсе могут участвовать как отдельные учащиеся, так и коллективы юных любителей науки и техники школ, ПТУ, внешкольных учреждений, научных обществ учащихся, клубов по месту жительства и др.

Задача участников конкурса — предложить технические средства, эксперименты и исследования, которые представляют интерес для специалистов и могут быть реализованы в ближайшие годы.

Участники конкурса могут разработать и предложить:

— научные эксперименты, с помощью которых можно получить новые знания в астрономии, физике, химии, биологии, медицине, географии, геофизике и других науках;

— технические эксперименты и предложения, направленные на усовершенствование имеющейся космической техники (применение новых узлов и приборов, улучшение условий работы и жизни космонавтов на станции, организация их досуга), на создание новых систем выведения на орбиту, систем энергетики и связи, транспортных средств для перемещения космонавтов и грузов в открытом космосе и на небесных телах, а также на использование в космосе применяемых на Земле приборов и устройств;

— технологические эксперименты, которые могут быть поставлены только в специфических условиях космического пространства (невесомость, уменьшенная сила тяжести, вакуум, радиация). К этой группе относятся эксперименты, направленные на создание в космосе промышленных производств (сварка металлов, выращивание кристаллов, получение сплавов);

— прикладные эксперименты, связанные с использованием возможностей космонавтики для решения народнохозяйственных задач. Например, геологоразведка, сельское и лесное хозяйство, связь, навигация, охрана окружающей среды, метеорология. К этой группе можно отнести предложения по использованию на Земле достижений космической техники.

На конкурс могут быть представлены:

— идеи создания новой космической техники, проведения экспериментов или исследований с обоснованием их ценности и целесообразности; разработанные технические предложения или эскизные проекты с чертежами и описаниями; модели, макеты, приборы, конструкции экспериментальных устройств и систем с необходимыми пояснениями.

К участию в конкурсе допускаются проекты, которые могут быть реализованы в кабине пилотируемого и беспилотного космического аппарата, в открытом космосе, на поверхности планет или других небесных тел, проекты наземных устройств, связанных с космонавтикой, предложения по использованию в земных условиях средств, применяемых сейчас только в условиях космоса.

Все работы представляются непосредственно Центральному оргкомитету до 20 сентября 1981 года. Предложения по проведению технических экспериментов, краткие характеристики и фотографии макетов, моделей, приборов направляются на Центральную станцию юных техников Министерства просвещения РСФСР (103055, Москва, ул. Тихвинская, дом 39). Идеи и проекты научных, прикладных, технологических экспериментов — в Московский городской Дворец пионеров и школьников (117334, Москва, Воробьевское шоссе, дом 11). Если наряду с изложением идеи научного эксперимента изготовлен и макет соответствующего прибора, описание прибора высылается вместе с изложением идеи.

Работу следует оформить так, чтобы ее можно было демонстрировать на выставке. Это может быть альбом, тетрадь с приложенными к ней чертежами, фотографии макета или модели с пояснительным текстом.

Необходимо указать фамилию, имя, отчество, место жительства и занятий автора (класс и номер школы, курс ПТУ, кружок внешкольного учреждения, секция научного общества), кто был руководителем или консультантом работы.

Авторы лучших работ будут приглашены в Москву на заключительный этап конкурса, проводимый в ноябре 1981 года. Наиболее интересные предложения, пригодные для реализации на современном этапе, будут включены в программу космических исследований, а также для демонстрации на ВДНХ СССР.

Все участники заключительного этапа будут награждены дипломами участника и значками. Для них будут организованы экскурсии в Звездный городок, Музей космонавтики, встречи с космонавтами и учеными. По каждому из направлений конкурса определяются по 3 лауреата. Они будут награждены именными призами Ю. А. Гагарина, К. Э. Циолковского, С. П. Королева, М. В. Келдыша, вымпелами и значками, побывавшими в космосе.

(Окончание см. на с. 42)

В. Ланге, Т. Ланге

Об удельной мощности человека и Солнца

(или почему у комара «холодная кровь»)

Поток энергии, идущей от Солнца, колоссален. Из геофизических измерений следует, что даже в верхних слоях атмосферы Земли, на громадном расстоянии почти в 150 миллионов километров от Солнца, каждый квадратный метр, расположенный перпендикулярно солнечным лучам, получает от Солнца ежесекундно 1,4 кДж. Эту величину называют солнечной постоянной и обычно обозначают буквой I. Зная, что $I = 1{,}4$ кДж/(м^2 · с) $= 1{,}4$ кВт/м^2, нетрудно найти полную мощность излучения Солнца P_1*). Для этого достаточно умножить солнечную постоянную на площадь сферы, описанной вокруг Солнца, с радиусом $R = 150\,000\,000$ км:

$$P_1 = I \cdot 4\pi R^2 \approx 4 \cdot 10^{26}\,\text{Вт}.$$

Конечно, энергетические возможности человека во много раз скромнее. Среднюю мощность P_2, развиваемую человеком, можно довольно точно оценить по калорийности пищи, потребляемой им в сутки. Как известно, лица, не занимающиеся тяжелым физическим трудом, должны получать с пищей ежедневно примерно 12 МДж. Почти вся эта энергия идет на поддержание постоянной температуры человеческого тела и в конечном счете генерируется человеком в окружающее пространство. (Лишь очень малую часть получаемых 12 МДж человек расходует на совершение механической работы). Разделив 12 МДж на длительность суток (86 400 с), получим

---

*) P_1 называют также полным потоком энергии Солнца. Тогда I можно определить как плотность потока солнечной энергии на расстоянии от Солнца, равном радиусу орбиты Земли.

$$P_2 \approx 140 \text{ Вт}.$$

Таким образом, как генератор энергии Солнце примерно в $3 \cdot 10^{24}$ раз мощнее человека. Тем неожиданнее результат сравнения их удельных (то есть приходящихся на единицу массы) мощностей. Масса M Солнца составляет около $2 \cdot 10^{30}$ кг, массу m человека примем равной 80 кг. Тогда

$$P_1 : M = 2 \cdot 10^{-4} \text{ Вт/кг},$$
$$P_2 : m = 1{,}75 \text{ Вт/кг}$$

— удельная мощность человека оказывается почти в 10 000 раз больше, чем у Солнца!

Результат, к которому мы пришли, кажется на первый взгляд совершенно неправдоподобным. Однако так и есть на самом деле.

Как же объясняется этот «парадокс»? Почему Солнце — этот гигантский термоядерный реактор — проигрывает по удельной мощности человеку, энергию которому поставляют химические реакции, куда более «слабосильные», чем ядерные?

Ответ на этот вопрос нетрудно получить, если принять, что тепло в человеческом теле и в Солнце выделяется более или менее равномерно по всему объему. Следовательно, скорость выделения тепла прямо пропорциональна объему тела, иными словами — кубу линейного размера. Скорость же теплоотдачи пропорциональна площади поверхности тела, то есть квадрату линейного размера. Стало быть, чем больше тело, тем меньшей может быть скорость выделения тепла, необходимая для поддержания некоторой заданной температуры.

Объем Солнца — порядка 10^{27} м^3, площадь его поверхности $\sim 10^{18}$ м^2. Соответствующие параметры тела человека — $\sim 10^{-1}$ м^3 и ~ 1 м^2. Таким образом, отношение объемов Солнца и человека равно $\sim 10^{28}$, а отношение площадей поверхностей этих тел — порядка 10^{18}. Образно говоря, на единицу объема Солнца приходится приблизительно в 10 миллиардов раз меньше свободной поверхности, чем у человека. Поэтому не удивительно, что, несмотря на то, что солнечный «обмен веществ» протекает со скоростью всего лишь 0,2 мВт/кг, температура на поверхности Солнца достигает 6000 градусов.

Проиллюстрируем связь между размерами, темпом энерговыделения и температурой тел следующими примерами из жизни животного мира.

Температуры тел млекопитающих отличаются не особенно сильно. В частности, они примерно одинаковы и у слона, и у маленькой полевой мышки. Однако скорость выделения тепла в организме слона примерно в 30 раз меньше. Если бы внутри тела слона выделение тепла происходило с такой же скоростью, как у мыши, то выделяющееся тепло не успевало бы покинуть организм слона достаточно быстро, чтобы сохранилась нормальная температура, и слон бы «зажарился» в собственной шкуре.

Чем меньше теплокровное животное, тем больше должна быть удельная (то есть в расчете на единицу массы) скорость выделения тепла, чтобы скомпенсировать потери и поддержать температуру тела, обеспечивающую нормальную жизнедеятельность организма, тем больше пищи (опять-таки в расчете на единицу массы) оно должно поглощать. Мальчик-с-пальчик из широко известной детской сказки должен быть ужасно прожорлив: при одинаковых пропорциях с нормальным человеком ему требовалось бы на 1 кг массы в 20 раз больше пищи.

Самые маленькие млекопитающие на Земле — этрусские мыши — имеют массу всего 1,5 г, а съедают за сутки в два раза больше. Если этрусскую мышь оставить без пищи хотя бы на несколько часов, она погибнет. Практически весь период бодрствования заняты поисками и поглощением еды колибри (крошечные птички с массой около 2 г, обитающие в Южной Америке). Длительный ночной перерыв в этом занятии колибри могут переносить только потому, что температура их тела на это время резко понижается.

Можно показать, что очень маленькие существа, комар например, не могут быть теплокровными.

Для простоты будем считать, что комар имеет форму цилиндра с диаметром $d=0{,}5$ мм и длиной $l=4$ мм. В таком случае площадь поверхности S и объем V его тела равны соответственно

$$S=2\frac{\pi d^2}{4}+\pi dl\approx 10^{-5}\text{м}^2,$$

$$V=\frac{\pi d^2}{4}l\approx 10^{-9}\text{м}^3.$$

Оценим мощность, «генерируемую» комаром.

Тело, имеющее температуру T, передает в окружающее пространство, где температура T_0 $(T_0<T)$, тепловую мощность

$$P=\alpha S\cdot\Delta T.$$

Если тепло передается за счет излучения, а разность температур $\Delta T=T-T_0$ мала по сравнению с температурой T, то коэффициент α пропорционален T^3; при комнатных температурах $\alpha\approx 2\div 5$ Вт/(м^2 · град) (в зависимости от отражательной способности тела).

Предположив, что температура тела комара 30°С ($T=303$ К), и взяв $\alpha=4$ Вт/(м^2 · град), найдем, что при температуре окружающей среды 17°С ($T_0=290$ К) комар излучает тепловую мощность

$$P\approx 10^{-3}\ \text{Вт}.$$

Приняв плотность вещества тела комара равной плотности воды, найдем массу комара: $m\approx 10^{-6}$ кг. Стало быть, удельная мощность комара составляет 10^{-3} Вт/10^{-6} кг $=10^3$ Вт/кг, то есть примерно в 600 раз больше, чем у человека (и в 6 миллионов раз больше, чем у Солнца!).

Если человек поглощает в сутки около 1 кг пищи, то есть примерно 1/80 часть от своей массы, то масса пищи комара должна бы превышать его собственную в 600/80 = 7,5 раза. (Фактически мы получаем заниженные цифры, так как при оценке не учитывалось тепло, отдаваемое за счет конвекции.) Температура окружающего воздуха чаще оказывается значительно ниже 17°С; а при 7°С (обычные комары достаточно активны и в этих условиях) энергозатраты возрастают почти в 2 раза, и поглощать пищи комару пришлось бы уже в 15 раз (!) больше своей массы. Поэтому ясно, что поддерживать постоянной температуру своего тела (то есть быть теплокровным) комар не может.

Рассматривая связь между линейными размерами тела и интенсивностью энергообмена с окружающей средой, легко получить ответ и на такой интересный вопрос: почему тонкую проволоку можно расплавить в пламени спички, а толстую трудно раскалить даже от газовой плиты?

Поток энергии, которую получает проволока от огня, прямо пропорционален площади ее боковой поверхности $S=2\pi Rl$ (R — радиус проволоки, l — длина ее части, находящейся в пламени). В то же время скорость отвода тепла вдоль оси проволоки к ее холодным концам (которые не попадают в пламя) прямо пропорциональна площади поперечного сечения проволоки $S=\pi R^2$.

Если радиусы двух проволок отличаются в 10 раз, то при прочих равных условиях более толстая проволока будет получать за единицу времени в 10 раз больше тепла, чем тонкая, но терять она будет в 100 раз больше. Ясно, что температура толстой проволоки в равновесном состоянии (когда оба тепловых потока — к проволоке и от нее — сравняются) окажется заметно меньше.

И. Яглом

Соединим две точки отрезком

Древние греки под математикой понимали в первую очередь геометрию. Например, алгебраическое равенство $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ они доказывали с помощью чертежа (рис. 1). Сегодня математика, напротив, стремительно алгебраизируется — алгебра в своих отношениях с геометрией берет реванш. В последние годы изложение геометрии чаще всего основывают на тех или иных исчислениях (например, на векторном исчислении). Об одном из этих исчислений, очень простом, но неожиданном, пойдет речь в статье.

Умножение точек и фигур

Отрезок с концами A и B часто обозначается символом AB (рис. 2). Эта запись подсказывает неожиданную терминологию: отрезок AB назовем *произведением точек* A и B. Аналогично *произведением* $\alpha\beta$ *фигур* α и β мы назовем объединение всех отрезков AB, где $A\in\alpha$, $B\in\beta$, то есть объединение всевозможных произведений точек фигуры α на точки фигуры β (рис. 3). Мы уверены, что никто не спутает это неожиданное произведение точек и фигур с обычным произведением чисел.

Каковы же свойства такого умножения точек? Первые из них очевидны:

(a) *Умножение точек коммутативно:*

$$AB=BA$$

для любых точек A *и* B.

(b) *Умножение точек ассоциативно:*

$$(AB)C=A(BC)$$

для любых точек A, B *и* C.

В самом деле, произведение $(AB)C$ представляет собой объединение всех отрезков, соединяющих точки отрезка AB с точкой C (рис. 4,*а*), а произведение $A(BC)$ — объединение отрезков, соединяющих A с точками отрезка BC (рис. 4,*б*). Таким образом, $(AB)C=A(BC)=ABC$, где ABC — треугольник с вершинами A, B, C.

Здесь нам будет удобно объединение фигур α и β называть также их *суммой*; соответственно, вместо $\alpha\cup\beta$ мы будем писать $\alpha+\beta$.

(c) *Умножение точек дистрибутивно относительно их сложения:*

$$(A+B)C=AC+BC$$

для любых точек A, B *и* C.

Это ясно, так как произведение пары точек $A+B$ на точку C является объединением отрезков AC и BC (рис 5)

Следующее свойство умножения точек уже отличается от привычных нам свойств умножения чисел:

(d) *Умножение точек идемпотентно:*

$$AA=A$$

для любой точки A.

Действительно, отрезок AA со слившимися концами — это просто точка A.

Свойства (a) — (c) умножения точек переносятся и на произвольные фигуры:

(A) *Умножение фигур коммутативно:*

$$\alpha\beta=\beta\alpha.$$

(B) *Умножение фигур ассоциативно:*

$$(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma).$$

Фигуру $(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$ уместно обозначить через $\alpha\beta\gamma$; она представляет собой объединение всевозможных треугольников ABC, где $A\in\alpha$, $B\in\beta$, $C\in\gamma$.

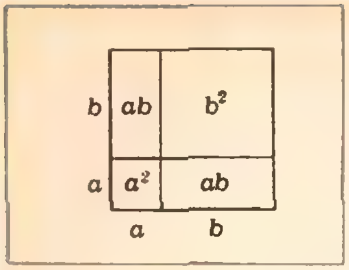


Рис. 1.

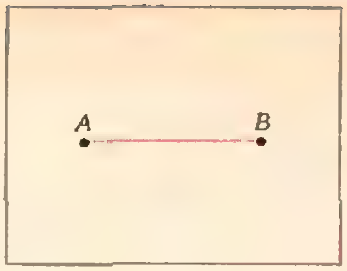


Рис. 2.

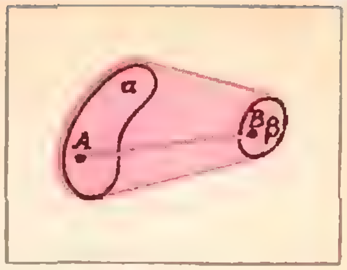
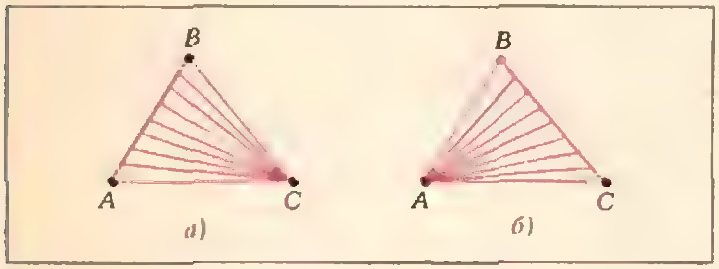


Рис. 3.



а)

б)

Рис. 4.

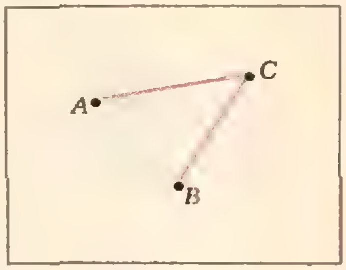


Рис. 5.

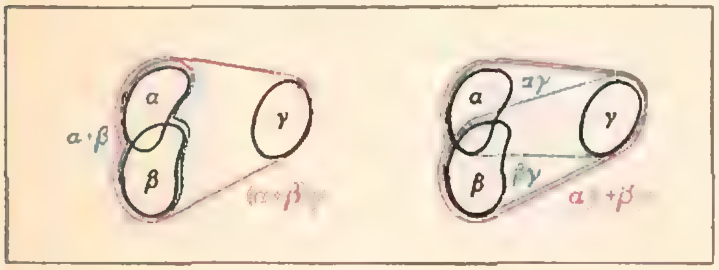


Рис. 6.

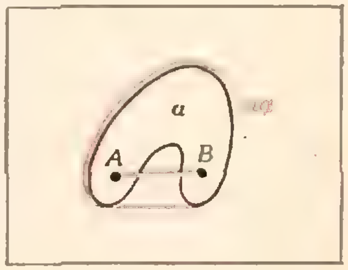


Рис. 7.

(C) *Умножение фигур дистрибутивно относительно их сложения:*

$$(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$$

(рис. 6).

Однако идемпотентность умножения фигур места, вообще говоря, не имеет. Можно утверждать лишь, что

(D) *Произведение любой фигуры на себя содержит эту фигуру:*

$$\alpha\alpha\supset\alpha.$$

Рисунок 7 показывает, что фигура $\alpha\alpha$ может не совпадать с α. Более того, нетрудно видеть, что для любой фигуры α

$$\alpha^n\subset\alpha^{n+1},$$

где под α^n, как обычно, понимается произведение $\underbrace{\alpha\alpha\ldots\alpha}_{n\ \text{раз}}$.

Упражнения

1. Пусть A, B, C и D — произвольные точки (плоскости или пространства). Докажите, что

$$(AB)(CD)=(AD)(BC)=(AC)(BD)=A(BCD)=B(ACD)=C(ABD)=D(ABC).$$

Что представляет собой это произведение четырех точек (его можно обозначить просто через $ABCD$ без скобок)?

2. Докажите, что $(AB)(AC)=ABC$.

3. Что представляют собой фигуры а) $(A+B)(A+C)$; б) $(A+B)(C+D)$; в) $(A+B+C)D$; г) $(A+B+C)(D+E)$? (В задачах б) — г) отдельно рассмотрите случаи, когда все точки принадлежат одной плоскости и когда это произвольные точки пространства.)

4. Что представляет собой произведение а) точки и круга; б) точки и окружности; в) точки и треугольника; г) точки и контура треугольника; д) точки и квадрата; е) двух кругов; ж) двух треугольников; з) двух квадратов; и) круга и квадрата?

5. Что представляет собой произведение двух прямых, если эти прямые а) параллельны; б) пересекаются; в) скрещиваются?

Когда $\alpha\alpha=\alpha$

В арифметике и в алгебре особую роль играют те числа, для которых $a\cdot a=a$. Ясно, что этим свойством обладают лишь замечательные и во многих других отношениях числа 1 и 0.

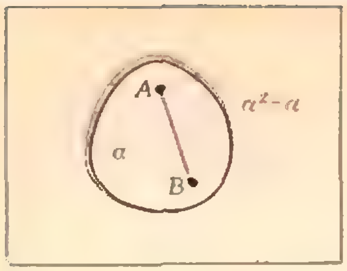


Рис. 8.

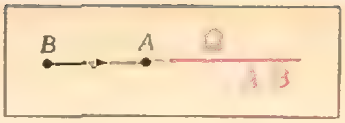


Рис. 9.

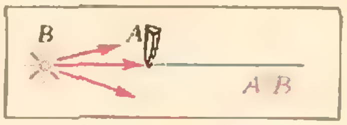


Рис. 10.

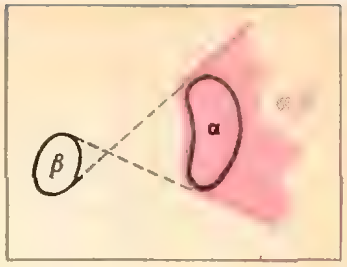


Рис. 11.

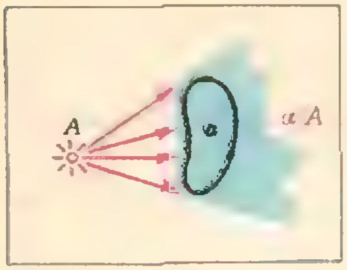


Рис. 12.

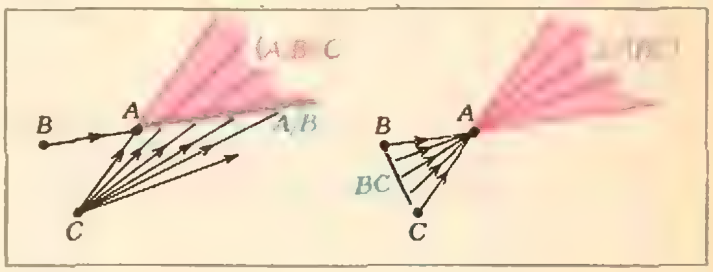


Рис. 13.

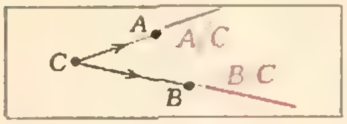


Рис. 14.

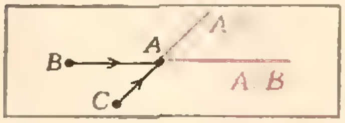


Рис. 15.

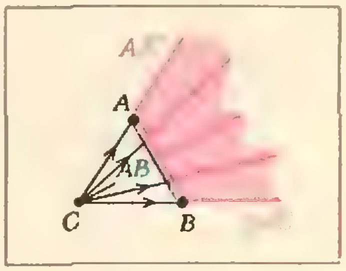


Рис. 16.

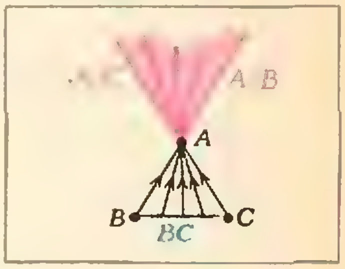


Рис. 17.

В геометрии также интересно специально рассмотреть такие фигуры α, для которых $\alpha^2=\alpha\alpha=\alpha$. Каждая такая фигура характеризуется тем, что ей принадлежит любой отрезок, соединяющий две точки этой фигуры (рис. 8). Такие фигуры, как вы знаете, называются *выпуклыми*.

Определению выпуклой фигуры можно придать также следующую элегантную форму: множество точек α называется *выпуклым*, если оно замкнуто относительно операции умножения точек, то есть, наряду с любыми двумя точками A и B, фигуре α принадлежит и произведение AB этих точек.

Легко придумать плоскую фигуру β, для которой фигура β^2 не выпуклая. Можно доказать, что для любой плоской фигуры β фигура β^3 является выпуклой; она представляет собой наименьшую выпуклую фигуру, содержащую β, и называется *выпуклой оболочкой* фигуры β. Для фигуры β, расположенной в трехмерном пространстве, выпуклой оболочкой будет β^4.

Вообще, для любой фигуры β, расположенной в n-мерном евклидовом пространстве, фигура β^{n+1} выпукла, и потому все фигуры β^{n+2}, β^{n+3},... совпадают с β^{n+1}.

Теория выпуклых фигур занимает сегодня в математике видное место.

Упражнения

6. Докажите, что произведение двух выпуклых фигур выпукло.

7. Что представляют собой фигуры

β^2; β^3; β^n,

если β — объединение: а) трех точек плоскости; б) четырех точек пространства; в) вершин правильного пятиугольника; г) окружности и точки, которая не лежит в плоскости окружности и ортогонально проектируется в ее центр.

Где умножение, там и деление

В области чисел деление определяется как операция, обратная умножению: число q называется *частным* чисел a и b (запись: $q=a/b$), если a

есть произведение b и q. Другими словами, записи $q=a/b$ и $a=bq$ имеют один и тот же смысл. Аналогично этому и операцию деления точек мы введем как обратную для их умножения: если $A\neq B$, то через A/B обозначим множество точек Q, для которых $A\in BQ$; положим еще, по определению, $A/A=A$.

В силу определения умножения точек условие $A\in BQ$ означает, что A принадлежит отрезку BQ (рис. 9); таким образом, точка $Q\in A/B$ лежит на проходящей через A и B прямой и расположена по другую сторону от A, чем точка B. Итак, *частное A/B двух точек* — это луч с началом A, продолжение которого проходит через B. Можно также сказать, что A/B — это тень, отбрасываемая «колышком» A, освещенным «фонарем» B (рис. 10).

Частное α/β двух фигур α и β мы определим как объединение всех лучей A/B, где $A\in\alpha$, $B\in\beta$, то есть объединение всевозможных частных точек фигуры α на точки фигуры β (рис. 11). Например, если A — точка, то α/A — это тень, отбрасываемая фигурой α, освещенной «фонарем» A (рис. 12).

Как легко видеть (см. рис. 13—17), для каждых трех точек A, B и C справедливы следующие соотношения (первые два из них похожи на свойства чисел):

$$(A/B)/C=A/(BC),$$
$$(A+B)/C=(A/C)+(B/C),$$
$$A/(B+C)=(A/B)+(A/C),$$
$$(AB)/C=(A/C)(B/C)$$
$$A/(BC)=(A/B)(A/C).$$

Ясно, что для любой фигуры α справедливо включение $\alpha/\alpha\supset\alpha$. Особый интерес представляют такие фигуры λ, для которых $\lambda/\lambda=\lambda$. Такие фигуры мы назовем *линейными* (см. упр. 18).

Упражнения

8. Что представляют собой фигуры А) $(ABC)/D$; б) $(AB)/(CD)$; в) $A/(BCD)$?

9. Что представляют собой фигуры

$$\alpha/\alpha;\ (\alpha/\alpha)/\alpha;\ [(\alpha/\alpha)/\alpha]/\alpha;\ldots,$$

если α — объединение трех точек, не лежащих на одной прямой?

10. Запишите с помощью операций умножения и деления точек области, на которые

а) две точки A и B делят прямую;

б) три прямые, соединяющие попарно точки A, B и C, делят плоскость;

в) четыре плоскости, соединяющие по три данные точки A, B, C и D, делят пространство.

В упр. 11—13 приняты такие обозначения: A — точка; λ, λ_1, λ_2 — прямые; π, π_1, π_2 — плоскости; σ, σ_1, σ_2 — окружности; $\varkappa$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ — круги; τ, τ_1, τ_2 — треугольники.

11. Что представляют собой фигуры а) A/λ; б) λ/A; в) A/π; г) π/A д) A/σ; е) σ/A; ж) $A/\varkappa$; з) $\varkappa/A$; и) A/τ; к) τ/A; л) λ/π; м) π/λ?

12. Что представляют собой фигуры а) σ_1/σ_2; б) $\varkappa_1/\varkappa_2$; в) τ_1/τ_2; г) λ_1/λ_2; д) π_1/π_2?

В упр. г) отдельно рассмотрите случаи, когда λ_1 и λ_2 пересекаются; параллельны; скрещиваются.

13. Что представляют собой фигуры а) σ/σ; б) $\varkappa/\varkappa$; в) τ/τ; г) λ/λ; д) π/π?

14. Докажите, что для любых точек A, B, C, D справедливы соотношения
а) $A(B/C)\subset(AB)/C$; б) $A/(B/C)\subset(AC)/B$;
в) $(A/B)(C/D)\subset(AC)/(BD)$;
г) $(A/B)/(C/D)\subset(AD)/(BC)$.
(Аналогичные свойства справедливы и для произвольных фигур.)

15. Докажите, что для любых фигур α, β, γ
а) $(\alpha\cap\beta)/\gamma\subset(\alpha/\gamma)\cap(\beta/\gamma)$;
б) $\alpha/(\beta\cap\gamma)\subset(\alpha/\beta)\cap(\alpha/\gamma)$.

16. Докажите, что для любых фигур α, β, γ
а) $(\alpha/\beta)/\gamma=\alpha/(\beta\gamma)$; б) $(\alpha+\beta)/\gamma=(\alpha/\gamma)+(\beta/\gamma)$; в) $\alpha/(\beta+\gamma)=(\alpha/\beta)+(\alpha/\gamma)$;
г) $(\alpha\beta)/\gamma=(\alpha/\gamma)(\beta/\gamma)$; д) $\alpha/(\beta\gamma)=(\alpha/\beta)(\alpha/\gamma)$.

17. Докажите, что линейная фигура обязательно выпукла.

18. Докажите, что все линейные фигуры плоскости исчерпываются точками, прямыми и всей плоскостью; в пространстве линейными фигурами являются точки, прямые, плоскости и все пространство.

19. Условимся писать $\alpha\approx\beta$, если у фигур α и β есть хотя бы одна общая точка (для сравнения заметим, что $\alpha=\beta$, если у α и β все точки общие).

Докажите, что выполняется следующее изящное правило пропорции: если фигуры α, β, γ, δ таковы, что $\alpha/\beta\approx\gamma/\delta$, то $\alpha\delta\approx\beta\gamma$ (рассмотрите сначала случай, когда α, β, γ, δ — точки; рис. 18). Докажите также, что $\alpha/\beta\approx\gamma\Leftrightarrow\beta\gamma\approx\alpha$.

«Не евклидово» умножение точек и фигур

Содержание данной статьи базируется на недавних исследованиях американского геометра Вальтера Пенровица. Идея исследований Пенровица (вовсе не рассчитанных на начинающих математиков, какими являются читатели этого журнала) состояла в рассмотрении широкого класса новых «геометрий», отличных от привычной вам «школьной» гео-

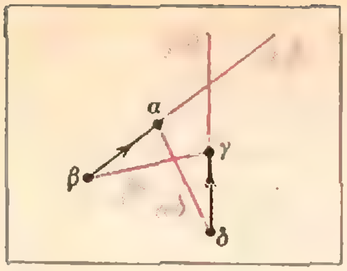


Рис. 18.

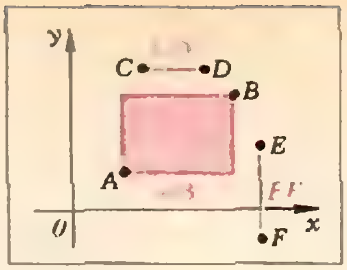


Рис. 19.

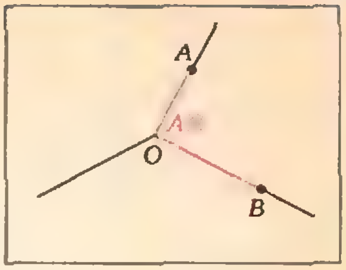


Рис. 20.

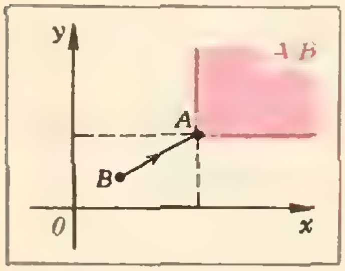


Рис. 21.

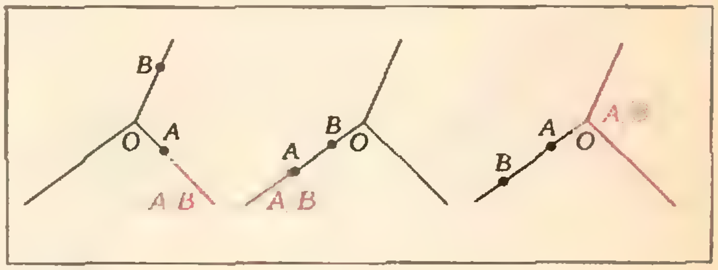


Рис. 22.

метрии Евклида; эти геометрии можно назвать «не евклидовыми» геометриями. Вот два примера «не евклидова умножения точек» по Пенровицу:

I. *Произведением AB точек A и B* на координатной плоскости назовем прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, «натянутый» на A и B (рис. 19); если прямая, проходящая через точки A и B, параллельна какой-нибудь из осей координат, то прямоугольник вырождается в отрезок и произведение AB совпадает, по определению, с тем произведением, которое мы определяли раньше.

II. Фиксируем фигуру П, образованную тремя выходящими из одной точки O лучами (рис. 20). Эта фигура будет нашим «универсумом»: будем рассматривать далее только точки, принадлежащие П, и фигуры, являющиеся подмножествами множества П. Под *произведением AB точек* $A \in П$ и $B \in П$ условимся понимать кратчайшую ломаную, соединяющую A и B внутри фигуры П.

После того как определено *произведение точек*, дословно так же, как и раньше, последовательно определяются *произведение фигур, выпуклая фигура, частное точек, частное фигур, линейная фигура*. На рисунке 21 изображено частное точек A/B для примера I, на рисунке 22 — частное A/B для примера II (при различных расположениях точек A и B).

Оказывается теория выпуклых фигур в «геометриях Пенровица» имеет очень много общего с соответствующей теорией в обычной евклидовой геометрии.

Упражнения

20. Проверьте, что произведение AB и частное A/B точек для примера I удовлетворяют всем свойствам, перечисленным в основной части статьи и в упражнениях. Какие фигуры являются в этой «геометрии» выпуклыми? Какие — линейными?

21. То же для примера II.

Редакционная коллегия журнала «Квант» с глубоким прискорбием извещает читателей о безвременной кончине члена редакционной коллегии известного советского математика члена-корреспондента АН СССР Анатолия Илларионовича Ширшова, последовавшей 28 февраля 1981 года.

Н. Вагутен

Формула площади

В этой статье мы обсудим полезную формулу, выражающую площадь многоугольника через координаты его вершин. При подготовке статьи использовано письмо А. Старцева, присланное в «Квант» в 1970 году (когда автор был еще школьником).

Комбинации трапеций

Пусть дан многоугольник, расположенный в положительном квадранте $x>0$, $y>0$ и к тому же выпуклый. Занумеруем его вершины против часовой стрелки: $A_1(x_1;\ y_1)$, $A_2(x_2;\ y_2)$, ..., как показано на рисунке 1, где число вершин $n=5$. Опустим из всех вершин перпендикуляры A_1H_1, A_2H_2, ..., A_nH_n на ось x; их длины равны y_1, y_2, ..., y_n.

Площадь трапеции $A_kH_kH_{k+1}A_{k+1}$ равна модулю произведения $(y_k+y_{k+1})(x_k-x_{k+1})/2$. Это произведение положительно при $x_k>x_{k+1}$ и отрицательно при $x_k<x_{k+1}$ (здесь k — одно из чисел 1, 2, ..., n, причем следующий за n номер $n+1$ надо заменить на 1). Замечательным образом оказывается, что сумма всех n таких однотипных произведений как раз равна площади многоугольника $A_1A_2...A_n$. Например, для пятиугольника на рисунке 1 из пяти произведений

$$\frac{(y_1+y_2)(x_1-x_2)}{2} \qquad \frac{(y_2+y_3)(x_2-x_3)}{2}$$

$$\frac{(y_3+y_4)(x_3-x_4)}{2} \qquad \frac{(y_4+y_5)(x_4-x_5)}{2}$$

$$\frac{(y_5+y_1)(x_5-x_1)}{2}$$

три, соответствующие верхним сторонам (синие), положительны, а два, соответствующие нижним сторонам (красные), отрицательны; вычитая из суммы площадей синих трапеций сумму площадей красных, находим площадь пятиугольника.

Полученную сумму можно несколько упростить, сократив произведения x_1y_1, x_2y_2, ...:

$$S=\frac{(y_1+y_2)(x_1-x_2)}{2}+\frac{(y_2+y_3)(x_2-x_3)}{2}+$$

$$+\frac{(y_3-y_4)(x_3-x_4)}{2}+\frac{(y_4+y_5)(x_4-x_5)}{2}+$$

$$+\frac{(y_5+y_1)(x_5-x_1)}{2}=$$

$$=\frac{(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+...+(x_5y_1-x_1y_5)}{2}.$$

1. Выведите формулу площади выпуклого n-угольника при любом n.

Основная формула

Итак, площадь S выпуклого n-угольника с вершинами $A_k(x_k;\ y_k)$, $k=1, 2, ..., n$, равна

$$\frac{1}{2}\left[(x_1y_2-x_2y_1)+\right.$$

$$\left.+(x_2y_3-x_3y_2)+...+(x_ny_1-x_1y_n)\right]. \quad (1)$$

Выражение $ad-bc$ так часто встречается в математике, что для него принято специальное обозначение $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ и название «определитель

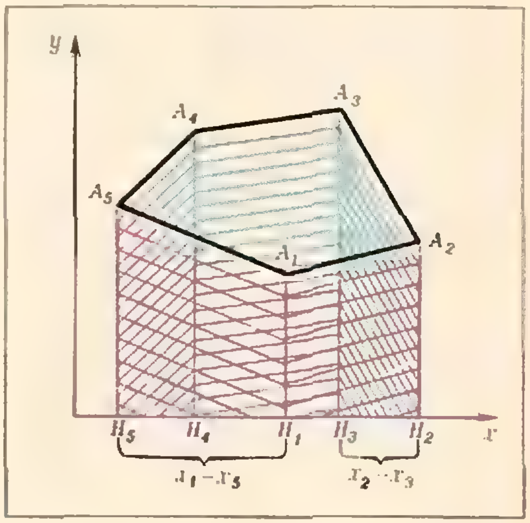


Рис. 1.

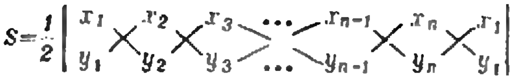


Рис. 2. Произведения чисел, соединенных синим отрезком, берутся со знаком +, а красным — со знаком —.

второго порядка»; с помощью таких определителей формулу площади можно записать компактнее:

$$S=\frac{\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_2 & x_3\\ y_2 & y_3\end{vmatrix}+\dots+\begin{vmatrix}x_n & x_1\\ y_n & y_1\end{vmatrix}}{2}.$$

(Для запоминания формулы (1) удобен рисунок 2. Заметим, что формула (1) предполагает, что вершины занумерованы против часовой стрелки.)

2. Проверьте, что если занумеровать вершины в обратном порядке — по часовой стрелке, то каждая круглая скобка, соответствующая определенной стороне многоугольника: A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1, изменит знак. Тот же эффект будет, если поменять местами привычные обозначения осей — изменить *ориентацию* плоскости.

Чтобы не заботиться о том или ином направлении нумерации вершин, вместо квадратных скобок в формуле (1) можно поставить знак модуля. Полученная формула

$$S=\frac{1}{2}\left|\sum_{k=1}^{n}(x_ky_{k+1}-x_{k+1}y_k)\right| \qquad (2)$$

годится для любого случая. (Напомним еще раз, что y_{n+1} и x_{n+1} следует заменить на y_1 и x_1.)

Заметим, что пока мы считали все координаты вершин многоугольника положительными, а сам многоугольник — выпуклым. Было бы очень обидно и удивительно, если бы наша формула оказалась верной лишь при таком дополнительном предположении. К счастью, это не так: *формула справедлива для любого многоугольника на плоскости.* Как доказать ее для невыпуклого многоугольника, мы обсудим ниже — в упражнении 13 (см. также заметку С. Сефибекова на с. 20). А сейчас мы избавимся от предположения, что многоугольник расположен внутри угла $x>0$, $y>0$.

3. Проверьте, что правая часть формулы (2) не изменится, если:

а) каждое x_k заменить на x_k+a;
б) каждое y_k заменить на y_k+b.

Любой многоугольник $A_1A_2...A_n$ мы можем параллельно перенести на некоторый вектор $(a;\ b)$ в угол $x>0$, $y>0$. При этом координаты его вершин изменяются, но не меняются ни его площадь — левая часть формулы (2), ни правая часть этой формулы. Поскольку для полученного многоугольника с положительными координатами вершин равенство (2) верно, оно будет верным и для исходного многоугольника $A_1A_2...A_n$.

4. Найдите по формуле (2) площади четырехугольников с вершинами:

а) (0; 0), (0; 1), (1; 0), (1; 1);
б) (0; 0), (—1; 1), (2; 3), (1; 2);
в) (0; 5), (3; 0), (0; —4), (2; 0).

Проверьте ответ, найдя эту площадь другим способом.

5. а) Запишите формулу для площади треугольника с вершинами (0; 0), $(a;\ b)$, $(c;\ d)$.

б) При каком условии три точки $(x_1;\ y_1)$, $(x_2;\ y_2)$ и $(x_3;\ y_3)$ лежат на одной прямой?

Комбинации треугольников

Основную формулу (2) можно вывести иначе — так, что будет ясен геометрический смысл каждого слагаемого $(x_ky_{k+1}-x_{k+1}y_k)/2$ (заметим, что в него входят координаты только двух соседних точек A_k и A_{k+1}). Мы по-прежнему можем считать, что $x_k>0$, $y_k>0$.

Оказывается, выражение $(x_ky_{k+1}-x_{k+1}y_k)/2$ равно по модулю площади треугольника OA_kA_{k+1}, причем положительно, если отрезок OA_{k+1} составляет больший угол с осью x, чем OA_k, и отрицательно, если меньший.

6. Пусть $B(x_1;\ y_1)$ и $C(x_2;\ y_2)$ — две точки с положительными координатами, причем $y_1/x_1<y_2/x_2$. Тогда площадь параллелограмма $OBDC$ (рис. 3) равна $x_1y_2-x_2y_1$.

Теперь ясно, что сумма n членов $(x_ky_{k+1}-x_{k+1}y_k)/2$ даст нужную площадь n-угольника (см. рисунок 4: из суммы площадей синих треугольников мы вычтем сумму площадей красных — это удачное совпадение знаков уже встречалось нам в рассуждениях с трапециями).

7. Проверьте, что геометрический смысл выражения $x_1y_2-x_2y_1$ для точек $B(x_1;\ y_1)$, $C(x_2;\ y_2)$ с координатами любого знака — это

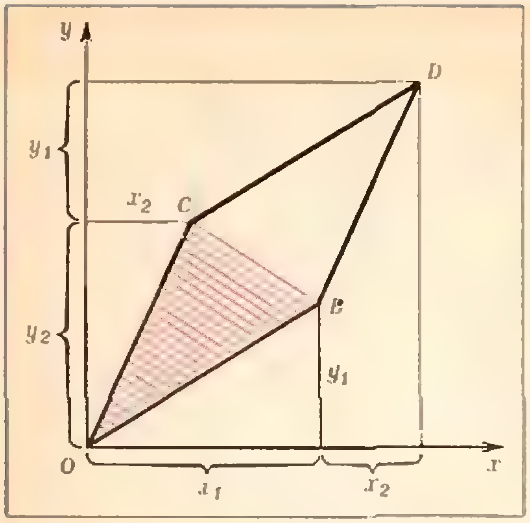


Рис. 3.

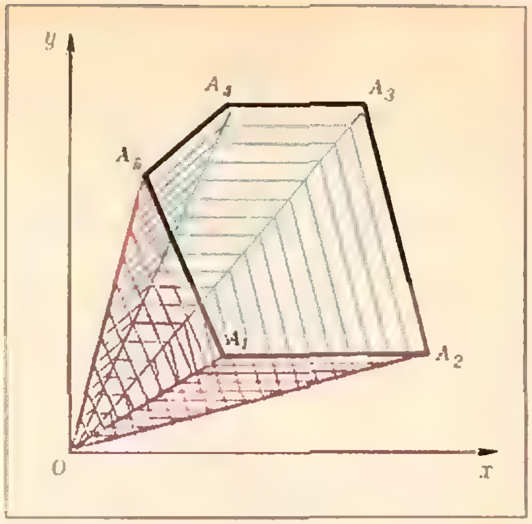


Рис. 4.

ориентированная площадь параллелограмма $OBDC$, построенного на векторах $\vec{OB}$ и $\vec{OC}$ *): площадь $OBDC$ берется со знаком «плюс», если направление $\vec{OC}$ получается из направления $\vec{OB}$ вращением против часовой стрелки (на угол не больше 180°) и «минус», если по часовой стрелке.

Дополнительные задачи и комментарии

В заключение предлагаем доказать еще несколько утверждений, связанных с формулой площади многоугольника, ее доказательствами и обобщениями.

8. Для двух векторов $\vec{b}=\vec{OB}$, $\vec{c}=\vec{OC}$ на плоскости будем обозначать ориентированную площадь параллелограмма $OBDC$ (упражнение 7) через $\vec{b} \wedge \vec{c}$.

Тогда для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любого числа λ выполнены равенства:

1°. $\vec{a} \wedge \vec{b} = -(\vec{b} \wedge \vec{a})$.

2°. $\lambda\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \wedge \vec{b})$.

3°. $\vec{a} \wedge \vec{b} = 0$ тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

4°. $\vec{a} \wedge (\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$.

Величину $\vec{a} \wedge \vec{b}$ называют иногда *псевдоскалярным произведением* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

9. Найдя координаты точек A, B пересечения прямой $ax+by+c=0$ с осями координат ($a \neq 0$, $b \neq 0$) и площадь треугольника ABM_0, где $M_0(x_0;\ y_0)$, выведите формулу для расстояния от точки M_0 до данной прямой:

$$|ax_0+by_0+c|/\sqrt{a^2+b^2}\ .$$

10. а) Пусть вершины A_1, A_2, …, A_n многоугольника двигаются по плоскости прямолинейно и равномерно (каждая — со своей постоянной скоростью). Докажите, что площадь многоугольника $A_1A_2...A_n$ меняется со временем t как модуль квадратного трехчлена от t *).

б) Рассмотрим произвольный *призмоид* высоты h — наименьший выпуклый многогранник, содержащий два *основания* — выпуклые многоугольники M_0 и M_1, лежащие в параллельных плоскостях π_0 и π_1, отстоящих на расстоянии h друг от друга. Пусть S_t — площадь сечения этого призмоида плоскостью, параллельной π_0 и отстоящей от нее на $th\,(0<t<1)$. Докажите, что S_t — квадратный трехчлен от t.

в) Докажите *формулу Симпсона:* объем призмоида равен

$$V=(S_0+4S_{1/2}+S_1)h/6,$$

где S_0 и S_1 — площади его оснований, а $S_{1/2}$ — площадь среднего сечения.

11*. Пусть все грани выпуклого многогранника — треугольники. Докажите, что его объем можно найти как сумму

$$\frac{1}{6}\sum\begin{vmatrix} x_i x_j x_k \\ y_i y_j y_k \\ z_i z_j z_k \end{vmatrix}$$

по всем его граням $\triangle A_iA_jA_k$, где $A_i(x_i;\ y_i;\ z_i)$ — вершина многогранника, а «определитель третьего порядка» вычисляется по формуле

$$\begin{vmatrix} x_1 x_2 x_3 \\ y_1 y_2 y_3 \\ z_1 z_2 z_3 \end{vmatrix} = x_1y_2z_3 - x_1y_3z_2 + x_2y_3z_1 -$$

$$- x_2y_1z_3 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1,$$

причем выписывать каждый определитель надо, глядя на грань $A_iA_jA_k$ из точки (0; 0; 0): координаты вершин видимых граней — по часовой стрелке, невидимых — против нее.

12. а) Проверьте с помощью формулы (2), что при гомотетии с коэффициентом k площадь увеличивается в k^2 раз, а при симметриях $(x;\ y)\to(-x;\ y)$, $(x;\ y)\to(x;\ -y)$, $(x;\ y)\to(-x;\ -y)$ она не меняется.

---

*) См. также статью А. Лопшица «Площади ориентированных фигур» («Квант», 1978, № 3).

*) Этот факт неоднократно использовался в «Кванте» (см., например, статью Н. Васильева «Семейство параллельных n-угольников» — «Квант», 1974, № 11).

б)* Проверьте, что при преобразованиях плоскости $(x;\ y)\to(x';\ y')$, где

$$x'=x\cos\varphi-y\sin\varphi,$$
$$y'=x\sin\varphi+y\cos\varphi,$$

площадь многоугольника не меняется. (Это преобразование — поворот на угол φ вокруг начала координат.)

в) То же — для преобразования $x'=kx$, $y'=y/k$ (k — фиксированное число): это — так называемый *гиперболический поворот*.

г) Во сколько раз изменяется площадь при преобразовании $x'=ax+by$, $y'=cx+dy$? (Ответ. Этот коэффициент один и тот же для всех многоугольников; он равен модулю определителя $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.)

13. Формула (2) верна и для невыпуклого многоугольника. Чтобы доказать ее, удобно использовать такую лемму: *Пусть MP — луч, выходящий из некоторой точки M. Если M лежит вне многоугольника, то, обходя многоугольник против часовой стрелки, мы пересечем луч MP четное число раз (поровну — справа налево и слева направо); если же точка M лежит внутри многоугольника, то — нечетное число раз (справа налево — на один раз больше).*

14. Пусть многоугольник разрезан ломаной линией на две части. Проверьте, что площади, определенные по формуле (2) для каждой из частей, в сумме дают выражение (2) для всего многоугольника.

Этот факт (аддитивность) вместе с результатами упражнений 3 и 12 а), б) (инвариантность относительно переносов, симметрий и поворотов) дает возможность принять число (2) за определение площади многоугольника.

15. Пусть все стороны многоугольника $A_1B_1A_2B_2\ldots A_mB_m$: $A_k(a_k;\ b_k)$, $B_k(a_{k+1};\ b_k)$, $k=1,\ \ldots,\ m$, причем $B_m(a_1;\ b_m)$. Запишите формулу площади для такого многоугольника. Проверьте ее для шестиугольника с вершинами $(-1;\ 0)$, $(2;\ 0)$, $(2;\ 5)$, $(3;\ 5)$, $(3;\ 7)$, $(-1;\ 7)$. (Эта формула пригодилась нам в решении задачи **М608** — см. «Квант», 1980, № 11.)

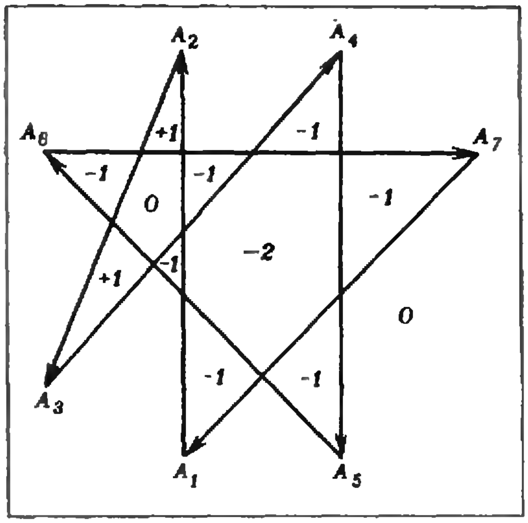


Рис. 5. Числа указывают, сколько раз (с учетом направления) ломаная обходит вокруг каждого куска.

16. Выясните, что дает формула (2) для любых n точек $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ плоскости.

Ответ состоит в следующем: пусть замкнутая ломаная $A_1A_2\ldots A_n$ делит плоскость на r кусков площади $S_1,\ \ldots,\ S_r$; тогда правая часть формулы (2) равна сумме $k_1S_1+\ldots+k_rS_r$, где целое число k_j показывает, сколько оборотов делает ломаная $A_1A_2\ldots A_n$ вокруг j-го куска (причем обороты против часовой стрелки считаются положительными, по часовой стрелке — отрицательными, см. рис. 5).

С. Сефибеков

О площади многоугольника

В статье Н. Вагутена обсуждается формула площади многоугольника и ее приложения. Еще одно доказательство этой формулы приводится в публикуемой ниже заметке.

Для площади S_n n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ справедлива формула

$$S_n=\frac{1}{2}\left|(x_1y_2+x_2y_3+\ldots+x_ny_1)-(y_1x_2+y_2x_3+\ldots+y_nx_1)\right|. \qquad (1)$$

в которой $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$, …, $(x_n;y_n)$ — координаты вершин A_1, A_2, …, A_n.

Доказательство формулы (1) мы разобьем на несколько задач.

Задача 1. *Докажите формулу (1) для треугольника:*

$$S_3=\frac{1}{2}\left|(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(y_1x_2+y_2x_3+y_3x_1)\right|. \qquad (2)$$

Указание. Докажите формулу (2) сначала для прямоугольного треугольника с катетами, параллельными осям координат (рис. 1), затем для треугольника, одна из сторон которого параллельна одной из осей координат (рис. 2), а затем для общего случая (рис. 3).

Если вы решили до конца эту задачу, вам будет несложно решить и следующую.

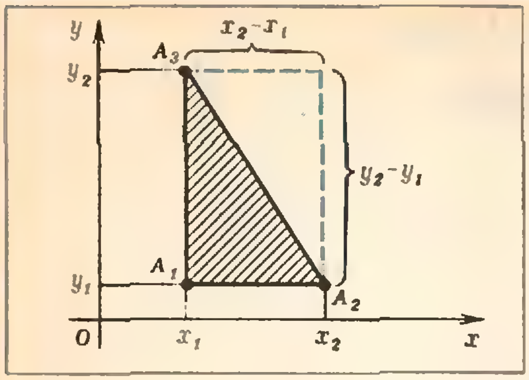


Рис. 1.

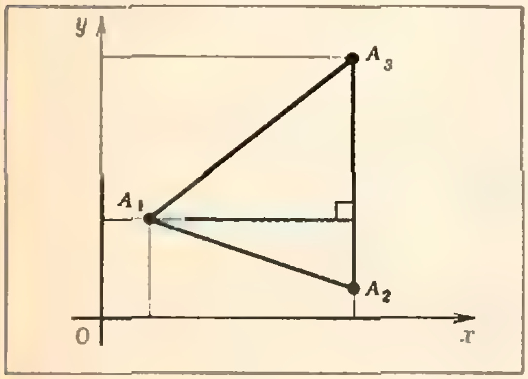


Рис. 2.

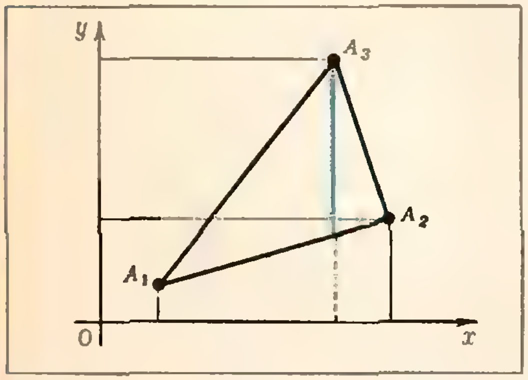


Рис. 3.

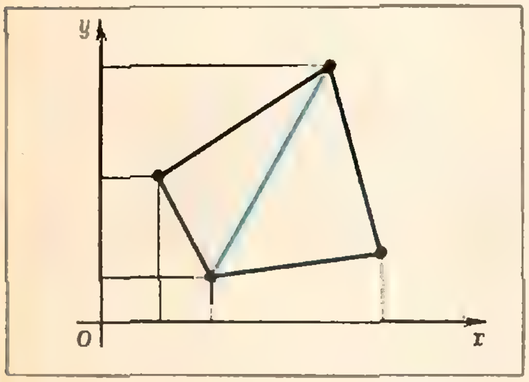


Рис. 4.

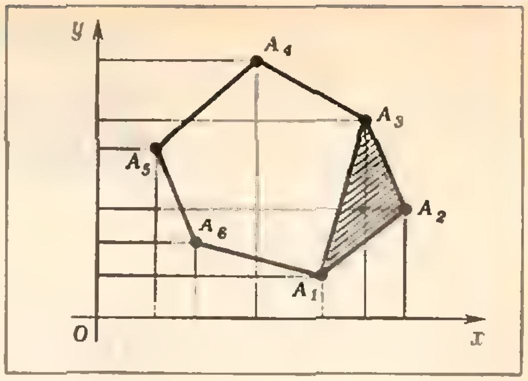


Рис. 5.

Задача 2. *Докажите формулу* (1) *для выпуклого четырехугольника.*

Указание. Разбейте четырехугольник на два треугольника (с помощью диагонали — см. рис. 4) и примените задачу 1.

Задача 3. *Докажите формулу* (1) *для выпуклого n-угольника.*

Указание. Воспользуйтесь методом математической индукции, представив данный выпуклый n-угольник $A_1A_2A_3...A_n$ в виде объединения $(n-1)$-угольника $A_2A_3...A_n$ и треугольника $A_1A_2A_3$ (рис. 5). Читателям, не знакомым с методом математической индукции, мы предлагаем решить задачу 3 для $n=5$.

Перейдем теперь к случаю произвольного (не обязательно выпуклого) многоугольника.

Задача 4. *Докажите формулу* (1) *для произвольного четырехугольника.*

Задача 5*. *Докажите формулу* (1) *для произвольного n-угольника.*

Указание. Докажите, что в любом n-угольнике можно провести диагональ, целиком лежащую внутри него и примените метод математической индукции.

задачник Кванта

Задачи

M676 — M680; Ф688 — Ф692

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 июня 1981 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка 26/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 4 — 81» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М676, М677» или «Ф688». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

M676. Докажите, что для любого натурального m сумма цифр числа 1981^m не меньше 19.

А. Савкин

M677. Внутри остроугольного треугольника ABC выбрана точка M, являющаяся
а) точкой пересечения медиан;
б) точкой пересечения биссектрис;
в) точкой пересечения высот.
Докажите, что если радиусы окружностей, вписанных в треугольники AMB, BMC, AMC, равны, то треугольник ABC — правильный.

Э. Туркевич

M678. $2m$-значное число называется *справедливым*, если его четные разряды содержат столько же четных цифр, сколько и нечетные. Докажите, что в любом $(2m+1)$-значном числе можно вычеркнуть одну из цифр так, чтобы полученное $2m$-значное число было справедливым (рис. 1).

А. Сидоренко

M679. а) На плоскости расположены четыре круга так, что первый касается второго в точке A, второй — третьего в точке B, третий — четвертого в точке C и четвертый — первого в точке D (рис. 2). Докажите, что через четыре названные точки можно провести окружность или прямую.
б) *В пространстве расположены четыре шара так, что первый касается второго в точке A, второй — третьего в точке B, третий — четвертого в точке C и четвертый — первого в точке D. Докажите, что через четыре названные точки можно провести окружность или прямую.
в) *В пространстве расположены четыре шара так, что каждый касается трех других. Докажите, что шесть точек касания принадлежат одной сфере или одной плоскости.

В. Произволов

M680. Два связиста играют в такую игру. Имеются n телефонных узлов, и связисты по очереди соединяют кабелем два из них по своему выбору. Выигрывает тот, после хода которого с любого узла можно будет дозвониться до любого другого (быть может, через несколько промежуточных; начало игры изображено на рисунке 3).

а) Выясните, кто выигрывает при $n=4, 5, 6, 7, 8$ — начинающий или его партнер?

б) Каков ответ при произвольном n?

Рассмотрите также два видоизмененных варианта игры:

в) Пусть игрок, связавший все узлы, проигрывает. Ответьте на вопросы пунктов а) и б) для этой новой игры;

г) Пусть вначале все узлы попарно связаны кабелем, а связисты убирают по очереди по одному соединению. Игрок, нарушивший связь в схеме, проигрывает. Вопрос тот же: кто выигрывает при правильной стратегии для $n=4, 5, 6, 7, 8$? для произвольного n?

Замечание. Можно было бы рассмотреть четвертый вариант: считать, что в пункте г) игрок, нарушивший связь, выигрывает. Полное исследование этого варианта игры автору неизвестно.

А. Разборов

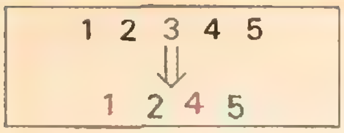


Рис. 1.

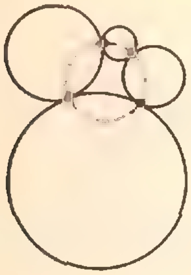


Рис. 2.

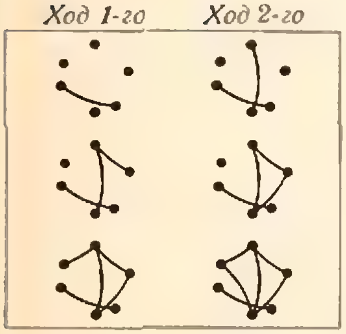


Рис. 3.

Ф688. Тонкий обруч массы M и радиуса R жестко закреплен при помощи легких спиц на легкой тонкой оси, проходящей через центр обруча, так, что плоскость обруча составляет с осью угол α (рис. 4). Определить, какую работу необходимо совершить, чтобы раскрутить ось до угловой скорости ω.

С. Кротов

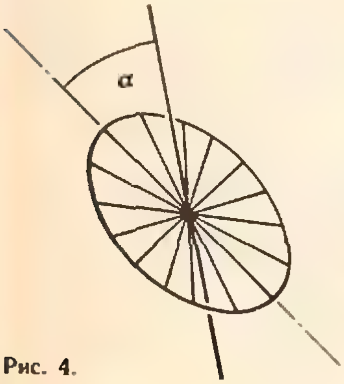


Рис. 4.

Ф689. На гладком горизонтальном столе лежит пачка бумаги, в которой 500 листов. Сотый лист (считая снизу) больше других. Этот лист осторожно тянут в горизонтальном направлении. Какое максимальное ускорение можно сообщить пачке, чтобы она при этом двигалась, не распадаясь? Каково максимальное ускорение, с которым может двигаться центр масс пачки? С каким ускорением должен двигаться при этом сотый лист? Коэффициент трения бумаги о бумагу $\mu=0{,}2$.

З. Рафаилов

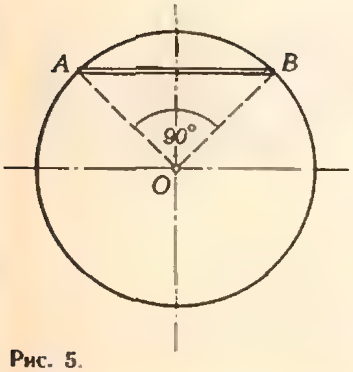


Рис. 5.

Ф690. Между точками A и B на поверхности Луны, расположенными на угловом расстоянии 90°, прорыт прямолинейный канал (рис. 5), заполненный воздухом при нормальной температуре. Давление воздуха в середине канала $p=10^5$ Па. Найти давление воздуха в канале у поверхности Луны. Луну считать однородным шаром с диаметром $D=3480$ км. Ускорение $g_л$ свободного падения на поверхности Луны в шесть раз меньше земного.

А. Стасенко

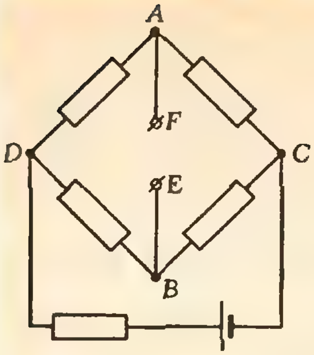


Рис. 6.

Ф691. Между точками E и F схемы, изображенной на рисунке 6, включают сначала идеальный вольтметр, а затем амперметр. Их показания равны соответственно U_0 и I_0. Какой ток будет течь через резистор с сопротивлением R, включенный между точками E и F?

В. Петерсон

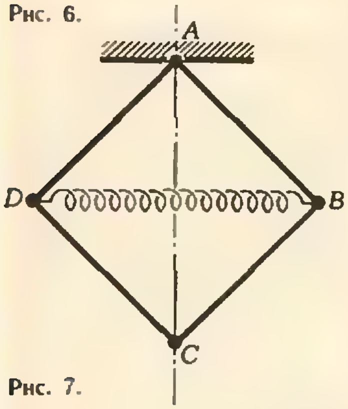


Рис. 7.

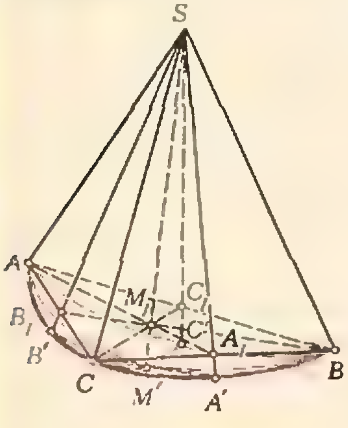
Ф692. Конструкция, изображенная на рисунке 7, состоит из четырех легких жестких стержней длины a каждый и легкой пружины длины $2a$. Стержни скреплены небольшими одинаковыми массивными шариками. В точке A система закреплена. В состоянии равновесия системы стержни образуют квадрат. Определить период малых колебаний системы, при которых точка C движется вдоль вертикали.

К. Сергеев

Решения задач

М628, М630 — М635; Ф638 — Ф646

М628. *На сфере построен треугольник, одна «сторона» которого имеет величину 120°. Докажите, что «медиана», опущенная на эту сторону, делится каждой из двух других «медиан» на две равные части. («Медианы» и «стороны» — дуги больших окружностей.)*



Соединим вершины сферического треугольника ABC с центром сферы S (см. рисунок). В образовавшемся трехгранном угле с вершиной S плоские углы ASC, BSA и CSB служат мерой «сторон», а двугранные углы SA, SB и SC — мерой углов сферического треугольника ABC. Таким образом, все свойства сферического треугольника ABC и трехгранного угла S эквивалентны.

Проведем через каждое ребро трехгранного угла плоскость, проходящую через биссектрису противоположного этому ребру плоского угла. Линии пересечения этих трех плоскостей со сферой будут содержать «медианы» AA_1, BB_1, CC_1 сферического треугольника ABC. Остальные обозначения ясны из рисунка.

Предположим, что величина «стороны» AB равна 120°, или, что то же самое, $\widehat{ASB}=120°$. Тогда $\widehat{C_1SB}=60°$. Из прямоугольного треугольника C_1SB

$$|SC_1|=\frac{1}{2}|SB|=\frac{1}{2}|SC|,$$

откуда $\frac{|SC|}{|SC_1|}=2$.

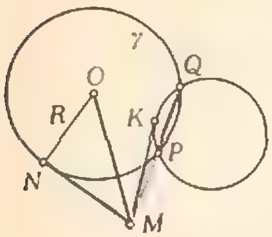
С другой стороны, $|CM_1|=2|M_1C_1|$ (отрезки CC_1, BB_1 и AA_1 — медианы плоского треугольника ABC); следовательно, $\frac{|CM_1|}{|M_1C_1|}=2$, откуда $\frac{|SC|}{|SC_1|}=\frac{|CM_1|}{|M_1C_1|}$. Таким образом, отрезок SM_1 — биссектриса угла CSC_1, откуда $\smile{CM'}\cong\smile{M'C'}$.

А. Ягубьянц

◆

М630. *На плоскости даны окружность γ и точка K. Проведем через произвольные точки P, Q окружности γ*

Обозначим центр окружности γ через O; пусть R — радиус этой окружности (см. рисунок). Проведем из точки M касательную к окружности γ. Поскольку квадрат длины касательной равен произведению длины секущей на длину *и точку K окружность. Пусть M — точка пересечения касательной к этой окружности в точке K с прямой PQ. Какое множество заполняют точки M?*



ее внешней части (докажите!),

$$|MK|^2=|MQ|\cdot|MP|=|MN|^2,$$

так что

$$|OM|^2-|MK|^2=|OM|^2-|MN|^2=R^2.$$

Легко доказать (например, с помощью теоремы Пифагора), что точка M лежит на некоторой прямой l, перпендикулярной OK, для всех точек которой разность квадратов расстояний до точек O и K равна R^2*). Можно показать также, что и наоборот — все точки этого перпендикуляра l принадлежат нашему множеству: если для точки $M\in l$ построить произвольную окружность, касающуюся MK в точке K и пересекающую γ в некоторых точках P, Q, то прямая PQ пересечет l в точке M.

И. Шарыгин

◆

М631. *Двузначные числа от 19 до 80 выписаны подряд. Делится ли получающееся число 192021...7980 на 1980?*

Так как $1980=99\cdot20$, причем 99 и 20 не имеют общих делителей, достаточно выяснить, делится ли число $A=192021...7980$ на 20 и 99. Делимость A на 20 очевидна. Далее заметим, что 100 в любой степени при делении на 99 дает остаток 1, поэтому число

$$A=19\cdot100^{61}+20\cdot100^{60}+...+79\cdot100+80$$

при делении на 99 дает такой же остаток, как и число

$$B=19+20+...+79+80=\frac{19+80}{2}\cdot62=99\cdot31.$$

Итак, получилось, что число B делится на 99; следовательно, и число A делится на 99, а вместе с тем и на 1980.

В. Федотов

◆

М632. *Груз, упакованный в контейнеры, нужно доставить на орбитальную космическую станцию «Салют». Число контейнеров не меньше 35, общая масса груза 18 тонн. Имеется семь транспортных кораблей «Прогресс», каждый из которых может доставить на орбиту 3 тонны груза. Известно, что эти корабли могут одновременно доставить любые 35 из имеющихся контейнеров. Докажите, что они смогут доставить на орбиту сразу весь имеющийся груз.*

Назовем контейнер массы более 0,5 т *тяжелым*, а контейнер, масса которого не превосходит 0,5 т, — *легким*. Поскольку общая масса груза равна 18 т, число тяжелых контейнеров меньше чем $18:0{,}5=36$, то есть не превосходит 35. Поэтому по условию задачи все тяжелые контейнеры можно погрузить на имеющиеся корабли (добавив, при необходимости, легкие контейнеры до общего числа 35).

После погрузки тяжелых контейнеров могут остаться только легкие контейнеры. Покажем, что все эти контейнеры можно по очереди догрузить в корабли. В самом деле, если на каком-то шаге погрузки контейнер массы $x\leqslant0{,}5$ т не удается погрузить ни на один из семи кораблей, то на каждый корабль погружено уже больше $(3-x)$ тонн груза, всего погружено больше $7(3-x)$ тонн, а осталось меньше $18-7(3-x)=7x-3$ тонн груза. Но тогда $x<7x-3$, откуда $x>0{,}5$, в противоречие с предположением. Требуемое доказано.

А. Колотов

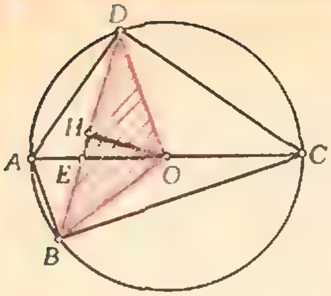
◆

М633. *На диаметре AC некоторой окружности дана точка E. Проведите через нее хорду BD так, чтобы площадь четырехугольника ABCD была наибольшей.*

Пусть O — центр, R — радиус окружности, $|OE|=a$. Легко видеть (см. рисунок), что $S_{ABCD}=\frac{2R}{a}S_{\triangle OBD}$. Следовательно, площадь четырехугольника наибольшая, когда наибольшей является площадь треугольника OBD. Треугольник OBD равнобедренный, $|OB|=|OD|=R$, $S_{\triangle OBD}=\frac{1}{2}R^2\sin\varphi$, где $\varphi=BOD$. Угол φ тем меньше, чем меньше длина хорды BD или, соответственно, чем длиннее проведенный к этой хорде перпендикуляр OH. Поскольку $|OH|\leqslant|OE|=a$, наименьшее

---

*) См., например, книгу Н. Б. Васильева и В. Л. Гутенмахера «Прямые и кривые», §2 (Азбука), утверждение Е, с. 32 (М., «Наука», 1978).



значение $\varphi=\varphi_0$ характеризуется тем, что отрезки OH и OE совпадают, что соответствует хорде BD, перпендикулярной AC; для этого значения

$$\cos\frac{\varphi_0}{2}=\frac{a}{R}.$$

Итак, остается найти наибольшее значение площади треугольника OBD при $\varphi_0<\varphi<\pi$. Возможны два случая:

1) Если $\varphi_0<\frac{\pi}{2}$, то максимум достигается при $\varphi=\frac{\pi}{2}$. В этом случае

$$\frac{a}{R}=\cos\frac{\varphi_0}{2}>\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$a>\frac{R}{\sqrt{2}},$$

и искомая хорда BD, стягивающая дугу в 90°, должна отстоять от центра на расстояние $R/\sqrt{2}$, то есть должна касаться окружности с центром O радиуса $R/\sqrt{2}$.

2) Если же $\varphi_0>\frac{\pi}{2}$, что будет при $a<\frac{R}{\sqrt{2}}$, то максимум площади достигается при $\varphi=\varphi_0$ — искомая хорда BD должна быть перпендикулярна диаметру AC.

И. Шарыгин

М634. *Обозначим через $S(n)$ сумму всех цифр натурального числа n.*

а) Существует ли натуральное n такое, что $n+S(n)=1980$?

б) Докажите, что хотя бы одно из любых двух последовательных натуральных чисел представимо в виде $n+S(n)$ для некоторого третьего натурального числа n.

◆

а) Ответ. Существует: $n=1962$. Как до этого догадаться, видно из решения пункта б) этой задачи.

б) Обозначим $n+S(n)$ через $S(n)$. Легко видеть, что если n оканчивается на цифру 9, то $S_{n+1}<S_n$; в противном случае $S_{n+1}=S_n+2$.

Докажем, что для любого $m\in\mathbf{N}$ хотя бы одно из чисел m, $m+1$ равно S_n для некоторого n. Так как $S_1=2$, для $m=1$ и $m=2$ утверждение задачи верно. Если $m>2$, то существуют S_n, меньшие m (например, S_1), а в то же время при $n\geqslant m$ $S_n>n\geqslant m$. Следовательно, среди n таких, что $S_n<m$, найдется наибольшее — обозначим его через N. Тогда $S_{N+1}\geqslant m>S_N$, поэтому N не может оканчиваться на цифру 9 и, значит, $S_{N+1}=S_N+2$. Следовательно, $m\leqslant S_{N+1}<m+2$, поэтому число S_{N+1} равно либо m, либо $m+1$ — требуемое доказано.

С. Конягин

М635. *Коротышки, проживающие в Цветочном городе, вдруг стали болеть гриппом. В один день несколько коротышек простудились и заболели, и хотя потом уже никто не простужался, здоровые коротышки заболевали, навещая своих больных друзей. Известно, что каждый коротышка болеет гриппом ровно день, причем после этого у него по крайней мере еще один день есть иммунитет, то есть он здоров и заболеть опять в этот день не может. Несмотря на эпидемию, каждый здоровый коротышка ежедневно навещает всех своих больных друзей. Когда началась эпидемия, коротышки забыли о прививках и не делают их.*

Докажите, что:

а) если до первого дня эпидемии какие-нибудь коротышки

◆

а) Пусть A, B, C — три друга, причем A в начале эпидемии имел иммунитет, B заболел в первый день, а C был здоров, но иммунитета не имел.

Если предположить, что иммунитет у каждого из этих коротышек длится один день, то, учитывая правила поведения коротышек, получаем «график заболеваемости», изображенный на рисунке («И» — имеет иммунитет; «З» — здоров, но не имеет иммунитета; «Б» — болен). Очевидно, в такой ситуации эпидемия никогда не закончится.

б) Приведем два решения этой задачи.

Первое решение наиболее ясно показывает, как идет распространение эпидемии. Изобразим всех коротышек точками и соединим линиями тех из них, которые знакомы между собой. Будем говорить, что коротышка B удален от коротышки A на расстояние k, если от коротышки A можно перейти к коротышке B, пройдя по k линиям, и нельзя перейти по меньшему числу линий. Разобьем множество всех коротышек на подмножества M_0, M_1, M_2, ... по следующим правилам: в множество M_0 входят все коротышки, заболевшие в первый день эпидемии; в множество M_1 — все коротышки, удаленные от коротышек из M_0 на расстояние 1; в множество M_2 — все коротышки, удаленные от коротышек из M_0 на расстояние 2, и так далее. Коротышек, которые вообще не связаны

сделали прививку и имели в первый день иммунитет, то эпидемия может продолжаться сколь угодно долго;
б) если же в первый день иммунитета ни у кого не было, то эпидемия рано или поздно кончится.

«График заболеваемости»

День	A	B	C
1	И	Б	З
2	З	И	Б
3	Б	З	И
4	И	Б	З
5	З	И	Б
⋮	⋮	⋮	⋮

с коротышками из M_0 никакой цепочкой знакомств, включим в отдельное множество M' — эти коротышки никогда не заболеют. Поскольку общее число коротышек конечно, число множеств M_k тоже конечно. С другой стороны, из определения расстояния между коротышками следует что коротышка из множества M_k заболеет ровно на $(k+1)$-й день эпидемии, причем может передать болезнь только коротышкам из множества M_{k+1} (остальные его знакомые принадлежат множеству M_{k-1} и на $(k+1)$-й день имеют иммунитет). Следовательно, в первый день болеют только коротышки из множества M_0, во 2-й — только коротышки из M_1, в 3-й — только коротышки из M_2, и так далее. Так как число множеств M_k конечно, эпидемия рано или поздно закончится.

Второе решение — от противного.

Если каждый коротышка будет болеть ровно один раз, то эпидемия кончится. Если же она не кончится, то должен быть коротышка, заболевший второй раз. Пусть в k-й день коротышка A заболел во второй раз первым (или одним из первых, если в этот же день повторно заболело несколько человек). Он заразился накануне от своего друга B, а B болел при этом в первый раз, заразившись в $(k-2)$-й день. Так как A и B — друзья, B должен был заразиться от A, когда A болел в первый раз. Следовательно A болел впервые в $(k-2)$-й день, а на следующий день имел иммунитет и поэтому не мог заразиться. Мы пришли к противоречию, показывающему, что никакой коротышка не мог болеть дважды.

А. Земляков, Ю. Лысов

◆

Ф638. *Читая в 1908 году лекции в Страсбурге, академик Л. И. Мандельштам поражал слушателей следующим красивым опытом. Два камертона на резонаторных ящиках, имеющих резонансные частоты 500 Гц и 505 гц, ставили рядом и один из камертонов возбуждали. Второй камертон при этом практически не откликался на колебания первого. Но стоило экспериментатору начать периодически закрывать и открывать рукой ящик звучащего камертона, как тут же начинал звучать второй камертон. Объясните результат этого опыта.*

Из ящика звучащего камертона исходят волны частоты $f=500$ Гц. Периодически закрывая ящик, Л. И. Мандельштам изменял амплитуду колебаний, приходящих ко второму камертону. Что же представляют собой колебания с меняющейся амплитудой — модулированные по амплитуде колебания?

Рассмотрим простейший случай, когда модуляция синусоидальная, то есть амплитуда A меняется по закону синуса (косинуса) с частотой F:

$$A=A_0\cos 2\pi Ft.$$

В этом случае изменение давления (или плотности) воздуха, которое и является звуковой волной, происходит по закону

$$\Delta p=(A_0\cos 2\pi Ft)\cos 2\pi ft. \qquad (*)$$

Преобразуем правую часть равенства (*), воспользовавшись известными формулами тригонометрии:

$$\Delta p=\frac{A_0}{2}\,[\cos 2\pi(f-F)t+\cos 2\pi(f+F)t].$$

Таким образом, колебания частоты f, амплитуда которых меняется с частотой F, можно представить в виде суммы (суперпозиции) гармонических колебаний (то есть колебаний синусоидальной формы с постоянной амплитудой) двух частот: $f_1=f-F$ и $f_2=f+F$. Если $F=5$ Гц, то частота f_2 совпадает с резонансной частотой камертона-приемника, соответствующая составляющая колебаний раскачивает этот камертон, и он начинает звучать.

При произвольном, несинусоидальном, но периодическом характере модуляции колебаний их представление в виде суммы гармонических составляющих (их спектр) будет содержать больше двух членов (гармоник) — говорят, что спектр колебаний будет богаче. Но если период модуляции равен $1/F$, то в спектре обязательно будет составляющая с частотой $f+F$ (как и с частотой $f-F$). Мы рассматривали синусоидальный закон модуляции только потому, что в этом случае разложение на гармоники выглядит наиболее просто и может быть проведено элементарным образом.

В. Белонучкин

Ф639. *Две пружинки с жесткостями k_1 и k_2 присоединены каждая одним концом к вертикальной стене, другим — к грузу массы m, лежащему на горизонтальном столе. В начальный момент пружина с жесткостью k_1 растянута на величину l_1, и пружина с жесткостью k_2 сжата на величину l_2. Груз отпускают. Найти амплитуду и период колебаний груза. Трением пренебречь.*

Примем координату центра груза в начальный момент за нуль (см. рисунок). Тогда зависимость сил упругости, действующих на груз, от координаты x груза будет следующая:

$$F_1(x)=-(l_1+x)k_1,$$
$$F_2(x)=(l_2-x)k_2.$$

Здесь (l_1+x), $-(l_2-x)$ — алгебраические значения удлинений первой и второй пружин соответственно. В момент прохождения грузом положения равновесия суммарная сила F, действующая на груз со стороны пружин, равна нулю. Обозначим x_0 координату груза в этот момент. Тогда

$$F(x_0)=F_1(x_0)+F_2(x_0)=-(l_1+x_0)k_1+(l_2-x_0)k_2=0,$$

откуда

$$x_0=\frac{l_2k_2-l_1k_1}{k_1+k_2}.$$

Амплитуда колебаний груза равна, очевидно,

$$A=|x_0|=\frac{|l_2k_2-l_1k_1|}{k_1+k_2}.$$

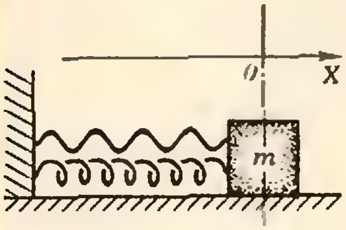
Чтобы найти период колебаний, запишем, как зависит возвращающая сила F от отклонения груза от положения равновесия:

$$F=F_1+F_2=-x(k_1+k_2)+(l_2k_2-l_1k_1)=$$
$$=-x(k_1+k_2)+x_0(k_1+k_2)=-(k_1+k_2)(x-x_0)$$

($(x-x_0)$ — отклонение груза от положения равновесия). Видно, что искомая зависимость такая же, как если бы к грузу была присоединена одна пружина с жесткостью $k=k_1+k_2$. Поэтому период колебаний груза равен

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}.$$

А. Бергман



◆

Ф640. *На рисунках 1 и 2 показаны границы областей волнений, возбуждаемых кораблем на двух участках пути. Красными стрелками указаны направления скорости корабля. На первом участке (рис. 1) течение отсутствует. Направление течения на втором участке (рис. 2) показано синей стрелкой. Определите скорость течения, если скорость корабля относительно берегов в обоих случаях одна и та же и равна 18 км/ч.*

Совместим рисунки 1 и 2 (рис. 3). Из произвольной точки A на курсе корабля опустим перпендикуляр на границу области волнения в отсутствие течения. Длина этого перпендикуляра ($|AB|$ или $|AB'|$) определяет расстояние, пройденное волной за то время, за которое корабль прошел расстояние AO. Расстояние BC (или $B'C'$) определяет снос границы области волнения течением за тот же промежуток времени. Следовательно, отношение $|BC|/|AO|$ (или $|B'C'|/|AO|$) определяет отношение скорости v течения к скорости корабля. Из чертежа находим

$$\frac{v}{v_0}=\frac{1}{5}\Rightarrow v=3{,}6\ \text{км/ч}.$$

В. Белонучкин

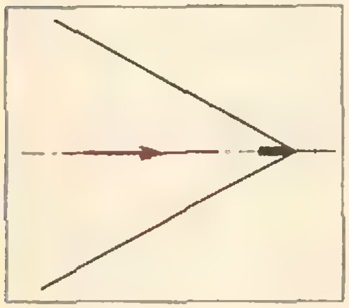


Рис. 1.

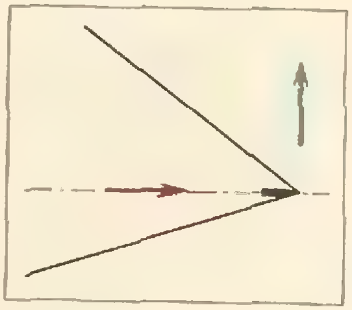


Рис. 2.

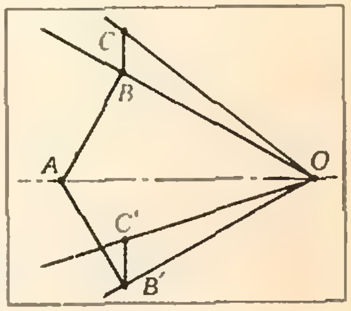


Рис. 3.

Ф641. *Настенные часы с маятником имеют массу $M=5$ кг. Масса груза на конце легкого маятника $m=150$ г. Какая ошибка в показаниях часов накопится за сутки, если часы подвесить к потолку на двух длинных параллельных шнурах? Считать, что часы, прикрепленные к стене, идут точно.*

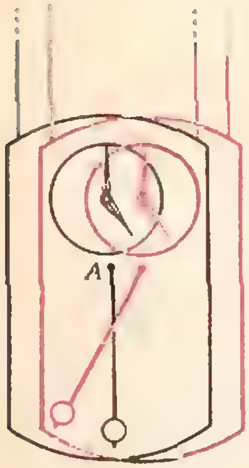


Рис. 1.

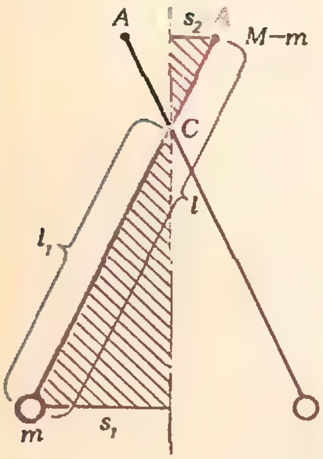


Рис. 2.

Подвешенные на шнурах часы, в отличие от часов, закрепленных на стене, могут раскачиваться. Если шнуры параллельны, то при раскачивании движение корпуса часов будет поступательным, то есть все точки часов (кроме маятника) будут двигаться одинаково. Это значит, что всю массу часов без маятника ($M-m$) можно считать сосредоточенной в одной точке, например в точке A подвеса маятника (рис. 1).

Перемещения корпуса часов при их раскачивании будут невелики — много меньше амплитуды колебаний маятника часов (это будет показано ниже). Поэтому длинные шнуры все время будут оставаться почти вертикальными. Условие это будет выполняться тем лучше, чем длиннее шнуры.

Таким образом, действующие на часы силы натяжения шнуров можно считать направленными вертикально вверх. Силы тяжести, действующие на корпус и на маятник, направлены вертикально вниз. Других внешних сил нет. Следовательно, в горизонтальном направлении на рассматриваемую систему (корпус часов + маятник) никакие внешние силы не действуют, и центр масс этой системы по горизонтали перемещаться не будет.

Теперь ясно, что при колебаниях маятника корпус часов (точка A) будет совершать колебания в противофазе — так, чтобы центр масс (точка C на рисунке 2) все время оставался на одной вертикали. Смещения груза маятника s_1 и корпуса часов s_2 в любой момент будут относиться обратно пропорционально соответствующим массам:

$$\frac{s_1}{s_2}=\frac{M-m}{m}. \qquad (1)$$

Из формулы (1) видно, что при $m \ll M$ амплитуда S_2 раскачивания корпуса много меньше амплитуды S_1 колебаний маятника часов ($S_2 \ll S_1$).

Остается выяснить, каким будет период T_1 колебаний маятника. Глядя на рисунок 2 и учитывая, что точка C по горизонтали не перемещается, нетрудно сообразить, что движение груза маятника m можно приближенно представить как свободные колебания математического маятника длиной l_1. (Строго говоря, точка C совершает перемещения по вертикали; однако при небольшой амплитуде колебаний маятника эти перемещения столь малы, что не влияют на период колебаний.)

Из подобия заштрихованных на рисунке 2 треугольников видно, что

$$\frac{l}{l_1}=1+\frac{s_2}{s_1}.$$

Подставляя сюда s_2/s_1 из соотношения (1), находим

$$\frac{l_1}{l}=1-\frac{m}{M}. \qquad (2)$$

Период колебаний математического маятника пропорционален квадратному корню из его длины: $T=2\pi\sqrt{l/g}$. Так как $l_1<l$, период T_1 колебаний маятника в подвешенных на длинных шнурах часах меньше периода T колебаний маятника в закрепленных на стене часах. Значит, подвешенные на шнурах часы будут спешить.

Учитывая соотношение (2), найдем отношение T_1/T:

$$\frac{T_1}{T}=\sqrt{\frac{l_1}{l}}=\sqrt{1-\frac{m}{M}}\approx 1-\frac{m}{2M}. \qquad (3)$$

(Здесь мы учли, что по условию задачи $m/M=0{,}03 \ll 1$, и воспользовались приближенной формулой $\sqrt{1+x}\approx 1+x/2$, справедливой при $|x| \ll 1$.)

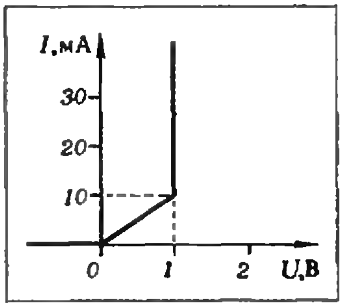
Теперь из (3) легко найти уменьшение периода $\Delta T=T-T_1$:

$$\Delta T=T\,\frac{m}{2M}.$$

Подставив численные значения m и M из условия, найдем: $\Delta T=0{,}015T$. За сутки подвешенные на шнурах часы уйдут вперед на 21 мин 36 с.

Е. Бутиков

Ф642. *На рисунке приведена идеализированная вольтамперная характеристика диода. Конденсатор емкости $C=100$ мкФ, заряженный до напряжения $U=5$ В, подключается через диод к резистору с сопротивлением $R=100$ Ом. Какое количество тепла выделится на резисторе при разрядке конденсатора?*



Пока ток разряда превышает $I_0=10$ мА, напряжение на диоде остается постоянным и равным $U_0=1$ В. К тому моменту, когда ток упадет до значения I_0, напряжение на конденсаторе окажется равным

$$U_1=U_0+RI_0.$$

Заряд, протекший к этому времени по цепи, равен

$$q=C(U-U_0-RI_0).$$

Согласно закону сохранения энергии

$$\frac{CU^2}{2}-\frac{C(U_0+RI_0)^2}{2}=U_0q+W_1,$$

где W_1 — тепло, выделившееся на резисторе до этого момента. Далее диод просто эквивалентен резистору с сопротивлением $r=U_0/I_0$. При дальнейшем разряде на резисторе R выделяется тепло

$$W_2=\frac{CU_1^2}{2}\ \frac{R}{R+r}=\frac{C(U_0+RI_0)^2}{2}\ \frac{R}{R+\frac{U_0}{I_0}}.$$

Общее количество тепла, которое выделится на резисторе при разряде конденсатора, равно

$$W=W_1+W_2.$$

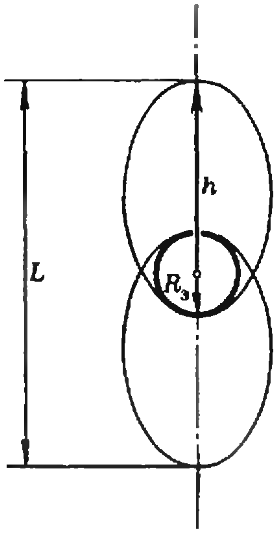
Подставляя значения W_2 и $W_1=\frac{C}{2}[U^2-(U_0+RI_0)^2]-U_0q$, находим

$$W=\frac{C}{2}\{(U-U_0)^2+RI_0U_0\}=8,5\cdot 10^{-4}\ \text{Дж}.$$

Е. Сурков, Е. Юносов

◆

Ф643. *С южного и северного полюсов Земли одновременно стартуют две ракеты с одинаковыми начальными скоростями, направленными горизонтально. Через время $\tau=3$ ч 20 мин ракеты оказались на максимальном удалении друг от друга. Определить максимальное расстояние между ракетами. Ускорение свободного падения на Земле считать известным. Радиус Земли $R_з=6400$ км.*



Ракеты будут двигаться по одинаковым эллиптическим орбитам (см. рисунок), которые касаются Земли на Северном и Южном полюсах. На максимальном удалении друг от друга ракеты окажутся через половину периода обращения. Таким образом, $T=2\tau$. Максимальное удаление h ракет от центра Земли (в апогее) можно найти, исходя из второго закона Кеплера, из которого следует, что при одинаковых периодах обращения на разных орбитах (в том числе и на круговой) большие полуоси орбит равны друг другу. Найдем радиус r круговой орбиты с периодом обращения T. Линейная скорость на такой орбите есть $2\pi r/T$. Приравнивая центростремительное ускорение ускорению силы тяжести, получим

$$\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2\frac{1}{r}=G\frac{M_з}{r^2}=\frac{gR_з^2}{r^2}.$$

Отсюда

$$r=\sqrt[3]{\frac{gR_з^2T^2}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{gR_з^2\tau^2}{\pi^2}}\approx 18\cdot 10^6\ \text{м}.$$

На основании второго закона Кеплера $h+R_з=2r$. Таким образом, максимальное расстояние L между ракетами равно

$$L=2h=2(2r-R_з)=5.92\cdot 10^6\ \text{м}=59\,200\ \text{км}.$$

Интересно отметить, что задача допускает и другие решения, так как ракеты оказываются на максимальном расстоянии друг от друга не только через полпериода обращения, но и через $\frac{3}{2}T$, $\frac{5}{2}T$ и т. д. В общем случае условию задачи удовлетворяют все орбиты с периодами обращения $T_n=\frac{2}{n}\tau$ (n — любое нечетное число), для которых $h_n>R_з$. Последнее условие можно переписать в виде $r_n>R_з$, где r_n — радиус круговой орбиты с периодом обращения T_n. Найденное ранее значение r соответствует случаю $n=1$. Для всех прочих r_n имеем.

$$r_n = \frac{r}{\sqrt[3]{n^2}}.$$

Числовой расчет показывает, что возможен еще случай с $n=3$. $r_3 \approx 8{,}6 \cdot 10^6$ м; $L_3 = 21{,}6 \cdot 10^6$ м $\approx 21\,600$ км. Для $n=5, 7, \ldots$ условие $r_n > R_3$ не выполняется.

С. Козел

◆

Ф644. *Цепь, состоящая из двух конденсаторов с емкостями C_1 и C_2 ($C_2 > C_1$) и двух идеальных диодов $Д_1$ и $Д_2$ (рис. 1), подключена к источнику переменного напряжения $u = U_0 \cos \omega t$. Определите зависимость напряжения на конденсаторах от времени в установившемся режиме. Изобразите полученные зависимости на графике. Сопротивление идеального диода в прямом направлении равно нулю, в обратном — бесконечности.*

Предположим, что цепь подключают к источнику в момент $t=0$. В этом случае конденсатор C_2 достаточно быстро зарядится через диод $Д_1$ до напряжения, равного амплитудному значению U_0 переменного напряжения. Конденсатор C_2 получит заряд

$$Q_0 = U_0 C_2.$$

В последующие моменты времени диоды $Д_1$ и $Д_2$ будут закрыты, то есть не будут пропускать ток, так как потенциалы катодов будут всегда больше потенциалов анодов и диоды идеальные (их сопротивления в закрытом состоянии равны бесконечности). Схема будет вести себя так, как будто диоды $Д_1$ и $Д_2$ отключены; поэтому заряд Q_0 будет сохраняться.

В таком случае через последовательно соединенные конденсаторы будет протекать переменный ток

$$i = I_0 \sin \omega t = \left(U_0 \omega \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\right) \sin \omega t,$$

где $I_0 = U_0 \omega \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$ — амплитуда тока, U_0, ω — амплитуда и частота переменного напряжения. Переменный ток будет создавать переменное напряжение на каждом конденсаторе:

$$u_{c1\sim} = \frac{I_0}{\omega C_1} \cos \omega t = U_0 \frac{C_2}{C_1 + C_2} \cos \omega t,$$

$$u_{c2\sim} = -\frac{I_0}{\omega C_2} \cos \omega t = U_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cos \omega t.$$

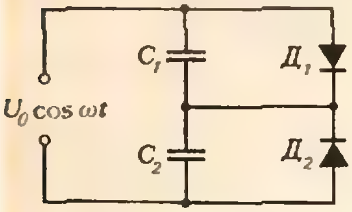


Рис. 1.

Кроме этого переменного напряжения, на конденсаторах будет присутствовать постоянная составляющая напряжения за счет заряда конденсатора C_2 до напряжения U_0. Для нахождения этой постоянной составляющей напряжения U запишем закон сохранения заряда:

$$C_2 U_0 = C_1 U + C_2 U.$$

Отсюда

$$U = \frac{C_2 U_0}{C_1 + C_2}.$$

Таким образом, суммарные напряжения на конденсаторах будут равны

$$u_{c1} = u_{c1\sim} - U = U_0 \frac{C_2}{C_1 + C_2} \cos \omega t - \frac{C_2 U_0}{C_1 + C_2},$$

$$u_{c2} = u_{c2\sim} + U = U_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cos \omega t + \frac{C_2 U_0}{C_1 + C_2}.$$

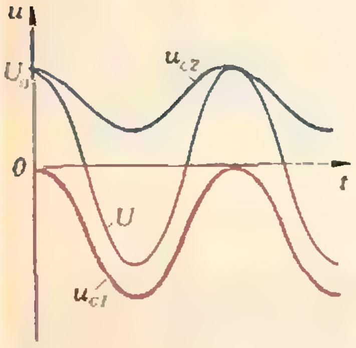


Рис. 2.

Графики этих зависимостей, построенные для $C_2 = 2C_1$, показаны на рисунке 2.

Заметим, что если подключение цепи к источнику происходит в момент времени $t \neq 0$, то схема придет в установившийся режим через некоторое время, когда диод $Д_1$ откроется и конденсатор C_2 зарядится до напряжения U_0.

В. Скороваров

◆

Ф645. *Громкоговоритель имеет диффузор с площадью поперечного сечения $S = 300$ см^2 и массой $m = 5$ г.*

Будем считать, что в свободном пространстве при достаточно низких частотах звуковых колебаний давление воздуха перед диффузором и за ним одно и то же. Тогда резонансная частота диффузора определяется его массой m и жесткостью k

Резонансная частота диффузора $\nu_0=50$ Гц. Какой окажется его резонансная частота, если поместить громкоговоритель на стенке закрытого ящика объема $V=40$ л. Расчет провести в предположении, что температура воздуха внутри ящика не изменяется при колебаниях диффузора.

подвеса:

$$\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Когда громкоговоритель помещен в ящик, при колебаниях диффузора смещение его на малую величину x (например, в глубь ящика) приводит к изменению давления воздуха внутри ящика. Нетрудно показать, что изменение $\Delta V=Sx$ объема воздуха в ящике и изменение Δp давления (при $T=\text{const}$) связаны соотношением

$$p\cdot\Delta V=V\cdot\Delta p\Rightarrow\Delta p=\frac{p\cdot\Delta V}{V}=\frac{pSx}{V}.$$

Тогда возвращающая сила, действующая на диффузор, равна

$$F=kx+\Delta p\cdot S=\left(k+\frac{pS^2}{V}\right)x.$$

Видно, что результирующая «жесткость» k_1 подвеса возросла в

$$\frac{k_1}{k}=\frac{k+pS^2/V}{k}=1+\frac{pS^2}{kV}=1+\frac{pS^2}{4\pi^2m\nu^2V_2}\approx 5{,}5 \text{ раз}.$$

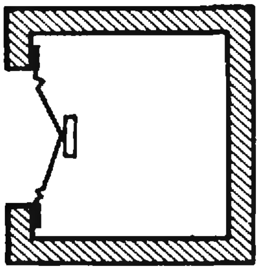
Таким образом, резонансная частота диффузора в этом случае равна

$$\nu_1=\nu\sqrt{\frac{k_1}{k}}\approx 117 \text{ Гц}.$$

Примечание. Используя закон Бойля — Мариотта для определения изменения давления в ящике, мы считали, что всюду внутри ящика давление одно и то же. Длина волны, соответствующая частоте ν_1 ($\lambda\approx 3$ м), существенно больше размеров ящика ($\sim 0{,}3\div 0{,}4$ м) и диффузора, так что это условие выполняется достаточно точно.

Более точную оценку можно провести, считая процесс не изотермическим, а адиабатным. Однако и эта оценка будет приблизительной. Для точного расчета необходимо учитывать и форму ящика, и много других факторов.

А. Зильберман



◆

Ф646. *Направленный поток электронов вылетает из тонкой широкой щели со скоростью $v=10^5$ м/с. Концентрация электронов в потоке $n=10^{10}$ частиц/м^3. На каком расстоянии от щели толщина пучка увеличится в 2 раза? Масса электрона $m=9\times10^{-31}$ кг, заряд электрона $e=1.6\cdot10^{-19}$ Кл, диэлектрическая постоянная $\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}$ Ф/м.*

Будем считать, что тонкий и широкий пучок электронов действует на крайние электроны (определяющие толщину пучка) как бесконечная заряженная плоскость. Поверхностная плотность заряда в нашем случае равна $\sigma=edSn/S=edn$ (d — толщина пучка, S — площадь его «поверхности»). Тогда

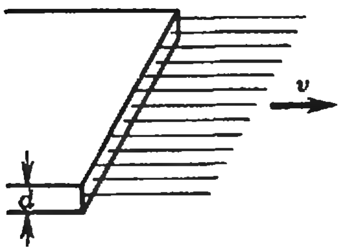
$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}=\frac{edn}{2\varepsilon_0}.$$

Скорость электронов вдоль пучка неизменна; в направлении, перпендикулярном пучку, электроны движутся с ускорением $a=Ee/m$. Толщина пучка увеличится в 2 раза, когда крайние электроны сместятся на $d/2$. Это произойдет через время $t=l/v$, где l — расстояние от щели. Таким образом,

$$\frac{d}{2}=\frac{at^2}{2}=\frac{1}{2}\,\frac{Ee}{m}\left(\frac{l}{v}\right)^2.$$

Отсюда находим l:

$$l=v\sqrt{\frac{2\varepsilon_0 m}{e^2n}}\approx 2{,}5\cdot10^{-2}\text{ м}.$$



Ясно, что при малой концентрации электронов поле, создаваемое пучком, нельзя считать эквивалентным полю заряженной плоскости. Модель, принятая нами, разумна, если поле создается большим количеством зарядов, то есть влияние отдельного (соседнего) электрона мало. Это условие запишется так:

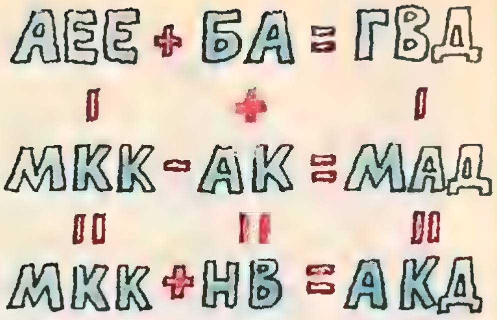
$$\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\ll\frac{edn}{2\varepsilon_0},\text{ где } r\sim n^{-\frac{1}{3}},\text{ или}$$

$$d\gg\frac{1}{2\pi\sqrt[3]{n}},$$

то есть при толщине пучка $0{,}5\div1$ мм и более условие хорошо выполняется

А. Зильберман

КВАНТ для младших школьников



Задачи

1. В ребусе, изображенном на рисунке, разным буквам соответствуют разные цифры, одинаковым — одинаковые. Расшифруйте ребус так, чтобы все шесть равенств (например, АЕЕ — МКК=МКК) одновременно стали верными.

2. Все числа ряда

0, 4, 18, 48, ?, 180,...

получены по некоторой формуле. По какой именно? Какое число пропущено?

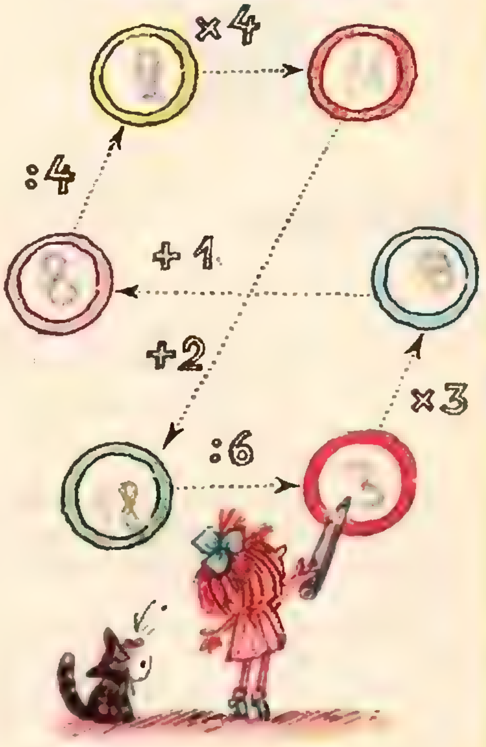
3. Впишите в кружки на рисунке числа так, чтобы каждое следующее в направлении стрелок число получалось из предыдущего при помощи действия, указанного над стрелкой.

4. Докажите, что площадь равнобедренной трапеции, диагонали которой перпендикулярны, равна квадрату ее высоты.

5. Натуральное число M состоит из 1980 единиц и 1983 двоек, а остальные цифры — нули. Может ли это число быть точным кубом?

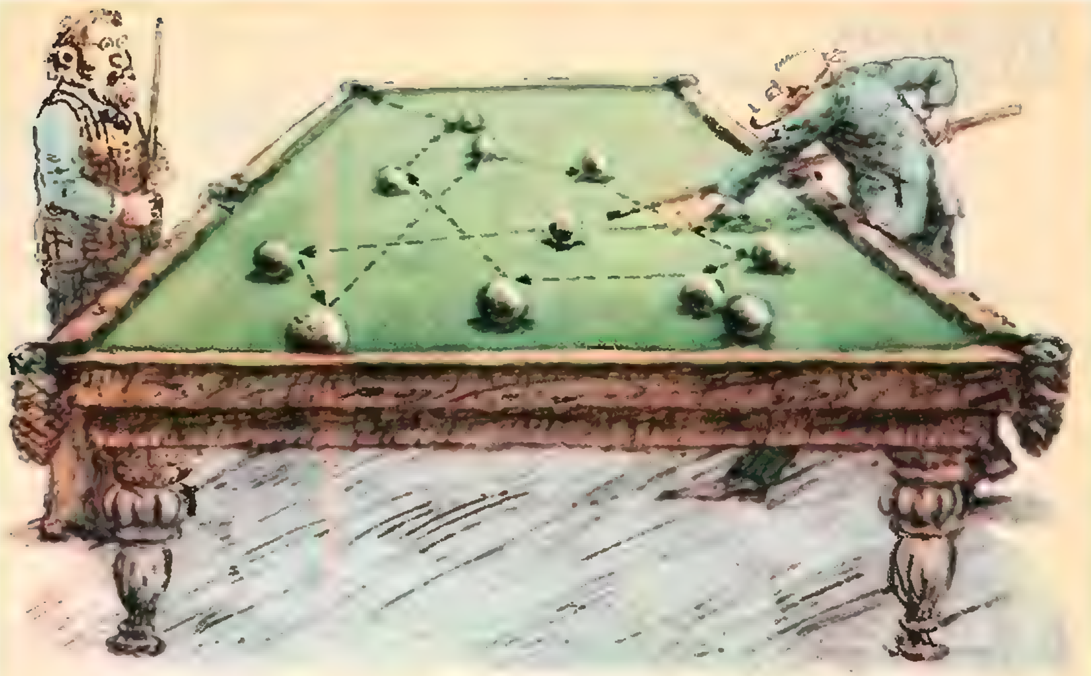
6. В прямоугольниках на рисунке сумма чисел в каждой строке одна и та же. Суммы чисел в каждом столбце тоже равны между собой. Попробуйте сложить каждый из этих прямоугольников из комплекта домино.

Эти задачи нам предложили
Э. Ректин, В. Рошаховский,
С. Сефибеков, Г. Шишкина



3	6	6	2	3	2	2	0
1	2	4	1	5	2	4	5
6	6	1	3	6	2	0	0
0	1	4	3	0	5	5	6
5	5	0	4	6	2	1	1
3	1	2	3	1	4	6	4
3	0	4	5	0	4	3	5

0	1	2	5	1	4	5	6
0	1	2	5	1	4	5	6
5	2	6	3	3	0	4	1
5	2	6	3	3	0	4	1
3	3	4	4	2	2	3	3
4	6	0	0	6	6	0	2
4	6	1	1	5	5	0	2



Г. Гальперин

Бильярд

Играя в бильярд, я одновременно беру уроки физики и геометрии.

С. М. Буденный

Доводилось ли вам играть в бильярд? Если не доводилось, то наверняка приходилось наблюдать, как играют другие.

Проследим за движущимся шаром. Пока он не столкнется со стенкой или другим шаром, он движется прямолинейно. При ударе о стенку шар отражается от нее практически так же, как луч света отражается от плоского зеркала: *угол падения равен углу отражения* (рис. 1).

В реальном бильярде существует трение, шар при соударении теряет часть механической энергии и может начать вращаться из-за нецентрального удара кия или столкновения с другими шарами. Теорию движения шара в бильярде описал французский физик Кориолис в книге «Математическая теория бильярдной игры».

Мы будем здесь рассматривать идеальный бильярд, то есть будем считать, что шары являются точками, движутся без трения и при соударении (со стенкой или с другими шарами) не теряют механической энергии.

На рисунке 2 показана замысловатая траектория, по которой движется одиночный шар после удара кием. Траектория может оборваться, если шар попадет в лузу, может

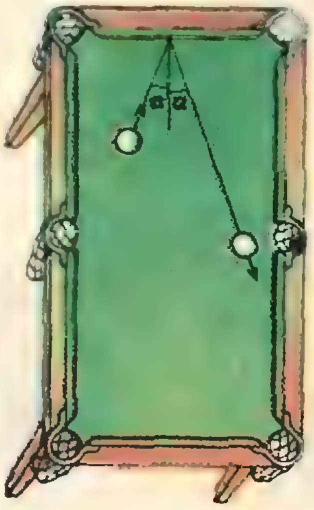


Рис. 1.

замкнуться, а может петлять бесконечно долго, заполняя все бо́льшую часть стола.

Рассмотрим такую задачу: пусть на бильярдном столе находится один шар; под каким углом следует направить его из точки A, чтобы он после заданного числа отражений попал в точку B (в частности, в лузу)?

При решении этой и многих других аналогичных бильярдных задач основную роль играет процедура «зеркального отражения» или «выпрямления бильярдной траектории»: отразим симметрично прямоугольник (исходный бильярд) относительно всех его сторон; все полученные таким образом прямоугольники вновь отразим относительно всех их сторон, и так далее до бесконечности (на рисунке 3 показаны также образы точки B при этих симметриях); в результате этих отражений любая траектория «распрямляется» (например, на рисунке 3 траектория $AC_1C_2C_3B$ последовательно переходит в $AC_1D_1D_2B'$, $AC_1D_1E_1B''$, $AC_1D_1E_1B'''$). Если полученная «выпрямленная траектория» проходит через образ точки B в одном из прямоугольников, то, очевидно, траектория шара в исходном прямоугольнике пройдет через B. Поэтому, для того чтобы пустить шар из точки A так, чтобы он после заданного числа отражений о стенки бильярда попал в точку B, нужно провести такой отрезок с началом в точке A и концом в одном из образов точки B, чтобы он пересек это же самое число раз линии сетки «клетчатой плоскости». Проделав обратную процедуру «свертывания» проведенного отрезка, превратим его в искомую траекторию в исходном бильярде (рис. 3).

Кроме обычного — прямоугольного — бильярда, можно рассматривать и другие. Например, можно рассмотреть бильярд в равностороннем треугольнике. Поскольку одинаковыми равносторонними треугольниками можно без щелей и перекрытий замостить всю плоскость, и здесь применима процедура «выпрямления бильярдной траектории» (рис. 4).

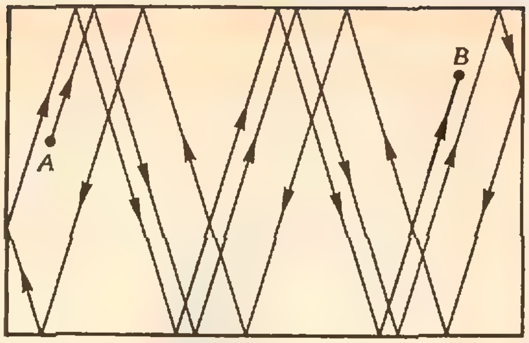


Рис. 2.

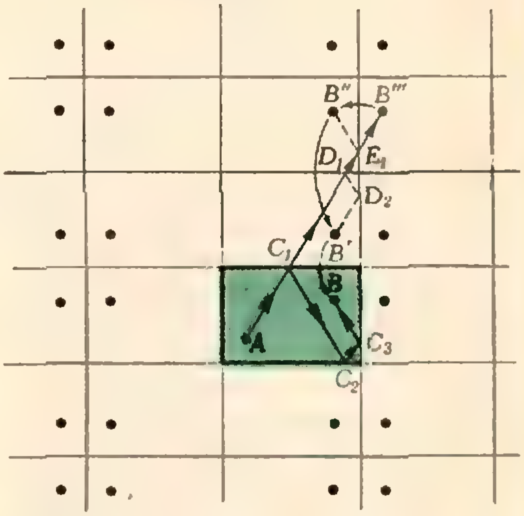


Рис. 3.

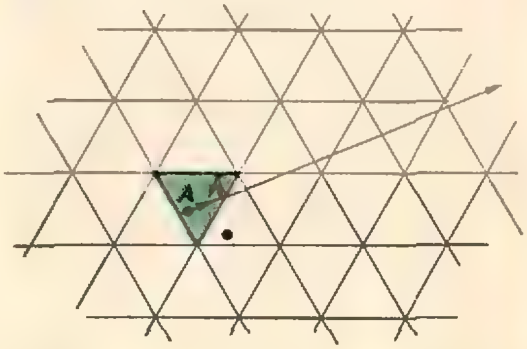


Рис. 4.

Оказывается, траектория бильярдного шара решает следующую широко известную задачу: каков тот кратчайший путь, по которому должна ползти пчела из точки A в точку B внутри равностороннего треугольника, чтобы сначала насладиться медом на одной стороне треугольника, потом сахаром — на другой стороне и, наконец, вареньем — на третьей? (Предполагается, что сторона полностью выма-

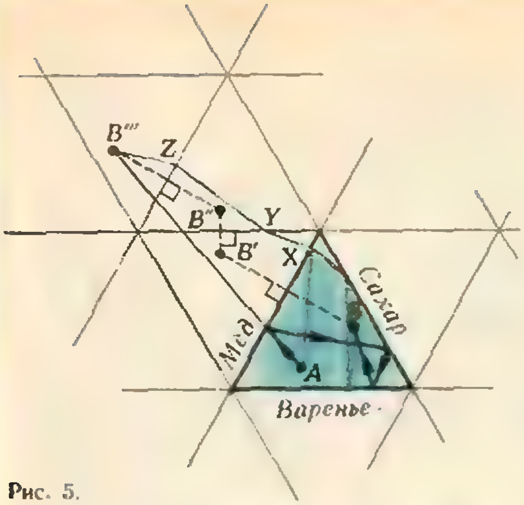


Рис. 5.

зана соответствующим сладким веществом.) Ответ приведен на рисунке 5. На этом рисунке синим цветом показан также другой (произвольный «не бильярдный») путь движения пчелы: после отражений он превращается в синюю ломаную $AXYZB'''$ с длиной, большей длины отрезка AB''' — «выпрямленной траектории» бильярдного шара.

Любопытны траектории на круглом бильярде (рис. 6,*а*). Во-первых, траектория (после первого отражения) состоит из звеньев одинаковой длины, что легко следует из конгруэнтности треугольников OAB и OCB (рис. 6,*б*). Середины всех звеньев траектории удалены от центра бильярда на одинаковое расстояние и, таким образом, расположены на окружности с тем же центром. Тем самым вся бильярдная траектория расположена в кольце (рис. 6,*в*).

Эта траектория может оказаться замкнутой, и тогда она образует либо правильный многоугольник, вписанный в окружность, либо самопересекающуюся звезду (рис. 7). Такие траектории называются *периодическими.*

Ясно, что вопрос «Как послать шар из точки A на окружности, чтобы он после n отражений оказался в исходной точке?» эквивалентен вопросу «Как построить правильный $(n+1)$-угольник с вершиной в точке A?». Поисками ответа на последний вопрос долгое время занимались древнегреческие математики, но ответа так и не нашли. Лишь к началу XIX в. великий немецкий математик Карл Фридрих Гаусс показал, в каких случаях искомое построение возможно с помощью циркуля и линейки, а в каких невозможно («Квант», 1977, № 8, с. 5).

Если же траектория не замкнутая, то она заполняет практически все кольцо, а именно *проходит сколь угодно близко к любой точке кольца.*

Докажем это утверждение. Фиксируем одну из точек отражения на окружности, обозначим ее через A. Двигаясь от точки A, мы будем последовательно получать на окружности новые точки отражения на одинаковом (дуговом) расстоянии друг от друга, пока не перескочим точку A. Ближайшую из двух точек к точке A — до перескока и после перескока через нее — обозначим через B. Длина β дуги AB не больше $\frac{\alpha}{2}$: $\beta\leqslant\frac{\alpha}{2}$. Начав двигаться от точки B, мы через некоторое число шагов попадем в точку на окружности, отстоящую от точки B на расстоянии β; затем попадем в точку, отстоящую от B на 2β, и т. д. (рис. 8). Можно считать, что мы движемся теперь по окружности шагами величиной β, по крайней мере вдвое меньшей, чем величина шага при начальном движении от точки A. После определенного числа шагов мы впервые перескочим точку B и выберем после этого ближайшую к ней (из двух точек — до и после перескока) точку C. Пусть длина дуги BC равна γ, тогда $\gamma<\frac{\beta}{2}<\frac{\alpha}{4}$. Как и выше, получим, что можно

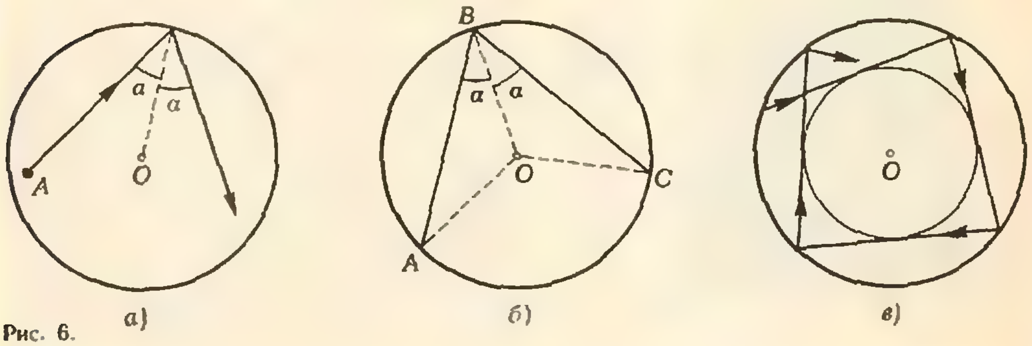


Рис. 6.

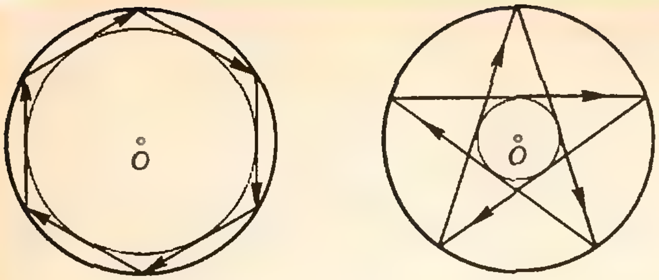


Рис. 7.

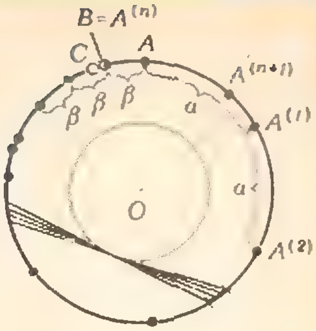


Рис. 8.

считать теперь величину прыжка равной γ. Повторив описанный процесс k раз, получим величину прыжка, не большую $\frac{\alpha}{2^k}$. Но при больших k величина $\frac{\alpha}{2^k}$ становится очень маленькой, так что мы обязательно попадем в любую, сколь угодно малую дугу, произвольно выбранную на окружности.

Итак, доказано, что точки отражения плотно заполняют окружность. Проведя касательные к внутренней окружности кольца из всех точек отражения на окружности, получим, что бильярдная траектория плотно заполняет все кольцо, что и требовалось.

Можно рассматривать бильярды и других форм; их общим свойством является выполнение закона бильярда: угол падения равен углу отражения.

Идеи бильярдной игры часто находят себе применение в различных областях современной математики, подчас неожиданных (например, в теории чисел), а сама бильярдная игра служит хорошей моделью реальных физических процессов, поскольку, например, молекулы газа, сталкиваясь с границей сосуда и между собой, ведут себя так же, как шары на зеленом сукне бильярда.

О более глубоких связях между бильярдом и математикой вы можете прочитать в двух статьях А. Землякова — «Квант», 1976, № 5 и 1979, № 9.

Задачи

1. В точечное отверстие прямоугольного бильярда влетает частица и начинает отражаться от его бортов по закону бильярда. Может ли частица с некоторого момента начать двигаться внутри бильярда по замкнутой траектории?

2. В прямоугольном бильярде точечный шар движется по замкнутой траектории, не проходящей через вершины. Величина угла между какими-то двумя звеньями равна 90°.

а) Может ли у траектории быть 4 звена? Если да, то при каком соотношении сторон бильярда?

б) А может ли быть 5 звеньев? 6 звеньев? 17 звеньев? 1980 звеньев?

3*. В прямоугольном бильярде из точки A параллельно диагонали посылается точечный шар. Найти множество таких точек M в бильярде, что шар, посланный из M одновременно с первым шаром и с той же скоростью (как по величине, так и по направлению), столкнется с ним.

4. В бильярде, имеющем форму равностороннего треугольника ($\triangle XYZ$), найти такие точки A и B, чтобы шар, посланный из A, ударившись о стороны XY, YZ и ZX (именно в этом порядке!), попал в B и чтобы длина пройденного им пути была максимально возможной. Во сколько раз длина этого пути превосходит длину стороны треугольника?

5. В круглом бильярде точечный шар движется по траектории γ. Оказалось, что какие-то два звена бильярдной траектории параллельны. Может ли траектория γ быть замкнутой и иметь 1717 звеньев? Быть незамкнутой?

6. В угол, градусная величина которого равна α, влетает частица; отразившись от его сторон максимально возможное число раз, она перестает сталкиваться с его сторонами. Известно, что это максимальное число столкновений равно 1800. В каких пределах может меняться величина α?

ПОПРАВКА

В статье Л. Бакаиной «Задачи о спутниках» («Квант», 1981, № 1) в условии четвертой задачи неправильно задано значение углового ускорения — оно должно быть положительным: $\beta = 3\cdot 10^{[illegible]}$ рад/с^2. В связи с этим ответ задачи должен быть другим — спутник окажется на высоте $H' = 497$ км.

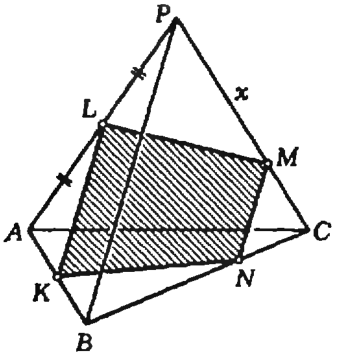
В. Рыжик

Задача как задача

В некоторой школе девятиклассники решали задачу: *В правильном тетраэдре PABC на ребре PC взята точка M, K — середина стороны AB. Через K и M проведена плоскость, параллельная прямой PB. Выразите периметр сечения через расстояние |PM|, если длина ребер тетраэдра равна 1. Вычислите его наибольшее и наименьшее значения.*

К доске вызвали Васю Нуликова. «Ну, что ж! Задача как задача — на производную,— подумал Вася.— С геометрическим содержанием. Говорят, такие бывают на экзаменах».

«Проведем из точки K прямую, параллельную прямой PB,— начал он.— Поскольку и точка K, и прямая PB принадлежат плоскости APB, проведенная прямая тоже будет лежать в плоскости APB. Обозначим точку пересечения проведенной прямой с ребром AP через L (см. рисунок). Из точки M тоже проведем прямую, параллельную (PB). Точку ее пересечения со стороны BC обозначим через N. Из $(KL) \parallel (PB)$ и $(MN) \parallel (PB)$ следует $(KL) \parallel (MN)$. Значит, прямые KL и MN лежат в одной плоскости, то есть $KLMN$ — плоский четырехугольник. Это и есть сечение, о котором говорится в условии задачи. Положим $|PM| = x$. Очевидно, $0 \leqslant x \leqslant 1$.»



Постепенно на доске появилось:

$$|KL| = \frac{1}{2},\ |PL| = \frac{1}{2},$$

$$|LM| = \frac{1}{2}\sqrt{4x^2-2x+1},$$

$$|MN| = |CM| = 1-x,$$

$$|BN| = x,\quad |KB| = \frac{1}{2},\quad |KN| = |LM|,$$

$$P_{KLMN} = \frac{3}{2} - x + \sqrt{4x^2-2x+1}\ .$$

«Периметр выразили, — сказал Вася. — Рассмотрим теперь функцию

$$\Phi(x) = \frac{3}{2} - x + \sqrt{4x^2-2x+1}\ .»$$

Продифференцировав и приведя к общему знаменателю

$$\Phi'(x) = \frac{4x-1-\sqrt{4x^2-2x+1}}{\sqrt{4x^2-2x-1}}\ ,$$

Вася отметил, что знаменатель в нуль не обращается, и стал решать уравнение $\Phi'(x) = 0$:

$$4x-1-\sqrt{4x^2-2x+1} = 0,$$

$$4x-1 = \sqrt{4x^2-2x+1}\ ,$$

$$\begin{cases} (4x-1)^2 = 4x^2-2x+1, \\ 4x-1 \geqslant 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x^2-6x = 0, \\ x \geqslant \frac{1}{4}\ , \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{2}\ .$$

«Слева меньше, справа больше,— сказал Вася, видимо сравнивая производную с нулем.— Кроме того, функция Φ непрерывна при $x = \frac{1}{2}$. Значит, $x = \frac{1}{2}$ — точка ее минимума. Сосчитаем теперь значения функции Φ в ее единственной точке экстремума $x = \frac{1}{2}$ и в концах отрезка $[0;1]$: $\Phi\left(\frac{1}{2}\right) = 2$, $\Phi(0) = \frac{5}{2}$, $\Phi(1) =$

$=\frac{1}{2}+\sqrt{3}$. Поскольку $2<\frac{1}{2}+\sqrt{3}<\frac{5}{2}$,

$$\min_{[0;\,1]}\Phi(x)=\Phi\left(\frac{2}{1}\right)=2$$

$$\max_{[0;\,1]}\Phi(x)=\Phi(0)=\frac{5}{2}.$$

Итак, наименьшее значение P_{KLMN} равно 2, наибольшее равно $\frac{5}{2}$».

Не успели все переписать в тетради этот ответ, как раздался голос Феди Крестикова.

«Тут что-то не так.— сказал Федя.— Если $x=0$, то M совпадает с P, а тогда сечение превратится в треугольник APB с периметром 3, а $3>\frac{5}{2}$.»

Вася молча, растерянно посмотрел на учителя. В классе стало тихо...

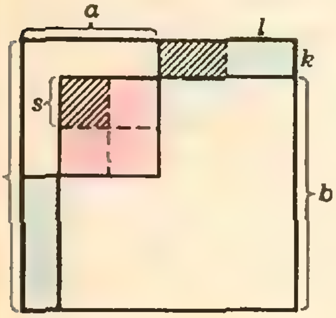
В той школе, в том классе в конце концов поняли, в чем дело. А вы?

Еще раз о пифагоровых тройках

Тройка натуральных чисел (3, 4, 5) является *пифагоровой:* $3^2+4^2=5^2$. Как найти все пифагоровы тройки? Об этом в «Кванте» уже писали (1979, № 4, с. 40). Здесь указывается еще один способ решения этой задачи.

Очевидно, если (a, b, c) — пифагорова тройка, то и любая тройка (ak, bk, ck), где k N, пифагорова. Если же какие-то два из чисел a, b, c имеют общий простой делитель p, то и третье число делится на p. Поэтому достаточно перечислить пифагоровы тройки с попарно взаимно простыми a, b, c.

Итак, пусть (a, b, c) — пифагорова тройка и числа a, b, c попарно взаимно просты.



Числа a и b одновременно не могут быть четными. Они не могут быть одновременно и нечетными, так как в противном случае сумма их квадратов делится на 2, но не делится на четыре, и, следовательно, не может быть квадратом натурального числа. Итак, одно из чисел a и b должно быть четным, второе нечетным; при этом число c нечетно. Будем считать, что a нечетно, а b четно.

Нарисуем квадрат со стороной длины c. В его верхний левый угол впишем квадрат со стороной длины a, а в правый нижний угол — квадрат со стороной длины b (см. рисунок). Эти два квадрата пересекаются по красному квадрату, а в большом квадрате остаются непокрытыми два синих прямоугольника. Из условия $a^2+b^2=c^2$ следует, что площадь красного квадрата равна сумме площадей синих прямоугольников.

Длины сторон синих прямоугольников равны $c-a$ и $c-b$, а длина стороны красного квадрата равна $a+b-c$. Поскольку числа $c-a$ и $a+b-c$ четные, каждый из синих прямоугольников можно разделить на два одинаковых прямоугольника, а красный квадрат — на четыре одинаковых квадрата с целыми длинами сторон. Обозначим длины сторон заштрихованного прямоугольника через k и l ($k=c-b$, $2l=c-a$), а длину стороны заштрихованного квадрата — через s ($2s=a+b-c$). Из равенства их площадей следует $kl=s^2$.

Из попарной взаимной простоты чисел a, b и c следует взаимная простота чисел k и l. Действительно, допустим, что числа k и l имеют общий простой множитель p. Поскольку $b^2=c^2-a^2=(c-a)(c+a)=2l(c+a)$, b делится на p. Но $c=b+k$. Значит, c также делится на p, что противоречит взаимной простоте b и c.

Вернемся к равенству $kl=s^2$. Поскольку k и l взаимно просты, а произведение их — точный квадрат, каждое из этих чисел само обязано быть квадратом. Пусть $k=m^2$, $l=n^2$. Тогда $s=m\cdot n$.

Выразим теперь a, b и c через m и n:

$$a=k+2s=m^2+2mn=(m+n)^2-n^2,$$
$$b=2l+2s=2n^2+2mn=2n(m+n),$$
$$c=k+2l+2s=m^2+2n^2+2mn=(m+n)^2+n^2.$$

Положив $m+n=t$, получим

$$a=t^2-n^2,$$
$$b=2nt,$$
$$c=t^2+n^2.$$

Легко проверить, что при любых t и n эти формулы дают, если $t>n$, пифагорову тройку. Если t и n — взаимно простые числа разной четности, то числа a, b, c будут попарно взаимно простыми.

З. Зурабишвили

Н. Ростовцев

Приближенные вычисления при решении задач по физике

Приступая к решению любой физической задачи, прежде всего надо выяснить, какие явления или процессы играют существенную роль, а какие — несущественную. Пренебрежение несущественными явлениями неминуемо ведет к пренебрежению относительно малыми величинами, то есть к приближенным вычислениям. Знание формул для приближенных вычислений и умение ими пользоваться часто очень упрощают расчеты.

Из курса математики известно, что выражение $(1+x)^n$ при $|x|<1$ можно представить в виде

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots \qquad (1)$$

Здесь n — любое действительное число. При натуральном n эта сумма обрывается на члене n-й степени; полученная формула называется формулой Ньютона.

Пусть имеется выражение $(a+b)^n$, тогда из (1)

$$(a+b)^n=a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n=a^n\left(1+n\frac{b}{a}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{b}{a}\right)^2+\ldots\right).$$

Если $|b|\ll|a|$, слагаемыми, содержащими отношение b/a во второй степени и выше, можно пренебречь и ограничиться только первыми двумя слагаемыми:

$$(a+b)^n=a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n\approx a^n\left(1+n\frac{b}{a}\right). \qquad (2)$$

Какая ошибка возникает при использовании этой приближенной формулы? Для оценки вполне можно считать, что ошибка равна третьему слагаемому в разложении:

$$\Delta y=a^n\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{b}{a}\right)^2. \qquad (3)$$

При решении физических задач часто вполне допустимы расчеты с точностью до одного процента. Из выражения (3) можно найти максимальное значение величины b/a, при котором точность расчета не выходит за допустимые рамки.

Очень просты и удобны формулы для приближенного вычисления значений тригонометрических функций. Если угол α, выраженный в радианах, достаточно мал, можно принять

$$\sin\alpha\approx\alpha, \qquad (4)$$

$$\operatorname{tg}\alpha\approx\alpha, \qquad (5)$$

$$\cos\alpha\approx 1. \qquad (6)$$

Расчеты показывают, что ошибка не превышает одного процента, если угол α удовлетворяет условиям

$\alpha\leqslant 23°\approx 4{,}0\cdot 10^{-1}$ рад для $\sin\alpha$,
$\alpha\leqslant 18°\approx 3{,}1\cdot 10^{-1}$ рад для $\operatorname{tg}\alpha$,
$\alpha\leqslant 8°\approx 1{,}4\cdot 10^{-1}$ рад для $\cos\alpha$.

(Это можно проверить, воспользовавшись, например, таблицами Брадиса.)

В физике довольно часто встречается показательная функция $y=a^x$. При малых значениях x выполняется приближенное равенство

$$a^x\approx 1+\frac{\lg a}{0{,}43}x. \qquad (7)$$

Рассмотрим теперь несколько конкретных задач.

Задача 1. *Сопротивление R проводника измеряют с помощью амперметра и вольтметра по схеме, изображенной на рисунке 1. Сопротивление вольтметра $R_V > R$. Определите ошибку, которую допускают,*

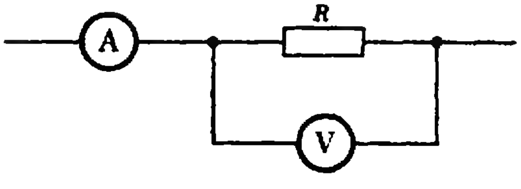


Рис. 1.

вычисляя сопротивление проводника без учета тока, текущего через вольтметр.

Сопротивление проводника, рассчитанное по показаниям амперметра и вольтметра, без учета сопротивления вольтметра, равно

$$R' = \frac{U}{I},$$

где U — напряжение на вольтметре, I — ток, текущий через амперметр.

Истинное сопротивление равно

$$R = \frac{U}{I - I_V} = \frac{U}{I - U/R_V}.$$

Искомая ошибка

$$\Delta R = R - R' = \frac{U}{I - U/R_V} - \frac{U}{I} = \frac{U}{I}\left(\left(1 - \frac{U/R_V}{I}\right)^{-1} - 1\right).$$

Так как $R_V \gg R$, то $U/R_V \ll I$. Применяя формулу (2), получаем

$$\Delta R = R - R' \approx \frac{U}{I}\left(1 + \frac{U/R_V}{I} - 1\right) \approx \frac{U^2}{I^2 R_V}.$$

Задача 2. *На какую долю изменится сила тяжести при подъеме на высоту $h = 1$ км над поверхностью Земли? Радиус Земли считать равным $R = 6400$ км.*

Сила тяжести тела массой m у поверхности Земли равна

$$F_0 = G\frac{mM}{R^2},$$

где G — гравитационная постоянная, M — масса Земли.

По мере удаления от поверхности Земли сила тяжести уменьшается, и на высоте h она равна

$$F_1 = G\frac{mM}{(R+h)^2}.$$

Из выражений для F_0 и F_1 найдем

$$\frac{F_0 - F_1}{F_0} = 1 - \frac{F_1}{F_0} = 1 - \frac{R^2}{(R+h)^2} = 1 - \frac{1}{(1 + h/R)^2} = 1 - \left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-2}.$$

Поскольку $h \ll R$, то есть $h/R \ll 1$, используя формулу (2), получаем

$$\frac{F_0 - F_1}{F_0} \approx 1 - \left(1 - 2\frac{h}{R}\right) = 2\frac{h}{R} \approx 3 \cdot 10^{-4}.$$

Задача 3. *В теории относительности кинетическую энергию частицы $E_к$ подсчитывают по формуле $E_к = E - E_0$, где E — энергия движущейся частицы, а E_0 — энергия покоящейся частицы. Покажите, что при скорости частицы $v \ll c$ (c — скорость света) кинетическая энергия приближенно равна $m_0 v^2/2$, где m_0 — масса покоящейся частицы.*

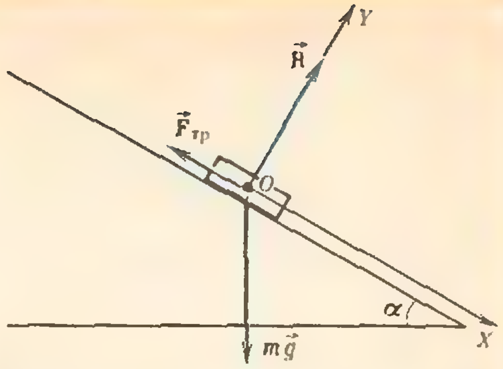


Рис. 2.

Согласно теории относительности

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \text{ и } E_0 = m_0 c^2.$$

Отсюда

$$E_к = E - E_0 = m_0 c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - 1\right) = m_0 c^2\left(\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 1\right).$$

Так как $v \ll c$, то есть $v/c \ll 1$, а значит, и $v^2/c^2 \ll 1$, применяя формулу (2), найдем

$$E_к \approx m_0 c^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - 1\right) = \frac{m_0 v^2}{2}.$$

Задача 4. *Тело соскальзывает с наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 7°$ с горизонтом. Найдите ускорение тела, если коэффициент трения тела о плоскость $\mu = 3 \cdot 10^{-2}$.*

На тело, движущееся по наклонной плоскости, действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз, сила трения $\vec{F}_{тр}$, направленная вверх по наклонной плоскости, и сила нормальной реакции $\vec{R}$, перпендикулярная к наклонной плоскости. Спроектируем силы на оси координат OX и OY, как показано на рисунке 2, и запишем уравнения движения:

$$mg \sin\alpha - F_{тр} = ma,$$
$$R - mg\cos\alpha = 0.$$

Учитывая, что

$$F_{тр} = \mu R,$$

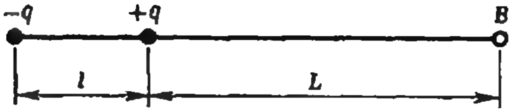


Рис. 3.

из уравнений движения найдем модуль ускорения тела:

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Так как угол $\alpha < 8°$, можно воспользоваться формулами (4) и (6) и считать, что $\cos\alpha \approx 1$ и $\sin\alpha \approx \alpha$ (угол α должен быть выражен в радианах). Подставляя значения $\cos\alpha \approx 1$ и $\sin\alpha \approx 1{,}2 \cdot 10^{-1}$, получаем

$$a \approx g(1{,}2 \cdot 10^{-1} - 3 \cdot 10^{-2}) = 8{,}8 \cdot 10^{-1}\ \text{м/с}^2.$$

Задача 5. *Сколько атомов распадается за время $t = 1$ с в одном грамме радия? Период полураспада радия $T = 1600$ лет. В грамме радия содержится $N_0 = 2{,}6 \cdot 10^{21}$ атомов.*

Если число радиоактивных атомов в начальный момент времени равно N_0, то, согласно закону радиоактивного распада, по истечении времени t число N нераспавшихся атомов равно

$$N = N_0 2^{-\frac{t}{T}}.$$

Отсюда можно найти искомое число n распавшихся атомов:

$$n = N_0 - N = N_0(1 - 2^{-\frac{t}{T}}).$$

Поскольку $t/T \ll 1$, применив формулу (7), получим

$$n \approx N_0\left(1 - 1 + \frac{\lg 2}{0{,}43}\frac{t}{T}\right) \approx 3{,}7 \cdot 10^{10}.$$

Заметим, что активность радиоактивного препарата, в котором за 1 с распадается $3{,}7 \cdot 10^{10}$ атомов, принимают за единицу активности и называют 1 кюри.

В заключение несколько слов о численных расчетах при решении задач. Записывая краткое условие задачи, разумно все числовые значения представить в виде $a \cdot 10^n$ (где $1 \leqslant a < 10$), причем с одинаковой степенью точности. В подавляющем большинстве случаев достаточна точность в две значащие цифры. Тогда получившийся результат следует округлить тоже до двух значащих цифр (см., например, решение задачи 4).

Упражнения

1. Подсчитайте максимальные значения a, при которых погрешности формул $(1+a)^3 \approx 1 + 3a$ и $\sqrt{1-a} \approx 1 - \frac{1}{2}a$ не превышают 0,01.

2. Коэффициент линейного расширения латуни $\alpha = 2 \cdot 10^{-5}\ \text{К}^{-1}$. На сколько отстанут часы с латунным маятником за сутки вследствие повышения температуры на $\Delta T = 10$ К?

3. Определите ускорение свободного падения на высоте 10 км от Земли, если у поверхности оно равно 981 см/с^2. Радиус Земли $R = 6400$ км.

4. Определите напряженность поля системы точечных зарядов $+q$ и $-q$ в точке B (рис. 3), если $l \ll L$.

5. Автомашина массой $m = 2 \cdot 10^3$ кг трогается с места и идет в гору, наклон которой $\alpha = 0{,}02$. Пройдя расстояние $s = 100$ м, она развивает скорость $v = 32{,}4$ км/ч. Коэффициент сопротивления движению $k = 0{,}05$. Определите среднюю мощность, развиваемую мотором автомашины при этом движении.

Малый интеркосмос

(Начало см. на с. 8)

Коллективы школ, внешкольных учреждений, научно-технических объединений учащихся, принявшие наиболее активное и плодотворное участие в конкурсе, а также подразделения и коллективы предприятий, учреждений, вузов, оказавшие действенную помощь в работе юным техникам и исследователям, будут награждены почетными дипломами, а преподаватели, руководители кружков, консультанты из числа ученых и специалистов, под руководством которых выполнены работы, победившие на конкурсе,— дипломами и значками.

По всем вопросам организации и проведении конкурса следует обращаться в ЦК ВЛКСМ (Москва, Новая площадь 6/8, тел. 206—84—70, 206—89—92), на Центральную станцию юных техников Министерства просвещения РСФСР (тел. 289—75—44), в Московский городской Дворец пионеров (тел. 139—89—54, 139—84—88).

Н. Розов

Читатели советуют

В обширной редакционной почте «Кванта» есть довольно много писем и заметок наших читателей — учащихся, преподавателей, просто любителей математики, которые касаются тематики раздела «Практикум абитуриента». В тех случаях, когда речь идет о частных вопросах, редакция отвечает авторам лично. Но в целом ряде писем и заметок содержатся полезные замечания теоретического характера, излагаются приемы решения отдельных типов задач, высказываются интересные соображения, сообщаются методические советы, предлагаются самостоятельно составленные упражнения. Хотя эти соображения и задачи далеко не всегда являются новыми и оригинальными, с некоторыми из них целесообразно, на наш взгляд, познакомиться тем, кто готовится к приемным экзаменам в вузы. Не считая возможным публиковать подобные письма и заметки целиком, редакция решила подготовить очередную подборку материалов, составленную по письмам читателей, с необходимыми дополнительными комментариями.

Опыт приемных экзаменов показывает, что особые затруднения у поступающих вызывают задачи по геометрии. Хотя предлагаемые абитуриентам задачи для своего решения требуют лишь известных из школьного курса фактов и формул, далеко не все могут в конкретном чертеже к конкретной задаче увидеть, какие и где теоремы нужно использовать. Этому можно научиться только одним способом — достаточной практикой в решении задач. Важно отметить, что при решении задач память автоматически обогащается различными идеями, связями, приемами, фактами — впоследствии именно такая дополнительная информация будет помогать быстрее справляться с новыми задачами.

Одна из «нелюбимых» поступающими фигур — трапеция, задачи на трапецию традиционно считаются трудными. Наш читатель *В. Варваркин* (Александрия) предлагает напомнить абитуриентам несколько полезных фактов, касающихся трапеции.

Пусть в трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD проведены диагонали, пересекающиеся в точке O. Тогда справедливы следующие утверждения:

— *треугольники AOB и DOC равновелики;*

— *произведение площадей треугольников AOD и BOC равно произведению площадей треугольников AOB и DOC;*

— *отрезок, соединяющий середины оснований BC и AD, проходит через точку O;*

— *точка O является серединой заключенного внутри трапеции отрезка прямой, проходящей через эту точку и параллельной основаниям трапеции.*

Приведем еще одно полезное предложение: *если в равнобедренную трапецию можно вписать окружность, то ее диаметр равен высоте трапеции и является средним геометрическим длин оснований трапеции.* Предлагаем читателям самостоятельно доказать перечисленные свойства трапеции.

Упражнения

1. Через точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная ее основаниям. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного между боковыми сторонами трапеции, если длины ее оснований равны a и b.

2. Пусть O — точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD Докажите, что

$$S_{ABCD}=(\sqrt{S_{AOD}}+\sqrt{S_{BOC}})^2$$

3. Пусть точки E и F — середины оснований BC и AD трапеции $ABCD$, P — точка пересечения отрезков BF и AF, Q — точка пересечения отрезков ED и CF. Докажите, что прямая PQ параллельна основаниям трапеции.

* * *

Среди присылаемых читателями материалов по-прежнему часто встречаются уравнения и системы уравнений, в решении которых главную роль играют не стандартные преобразования, а специальные логические рассуждения (см. «Квант», 1978, № 4, с. 50; 1979, № 4, с. 50). Вот одна из таких задач — ее предложил *Г. Шишкин* (Глазов):

4. Решить уравнение

$$\sin^{11} x+\cos^{11} x=\frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}.$$

* * *

«Недавно обратил внимание на предложение присылать в «Квант» короткие и красивые решения задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах, — пишет в своем письме ученик 10 класса *Андрей Сазонов* (Москва). — Об одной интересной задаче я и хочу рассказать».

Пример 1 (КГУ, мехмат, 1979). *Решить уравнение*

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=y^2-4y+5. \qquad (1)$$

Решение этой задачи, опубликованное в «Кванте», 1980, № 6 основано на некоторых оценках левой и правой частей уравнения (1). Между тем быстрее приводит к цели иной путь рассуждений.

Так как левая часть уравнения (1) при $x\neq\pi+2\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$ равна $\sin x$, данное уравнение можно переписать в виде

$$y^2-4y+(5-\sin x)=0$$

и рассматривать его как квадратное относительно y. Это уравнение имеет корни при тех и только тех значениях x, при которых дискриминант $D=\sin x-1\geqslant 0$. Отсюда следует, что $\sin x=1$. Дальнейшее решение очевидно.

Наш читатель *В. Новицкий* (Львов) справедливо указывает, что в статье И. Мельника («Квант», 1980, № 4) решение задачи на с. 41 страдает неоправданными длиннотами.

Пример 2 (КГУ, 1975). *Боковые ребра треугольной пирамиды имеют одинаковую длину l. Два плоских угла при вершине пирамиды имеют величину α, а третий — величину β. Найти объем пирамиды.*

Пусть $SABC$ — данная пирамида, в которой $\widehat{ASC}=\widehat{BSC}=\alpha$, $\widehat{ASB}=\beta$; легко показать, что $|AC|=|BC|$. Если использовать «стандартный чертеж» (S — вершина пирамиды, ABC — ее основание), то для решения нужно отдельно рассмотреть три разных случая: $\widehat{ACB}<90°$, $\widehat{ACB}=90°$, $\widehat{ACB}>90°$.

Однако ничто не мешает нам «положить пирамиду на другую грань» — считать вершиной точку C, а ASB — основанием (рис. 1). Так как плоские углы ASC и BSC конгруэнтны, вершина C проектируется в некоторую точку P, лежащую на биссектрисе SM угла ASB (докажите!). Воспользовавшись формулой из § 37 учебника «Геометрия 9—10», можем записать, что

$$\cos\widehat{PSC}=\frac{\cos\widehat{BSC}}{\cos\widehat{BSM}}=\frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\beta}{2}}.$$

Для завершения решения остается лишь вычислить длину высоты CP пирамиды (из треугольника PSC) и подсчитать площадь основания ASB (проведите необходимые выкладки).

Опубликованная в «Кванте» (1979, № 11) статья Г. Бевза называлась «Задачи можно решать проще». Ее автор для ряда экзаменационных задач указал простые решения, основанные на геометрических соображениях и почти не требующие вычислений. *Ю. Метт* (Москва) предлагает еще более простые решения нескольких задач, рассмотренных в статье.

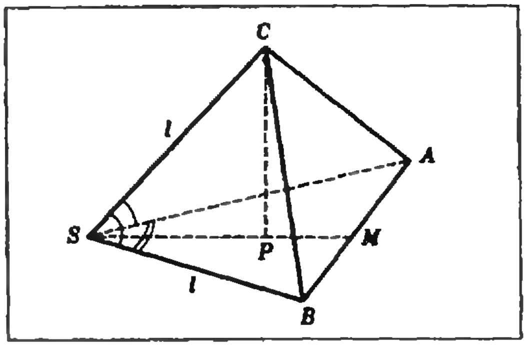


Рис. 1.

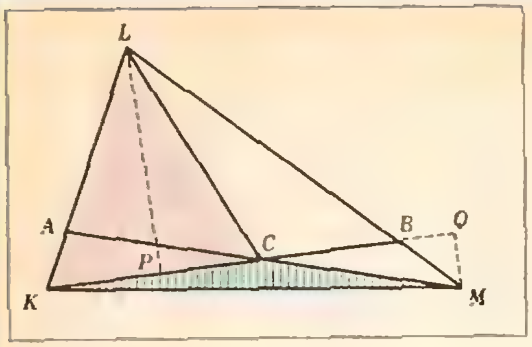


Рис. 2.

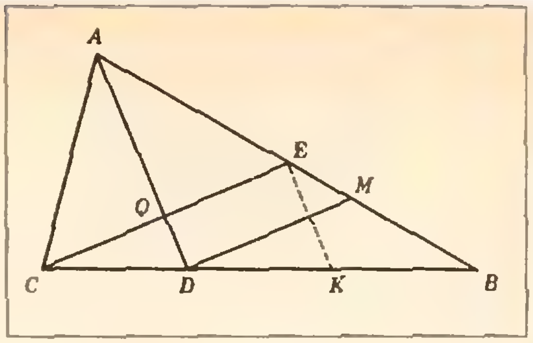


Рис. 3.

Пример 3 (МГУ, экономич. ф-т, 1978). *В треугольнике KLM на стороне KL взята точка A так, что $|KA|:|AL| = 1:3$; на стороне LM взята точка B так, что $|LB|:|BM| = 4:1$. Пусть C — точка пересечения прямых KB и MA. Известно, что площадь треугольника KLC равна 2. Найти площадь треугольника KLM.*

Эту задачу можно решить, используя только то, что *площади треугольников с одинаковыми основаниями относятся, как их высоты.* Сам по себе сформулированный факт, конечно, хорошо всем известен — основная трудность состоит в том, чтобы увидеть в конкретной конфигурации те треугольники, к которым его удобно и целесообразно применить.

Рассматривая внимательно рисунок 2, можно заметить, что треугольники KCL (его площадь нам известна) и KCM имеют общее основание KC. Поэтому, проведя высоты LP и MQ, запишем

$$S_{KCL} : S_{KCM} = |LP| : |MQ|.$$

Из подобия треугольников LPB и MQB получаем

$$|LP| : |MQ| = |LB| : |MB| = 4:1.$$

Таким образом, $S_{KCM} = 1/2$. Аналогичные рассуждения (проведите их!) показывают, что $S_{MCL} = 3/2$ и, следовательно,

$$S_{KLM} = S_{KCM} + S_{KCM} + S_{MCL} = 4.$$

Пример 4 (МФТИ, 1970). *В треугольнике ABC биссектриса AD делит сторону BC в отношении $|BD|:|CD| = 2:1$. В каком отношении медиана CE делит эту биссектрису?*

Решение задачи получается довольно просто, если провести отрезок EK, параллельный биссектрисе AD (рис. 3). Но еще быстрее к цели приводит построение отрезка DM, параллельного медиане CE. Тогда (читателям предоставляется обосновать эти равенства самостоятельно)

$$\frac{|AQ|}{|QD|} = \frac{|AE|}{|EM|} = \frac{|EB|}{|EM|} = \frac{|EM| + |BM|}{|EM|} =$$
$$= 1 + \frac{|BM|}{|EM|} = 1 + \frac{|BD|}{|CD|} = 3.$$

Попутно заметим, что в решении нигде не использовано то, что $[AD]$ — биссектриса; решение не изменится, если $[AD]$ — отрезок, соединяющий вершину A с точкой D, делящей сторону BC в заданном отношении.

Пример 5. *Доказать, что если $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ — величины углов треугольника, то*

$$\sin\frac{\widehat{A}}{2} \cdot \sin\frac{\widehat{B}}{2} \cdot \sin\frac{\widehat{C}}{2} \leqslant \frac{1}{8}. \qquad (2)$$

Решение этой задачи, основанное на преобразовании левой части неравенства (2) с помощью тригонометрических формул, можно найти, например, в книге В. Б. Лидского, Л. В. Овсянникова, А. Н. Тулайкова и М. И. Шабунина «Задачи по элементарной математике» (М., «Наука», 1973). Ученик 10 класса *Вячеслав Мельник* (Гайсин) предлагает решение, не требующее громоздких вычислений.

Из теоремы косинусов

$$\cos\widehat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

(как всегда, маленькие буквы означают длины сторон треугольника, лежащих против соответствующих углов). Тогда (учитывая, что $\sin\frac{\widehat{A}}{2} > 0$)

$$\sin\frac{\widehat{A}}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\widehat{A}}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}=$$

$$=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}<\frac{a}{2\sqrt{bc}}.$$

Совершенно аналогично убеждаемся, что

$$\sin\frac{\widehat{B}}{2}<\frac{b}{2\sqrt{ac}},\ \sin\frac{\widehat{C}}{2}<\frac{c}{2\sqrt{ab}}.$$

Для доказательства неравенства (2) достаточно почленно перемножить три полученных неравенства.

Попробуйте использовать ту же идею для решения следующей задачи:

5. Докажите, что если $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ — величины углов треугольника, то

$$\cos\widehat{A}+\cos\widehat{B}+\cos\widehat{C}<\frac{3}{2}.$$

* *
*

Ученица 9 класса *Гюлара Мехтиева* (Агджабеди) предлагает читателям журнала решить составленную ею задачу. Хотя это — «задача на экстремум», сразу же ясно, что решить ее стандартным путем, с помощью производной, невозможно. Но удачная геометрическая интерпретация выражения, наибольшее значение которого ищется, позволяет легко и красиво получить ответ.

6. Найдите наибольшее значение выражения

$$(A\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)^p,$$

где переменные α, β, γ меняются так, что

$$\alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0,\ \alpha+\beta+\gamma=\pi;$$

здесь A и p — некоторые положительные числа.

* *
*

При решении иррациональных уравнений поступающие обычно не раздумывают над выбором пути и начинают с возведения обеих частей уравнения в степень. Однако этот стандартный способ решения часто приводит к цели лишь после громоздких вычислений.

На одну возможность упростить вычисления указывает в своем письме *В. Ольхов* (Горький). Идея упрощения состоит в том, чтобы один из радикалов принять за новую переменную.

Пример 6. *Решить уравнение*

$$\sqrt{2x-6}+\sqrt{x+4}=5. \qquad (3)$$

Для решения этого уравнения удобно ввести новую переменную $t=\sqrt{x+4}$. Ясно, что $t\geqslant 0$. После указанной подстановки уравнение (3) превращается в уравнение

$$\sqrt{2t^2-14}+t=5,$$

в котором уже только один радикал. Решив последнее уравнение «возведением в квадрат» и проведя проверку получающихся значений переменной, находим единственный корень $x=5$.

Упражнения.

Решите уравнения

7. $\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-11}=4.$
8. $\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1.$
9. $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4.$

* *
*

Следующую задачу прислал в редакцию ученик 10 класса *Илья Зябрев* (Кролевец):

10. С центрами в вершинах квадрата со стороной длины 1 построены четыре окружности радиуса 1 каждая. Найдите площадь фигуры, являющейся общей частью всех четырех кругов.

* *
*

Уже не раз отмечалось, что удачное использование векторов оказывается полезным во многих задачах, внешне не имеющих никакого отношения к геометрии. В редакционной почте оказались две такого рода задачи. Первую из них прислал *С. Сефибеков* (село Кашкент Хивского р-на Дагестанской АССР), вторую предлагает ученик 10 класса *Илгар Гасанов* (Сумгаит). Конечно, обе эти задачи можно решить и без привлечения векторов (попробуйте найти такие решения), но, бесспорно, «векторные» решения более красивы.

11. Найдите множество значений функции

$$f(x)=\frac{a\cos x+b\sin x+c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

где a, b, c — не равные нулю числа.

12. Докажите, что для любых a, b, x, y справедливо неравенство

$$a\cdot 2^x+b\cdot 3^y+1<\sqrt{4^x+9^y+1}\cdot\sqrt{a^2+b^2+1}.$$

* * *

Геометрические задачи на экстремум стали для абитуриентов уже привычными. Показательной в этом отношении является задача, которую предложил *Э. Готман* (Арзамас).

Пример 7. *Фиксирован треугольник ABC, в котором*

$$|AC|=b,\ |AB|=c,\ \widehat{BAC}=\alpha,$$

причем $\alpha<\pi/2$. В плоскости этого треугольника рассматриваются всевозможные прямоугольники $ALMN$ такие, что вершина B треугольника лежит на стороне LM прямоугольника, а вершина C треугольника — на стороне MN прямоугольника. Каково наибольшее значение площади прямоугольника, обладающего указанным свойством?

Из рисунка 4, где изображены «описанные» около треугольника ABC прямоугольники, видно что в качестве параметра, характеризующего выбор прямоугольника, можно взять величину угла x между стороной AL прямоугольника и стороной AB треугольника. Тогда очевидно, что площадь прямоугольника $ALMN$ $S=|AL|\cdot|AN|=$

$$=c\cos x\cdot b\cos\left(\frac{\pi}{2}-x-\alpha\right)=$$
$$=bc\cos x\sin(x+\alpha).$$

Однако нужно еще указать, исходя из геометрического смысла задачи, область определения функции $S=S(x)$. Для краткости положим $\widehat{ABC}=\beta$, $\widehat{ACB}=\gamma$.

Пусть $ALMN$ — некоторый «описанный» прямоугольник; тогда нетрудно проверить (убедитесь в этом), что имеют место следующие соотношения:

$$x\geqslant\begin{cases}0, & \text{если } \beta<\pi/2,\\ \beta-\pi/2, & \text{если } \beta\geqslant\pi/2.\end{cases}\qquad(4)$$

$$x+\alpha\leqslant\begin{cases}\pi/2, & \text{если } \gamma<\pi/2,\\ \pi-\gamma, & \text{если } \gamma\geqslant\pi/2,\end{cases}\qquad(5)$$

$$x\leqslant\beta,\ \pi/2-(x+\alpha)\leqslant\gamma.\qquad(6)$$

Весьма существенно, что справедливо и обратное утверждение: если x удовлетворяет одновременно всем неравенствам (4) — (6), то прямоугольник, соответствующий этому значению угла x, обладает указанным в условии задачи свойством.

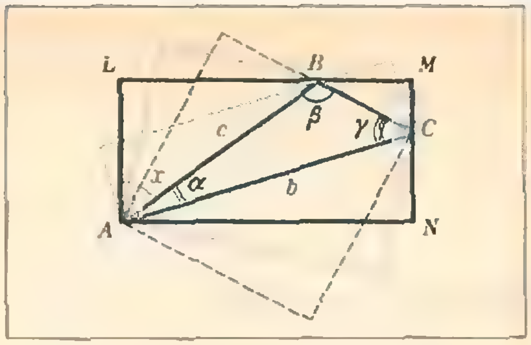


Рис. 4.

Теперь можно закончить решение задачи. Допустим для определенности, что в данном треугольнике угол ABC — острый (то есть $\beta<\pi/2$; другие возможности предоставляется рассмотреть читателям). В таком случае задача, очевидно, сводится к отысканию наибольшего значения функции

$$S=bc\cos x\sin(x+\alpha)$$
$$\text{при } 0\leqslant x\leqslant\min(\beta,\pi/2-\alpha).\qquad(7)$$

Так как (проверьте!) $S'(x)=bs\cos(2x+\alpha)$, уравнение $S'(x)=0$ имеет корень $x_0=\pi/4-\alpha/2$ (остальные корни нас интересовать не могут). Специфический вид области определения функции (7) приводит к следующему окончательному результату:

если $\alpha+2\beta>\pi/2$, то x_0 является критической точкой функции (7), причем она достигает там наибольшего значения:

$$S_{\max}=bc\cos^2(\pi/4-\alpha/2)=$$
$$=\frac{1}{2}bc(1+\sin\alpha);$$

— если $\alpha+2\beta\leqslant\pi/2$, то функция (7) критических точек не имеет и является возрастающей, принимая при $x=\beta$ наибольшее значение:

$$S_{\max}=bc\cos\beta\sin(\alpha+\beta)=$$
$$=\frac{1}{2}c^2\sin 2\beta.$$

* * *

В заключение приведем неравенство, присланное в редакцию *С. Майзусом* (Запорожье).

13. Докажите, что при $0<x<\pi/2$

$$\sin x+\operatorname{tg}x>2x.$$

Новосибирский государственный университет
им. Ленинского комсомола

Математика

Письменный экзамен

На выполнение работы было предоставлено 5 часов.

Вариант 1

(механико-математический, физический и экономический факультеты)

1. Решить уравнение

$$\cos\left(\frac{4+\sqrt{5}}{2}\sin x+2\cos x\right)=\sin\left(\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-2\right)\sin x\right).$$

2. Треугольник ABC вписан в окружность радиуса R. Точка D лежит на дуге BC, а хорды AD и BC пересекаются в точке M. Найти длину стороны BC, если $\widehat{BMD}=120°$, $|AB|=R$, $|BM|:|MC|=2:3$.

3. При каких значениях параметра a найдутся значения x такие, что числа $5^{1+x}+5^{1-x}$, $\frac{a}{2}$, 25^x+25^{-x} составляют арифметическую прогрессию?

4. $SABC$ — правильный единичный тетраэдр. Сфера касается ребер AS, AC, AB и проходит через середину ребра BC. Найти радиус сферы, если известно, что ее центр лежит внутри тетраэдра.

5. При каких значениях a для любого b найдется хотя бы одно c такое, что система уравнений

$$\begin{cases} bx+y=ac^2, \\ x+by=ac+1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

Вариант 2

(геолого-геофизический факультет и факультет естественных наук)

1. Решить уравнение

$$\cos^2 x(1-\sin x)=1+\sin^3 x.$$

2. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, диагональ AC которого равна $\sqrt{2}$. Найти площадь круга, описанного около треугольника ABD, если известно, что $\widehat{ABC}=105°$, $\widehat{ACD}=42°$, $\widehat{DAC}=63°$.

3. Найти неотрицательные значения x, удовлетворяющие уравнению

$$\log_6 2(1+2^{-x})-\frac{x}{1-\log_{\frac{1}{2}}3}=\log_6 a.$$

4. Сфера касается бокового ребра AA' и непараллельных ребер оснований AB и $A'D'$ единичного куба $ABCDA'B'C'D'$ и проходит через точку M, лежащую на боковом ребре CC', $|CM|=\frac{1}{3}$. Найти радиус сферы.

5. Пусть x пробегает множество решений неравенства

$$x^4-4x^2+3<0.$$

Каково при этом максимальное значение выражения

$$1+ax-x^2?$$

Нарисовать график зависимости этого максимального значения от параметра a.

Физика

Письменный экзамен

Физический факультет

Каждый вариант состоял из пяти задач трех типов. На решение задач давалось пять часов.

Первые три задачи — расчетные, различной трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения разобраться в непривычной или усложненной физической ситуации.

Четвертая задача — это задача-оценка. Для ее решения надо понять рассматриваемое физическое явление, придумать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивалось, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения задачи физические величины и их численные значения. Опыт вступительных экзаменов в НГУ показывает, что с задачами-оценками справляется значительная часть абитуриентов, зачисляемых на физический факультет.

Пятая задача — это задача-демонстрация, в которой надо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Здесь важно понять сущность явления и среди различных физических факторов выделить главный.

Вариант 1

1. В воду при температуре $t_0=90°C$ бросают равное воде по массе количество раскаленных платиновых опилок. Найдите начальную температуру опилок, если известно, что после прекращения кипения уровень воды остался первоначальным. Плотность платины $\varrho_{пл}=21{,}4\cdot10^3$ кг/м³, удельная теплоемкость платины $c_{пл}=128$ Дж/(кг · К),

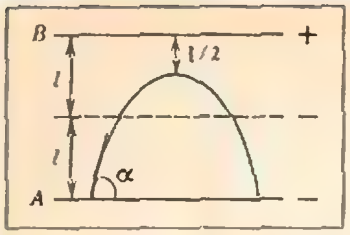


Рис. 1.

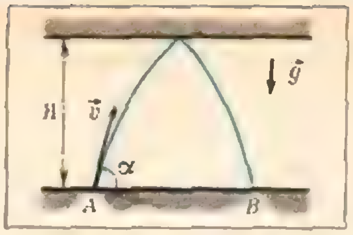


Рис. 3.

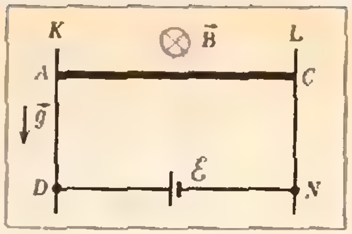


Рис. 5.

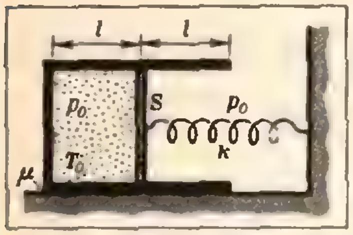


Рис. 2.

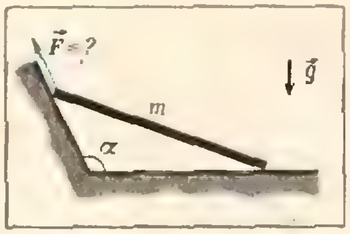


Рис. 4.

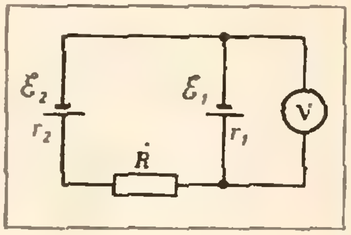


Рис. 6.

удельная теплоемкость воды $c_в = 4190$ Дж/(кг · К), удельная теплота парообразования воды $\lambda = 2{,}26 \cdot 10^6$ Дж/кг. Изменением плотности при нагревании пренебречь.

2. Посередине плоского конденсатора, расстояние между пластинами которого $2l$, находится заряженная сетка (рис. 1). Разность потенциалов между положительно заряженной пластиной B и сеткой вдвое больше разности потенциалов между сеткой и отрицательно заряженной пластиной A. Из пластины A под углом α к ее плоскости вылетает положительно заряженная частица и достигает точки, расположенной на расстоянии $l/2$ от пластины B. Определите, на каком расстоянии от точки вылета частица попадает на пластину A. Силу тяжести не учитывать.

3. Цилиндрическая камера (рис. 2) длиной $2l$ с поршнем сечением площади S (общая масса M) может двигаться по горизонтальной плоскости с коэффициентом трения μ. Слева от поршня, расположенного в центре камеры, находится газ при температуре T_0 и давлении p_0. Между неподвижной стенкой и поршнем помещена пружина жесткости k. Во сколько раз нужно увеличить температуру газа слева от поршня, чтобы его объем удвоился, если между камерой и поршнем трения нет? Наружное давление p_0.

4. Оцените максимальный радиус полости, образующейся при подводном взрыве на глубине $h = 1$ км заряда взрывчатого вещества массой $m = 1$ т. Энергия взрыва 1 грамма взрывчатого вещества равна примерно $\lambda = 4$ кДж.

5. Характер отскоков подвешенного на нити упругого костяного шарика после удара о круглое препятствие при перемещениях последнего по горизонтали изменяется. При некотором положении препятствия отскок сильный; при приближении к шарику или удалении от него препятствия амплитуда отскока резко уменьшается. Объясните явление.

Вариант 2

1. Какое расстояние $|AB|$ (рис. 3) пролетит мячик, брошенный под углом α к горизонтальной плоскости со скоростью $\vec{v}$, если он ударился о потолок? Высота потолка H, удар упругий, трения нет.

2. Однородный стержень массой m одним концом опирается на горизонтальную, другим — на наклонную плоскости (рис. 4). Угол между плоскостями равен α. Какую силу $\vec{F}$, направленную вдоль наклонной плоскости, надо приложить к стержню, чтобы он находился в равновесии? Трения нет.

3. Вертикальные рельсы KD и LN, скользящий по ним стержень AC и батарея с ЭДС $\mathcal{E}$ составляют электрическую цепь (рис. 5). Перпендикулярно плоскости $KDNL$ приложено постоянное магнитное поле индукции $\vec{B}$. Длина стержня AC равна l, его сопротивление R и масса m. Найдите установившуюся скорость, с которой поднимается стержень. Сопротивлением рельсов, батареи, а также трением пренебречь.

4. Гимнаст делает на перекладине оборот «солнышко». Оцените, с какой силой он действует на перекладину в момент, когда проходит через нижнее положение.

5. Объясните, почему легко вытаскивается гвоздь, если его согнуть и тащить, одновременно поворачивая вокруг оси.

Вариант 3

1. В схеме, изображенной на рисунке 6, включены два элемента с ЭДС $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ ($\mathcal{E}_2 > \mathcal{E}_1$) и внутренними сопротивлениями r_1 и r_2. Сопротивление нагрузки R. Какое напряжение покажет вольтметр?

2. При колебаниях двух одинаково заряженных шариков (заряд каждого q) расстояние между ними меняется от l до $4l$. Шарики соединены пружиной, длина которой в свободном состоянии $2l$. Определите жесткость пружины.

3. В вертикально стоящем цилиндрическом сосуде сечением S под поршнем массой m находится газ. Сосуд разделен перегородкой на две одинаковые части высотой l каждая (рис. 7). Давление в нижней части p, внешнее давление p_0, температура газа в обеих частях сосуда T. На сколько сместится поршень, если убрать

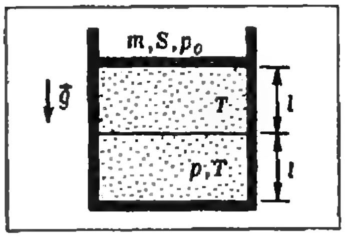


Рис. 7.

перегородку? Внутренняя энергия одного моля газа $U=CT$. Стенки сосуда и поршень не проводят тепла, трения нет.

4. Оцените время вытекания воды из заполненной ванны.

5. Между заземленным и заряженным металлическими шарами на изолированной нити висит металлический шарик. Объясните его поведение при перемещении заряженного шарика.

Решение задач варианта I

1. Из закона сохранения энергии (уравнения теплового баланса), с учетом равенства объемов платиновых опилок и испарившейся воды, имеем

$$t_к = t_к + \frac{c_в}{c_{пл}}(t_к - t_0) + \frac{\varrho_в}{\varrho_{пл}}\,\frac{\lambda}{c_{пл}} \approx 1250°C$$

(здесь $t_к = 100°C$ — температура кипения воды).

Некоторые абитуриенты не смогли решить эту задачу, так как не поняли, что условие сохранения уровня воды означает равенство объемов платиновых опилок и испарившейся воды.

2. Пусть модуль ускорения и время движения частиц между пластиной A и сеткой C равны a_1 и t_1, между сеткой и пластиной B — соответственно a_2 и t_2, а потенциалы таковы: $\varphi_A = 0$, $\varphi_C = \varphi$ и $\varphi_B = 3\varphi$. При этом

$$a_2 = 2a_1 = \frac{e}{m}\,\frac{2\varphi}{l}.$$

Спускаясь из высшей точки траектории до сетки, частица перемещается по вертикали на

$$\frac{l}{2} = a_2\frac{t_2^2}{2}.$$

Согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_0^2\cos^2\alpha}{2} + 2e\varphi,$$

где v_0 — начальная скорость частицы. Кроме того, условие равенства нулю вертикальной проекции скорости в высшей точке дает

$$v_0\sin\alpha - a_1t_1 - a_2t_2 = 0.$$

Из полученных уравнений найдем искомое расстояние:

$$L = v_0\cos\alpha\cdot 2(t_1 + t_2) = 2(4-\sqrt{2})\,l\,\mathrm{ctg}\,\alpha.$$

Большинство решавших эту задвчу рассматривали движение частицы не от верхней точки траектории, а от пластины A. Это, с одной стороны, приводило к громоздким выкладкам, а с другой стороны, увеличивало вероятность допустить ошибку. Так, многие забывали, что движение частицы от сетки к пластине B происходит с некоторой начальной скоростью.

3. Здесь надо рассмотреть два случая: а) $\mu Mg > kl$ и б) $\mu Mg < kl$.

В случае а) камера покоится. Из условия равновесия поршня $(p-p_0)S = kl$ и из уравнения Клапейрона для газа $\frac{pS2l}{T_а} = \frac{p_0Sl}{T_0}$ найдем искомое отношение:

$$\frac{T_а}{T_0} = 2\left(1+\frac{kl}{p_0S}\right) \text{ при } \mu Mg > kl.$$

В случае б) камера покоится только до достижения максимального значения силы трения покоя. К этому моменту пружина сожмется на $x = \mu Mg/k$, а температура газа станет равной

$$T_1 = T_0\left(1+\frac{\mu Mg}{p_0S}\right)\left(1+\frac{\mu Mg}{kl}\right).$$

После начала проскальзывания камеры увеличение объема газа будет происходить при постоянном давлении; следовательно,

$$\frac{T_б}{T_1} = \frac{V}{V_1} = \frac{2lS}{(l+x)S} = \frac{2}{1+\mu Mg/(kl)}.$$

Подставляя сюда значение T_1, получим

$$\frac{T_б}{T_0} = 2\left(1+\frac{\mu Mg}{p_0S}\right) \text{при } \mu Mg < kl.$$

Наиболее грубой и частой ошибкой при решении этой задачи было отсутствие рассмотрения явления застоя, когда камера сначала покоится. Удивительно также, что очень многие не учитывали внешнее давление p_0.

4. Выделившаяся при взрыве тепловая энергия идет в основном на работу против сил гидростатического давления:

$$Q = p(V_{кон} - V_{нач}) \approx pV_{кон},$$

или

$$m\lambda \approx \varrho_в gh\frac{4}{3}\pi r^3.$$

Отсюда

$$r \sim \sqrt[3]{\frac{3m\lambda}{4\pi\varrho gh}} \sim 5 \text{ м}.$$

В оценке объема полости некоторые абитуриенты пропустили главный фактор — работу против внешнего давления при расширении пузыря, ошибочно полагая, что почти вся энергия идет на образование пара в пузыре.

5. Максимальный отскок получается в случае, если проекция переданного шарику импульса на направление вдоль нити минимальна. (Если в момент удара линия центров перпендикулярна к нити, проекция на направление вдоль нити равна нулю и отскок максимален из всех возможных.) При перемещении круглого препятствия проекция импульса вдоль нити увеличивается, а, значит, доля энергии, идущей на движение шарика, уменьшается.

Некоторые абитуриенты безуспешно пытались свести все к различию в кинематике центрального и нецентрального ударов.

Г. Меледин,
М. Фокин

Ю. Первин

Трехадресные, одноадресные и... безадресные машины

Когда читатели «Кванта» знакомились с работой управляющего устройства*) вычислительной машины, рассматривались ЭВМ с таким форматом команды, как на рисунке 1. Адресная часть команды на этом рисунке разделена на три поля с адресами *операндов* (величин, участвующих в операции).

Код операции	*1-е адресное поле*	*2-е адресное поле*	*3-е адресное поле*
	Адресная часть команды		

Рис. 1.

В первом адресном поле находится адрес первого операнда выполняемой операции, во втором — адрес второго операнда. Третье адресное поле — это адрес результата. Все три адреса имеют одинаковую длину. Такой формат команд имела не дожившая до наших дней трехадресная машина БЭСМ-2. Например, команда

01 0257 1023 0016

в БЭСМ-2 означала сложение (код операции — 01) величины, хранящейся в машинном слове по адресу 0257, с величиной, находящейся в машинном слове по адресу 1023, и размещение результата в машинном слове с адресом 0016.

Когда в адресном поле команды записывается адрес машинного слова, находящегося в памяти (как в случае БЭСМ-2), длина адресного поля определяется объемом оперативной памяти. Например, для того чтобы $4К=2^{12}=4096$*) машинных слов из оперативной памяти могли иметь различающиеся адреса, длина одного адреса должна составлять не менее 12 двоичных разрядов.

Иной вид имеет команда одноадресной машины (рис. 2).

Код операции	*Адресное поле*

Рис. 2.

В адресном поле такой команды можно указать только один адрес. А как же в таком случае задать адрес второго операнда? А куда послать результат? Чтобы ответить на эти вопросы, надо знать, что в одноадресной машине есть особый регистр, равный по длине машинному слову. Этот регистр называется *сумматором*. Он принимает участие в выполнении практически каждой команды машины. Например, в кодах еще одного «дедушки» современных ЭВМ — одноадресной машины «Урал-2» — сложение двух чисел, хранящихся в памяти по адресам 0257 и 1023 с засылкой результата по адресу 0016 выполнялось такими тремя командами:

02 0257 (посылка в сумматор числа из машинного слова с адресом 0257)
01 1023 (сложение содержимого сумматора с числом, хранящимся в машинном слове по адресу 1023; результат получается в сумматоре)
16 0016 (пересылка числа из сумматора в машинное слово по адресу 0016)

Не следует думать, что программа одной и той же задачи в одноадресной машине всегда втрое длиннее, чем в трехадресной. В большинстве практических случаев (особенно когда результат операции непосредственно используется в следующей операции) удлинение программы оказывается небольшим.

---

*) «Квант», 1980, № 5, с. 56.

*) Здесь *K* обозначает не килобайт, равный 1024 байтам, а просто число $1024=2^{10}$.

Вот пример. В кодах трехадресной машины программа, вычисляющая выражение a^2+a-1, записывается так:

03 А А В (умножение $a \cdot a$)
01 А В В (сложение a^2+a)
02 В С В (вычитание $(a^2+a)-1$)

где А — это адрес числа a, по адресу С хранится единица, В — адрес машинного слова, используемого в качестве промежуточного. В одноадресной машине та же программа выглядит так:

02 А (посылка числа a в сумматор)
06 А (умножение $a \cdot a$; результат в сумматоре)
01 А (сложение a^2+a; результат в сумматоре)
03 С (вычитание a^2+a-1; результат в сумматоре).

Итак, программа увеличилась всего на одну команду (обратили ли вы внимание на то, что в последней программе не понадобились промежуточные машинные слова?). А вот экономия оборудования в одноадресной машине значительная: ведь адресная часть каждой команды становится втрое короче.

Вряд ли после этого читатель найдет удивительной двухадресную машину (такими были машины «Минск»). Зато полутораадресная машина может показаться на первый взгляд необычной. Но представьте себе, что ЭВМ располагает двумя типами оперативной памяти: одна — обычная, большая, в которой для обозначения места машинного слова нужен «длинный» адрес; другая — сверхбыстродействующая, обладающая небольшим числом регистров, для однозначного указания которых достаточно совсем «короткого» адреса. Это и есть полутораадресная ЭВМ.

Впрочем, в более поздних машинах регистры, используемые для определения адреса операнда, нашли и другое применение. В большинстве машин адрес, участвующий в команде непосредственно в момент выполнения (так называемый *исполнительный* адрес), не совпадает со значением адресного поля, а вычисляется как значение некоторой функции. Такая функция чаще всего выглядит как сумма записанного в адресном поле значения (так называемого *смещения*) и содержимого одного регистра (*базы*), указанного в команде, или двух регистров (*базы* и *индекса*). Например, в машине БЭСМ-6 (если отвлечься от некоторых непринципиальных подробностей) формат большинства команд имеет вид, показанный на рисунке 3.

Регистр базы	*Код операции*	*Адресное поле (смещение)*
4	*8*	*12*

Рис. 3.

Числа в полях команды на рисунке 3 указывают длину соответствующего поля, измеренную в количестве двоичных разрядов. Оперативная память БЭСМ-6 содержит $32К=2^{15}$ машинных слов, а наибольшее число, записываемое в адресном поле, во всяком случае меньше чем 2^{13}. И вот тут приходит на помощь один из шестнадцати ($2^4=16$) регистров базы, именно тот, номер (адрес) которого указан в поле регистра базы. Исполнительным адресом команды является сумма пятнадцатиразрядного значения, хранящегося в указанном регистре базы, и двенадцатиразрядной величины смещения. Например, команда

03 004 0231

при условии, что в третьем регистре содержится число 12000, будет складывать (004 — код операции сложения) содержимое сумматора с числом, хранящимся по адресу $12000+231=12231$, и отправлять результат в сумматор. Здесь 3 — адрес (номер) регистра базы, 12000 — база, 231 — смещение, 12231 — исполнительный адрес. Таким образом, база означает начальный адрес некоторой области оперативной памяти, а адрес нужного слова в этой области получается добавлением смещения к базе. Этот способ адресации называется *относительным*. Он удобен тем, что дает возможность перемещать программы или части программ по всей оперативной памяти, так что программист освобождается от необходимости следить за размещением программы.

Еще большее развитие способ относительной адресации получил в машинах серии ЕС ЭВМ. Память этих машин составляется из обширной оперативной памяти и сравнительно небольшого набора (16) регистров общего назначения, а в адресной части команды записывается чаще всего два адресных поля. Поэтому в этих машинах существуют не один, а три формата команд. Первый из них — *«регистр — регистр»* (рис. 4) — описывает команды, которые оперируют с числами, хранящимися в регистрах Р1 и Р2, и записывают результат по адресу Р1. Второй формат — *«регистр — память»* (рис. 5). Здесь адрес одного из операндов (второго) задается в памяти. Исполнительный адрес получается сложением смещения СМ2 со значениями, хранящимися в регистре базы Б2 и регистре индекса И2. Наконец, в командах формата *«память — память»* (рис. 6) оба операнда расположены в основной памяти. Для каждого из них исполнительный адрес получается сложением смещения со значением регистра базы. Кроме того (в этом особенность машин серии ЕС), в этом формате указываются длины Д1 и Д2 полей операндов, что дает возможность работать не только с машинными словами единого размера, но и с данными произвольной длины.

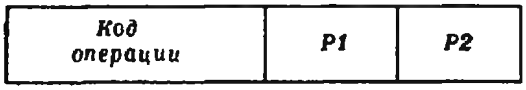


Рис. 4.

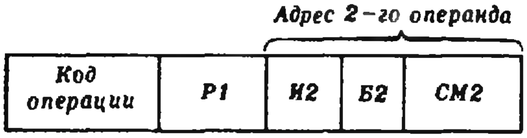


Рис. 5.

Вернемся еще раз к системам адресации, проиллюстрированным рисунками. Трехадресная машина (рис. 1) характерна тем, что все машинные слова в ее памяти совершенно равнозначны с точки зрения организации и времени доступа. Машины, обладающие таким свойством, называются *линейными* или, точнее, машинами с *линейной структурой памяти*. Уже в обычной одноадресной машине (рис. 2) линейность слегка нарушена: существует один особый регистр — сумматор — который может хранить информацию подобно другим машинным словам памяти, но весьма отличается от них. В частности, это — единственный регистр, куда результат операции может направляться без предварительных пересылок. В машинах с регистрами базы (рис. 3) линейность нарушается неравноправием между 16 регистрами и 32К словами оперативной памяти. Еще более заметна «нелинейность» в машинах серии ЕС (рис. 4, 5, 6), где такая неравноправность определяется не только наличием базы и индекса в формате команды, но также и возможностью работы со словами различной длины. Вместе с тем все эти машины в принципе сохраняют линейную структуру основной части оперативной памяти.

А вот в машинах со *стековой структурой памяти* принципу линейности нанесен уже серьезный удар.

Понять, что такое стек, легче всего, представив себе стопку книг на вашем письменном столе

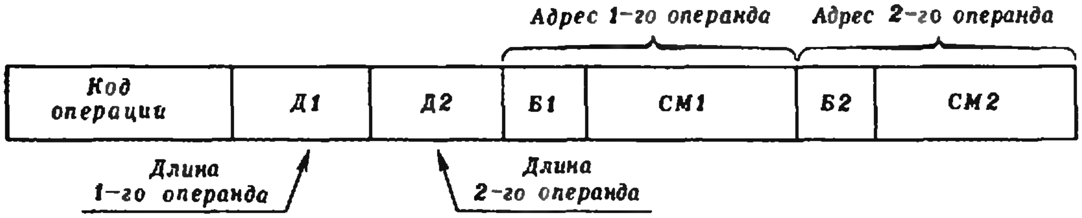


Рис. 6.

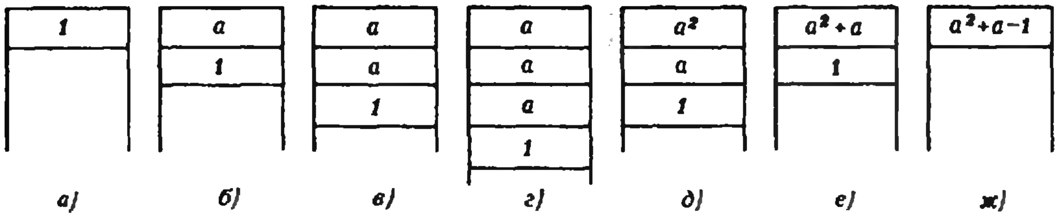


Рис. 7.

(по английски «stack» как раз означает «стопка»). Добавлять книги в эту стопку можно, лишь положив последнюю заинтересовавшую вас книгу на самый верх стопки. Эта же книга, положенная последней, оказывается и самой первой из доступных книг. Даже если вам нужна какая-то книга в середине стопки, то первой книгой, которую придется брать в ходе этого поиска, будет последняя книга, положенная на верх стопки. *Стек* — это такая группа машинных слов, в которой в каждый момент доступно только одно слово, а именно то, которое было записано последним. Это доступное слово в стеке называется *верхушкой* стека, а остальная часть стека — его *телом*. Добавление слова в стек означает создание новой верхушки, предыдущая верхушка становится вторым элементом стека, частью тела. Взятие слова из стека делает верхушкой стека элемент, который до выполнения этой операции непосредственно следовал в стеке за верхушкой.

Если память ЭВМ организована в виде стека, то для выполнения многих операций можно не указывать адреса операндов, если они предварительно помещены в верхушке стека или непосредственно следом за ней. Так, команда СЛ, задаваемая только кодом операции (и ничем более!), складывает два числа, одно из которых находится в верхушке стека, а другое непосредственно вслед за ним, и помещает результат в верхушку стека. Как видите, в команде нет совсем адресной части. Машины со стековой структурой памяти поэтому называют часто безадресными. Такой термин не означает, конечно, что машинные слова в стековой памяти не имеют адресов. Адреса существуют, но после того, как операнды посланы в стек, нет необходимости указывать эти адреса в адресной части большинства машинных команд.

Вот как выглядит, например, программа, вычисляющая упоминавшееся уже выражение a^2+a-1 в машине «Эльбрус» — самой быстродействующей советской стековой машине четвертого поколения (А — информация об адресе величины a):

ЗГЦ1 (загрузка в верхушку стека целого числа 1 — рис. 7, *а*)

СЧВЕЛ А (помещение величины, расположенной по адресу А, в верхушку стека; прежняя верхушка погружается при этом в тело стека — рис. 7, *б*)

РАЗДВ («раздвоение» верхушки: экземпляр величины, хранившейся в верхушке стека, записан теперь и в слово, непосредственно следующее за верхушкой; остальная часть стека опустилась при этом еще глубже — рис. 7, *в*)

РАЗДВ (еще одно «раздвоение»: дело в том, что в дальнейших операциях потребуется три экземпляра величины a — рис. 7, *г*)

УМН (перемножение чисел, расположенных в двух самых верхних словах стека; результат a^2 остается в верхушке стека, а использованные операнды убираются из стека — рис. 7, *д*)

СЛ (сложение чисел, расположенных в двух верхних словах стека; результат a^2+a остается в верхушке стека — рис. 7, *е*)

ВЫЧ (вычитание: из верхушки стека — суммы a^2+a — вычитается 1, расположенная в стеке сразу под верхушкой; результат остается в верхушке стека — рис. 7, *ж*)

Команды этой программы записаны в несколько упрощенном виде и не дают полного представления об очень богатой и гибкой системе команд «Эльбрус». Рассказу об этой машине будет посвящена отдельная статья в одном из следующих номеров «Кванта».

VII Всероссийский слет юных рационализаторов и конструкторов

С 3 по 10 августа 1980 года в Краснодаре проходил VII Всероссийский слёт юных техников, посвященный 110-й годовщине со дня рождения В. И. Ленина.

Место проведения слета было выбрано не случайно: именно в Краснодарском крае в 1963 году появились первые школьные организации Всесоюзного общества изобретателей и рационализаторов (ВОИР). Сейчас в стране насчитывается свыше ста тысяч членов этого общества.

На очередном слете присутствовали 285 участников; среди них 2 автора изобретений, 23 участника ВДНХ, 54 лауреата Всесоюзного смотра научно-технического творчества молодежи, 134 автора рационализаторских предложений, 218 победителей областных и краевых смотров, выставок, конкурсов.

Бурными аплодисментами встретили ребята сообщение о том, что в адрес слета получена приветственная телеграмма от дважды Героя Советского Союза летчика-космонавта СССР В. В. Горбатко. Участники слета направили ответную телеграмму на орбиту космонавтам В. В. Горбатко и Фам Туану.

Все дни на слете работала выставка, на которой было представлено 350 экспонатов.

Вводный зал выставки был посвящен моделям и макетам, связанным с жизнью и деятельностью В. И. Ленина. Большой интерес вызвала модель парохода «Боре», на котором В. И. Ленин после перехода по льду Финского залива отплыл в Швецию. О существовании этого парохода рассказали финские туристы, посетившие Ленинградский дворец пионеров; они же прислали фотографии этого парохода и документы о нем. Модель парохода изготовил ученик школы № 163 г. Ленинграда Александр Рождественский.

Экспозицию выставки составили 4 раздела: 1) юные техники — школе; 2) юные рационализаторы и конструкторы — промышленности; 3) юные рационализаторы и конструкторы — сельскому и лесному хозяйствам; 4) юные рационализаторы и конструкторы — строительству и транспорту.

Жюри рассмотрело все экспонаты выставки; 62 лучших экспоната были отобраны на ВДНХ; 146 работ были допущены к защите на заседаниях секций. Жюри оценивало не только техническое решение и оформление представленных работ, но и актуальность и целесообразность их, а также умение авторов излагать и обосновывать свои идеи. Предпочтение оказывалось работам, внедренным в практику или имеющим свидетельство на изобретение или рационализаторское предложение. Расскажем о некоторых работах.

Государственный комитет СССР по делам изобретений и открытий выдал свидетельство на изобретение группе учащихся Омской областной станции юных техников. Они создали установку для раздачи кормов, которая позволяет автоматически, по заранее установленной программе накормить 1200 коров в течение полутора-двух часов. Установка проста в изготовлении и обслуживании и обещает значительный экономический эффект.

Второе авторское свидетельство на изобретение получил ученик школы № 239 г. Ленинграда Леонид Жуковский. Его устройство позволяет уменьшить волны, образующиеся в плавательном бассейне и мешающие устанавливать высокие результаты. Габариты и стоимость бассейна при этом не увеличиваются.

Оба изобретения уже внедряются в практику.

Отрадно отметить, что сотни предложений, сделанных школьниками, используются в школах, в промышленности и сельском хозяйстве.

Так, в учебно-производственном комбинате (УПК) № 1 г. Свердловска не только разработали универсальный верстак новой конструкции, но и изготовили 60 таких верста-

Светлана Каирова (Грозный, с. ш. № 3) рассказывает о своей работе.

ков для школ города. Серийный выпуск комплекта приборов для изучения электроники налажен в школе Невинномысского района Ставропольского края. Приборы для определения способности перенесения внимания, сконструированные в областной станции юных техников Свердловской области, нашли применение в медицинских учреждениях г. Свердловска. Универсальный медицинский комплекс для диагностики и лечения ряда заболеваний, сконструированный радиотехническим кружком городской станции юных техников г. Благовещенска Амурской области, одобрен медицинским институтом и используется практически. Портативный цифровой анемометр, созданный кружком электроники станции юных техников Иркутского научного центра, используется для метеорологических исследований в школах города. Малогабаритная сельскохозяйственная техника, изготовленная в Алтайском, Краснодарском, Ставропольском краях, Московской, Псковской, Липецкой, Белгородской и Горьковской областях, успешно применяется на пришкольных учебно-опытных участках.

По итогам слета различными почетными грамотами, дипломами и памятными подарками награждены многие участники. Отмечены также лучшие коллективы, кружки, станции юных техников, дворцы пионеров, организации ВОИР.

Уровень защиты своих работ участниками слета был в целом высок. Высока была и активность оппонентов. Отметим наиболее яркие выступления участников слета:

Светлана Каирова, ученица школы № 3 г. Грозного, защищала комплект оригинальных приборов для выполнения физического практикума; Лариса Косякова, ученица Никольской восьмилетней школы Ростовской области, демонстрировала учебно-наглядное пособие по химии; Анатолий Терентьев, ученик школы № 77 г. Свердловска, защищал универсальный верстак для школьных мастерских, и Александр Квархава, ученик школы № 75 Лазаревского района Краснодарского края, — универсальный станок по обработке дерева; Алла Иванова, ученица Медновской санаторной школы-интерната, рассказала об использовании природных материалов при оформлении школы и пришкольного участка; Алексей Китченко, ученик школы № 156 г. Новосибирска, защищал макет кабинета географии, оборудованного в школе; Павел и Петр Зубко, ученики школы № 14 г. Рязани, защищали изобретенный ими тренажер; Игорь Чекин, ученик школы № 28 г. Петрозаводска, рассказал об оригинальной конструкции электронных часов со звуковой сигнализацией; Алексей Колмогоров, ученик школы № 9 г. Свердловска, защищал прибор для определения способности переноса внимания; Олег Кос, ученик школы № 95 г. Новосибирска, — комплект радиотехнических приборов для работы в кружке; Андрей Челноков, ученик Меконской средней школы Курганской области, — универсальный сверлильный станок «Сверчок», позволяющий выполнять сверлильные, граверные и полировочные работы; Арсен Аветисьян, ученик школы № 25 г. Пятигорска, — зуборезный станок для изготовления шестеренок, применяемых для моделей и объектов в техническом творчестве; Татьяна Иващенко, ученица Ольгинской средней школы № 2 Ростовской области, рассказала о разработке штампов и технологии для изготовления букв из фольги (с помощью созданного приспособления оформлены все школьные стенды и выполняются заказы различных предприятий); Валерий Медведев, ученик школы № 22 г. Свердловска, защищал прибор для обнаружения неисправностей в телевизоре (прибор одобрен управлением бытового обслуживания Свердловского облисполкома); Сергей Обухов, ученик школы № 1 г. Воркуты, — приспособление для снятия наружной обоймы подшипника; Адам Ловпаче, ученик Энемской средней школы Краснодарского края, — сенокосилку для скашивания сена в неудобных местах; Сергей Кузнецов, ученик школы № 12 г. Краснодара, — «Плодоробот-80», который может работать в садоводстве, овощеводстве, виноградарстве, кормопроизводстве; Алексей Северегин, ученик школы № 13 г. Костромы, — действующую модель светофора, облегчающего переход улицы слепым (эта работа отмечена специальным призом «За гуманизм»).

Участникам слета была предложена большая культурно-воспитательная программа. Торжественно прошла церемония возложения цветов к памятнику В. И. Ленину. Участники слета посетили легендарную Малую землю, город-герой Новороссийск, некоторые промышленные предприятия Краснодара. Увлекательно прошел конкурс фантастических проектов.

По результатам анкеты, проведенной сотрудниками Академии педагогических наук СССР, был составлен обобщенный автопортрет участника VII Всероссийского слета юных

Участники слета со своими установками.

В залах выставки, работавшей во время слета.

рационализаторов и конструкторов. Вот его основные черты:

В свободное от учебы время юный техник занимается работой в кружках (96%), большей частью с увлечением (85%); кроме того, часто самостоятельно работает над поделками дома (51%). Предпочитает работу с техническими объектами (98%), связывает свои занятия в технических кружках с выбором будущей профессии (90%). Он обладает завидными волевыми качествами: может выполнять неинтересную, но нужную работу, не отвлекаясь (84%), предпочитает трудные работы легким (75%), старается выполнить работу во что бы то ни стало сам (50%) или, в крайнем случае, обращается за советом к руководителю (43%).

По затрачиваемому времени на первом месте работа в технических кружках и занятия спортом, затем учеба, далее чтение художественной литературы (в основном фантастической и приключенческой) и на последнем месте занятия общественной работой и посещения театров и концертов.

Учится юный техник в школе без особых затруднений (80%); любимые предметы — физика и математика (86%), однако сверхпрограммный материал даже по этим предметам изучает мало (15%).

Общителен, имеет много друзей (80%); больше всего ценит в друзьях честность и правдивость (100%), юмор и оптимизм (99%), самостоятельность в суждениях (98%), увлеченность делом (94%).

Предлагаем читателям «Кванта» попытаться самим ответить на подобные вопросы анкеты, изучить свой «автопортрет» и наметить программу самоусовершенствования.

В. Орлов

Фото А. Казимирова

Задачи наших читателей

1. Числа ИКС, ЛИСТ и ЛОЖКИ являются квадратом, кубом и четвертой степенью некоторого числа. Чему равен ИКС?

2. Числа ОСА, БАКУ и СУРОК являются квадратом, кубом и четвертой степенью некоторого числа. Найдите это число.

3. Извечному спору о «физиках» и «лириках» может положить конец следующее равенство:

$$\text{ЛИРИК}=\frac{1}{2}\cdot\text{ФИЗИКА}.$$

Дешифруйте его.

К утешению «лириков» этот ребус может быть «вывернут наизнанку»:

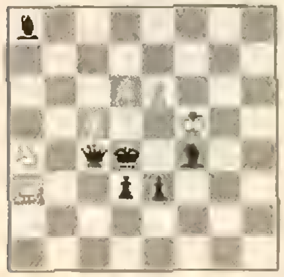
$$\text{ФИЗИК}=\frac{1}{2}\cdot\text{ЛИРИКА}$$

В. Радунский

Консультирует чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

Шахматы в космосе

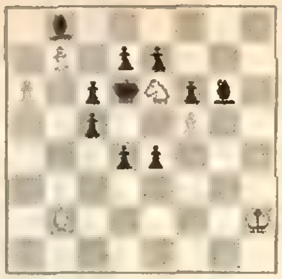
12 апреля 1981 года исполняется двадцать лет со дня замечательного события — первого полета человека в космос. Космический полет, совершенный Юрием Гагариным, «запечатлен» на следующей диаграмме.



В. Корольков, 1961 г. Мат в 5 ходов.

Шахматные фигуры, сосредоточенные в центре доски, символизируют Землю, половина которой (белые фигуры) освещена Солнцем. Космический корабль «Восток» (белый ферзь) совершает свой исторический виток вокруг Земли: **1.Фa1+! Крd5** (1...Фc3 2.Ф:c3+ Крd5 3.Фb4 Крc6 4.Кc3 и 5.Фb6×) **2.Фh1+! Крd4 3.Фh8+! Крd5 4.Ф:a8+! Крd4 5.Фe4×.**

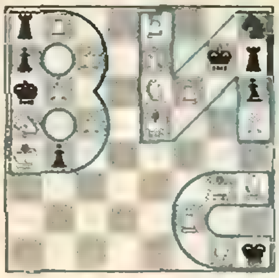
Другой космический экспонат принадлежит перу двух известных шахматных композиторов, один из которых, ныне покойный Б. Сахаров, был выдающимся советским химиком и металлургом, членом-корреспондентом АН СССР, лауреатом Ленинской премии. Примечательно, что спутник, «запущенный» Кузнецовым и Сахаровым, выполнен в виде этюда, в котором все фигуры принимают активное участие. Это не так часто бывает в изобразительных композициях.



Ан. Кузнецов, Б. Сахаров, 1959 г. Ничья.

1.Сa3! С:f5 (1...de 2.fg) **2.a7! С:a7 3.С:c5+ С:c5.** Старт! **4.b8Ф+! Кр:e6 5.Фg8+! Крe5 6.Фg3+! Крd5 7.Фb3+! Крd6 8.Фb8+! Крe6 9.Фg8+** с вечным шахом. Здесь черные фигуры символизируют Землю, а маршрут b8 — g8 — g3 — b3 — b8 — орбита ферзя, спутника Земли (в то время в космическое пространство летали только спутники).

Шахматы пользуются большой популярностью у космонавтов. Многие из них любят проводить свой досуг за шахматной доской. Достаточно сказать, что председателем Шахматной федерации СССР является дважды Герой Советского Союза, летчик-космонавт СССР В. И. Севастьянов. Ему посвящен следующий этюд, в котором каждая буква В, И, С — отдельная задача.



Э. Погосянц. В, И, С — мат в один ход.

Хитрость всех трех позиций в том, что предыдущий ход черных невозможен, то есть очередь хода всюду принадлежит им.
(В) 0...Л:b8 1.cbК×!; 0...ab 1.Л:a8×; 0...b3 1.c8Ф×! (И) 0...Кf7+ 1.Л:f7×; 0...Кg6+ 1.Л:g6×. (С) 0...Кр:g1 1.Лf1×. Каждая фигура во всех трех ретрозадачах играет определенную роль, то есть на доске нет ни одного статиста.

Когда заключительная партия матча в Багио была отложена, ее анализировали не только на земле. Космонавты Владимир Коваленок и Александр Иванченков в это время находились на борту космической станции «Салют-6» и попросили продиктовать им позицию. Расставив фигуры на специальной шахматной доске, приспособленной для игры в невесомости, они быстро убедились, что положение Карпова совершенно выиграно. Узнав на следующий день, что их оценка подтвердилась, космонавты направили чемпиону мира поздравительную телеграмму. Так что одно из первых поздравлений с победой в матче Анатолий Карпов получил из Космоса!

Первый шахматный матч между Землей и Космосом состоялся 10 лет назад. Космическую команду представлял экипаж корабля «Союз-9» — В. И. Севастьянов и А. И. Николаев, за Землю играли генерал-полковник Н. П. Каманин и космонавт В. В. Горбатко. Космическая схватка продолжалась несколько витков и после острой борьбы завершилась миром.

Космос — Земля
Ферзевый гамбит

1.d4 d5 2.c4 dc 3.e3 e5 4.С:c4 ed 5.ed Кc6 6.Сe3 Сd6 7.Кc3 Кf6 8.Кf3 0—0 9.0—0 Сg4 10.h3 Сf5 11.Кh4 Фd7 12.Фf3 Кe7 13.g4 Сg6 14.Лae1 Крh8 15.Сg5 Кeg8 16.Кg2 Лae8 17.Сe3 Сb4 18.a3 С:c3 19.bc Сe4 20.Фg3 c6 21.f3 Сd5 22.Сd3 b5 23.Фh4 g6 24.Кf4 Сc4 25.С:c4 bc 26.Сd2 Л:e1 27.Л:e1 Кd5 28.g5 Фd6 29.К:d5 cd 30.Сf4 Фd8 31.Сe5+ f6 32.gf К:f6 33.С:f6+ Л:f6 34.Лe8+ Ф:e8 35.Ф:f6+ Крg8. Ничья.

Кто знает, может быть, пройдет немного времени, и идея Остапа Бендера о междупланетном шахматном конгрессе станет реальностью!

Соединим две точки отрезком

1. *ABCD* — это тетраэдр, или (плоский) четырехугольник, или треугольник, или отрезок.

3. г) Если D и E лежат по разные стороны от плоскости, содержащей A, B и C, то $(A+B+C)(D+E)$ — «внешний каркас» бипирамиды $ABCDE$ (без ребер AB, BC, CA); бипирамида — это две пирамиды, сложенные общим основанием.

5. а) Полоса; б) плоскость; в) «слой» между двумя параллельными плоскостями.

6. Если $\alpha^2=\alpha$ и $\beta^2=\beta$, то $(\alpha\beta)^2=(\alpha\beta)(\alpha\beta)=$

$$=((\alpha\beta)\alpha)\beta=(\alpha(\beta\alpha))\beta=(\alpha(\alpha\beta))\beta=$$
$$=((\alpha\alpha)\beta)\beta=(\alpha\alpha)(\beta\beta)=\alpha^2\beta^2=\alpha\beta.$$

7. б) Если $\beta=A+B+C+D$ и A, B, C, D, не лежат в одной плоскости, то β^2 — каркас тетраэдра $ABCD$, β^3 — поверхность этого тетраэдра, β^n при $n\geqslant 4$ — сам тетраэдр.

9. Если $\alpha=A+B+C$ и A, B, C не лежат на одной прямой, то α/α — шесть лучей — продолжений сторон $\triangle ABC$, а все остальные фигуры — объединение трех внешних углов треугольника.

10. а) A/B, AB, B/A; б) ABC, $(AB)/C$, $(AC)/B$, $(BC)/A$, $A/(BC)$, $B/(AC)$, $C/(AB)$.

12. г) Полуплоскость, если прямые λ_1, λ_2 параллельны; плоскость, если они пересекаются; полупространство, если скрещиваются.

13. а) Внешность круга.

17. Если α — линейная фигура, то для любых ее точек A, B имеем $\alpha\supset A/B$, а значит, и $\alpha\supset A/(A/B)$. Но $A/(A/B)\supset AB$ (сделайте чертеж!); поэтому $\alpha\supset AB$, то есть $\alpha\supset\alpha\alpha$.

18. Линейная, а значит и выпуклая (упр. 17), фигура вместе с любыми двумя своими точками содержит и всю прямую, проходящую через них (см. упр. 10а).

Бильярд

1. Не может, поскольку в противном случае, пустив частицу по той же траектории в обратном направлении (или, как говорят, обратив движение частицы во времени), получим, что, с одной стороны, частица должна двигаться внутри бильярда по замкнутой траектории и, с другой стороны, она, повторив свой первоначальный путь в обратном направлении, вылетит из бильярда.

2. а) Может; бильярд должен быть квадратом. **Указание.** Между любыми соседними звеньями траектории угол прямой. б) У траектории может быть только четное и любое четное ($\geqslant 4$) число звеньев.

3. Искомое множество указано красным цветом на рисунке 1 (здесь $(KL)\parallel(PR)$, $|AO|=|OV|$). **Указание.** На «клетчатой плоскости» выпрямленную траекторию могут пересекать прямые, параллельные каждой диагонали прямоугольника. Из равенства времен движения шаров A и M получаем «выпрямленное множество точек M», а из него — искомое множество в бильярде.

4. Обозначим сторону XY цифрой 1, YZ — цифрой 2, ZX — цифрой 3. Сделаем отражение треугольника XYZ относительно стороны *1* (рис. 2), получившийся треугольник отразим относительно стороны *2*, новый треугольник отразим относительно стороны *3*. Теперь видно, что максимальная длина траектории достигается в том случае, когда выпрямленная траектория идет из Z в Y'. Соответственно в исходном треугольнике траектория ведет из $Z(=A)$ в $Y(=B)$. Из прямоугольного треугольника $ZY'C$ $\frac{|ZY'|}{|ZX|}=\sqrt{7}$.

5. Если траектория γ замкнута, то все звенья разбиваются на пары параллельных звеньев (рис. 3); следовательно, в этом случае число звеньев может быть только четным. Траектория γ обязательно замкнута, поскольку из симметрии параллельных звеньев AB, CD (а значит, и всей траектории) относительно центра окружности вытекает, что если шар перешел со звена AB на звено CD после n отражений, то еще через n отражений он вернется на звено AB.

6. Будем отражать данный угол относительно его сторон до тех пор, пока не получим угол, больший или равный 180° (рис. 4). Выпрямленная траектория частицы может пересекать только эти отраженные углы. По условию их количество равно 1800. Следовательно, величина α укладывается в 180° не меньше 1800 раз и не больше 1801 раза, то есть

$$1800\leqslant\frac{180}{\alpha}<1801.$$

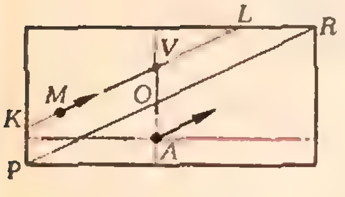


Рис. 1.

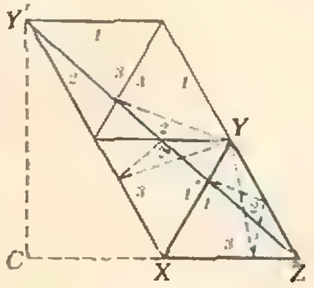


Рис. 2.

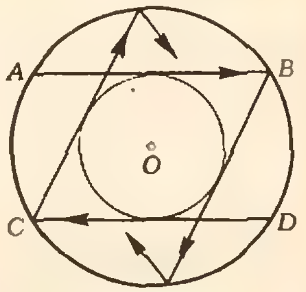


Рис. 3.

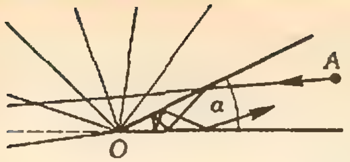


Рис. 4.

откуда

$$0{,}09994\ldots^\circ < \alpha < 0{,}1^\circ.$$

Задача как задача

При уменьшении x сечение поворачивается вокруг отрезка KL, приближаясь к трапеции $KLPB$, периметр которой равен 5/2. При $x=0$ сечение*) превращается в треугольник PBA, периметр которого равен 3; к заштрихованному сечению $KLMN$ как бы добавляется ранее находившийся вне тетраэдра треугольник LKW; при $x=0$ он превращается в треугольник LKA (см. рисунок 5).

В чем же ошибка Васи? Он правильно исследовал на отрезке [0; 1] функцию $\Phi(x)=\frac{3}{2}-x+\sqrt{4x^2-2x+1}$, но, к сожалению, $\Phi(x)$ — это не та функция. Дело в том, что искомый периметр сечения $P(x)$ совпадает с $\Phi(x)$ только при $x\in\,]0;\ 1]$, а при $x=0$ $P(x)$ терпит разрыв, делает «скачок» («добавляется треугольник»). Поэтому правильный ответ должен быть таким:

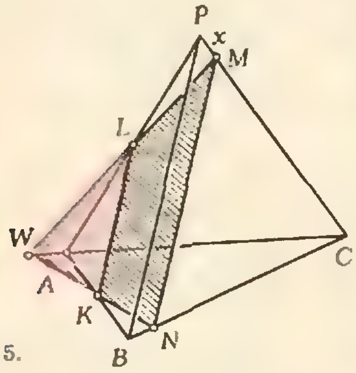


Рис. 5.

$$P(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}-x+\sqrt{4x^2-2x+1}, & \text{если } 0<x\leqslant 1,\\ 3, & \text{если } x=0;\end{cases}$$

$$\min P(x)=P\left(\frac{1}{2}\right)=2;$$
$$\max P(x)=P(0)=3.$$

Приближенные вычисления при решении задач по физике

1. $\alpha\leqslant 0{,}057$; $\alpha\leqslant 0{,}28$.
2. $\Delta t\approx 8{,}6$ с.
3. $g'\approx 978$ см/с^2.
4. $E\approx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2ql}{l^3}$.
5. $N_{\text{ср}}\approx\frac{mv}{2}\left(\frac{v^2}{2s}+g\alpha+kg\right)\approx 10$ кВт.

Читатели советуют

1. $2ab/(a+b)$.

4. $x_1=2\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{2}+2\pi n\ (k,n\in\mathbf{Z})$. Указание. Воспользуйтесь неравенствами

$$\sin^{11}x\leqslant\sin^2x,\ \cos^{11}x\leqslant\cos^2x,$$
$$\sin^4x\leqslant\sin^2x,\ \cos^4x\leqslant\cos^2x$$

и приведите данное уравнение к системе

$$\begin{cases}\sin^{11}x+\cos^{11}x=1,\\ \sin^4x+\cos^4x=1.\end{cases}$$

6. $\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}A\right)^p$. Указание. Возьмите окружность некоторого радиуса R и каждому набору значений переменных α, β, γ поставьте в соответствие вписанный в нее треугольник с этими величинами углов. Покажите, что

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=\frac{S}{2R^2},$$

где S — площадь треугольника. Используйте тот факт, что из всех вписанных в данную окружность треугольников наибольшую площадь имеет равносторонний.

7. $\{6\}$.
8. $\{30, -61\}$.
9. $\{0\}$.
10. $\frac{\pi}{3}+1-\sqrt{3}$.
11. $[-\sqrt{2};\ \sqrt{2}]$. Указание. Рассмотрите выражение в числителе как скалярное произведение векторов

$$\vec{m}=(a;\ b;\ c)\ \text{и}\ \vec{n}=(\cos x;\ \sin x;\ 1).$$

12. Указание. Рассмотрите скалярное произведение векторов

$$\vec{m}=(2^x;\ 3^y;\ 1)\ \text{и}\ \vec{n}=(a;\ b;\ 1).$$

Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола

Математика

Вариант 1

1. $x_1=\arccos\frac{1}{\sqrt5}\pm\left(\pi-\arccos\frac{\pi}{4\sqrt5}\right)+2\pi k$, $x_2=\arccos\frac{2}{3}\pm\arccos\frac{\pi}{6}+2\pi l\ (k,l\in\mathbf{Z})$. Указание. Уравнение $\cos\alpha=\sin\beta$ равносильно уравнению $\cos\alpha-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=0$. Уравнение $a\cdot\sin x+b\cdot\cos x=-\frac{\pi}{2}+2\pi m$ имеет решения только при таких m, при которых $\left|-\frac{\pi}{2}+2\pi m\right|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$. Уравнение $a\cdot\sin x+b\cdot\cos x=c$ равносильно (при $a\neq 0$ или $b\neq 0$) уравнению

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

или (при $a>0$, $b>0$) уравнению

$$\cos\left(x-\arccos\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

---

*) В школьном учебнике под *сечением* многогранника плоскостью понимается их пересечение (как двух множеств), хотя это явно там не сказано.

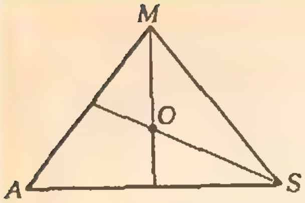


Рис. 6.

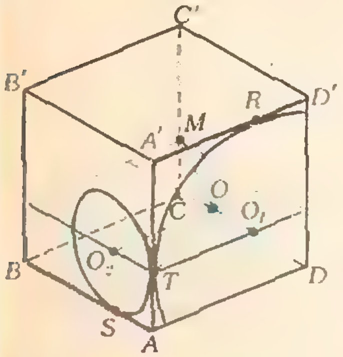


Рис. 7.

2. $\frac{5}{\sqrt{7}}R$. Указание. $\widehat{MAC}=\widehat{MCA}=30°$. Из $\triangle AMC$ выразите $|AC|$ через $|MC|$, затем примените к $\triangle ABC$ теорему косинусов.

3. $a\geqslant 12$. Указание. Искомое множество является областью значений функции $z=5^{1+x}+5^{1-x}+25^x+25^{-x}=5\cdot 5^x+5\cdot 5^{-x}+$ $+(5^x)^2+(5^{-x})^2=\left(5^x+\frac{1}{5^x}\right)^2+5\left(5^x+\frac{1}{5^x}\right)-2$. При всех $x\in\mathbf{R}$

$$5^x+\frac{1}{5^x}\geqslant 2.$$

4. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. Указание. Рассмотрев пересечение данной сферы с плоскостью ABC, покажите, что эта сфера касается ребер AB и AC в их серединах. Аналогично покажите, что данная сфера касается всех остальных ребер тетраэдра $SABC$ и тоже — в их серединах. Значит, ее центр O лежит на пересечении его высот. Искомый радиус $|OM|$ можно теперь найти из равнобедренного треугольника AMS, где M — середина ребра BC (рис. 6). Замечание. Условие, что центр данной сферы лежит внутри тетраэдра, является следствием остальных условий задачи. При некоторых способах решения оно облегчает отбор нужного корня возникающего квадратного уравнения.

5. $|a|\geqslant 4$. Указание. Пусть a — искомое. Если $b\neq\pm 1$, то система при любом c имеет (единственное) решение. При $b=1$ система имеет вид

$$\begin{cases} x+y=ac^2,\\ x+y=ac+1,\end{cases}$$

а при $b=-1$ — вид

$$\begin{cases} x-y=-ac^2,\\ x-y=ac+1.\end{cases}$$

Первая из этих систем имеет решения (и даже бесконечно много решений) тогда и только тогда, когда c таково, что $ac^2=ac+1$. Таким образом, полученное квадратное уравнение (относительно c) должно иметь по крайней мере один корень, то есть должно быть $a^2+4a\geqslant 0$. Аналогично, рассматривая вторую систему, мы получаем, что должно быть разрешимо уравнение $-ac^2=ac+1$, то есть должно быть $a^2-4a\geqslant 0$. Общие решения этих двух неравенств и дают ответ к задаче.

Вариант 2

1. $x_1=\pi k,\ x_2=-\frac{\pi}{2}+2\pi l\ (k,\ l\in\mathbf{Z})$.

2. $2\pi\,(2-\sqrt{3})$. Указание. Около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность («Геометрия 6—8», п. 87); эта окружность будет описанной и около треугольника ABD. Ее радиус R находится, например, при помощи равенства $a=2R\cdot\sin A$ (a — длина стороны треугольника, A — величина противолежащего угла, R — радиус описанной окружности) — докажите его сами или посмотрите в п. 112 пособия «Геометрия 8» (М., «Просвещение», 1978).

3. $x=\log_2\frac{1+\sqrt{1+2a}}{a}$ при $a\in]0;\,4]$. Указание. Данное уравнение равносильно уравнению

$$\log_2\frac{2(1+2^{-x})}{2^x}=\log_2 a.$$

Кроме того, $x\geqslant 0\Leftrightarrow 2^x\geqslant 1$.

4. $\frac{\sqrt{5}}{3}$. Указание. Пересечение данной сферы с гранью $AA'D'D$ есть окружность, касающаяся ребер AA' и $A'D'$ в точках T и R (рис. 7). Аналогично пересечение сферы с гранью $AA'B'B$ есть окружность, касающаяся ребра AA' в точке T и ребра AB в точке S. Центр сферы O лежит на пересечении перпендикуляров к указанным граням, проведенным из центров O_1, O_2 окружностей. Эти перпендикуляры лежат в плоскостях $A'DCB'$ и $AB'C'D$, поэтому точка O лежит на линии их пересечения $B'D$. Поскольку все точки прямой $B'D$ равноудалены от прямых AA' и CC' и сфера касается (AA'), она касается и (CC'). Значит, точка M является точкой касания сферы и (CC'). Отсюда следует, что плоскость TOM параллельна основанию $ABCD$. Искомый радиус $|OT|$ находится, например, из треугольников OO_1T.

5. Множество решений неравенства x^4-4x^2+ $+3\leqslant 0$ есть $A=[-\sqrt{3};\ -1]\cup[1;\ \sqrt{3}]$.

$$\max_A\,(1+ax-x^2)=$$
$$=\begin{cases} -\sqrt{3}a-2, & \text{если } a<-2\sqrt{3},\\ 1+\frac{a^2}{4}, & \text{если } -2\sqrt{3}\leqslant a\leqslant -2,\\ -a, & \text{если } -2<a<0,\\ 0, & \text{если } a=0,\\ a, & \text{если } 0<a<2,\\ 1+\frac{a^2}{4}, & \text{если } 2\leqslant a\leqslant 2\sqrt{3},\\ \sqrt{3}a-2, & \text{если } a>2\sqrt{3}.\end{cases}$$

Указание. Пока $a<-2\sqrt{3}$, абсцисса $\frac{a}{2}$ вершины параболы $1+ax-x^2$ лежит левее множества A и функция $y=1+ax-x^2$, убывая на $\left[\frac{a}{2};\ +\infty\right[$, принимает наибольшее значение на множестве A при $x=-\sqrt{3}$. Если

$-2\sqrt{3}<a<-2$, то $\frac{a}{2}\in A$ и функция $y=1+ax-x^2$ принимает наибольшее значение на множестве A при $x=\frac{a}{2}$. Когда $-2<a<0$, имеем $-1<\frac{a}{2}<0$; функция $y=1+ax-x^2$ возрастает на $\left]-\infty;\ \frac{a}{2}\right]$ и убывает на $\left[\frac{a}{2};\ +\infty\right[$; значит, наибольшее значение на множестве A она принимает при $x=-1$ или при $x=1$; поскольку в данном случае $\frac{a}{2}$ ближе к -1, чем к 1, и график функции $y=1+ax-x^2$ симметричен относительно прямой $x=\frac{a}{2}$, искомое наибольшее значение принимается при $x=-1$. И т. д.

Физика

Вариант 2

1. Из уравнения движения мячика по горизонтали $|\vec{v}|\sin\alpha\cdot t-gt^2/2=H$ найдем время его движения до потолка:

$$t=\frac{|\vec{v}|\sin\alpha}{g}-\sqrt{\left(\frac{|\vec{v}|\sin\alpha}{g}\right)^2-\frac{2H}{g}}$$

(знак «+» отброшен, так как он не соответствует физическому смыслу). Искомое расстояние

$$|AB|=|\vec{v}|\cos\alpha\cdot 2t=\frac{|\vec{v}|^2\sin 2\alpha}{g}\times$$
$$\times\left(1-\sqrt{1-\frac{2gH}{(|\vec{v}|\sin\alpha)^2}}\right)$$

($H<\frac{|\vec{v}|^2\sin^2\alpha}{2g}$, так как мячик ударился о потолок).

2. $|\vec{F}|=\frac{mg}{2}\sin\alpha$. Указание. Запишите правило моментов для оси, проходящей через точку приложения силы $\vec{F}$, и условие равенства нулю суммы проекций всех сил на направление вдоль наклонной плоскости.

3. Так как скорость стержня постоянна, силы, действующие на него, уравновешены:

$$\vec{F}=-m\vec{g},\ \text{или}\ F=mg.$$

Здесь $\vec{F}$ — сила действия магнитного поля на ток; ее модуль

$$|\vec{F}|=|\vec{B}|Il,$$

где ток в цепи

$$I=\frac{\mathcal{E}-\mathcal{E}_{\text{инд}}}{R}.$$

ЭДС индукции, возникающая в движущемся проводнике, равна

$$\mathcal{E}_{\text{инд}}=|\vec{B}|l|\vec{v}|.$$

Таким образом,

$$I=\frac{\mathcal{E}-|\vec{B}|l|\vec{v}|}{R},\ |\vec{B}|l\frac{\mathcal{E}-|\vec{B}|l|\vec{v}|}{R}=mg,$$

откуда

$$|\vec{v}|=\frac{\mathcal{E}}{|\vec{B}|l}-\frac{mgR}{|\vec{B}|^2l^2}.$$

4. Для оценки будем считать, что вся масса гимнаста сосредоточена в его центре тяжести на расстоянии l от перекладины и что в верхнем положении скорость гимнаста равна нулю. Тогда из уравнения движения для нижнего положения

$$\frac{mv^2}{l}=|\vec{F}|-mg$$

и из закона сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2}=mg2l$$

найдем модуль $|\vec{F}|$ силы реакции со стороны перекладины, а значит, и модуль $|\vec{N}|$ силы давления гимнаста на перекладину:

$$|\vec{N}|=|\vec{F}|=5mg.$$

Выбирая $m\sim 60$ кг, получим

$$|\vec{N}|=5mg\sim 3\ \text{кН}.$$

5. Если пренебречь увеличением просвета в канале в результате покачивания гвоздя, главным эффектом будет изменение направления силы трения, действующей на гвоздь, при его поворачивании. Поворачивая и вытягивая гвоздь, надо преодолевать не всю силу трения, а лишь ее проекцию вдоль гвоздя. А сгибать гвоздь надо для того, чтобы легче было его поворачивать (большое плечо — большой момент при малой силе).

Вариант 3

1. $U=\frac{\mathcal{E}_1(r_2+R)+\mathcal{E}_2r_1}{r_1+r_2+R}$.

2. Согласно закону сохранения энергии

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{l}+\frac{kl^2}{2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{4l}+\frac{k4l^2}{2},$$

откуда

$$k=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0l^3}.$$

3. Количество молей газа в верхней части сосуда равно $\nu_1=\frac{(p_0+mg/S)lS}{RT}$, а в нижней — $\nu_2=\frac{plS}{RT}$. После того как перегородку убрали, давление во всем сосуде стало равным p_0+mg/S. Запишем уравнение состояния газа для этого состояния: $p'V'=(\nu_1+\nu_2)RT_1$, или

$$\left(p_0+\frac{mg}{S}\right)(2l-x)=\frac{(p_0+mg/S+p)lRT_1}{RT},$$

где x — смещение поршня.

Согласно первому закону термодинамики работа внешних сил равна изменению внутренней энергии газа: $p'\Delta V=\Delta U$, или

$$\left(p_0+\frac{mg}{S}\right)Sx=C\frac{(p_0+mg/S+p)lS}{RT}(T_1-T).$$

Из полученных двух уравнений найдем

$$x=l\frac{C}{C+R}\frac{p_0+mg/S-p}{p_0+mg/S}.$$

4. Пусть высота уровня воды в ванне $H\sim 0{,}5$ м, площадь сечения ванны $S\sim 1$ м^2 и площадь отверстия $S_0=\pi r^2\sim 10^{-3}$ м^2. Приравнивая объем HS воды в ванне к объему $v_{\text{ср}}tS_0$ вытекающей воды и положив среднюю скорость

вытекания воды $v_{ср} \sim \sqrt{2gH}$, получаем

$$t \sim \frac{SH}{\sqrt{2gH}\,S_0} \sim 3 \text{ мин.}$$

5. Под действием поля заряженного шара A (см. рис. 8) на изолированном шарике B заряды перераспределяются: заряды противоположного знака (относительно заряда шара A) располагаются ближе к шару A, а одноименные заряды — дальше от него, то есть ближе к заземленному шару C. В свою очередь на заземленном шаре C индуцируется заряд противоположного знака относительно заряда шара A (одноименные заряды при этом уходят в землю). В результате, когда шарик B находится близко к шару A, шарик B сильнее притягивается к шару A, нежели к шару C. Когда же шарик B находится далеко от шара A, сила притяжения его к шару C больше, чем к шару A.

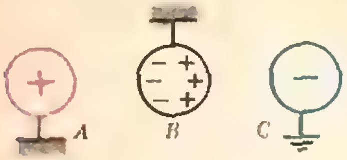


Рис. 8.

Задачи наших читателей

1. 169. 2. 17. 3. Равенство $87375 = \frac{1}{2} \cdot 174750$ является решением обоих ребусов.

Шахматный конкурс

(см. «Квант» № 1)

1. **1.h7+ Kpg7** (1...Kph8 2. Cf6×) **2. h8Ф+ Kp:h8 3. Kpf7** Лf1+ **4. Cf6+ Л:f6+ 5. Kp:f6 Kpg8 6. g7** и т. д.
2. **1.Л:h7+! Kp:h7 2.Фh1+ Kpg7 3.Ch6+ Kpf6 4.Фh4+ Kpe5 5.Ф:d4+. Черные сдались** (5...Kpf5 6.g4×).
3. **1.g6! Ф:g6** (1...hg 2.Kg5) **2.C:g7 Ф:h6** (2...Ф:g7 3.Лhg1) **3.C:h6.** Черные остались без фигуры и через пять ходов сдались.

(см. «Квант» № 2)

1. Чигорин — Янкович (Москва, 1899 г.). **1.Ca7+!** Такой комбинационный удар называется «рентгеном» — одна фигура (здесь ладья a1) оказывает сквозное действие на другую (слона a7) через неприятельские фигуры (ладью a6). **1...Л:a7 2.Л:a7. Черные сдались.**
2. Чигорин — Яновский (Париж, 1900 г.). **1.f5!** (тема завлечения) **1...C:f5 2.Фc5!** (двойной удар). **Черные** сдались (грозит Фf8× и K:f5+).
3. Чигорин — Тарраш (Монте-Карло, 1902 г.). **1.Лh3!** (прямолинейное 1.Kg6+ опровергается путем 1...hg 2.Лh3 Лh7! 3.Л:h5 Л:h5 и черные отыгрывают ферзя, оставаясь с лишней фигурой) **1...Лfg7 2.Kg6+! hg 3.fg! Черные сдались** (3...Ф:h3 4.Ф:h3+ Kpg8 5.Ф:g4).

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 3)

2. Число 1111 — полный квадрат в семеричной системе счисления:

$$1111_7 = 7^3 + 7^2 + 7 + 1 = 400_{10},$$

$$\sqrt{1111_7} = \sqrt{400_{10}} = 20_{10} = 2 \cdot 7 + 6 = 26_7.$$

Число 11111 — полный квадрат в троичной системе счисления:

$$11111_3 = 3^4 + 3^3 + 3^2 + 3 + 1 = 121_{10},$$

$$\sqrt{11111_3} = \sqrt{121_{10}} = 11_{10} = 3^2 + 0 \cdot 3 + 2 = 102_3.$$

3. а) 129, 387, 645. б) 192, 384, 576; 219, 438, 657; 273, 546; 819; 327, 654, 981.

4. Поскольку число $\overline{abc} = 100a + 10b + c = 7(14a + b) + (2a + 3b + c)$ делится на 7, выражение $2a + 3b + c$ должно делиться на 7. Поскольку $a + b + c$ делится на 7, на 7 должна делиться и разность $(2a + 3b + c) - (2a + 2b + 2c) = b - c$. По условию $b \neq c$. Кроме того, очевидно, что $c \neq 0$ и $b \neq 0$. Поэтому возможны только следующие варианты пар значений b и c:

b	1	8	2	9
c	8	1	9	2

Искомые числа $\overline{abc}$ таковы:

518, 581, 329, 392.

5. Проведем окружность с центром в точке O; пусть A и B — точки ее пересечения со сторонами угла (рис. 9). От точки B на получившейся окружности раствором циркуля $|OB|$ последовательно сделаем три засечки A_1, A_2, A_3 (A_3 — диаметрально проти-

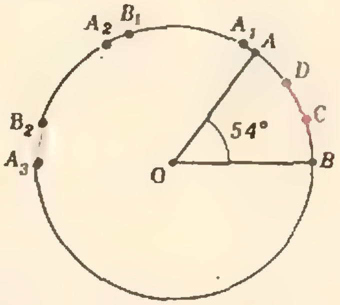


Рис. 9.

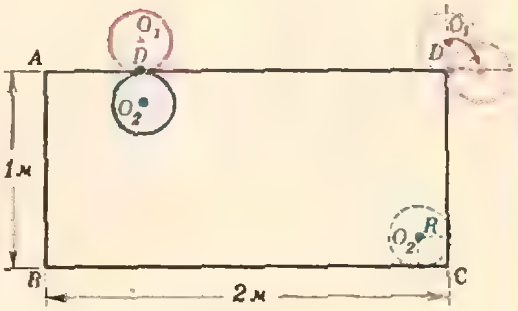


Рис. 10.

воположна B). Проделаем ту же процедуру раствором циркуля $|AB|$; получим точки B_1, B_2; дуга A_3B_2 содержит 18°. Снова сделав три засечки от точки B раствором циркуля $|A_3B_2|$, получим искомые точки C и D.

6. Вернувшись в исходное положение, внешняя окружность (с центром O_1 — рис. 10), во-первых, совершит 12 оборотов, прокатившись по периметру прямоугольника ($6:0{,}5=12$). Кроме того, при переходе через каждую вершину прямоугольника окружность дополнительно совершает четверть оборота (см. рис. 10), так что, пройдя все четыре вершины, внешняя окружность совершит еще один оборот, а значит, всего — 13 оборотов.

Внутренняя же окружность, перекатываясь по сторонам прямоугольника, проходит путь, на $8R$ меньший его периметра; R — радиус окружности, то есть $R=\frac{0{,}5}{2\pi}$. Таким образом внутренняя окружность, пройдя путь $6-8\cdot\frac{0{,}5}{2\pi}=6-\frac{2}{\pi}$, совершит $\left(6-\frac{2}{\pi}\right):0{,}5=\left(12-\frac{4}{\pi}\right)\approx 10.9$ оборотов.

Задачи наших читателей

(см. «Квант» № 3, с.15)

1. а)
$$\overbrace{11\ldots1}^{n}\,\overbrace{55\ldots56}^{n}=\overbrace{11\ldots1}^{n}\cdot 10^n+5\cdot\overbrace{11\ldots1}^{n}+1, \qquad (1)$$

$$\overbrace{11\ldots1}^{n}=1+10+10^2+\ldots+10^{n-1}=\frac{10^n-1}{9}. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получаем:

$$\overbrace{11\ldots1}^{n}\,\overbrace{55\ldots56}^{n}=\frac{1}{9}(10^n-1)\times 10^n+\frac{5}{9}(10^n-1)+1=\left(\frac{10^n+2}{3}\right)^2$$

Поскольку 10^n при делении на 3 дает в остатке 1, число $\frac{10^n+2}{3}$ — целое.

2. а) $\overbrace{90\ldots0}^{n}\,\overbrace{60\ldots01}^{n}=9\cdot10^{2n+2}+2\cdot3\cdot10^{n+1}+1=(3\cdot10^{n+1}+1)^2$.

б) 121, 144, 169, 441, 484.

3. а)
$$\frac{1\overbrace{99\ldots9}^{n}}{\underbrace{99\ldots95}_{n}}=\frac{2\cdot10^n-1}{10^{n+1}-5}=\frac{2\cdot10^n-1}{10\cdot10^n-5}=\frac{1}{5}.$$

б)
$$\frac{1\overbrace{66\ldots6}^{n}}{\underbrace{66\ldots6}_{n}4}=\frac{1}{4} \text{ и } \frac{2\overbrace{66\ldots6}^{n}}{\underbrace{66\ldots6}_{n}5}=\frac{2}{5}$$

(при любом n).

Номер подготовили:
А. Виленкин, А. Егоров, И. Клумова, Т. Петрова,
А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров,
А. Пономарева, И. Смирнова

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректоры Т. Вайсберг, Е. Сидоркина

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 12.2.81
Подписано в печать 27.3.81
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 7,04 Т-05736
Цена 30 коп. Заказ 338 Тираж 237 027 экз.

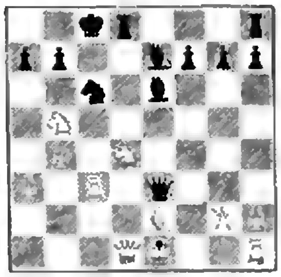
Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета
СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли.
г. Чехов Московской области

ШАХМАТНЫЙ КОНКУРС

Смена шахматных королей

Продолжаем наш краткий рассказ о матчах на первенство мира по шахматам. Сегодня смена шахматных королей произойдет дважды.

Поражение в первом поединке от Ласкера не убедило Яновского в тщетности надежд, и он вызвал чемпиона мира на новый матч. Однако на этот раз победа Ласкера оказалась еще более внушительной. Эпизод из пятой партии этого матча 1910 года иллюстрирует психологический метод Эм. Ласкера, часто избиравшего продолжения не объективно лучшие, а те, которые были не по душе данному конкретному партнеру.

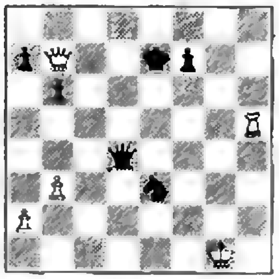


Ласкер — Яновский

После 17...Ф:c3+! 18.К:c3 К:d4! черные получали все шансы на успех, однако они проявляют нерешительность, которая не остается безнаказанной.

17...Ch4+? 18.g3 Фe4 19.0—0 Cf6 20.Л:f6! gf 21.Cf3 Фe5 22.К:a7+ Кpc7 23.Кa:c6 bc 24.Л:c6+ Кpb8 25.Лb6+ Кpc8 26.Фc1+ Кpd7 27.К:e6 fe 28.Лb7+ Кpe8 29.Cc6+. Черные сдались.

Эммануил Ласкер правил шахматным миром 27 лет! В наше бурное время, когда желающих взойти на шахматный трон так много, трудно представить себе, что этот рекорд может быть побит! Хотя в дальнейшем Ласкер еще не раз показывал выдающиеся результаты, матч с Капабланкой в 1921 году у него не получился. Ласкер сдал его при счете 5:9 за 10 партий до конца матча. Хосе Рауль Капабланка стал третьим чемпионом мира. О плохой форме Ласкера свидетельствует окончание пятой партии матча, в которой он потерпел первое поражение.

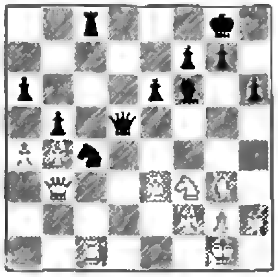


Капабланка — Ласкер

Черные здесь легко делали ничью, играя королем на e6 или f6. Однако последовало **45...Кpf8??** и после **46.Фb8+!** Ласкер сдался (46...Кpg7 47.Фh8+, 46...Кpe7 47.Фe5+).

Битва между Алехиным и Капабланкой в 1927 году — одно из самых выдающихся событий за всю историю шахмат. В борьбе за мировую корону не было матча ни более продолжительного (34 партии), ни более напряженного (32 изнурительных ферзевых гамбита). Но, самое главное, в поединке встретились два шахматных гиганта, находящихся в расцвете творческих сил. Непобедимый Капабланка, высказавший гипотезу о «ничейной смерти шахмат», и великий мастер комбинаций Алехин, своей неудержимой фантазией опровергающий эту гипотезу!

Приводим финал 21-й партии исторического матча.

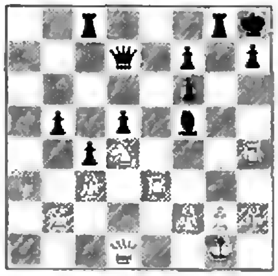


Капабланка — Алехин

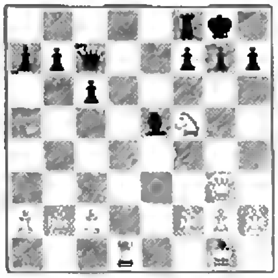
26...Cb2! 27.Лe1. Оказывается, у белой ладьи нет удачного отступления: 27.Лb1 Кa3! 28.Ф:b2 К:b1 29.Ф:b1 Фb3! 30.Фf1 ba 31.h3 a3 или 27.Лd1 ba! 28.Ф:a4 Кb6 29.Л:d5 К:a4 30.Лd1 Кc3 31.Лe1 Лc4 с выигрышем в обоих случаях. **27...Лd8 28.ab ab 29.h3 e5 30.Лb1 e4 31.Кd4 C:d4 32.Лd1 К:e3!** Эффектный заключительный удар. Белые сдались, ввиду варианта 33.Ф:d5 Л:d5 34.Л:d4 Л:d4 35.fe Л:b4.

Одержав в матче шесть необходимых побед, Александр Алехин не только стал четвертым шахматным королем, но и доказал миру неисчерпаемость шахматного искусства.

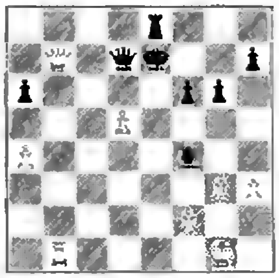
Найдите теперь три красивые комбинации, принадлежащие Капабланке.



1. Белые начинают и выигрывают.



2. Белые начинают и выигрывают.



3. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 31 мая 1981 г.

Космонавты Валерий Рюмин и Леонид Попов у звездного глобуса в планетарии Центра подготовки космонавтов имени Ю. А. Гагарина.

Фото А. Моклецова

Цена 30 коп.
Индекс 70465

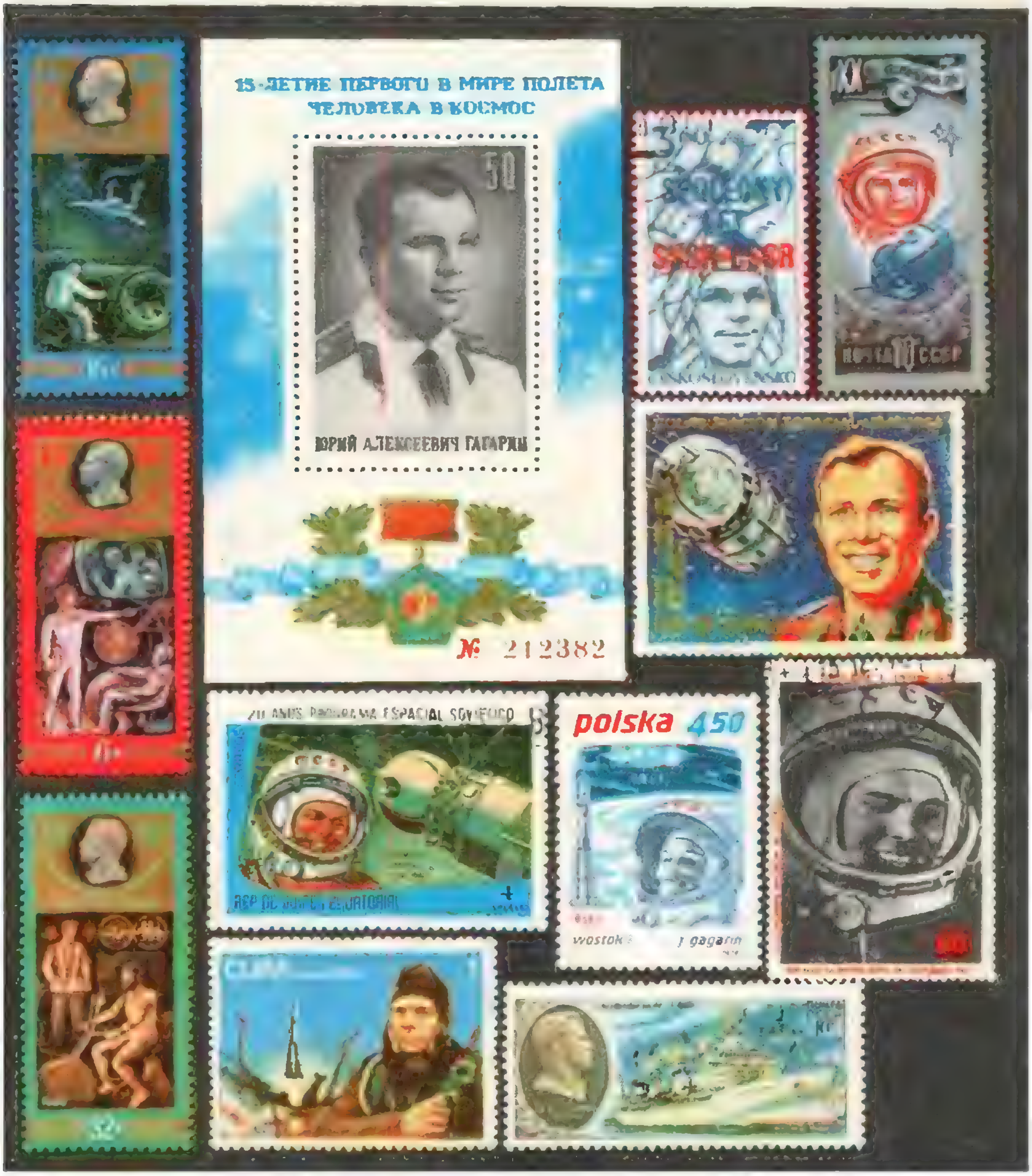
ПОДВИГУ ГАГАРИНА ПОСВЯЩАЕТСЯ

Прошло ровно двадцать лет с момента старта первого космического корабля с человеком на борту. Советский космонавт Юрий Гагарин открыл человечеству путь в космос. По этому пути прошли уже десятки других героев, но подвиг, совершенный Гагариным, с годами не меркнет.

Полет Гагарина получил огромный отклик в международной филателии. Во многих странах были выпущены почтовые марки и блоки с портретом Юрия Гагарина и изображением космического корабля «Восток-1», на котором он совершил свой полет. Большое число марок и блоков, посвященных этой теме, выпустили почтовые ведомства многих стран к десятилетию и пятнадцатилетию полета (в 1971 и 1976 годах). Продолжали они выходить и в последующие годы. Пожалуй, не было ни одного года, в котором не появились бы новые почтовые знаки, посвященные подвигу Гагарина.

В нашей подборке воспроизведены почтовый блок и некоторые марки, выпущенные в Советском Союзе, Польше, Чехословакии, на Кубе, в Республике Экваториальная Гвинея и Демократической Республике Сан-Томе и Принсипи после 1975 года и посвященные Юрию Гагарину.

В. Рудов


15-ЛЕТИЕ ПЕРВОГО В МИРЕ ПОЛЕТА ЧЕЛОВЕКА В КОСМОС
50
ЮРИЙ АЛЕКСЕЕВИЧ ГАГАРИН
№ 212382
ПОЧТА СССР
20 ANOS PROGRAMA ESPACIAL SOVIETICO
REP. DE GUINEA ECUATORIAL
polska 4.50
wostok
j gagarin
CUBA

НОМЕР
5

Основан в 1970 году

КВАНТ

5
1981

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:
М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд

В НОМЕРЕ:

Ученые обращаются к молодежи

2 *М. Лаврентьев.* Приглашение в науку

• • •

5 *В. Эдельман.* Металлы
14 *А. Бабичев.* Об одной задаче Колмогорова

Лаборатория «Кванта»

17 *Г. Григорьев.* Телевизор — стробоскоп

Задачник «Кванта»

20 Задачи М681—М685; Ф693—Ф697
22 Решения задач М636—М640; Ф647—Ф655

• • •

30 К конкурсу «Малый интеркосмос»

«Квант» для младших школьников

33 Задачи
34 *А. Савин.* Циркулем и линейкой

Практикум абитуриента

37 *Б. Ерицпохов.* Построение изображений наклонных предметов

42 *Я. Суконник, П. Горнштейн.* Можно решить проще!

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1980 году

47 Горьковский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

48 Красноярский государственный университет

49 Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

52 Уральский государственный университет им. А. М. Горького

Искусство программирования

53 *Г. Звенигородский, Е. Кузнецов.* Что такое мини-ЭВМ?

Информация

56 Заочная физическая школа

57 Московская городская олимпиада по физике

59 **Шахматная страничка**

60 **Ответы, указания, решения**

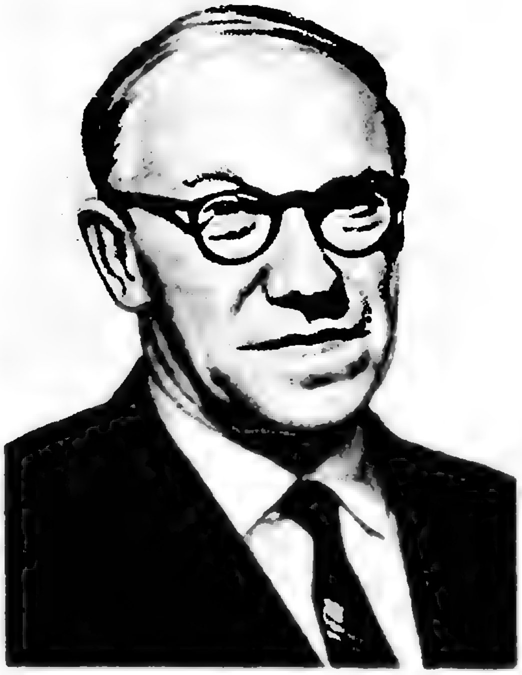
Шахматный конкурс *(3 с. обложки)*

Наша обложка *(16)*

Смесь *(13, 16, 41, 58)*

Клетчатую поверхность на первой странице обложки нарисовал «электронный художник» по программе Ю. Котова, подробнее см. с. 16

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1981



М. Лаврентьев

Приглашение в науку

Какие качества отличают ученого, какие черты характера должен воспитывать в себе молодой человек, решивший посвятить себя науке? Нелегко коротко ответить на этот вопрос.

Давайте посмотрим на ученых, которые много сделали в науке. Характерно, что независимо от специальности и дарования каждый из них вложил в науку огромный личный труд. В определенные периоды жизни (а эти периоды продолжались годами) напряженность труда достигает вершины. Исследователь, забывая об отдыхе, ежедневно работает по 14—16 часов. Так что слова о труде в науке — это не фраза. Это закон. Он остается в силе и для нашего времени.

Что еще характерно для исследователя? Полное отключение от «посторонних» дел, которые помешали бы ему реализовать выношенную идею. Такие «периоды отключения» длятся, как показывает жизнь, по нескольку месяцев. От осады крепости ученый переходит к ее штурму. Это очень ответственный этап, и тут проверяется умение человека завершить начатое. В такие периоды исследователь еще и еще раз тренирует себя, учится преодолевать внезапно появляющиеся трудности, быстро решать головоломные загадки, которые всегда окружают проблему невидимой с первого взгляда, но очень стойкой крепостной стеной. Кажется, что стена пала, ты уже в крепости, но перед тобой новый пояс укреплений, который прежде был не виден. Как на войне: рвы, проволока, бездорожье... Так бывает и в математике, и в инженерном деле — в любой области. Поэтому молодому ученому надо готовить себя к великому терпению, к тому, чтобы быстро ориентироваться и вовремя менять тактику, вызывать на помощь или самому строить новые «осадные орудия».

Академик Михаил Алексеевич Лаврентьев (1900—1980) — лауреат Государственной премии, почетный председатель Сибирского отделения АН СССР.

Статья с небольшими сокращениями перепечатывается из сборника «Ленин. Наука. Молодежь», выпущенного в 1980 году издательством «Наука».

Я думаю, человек, который хочет стать ученым, должен как можно скорее развить в себе способность много работать. Надо научиться работать даже во время отдыха.

Итак, воспитание в себе большой работоспособности. К этому я добавил бы еще одно качество, особенно важное для ученого,— абсолютная честность. Человек, склонный искажать факты, приписывать себе не принадлежащие ему идеи, никогда не сможет стать настоящим ученым...

Так вот, трудолюбие и честность идут вне конкурса. Это ясно без слов. Сложнее — со способностями. Когда юношу или девушку отбирают в балет, в школу пения, в консерваторию — это делается сравнительно просто. Способности в этих областях у людей проявляются открыто. Их видят, подмечают все, помогает их проявить и наша довольно развитая система художественной самодеятельности. Но и тут, конечно, нужен большой знаток искусства, чтобы определить, выйдет ли из молодого человека крупный музыкант или художник. В науке дело обстоит во много раз сложнее.

В США предлагали разные способы отбора людей для творческой научной работы. Там вообще для каждой профессии стараются найти свой «тест», характерную задачку-упражнение, выполняя которую человек проверяет себя, какие вещи ему лучше удаются. К сожалению, подобные «тесты» мало что дают для отбора в науке. Ту часть способностей, которая нужна для творчества, они затрагивают лишь поверхностно. Как же быть? Какими методами пользоваться, из каких конкретных принципов исходить? Ждать, покуда педагогика через десятилетия даст нам эти методы и «приметы», мы не можем. Нам нужны специалисты сегодня же. И поэтому ученые Сибири обобщают свой личный опыт, действуют коллективно, когда дело доходит до отбора молодежи, проявляющей склонности, например, к математике, физике.

I Всесибирская физико-математическая олимпиада учащихся средних школ была для ученых не забавой и не просто «общественной нагрузкой». Все, кто проводил эту олимпиаду, думали о будущем советской науки, о пополнении, которое должно прийти нам на смену. Отрадно, что большинство победителей олимпиады оказались из деревни, из небольших городков, из дальних областей. Около 120 ребят, проявивших склонность к математике и физике, учатся по особой, ускоренной программе в специально созданной школе-интернате. Она открыта у нас, в Академгородке СО АН СССР.

Нам нужны теоретики, специализирующиеся в разных областях науки. А они не рождаются готовенькими. Их надо выявлять и растить смолоду. Мы ищем не «вундеркиндов», а людей с определившимися склонностями. И исходим из того, что способностями одарено большинство людей. Нам остается лишь прийти к молодежи и определить, к чему лежит у человека душа. А уж дальше все зависит от школы, от ученых, которые берутся помогать такой школе, и, безусловно, от самого молодого человека.

Я не сказал об одной примете, которой наши ученые пользуются, отыскивая способных ребят. Пока эта примета нас не подводила. Не простое усердие, не заучивание (пусть даже блестящее) готовых стандартных решений, а самостоятельность мышления интересны ученому в молодом человеке. Юноше или девушке поручают сделать опыт, решить задачу, просят объяснить природное явление. Ничего необычного в самой задаче или в опыте нет. Опыт может быть проделан, задача решена, а «необычное» может при этом и не проявиться. Но вот юноша предлагает свой собственный путь решения. Иного учителя такая необычность может отпугнуть. А ученых она радует. Лишь бы вывод был верным, а уж пути к выводу могут быть разные. И чем больше путей перебирает в уме молодой человек, чем свободнее он находит кратчайший, самый экономный, самый рациональный, я бы добавил, самый красивый, тем больше у нас уверенности, что из него выйдет толк.

Однажды, когда мне было лет десять, друг нашей семьи академик Николай Николаевич Лузин рассказал мне забавную историю о том, как Сократ открыл Платона, своего лучшего ученика. Лузин был настолько хорошим рассказчиком, что отличить, где у него правда, а где вымысел, было невозможно. Слушая его, я живо представлял себе, как Сократ, прогуливаясь, шел по родному городу. Вот он подошел к стройке и вдруг остановился. Ему бросилось в глаза что-то необычное. Все каменщики возводили стены, проделывая одни и те же движения. И только один из них клал камни по-особому. Сократ присмотрелся. Молодой рабочий берег силы. У него все было рассчитано. Там, где другие делали два движения, он обходился одним. И стена у него росла быстрее, и работал он с меньшим напряжением. Сократ подозвал рабочего, взял его к себе жить. А через несколько лет из рабочего-каменщика получился ученый, философ, имя и идеи которого живы до наших дней.

Николай Николаевич давно умер. Но я часто вспоминаю эту историю, которую впервые услышал от него.

Легенды легендами, а дело делом. Сейчас ученым и педагогам пришлось всерьез столкнуться с проблемой: как определить, есть ли у человека внутренняя тяга к разгадыванию новых для него явлений, к раскрытию больших и малых тайн природы? Когда педагоги станут делать это повсеместно, гораздо легче пойдет обновление школы, повысится и качество обучения.

Я предвижу вопрос: не слишком ли много мы требуем от ребят? Не будут ли они перегружены?

Нет, если соблюсти два условия.

Первое. Ребята должны идти в те или иные специализированные школы по склонности, а не вопреки ей. И тогда материал они усваивают вдвое, втрое быстрее и проще. Любимое занятие — это удовольствие, а не нудная, обязательная работа.

Второе. Опытный руководитель, само окружение, обстановка, в которых воспитываются ребята, должны помогать им быстрее формироваться в ученых. Полное развитие целеустремленности и приобретение достаточно широких знаний не должны идти за счет переутомления. Среди математиков особенно много случаев, когда молодой человек перенапрягается настолько, что на долгое время выходит из строя. Непрерывность работы нужно сочетать с разумным отдыхом и «переключением» сознания на другие области.

Надо много трудиться, но делать это разумно. Надо создать новую систему воспитания молодых ученых, но внутри этой системы отказаться от стандартов, от шаблонов.

Старший товарищ, руководитель обязан с самого начала воспитывать у юных подопечных качества, характерные для большинства наших ведущих советских ученых. Надо ли еще раз говорить о них здесь? Они известны всему миру. Мы хотим, чтобы для будущих, подрастающих ученых наибольшим стимулом творчества было желание не только сделать открытие, но и как можно быстрее поставить это открытие на службу Отчизне, народу. С этим качеством неразрывно связаны чувство товарищества и удовлетворения не только личным успехом, радость не только за себя, но и за успех соседа, за успех своего института.

В. Эдельман

Металлы

1. Что такое металлы?

«Металлом называется светлое тело, которое ковать можно,» — писал в 1763 году Ломоносов. Загляните в ваш учебник химии, и вы увидите, что металлы обладают характерным металлическим блеском («светлое тело»), хорошо проводят тепло и электрический ток. Правда, тут же вы прочтете, что существуют элементы, проявляющие свойства как металлов, так и неметаллов. Другими словами, нет четкой грани, отделяющей одно от другого. Химика, который интересуется, в первую очередь, химическими реакциями и для которого каждый элемент — свой особый мир, такая неоднозначность не очень смущает. А вот физика это не устраивает. Если физика делит тела на металлы и неметаллы, то нужно понять, в чем их принципиальное различие. Поэтому надо так определить, что такое металл, чтобы, как и в других случаях в области точных наук, удовлетворить двум требованиям:

1. все металлы должны обладать всеми без исключения приписываемыми им признаками;
2. иные объекты должны не обладать хотя бы одним из признаков.

Вооружившись этими соображениями, посмотрим, все ли металлы без исключения имеют все свойства, приписываемые им учебником. Начнем с «ковать можно», то есть с пластичности, говоря современным языком. И тут же, по созвучию, мы вспомним пластмассы: ведь не зря они так названы, многим из них свойственна пластичность — способность необратимо изменять форму без разрушения. Конечно, медь, железо, алюминий ковать легко, со свинцом еще проще, индий — довольно редкий и дорогой металл — можно мять почти как воск (а воск ведь — не металл!), щелочные металлы и того мягче. А попробуйте стукнуть по обычному чугуну — и он разлетится на кусочки! Ну, тут металлурги скажут: это потому, что чугун — не простое вещество. Он состоит из кристаллов железа, разделенных прослойками углерода, то есть графита. Вот по этим-то прослойкам чугун и ломается. Ну что же, все верно. Только вот беда — хрупкий графит, как оказывается, современная физика относит к металлам! Да и не один графит: числятся, например, среди металлов мышьяк, сурьма и висмут, но ковать их можно с таким же успехом, как стекло — разлетаются на мелкие кусочки!

Проделайте такой простой опыт: разбейте баллон сгоревшей лампы, достаньте оттуда вольфрамовую спираль и попробуйте ее раскрутить. Ничего не выйдет, она рассыпется в пыль! Но ведь как-то ее сумели скрутить на заводе? Значит, может быть и такое — то можно деформировать, то нельзя, в зависимости от того, что происходило с образцом в прошлом. Что ж, придется, видимо, с этим признаком — пластичностью — расстаться. Тем более, что он присущ многим неметаллам; ведь то же стекло — нагрей его, и оно станет мягким и податливым.

Итак, укорачиваем формулировку и двигаемся дальше. На очереди — «блеск», или, говоря научным языком, оптические свойства. Блестящих предметов много: и вода, и стекло, и полированные камни, да мало ли что еще. Так что просто «блеском» не обойтись, вот и говорится: для металлов характерен *металлический* блеск. Ну, это совсем хорошо: получается, что металл — это металл. Правда, интуитивно мы чувствуем, что металлическим блеском блестят полированные медь, золото, серебро, железо. А широко распространенный минерал пирит — разве не блестит, как металлы? Про типичные полупроводники германий и кремний и говорить не приходится, по внешнему виду их от металлов никак не отличишь. С другой стороны, не так давно научились получать хорошие кристаллы таких соединений, как двуокись молибдена; кристаллы эти коричнево-фиолетовые и на обычный металл мало похожи. Оказывается, это вещество надо считать металлом. Почему — будет ясно чуть дальше.

Так что блеск как чисто «металлический» признак отпадает.

На очереди — теплопроводность. Пожалуй, этот признак можно отбросить сразу — все без исключения тела проводят тепло. Правда, про металлы говорится, что они *хорошо* проводят тепло. Но, боюсь, на вопрос «что такое хорошо и что такое плохо?» в этом случае ни один папа не ответит.

Хорошо ли проводит тепло медь? Посмотрим в таблицу и сразу же столкнемся со встречным вопросом: а какая медь и при какой температуре? Если взять чистую медь, например ту, из которой делают провода для радиоприборов, нагреть ее до красного каления, то есть отжечь, то при комнатной температуре она да еще чистое серебро будут проводить тепло лучше любого другого металла. Но погните такой медный образец, стукните или зажмите в тисках — и его теплопроводность станет заметно хуже. А что произойдет, если кусочек отожженной меди начать охлаждать? Сначала теплопроводность будет расти, увеличится в десятки раз при температуре около 10 К, а потом начнет быстро падать (рис. 1) и при достижении абсолютного нуля должна стать нулевой.

Возьмем теперь другой металл — висмут. Картина для него очень похожа на ту, которую мы видели для меди, только максимум теплопроводности лежит при 3 К; а при комнатной температуре висмут проводит тепло плохо, не многим лучше, чем кристалл кварца. Но кварц-то — не металл! И тот же кварц, как видно из рисунка 1, по своим теплопроводным свойствам иногда оказывается не хуже меди. А плавленый кварц, то есть кварцевое стекло, проводит тепло плохо, примерно как нержавеющая сталь.

Кварц — не исключение. Все кристаллы хорошего качества ведут себя подобным образом, только числа будут немного различными. У алмаза, например, уже при комнатной

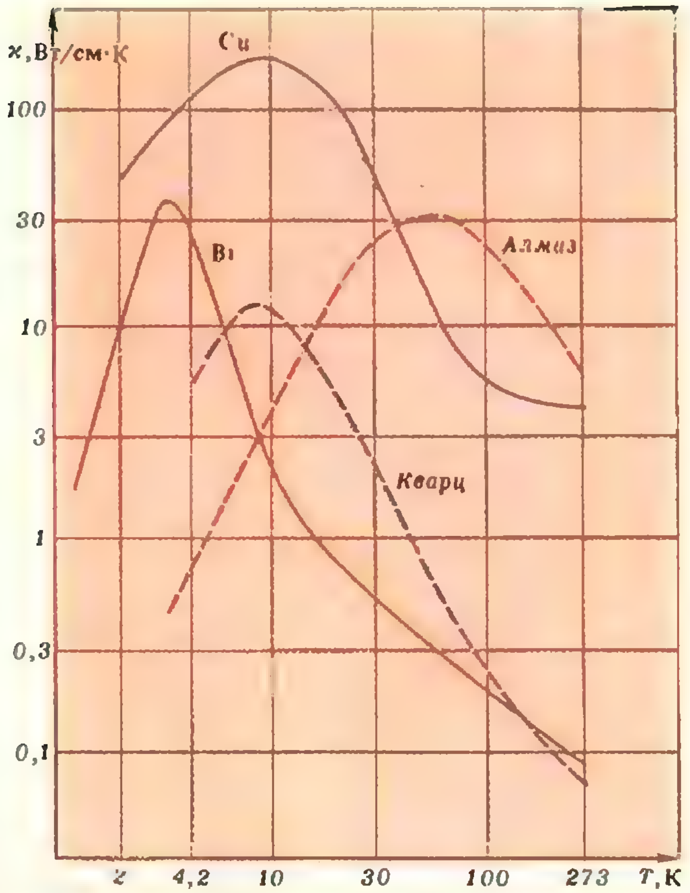


Рис. 1. Зависимость удельной теплопроводности от температуры для различных веществ. (Удельная теплопроводность — это количество тепла, которое протекает между противоположными гранями кубика со стороной 1 см при разности температур между этими гранями в 1 К.)

температуре теплопроводность лучше, чем у меди.

Отбрасываем с чистым сердцем теплопроводность и жалеть об этом не будем. И не только потому, что по этому признаку металл от неметалла не так уж легко отличить, но и потому, что, оказывается, специфические черты в теплопроводности металлов (а такие есть) являются следствием его электропроводности — последнего оставшегося свойства.

И опять в формулировке, приведенной в начале статьи, уточнение — не просто электропроводность, а *хорошая* электропроводность. А ведь когда речь шла о теплопроводности, эпитет «хорошая» нас насторожил и, как оказалось, не напрасно. Что же — и последнее свойство под подозрением? Надо обязательно его спасать, а то мы останемся вообще без металлов, а заодно без полупроводников, без изоляторов. Вот это наука получается! Любой школьник в большинстве случаев не задумываясь скажет, с чем он имеет дело, а копнули поглубже — и остановились в недоумении.

И есть от чего. Возьмем таблицы физических величин и посмотрим на числа. Вот, к примеру, при комнатной температуре удельное сопротивление ϱ (Ом · см) меди $\sim 1{,}55 \times \times 10^{-6}$; у висмута $\varrho \sim 10^{-4}$; у графита $\varrho \sim 10^{-3}$; у чистых кремния и германия $\varrho \sim 10^{2}$ (но, добавляя примеси, его можно довести до $\sim 10^{-3}$); у мрамора $\varrho = 10^{7} \div 10^{11}$; у стекла $\varrho = 10^{10}$; а где-то в конце списка — янтарь с удельным сопротивлением до 10^{19}. И где же тут кончаются металлы-проводники и начинаются диэлектрики? А мы еще не упомянули про электролиты. Обычная морская вода неплохо проводит ток. Что же — и ее считать металлом?

Посмотрим, не поможет ли нам температура. Если повышать температуру, то различия между веществами начнут сглаживаться: у меди

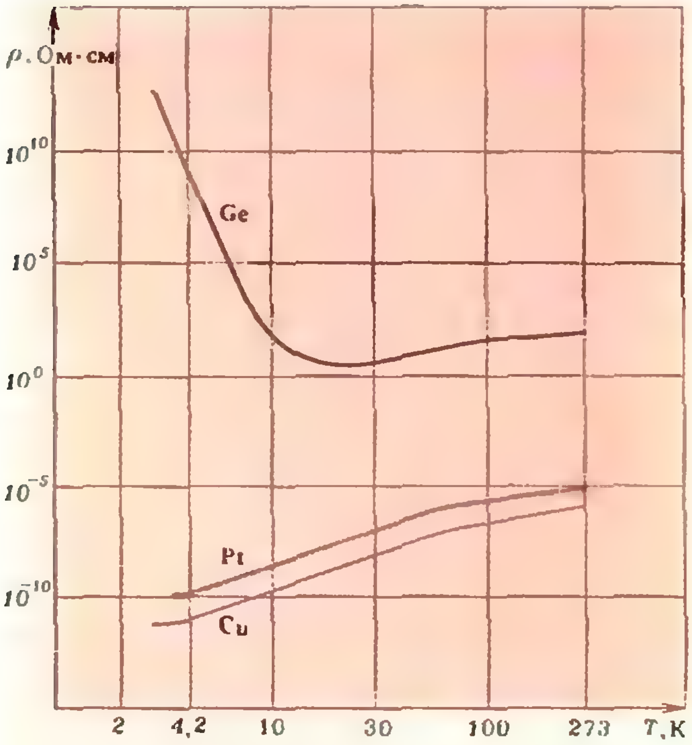


Рис. 2. Зависимость удельного сопротивления чистых металлов (меди и платины) и полупроводника (чистого германия) от температуры.

сопротивление начнет расти, у стекла, например, уменьшаться. Значит, надо проследить за тем, что произойдет при охлаждении. И вот тут мы наконец-то увидим качественные различия. Посмотрите на рисунок 2: при температурах жидкого гелия, вблизи абсолютного нуля, вещества разделились на две группы. У одних сопротивление остается небольшим, у сплавов или у не очень чистых металлов ρ почти не изменяется при охлаждении, для чистых металлов сопротивление сильно уменьшается. Чем чище и совершеннее кристалл, тем значительнее это изменение. Иногда ρ при температуре, близкой к абсолютному нулю, меньше, чем при комнатной, в сотни тысяч раз. У других веществ, например у полупроводников, с понижением температуры сопротивление начинает стремительно возрастать, и чем ниже температура, тем оно больше. Если бы можно было добраться до абсолютного нуля, то ρ стало бы бесконечно большим. Впрочем, достаточно и того, что сопротивление реально становится столь большим, что никаким современным прибором его уже не измеришь.

Итак, мы добрались до ответа:

металлы — это такие вещества, которые проводят электричество при любой температуре.

В противоположность этому диэлектрики перестают проводить ток, если их охладить до абсолютного нуля. Если пользоваться таким определением, то и графит, и двуокись молибдена оказываются металлами. А куда же отнести полупроводники? Если речь идет о чистых, совершенных кристаллах, то они, строго говоря, диэлектрики. Но если в них содержится много примесей, то они могут стать металлами, то есть сохранять проводимость при самых низких температурах.

Что же у нас осталось в конце концов? Нам удалось выявить *единственный* существенный признак, руководствуясь которым мы можем, если не в повседневной практике, то хотя бы в принципе, всегда отличить металл от неметалла. А раз этот признак единственный, то оказываются автоматически удовлетворенными оба условия, выполнения которых мы потребовали в начале статьи.

2. Почему металлы проводят ток?

Уже давно было замечено, что одни элементы, такие как медь, золото, серебро, железо, свинец, олово, и в чистом виде, и при сплавлении друг с другом образуют металлы. Другие, например фосфор, сера, хлор, азот, кислород, не только сами металлами не являются, но и соединяясь с металлами превращают их в диэлектрики. Пример тому — обыкновенная соль NaCl. Поэтому в химии появилось деление элементов на металлы и неметаллы.

Такая классификация, однако,— не более чем констатация фактов, хотя на первый взгляд она претендует на то, чтобы объяснить свойства веществ исходя только из строения атомов. В самом деле, посмотрим на таблицу Менделеева. Элементы, расположенные в одном столбце, очень похожи по своим химическим свойствам. А вот будут ли изготовленные из них кристаллы или сплавы проводить электрический ток? Глядя на таблицу, ответить на этот вопрос нельзя. Так, все элементы первой группы образуют металлы, за исключением первого — водорода. Но ведь закон, который кому-то разрешено нарушать,—уже не закон. Правда, во второй группе дело обстоит лучше: здесь все элементы — привычные металлы; а в третьей группе опять сбой: бор — полупроводник, а алюминий — прекрасный металл. Дальше еще хуже. Первый элемент четвертой группы — углерод; мы уже упоминали, что графит — так называют кристалл углерода — это металл. А вот алмаз — тоже кристалл, составленный из атомов углерода, но расположенных иначе, чем в графите,— изолятор. Кремний и германий — классические полупроводники. Олово — казалось бы, типичный металл. Однако... Если всем знакомое белое блестящее олово долго подержать при температуре —30°C, то его кристаллическая структура изменится, а внешне оно посереет. И это олово — его так и называют «серое олово» — полупроводник! А свинец всегда металл.

Если начать смешивать разные элементы, то картина совсем усложнится. Возьмем, например, и сплавим два металла индий и сурьму — в пропорции один к одному. Получим широко применяемый в технике полупроводник InSb. С другой стороны, мы уже говорили, что двуокись молибдена MoO_2 при $T \approx 0$K проводит ток, то есть MoO_2 — металл. (И WO_2, и Re_2O_3 и некоторые другие оксиды — тоже металлы.) А если получающиеся из атомов кристаллы сильно сжать, сдавить, то, оказывается, чуть ли не все вещества становятся металлами, даже такие типичные металлоиды, как сера. Правда, для нее давление перехода в металлическое состояние очень велико — несколько сотен тысяч атмосфер (а для водорода еще больше).

Похоже, что разделить элементы на металлы и неметаллы — не такая уж простая задача. Во всяком случае, ясно, что рассматривая отдельные атомы, мы не можем сказать, будет ли вещество, составленное из этих атомов, проводить ток при $T \approx \approx 0$K, потому что огромную роль играет то, как расположены атомы друг относительно друга. Поэтому для ответа на вопрос «почему металлы проводят ток?» надо изучать, как атомы взаимодействуют между собой, образуя твердое тело.

Посмотрим, как обстоит дело с простейшим из элементов, образующих металлы,— литием. Порядковый номер Li — три. Это означает, что ядро атома Li содержит три протона и положительный заряд ядра компенсируют три электрона. Два из них образуют заполненную *s*-оболочку, ближайшую к ядру, и сильно связаны с ядром. Оставшийся электрон расположен на второй *s*-оболочке. На ней мог бы поместиться еще один электрон, но его у лития нет. Все остальные разрешенные состояния энергии свободны, и электроны на них попадают только при возбуждении атома (например, при сильном нагреве паров лития). Схема уровней в атоме лития показана на рисунке 3.

Рассмотрим теперь множество атомов лития, находящихся в ограниченном объеме. Они могут образовывать газ (пар), жидкость или твердое тело. При достаточно низкой температуре силы взаимного притяжения препятствуют тепловому движению атомов, образуется кристалл. Это наверняка происходит при абсолютном нуле температуры, когда все известные вещества, кроме гелия,— кристаллы.

Итак, из опыта известно, что при низких температурах твердое тело — устойчивое состояние для лития. Но, как известно, устойчивым всегда является такое состояние вещества, в котором его внутренняя энергия меньше, чем в других возможных агрегатных состояниях при той же температуре. Суммарное уменьшение энергии при переходе из одного состояния в другое легко измерить — ведь это и есть теплота испарения или плавления.

С микроскопической точки зрения при низких температурах внутренняя энергия вещества есть, в первую очередь, сумма энергий электронов атомов, составляющих тело. Но электроны в атомах занимают строго определенные уровни энергии. Значит, мы можем ожидать, что при сближении атомов изменятся уровни энергии. При этом распределение электронов по уровням должно оказаться таким, чтобы их суммарная энергия была меньше, чем сумма энергий электронов в таком же количестве изолированных друг от друга атомов.

Что произойдет с уровнями, можно понять исходя из аналогии движения электрона в атоме с любой колебательной системой, например с маятником. Пусть у нас есть два совершенно одинаковых маятника. Пока они не взаимодействуют друг с другом, частота колебаний обоих маятников одна и та же. Введем теперь взаимодействие между ними — свяжем их, например, мягкой пружинкой. И сразу же вместо одной частоты появятся две. Посмотрите на рисунок 4: связанные маятники могут колебаться синфазно, а могут навстречу друг другу. Очевидно, в последнем случае их движение будет более быстрым, то есть частота колебаний такой системы выше собственной частоты колебаний одного маятника. Таким образом, связь приводит к расщеплению частот. Если связать три маятника, то станет уже три собственных частоты; у системы из четырех связанных маятников четыре собственных частоты и так далее до бесконечности.

Поведение любых колебательных систем подобно. Если мы заменим маятники, например, на электрические колебательные контуры, то, как хорошо знают радиолюбители, при введении связи между ними их собственные частоты также расщепляются. Электроны в атоме — это тоже своеобразная колебательная система. Как и маятник, электроны имеют массу, есть сила Кулона, возвращая их к положению равновесия; и этим определяется движение электронов в атоме, характеризуемое, согласно квантовой механике, собственной частотой. Для электронов включение взаимодействия при взаимном сближении приводит к тому, что частоты, бывшие до того одинаковыми, становятся немного разными.

В квантовой механике имеется прямая связь между энергией и частотой колебаний, выражаемая формулой $E=h\nu$, где $h=6{,}62\times \times 10^{-34}$ Дж · с — постоянная Планка, а ν — частота колебаний. Поэтому надо ожидать, что при сближении двух атомов лития каждый

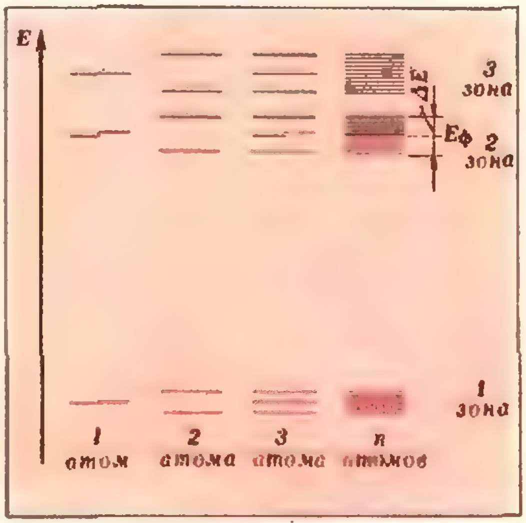


Рис. 3. Схема уровней энергии атома лития и их трансформации в зоны при объединении атомов в кристалл. Красным цветом нарисованы занятые состояния.

из уровней, показанных на рисунке 3, расщепится на два. Каждому новому уровню энергии будет соответствовать своя электронная оболочка теперь уже не отдельного атома, а «молекулы». Оболочки заполняются электронами по тому же правилу, что и у атома,— по два электрона на оболочку. Та пара оболочек, которая получилась из самого нижнего уровня, будет полностью заполнена электронами. Действительно, на них можно разместить четыре электрона, а их у двух атомов лития — шесть. Остаются два электрона, которые теперь расположатся на нижнем из уровней второй пары. Заметьте, какой произошел качественный скачок: раньше эти два электрона занимали два из четырех состояний, имеющих одинаковую энергию. Теперь у них появилась возможность выбирать, и они расположились так, чтобы их суммарная энергия была поменьше. Нетрудно сообразить, что произойдет при добавлении следующих атомов: для трех атомов каждый исходный уровень расщепится на три (см. рис. 3). Девять электронов расположатся так: шесть на нижней триаде уровней, возникших из уровня ближайшей к ядру внутренней заполненной оболочки атома; еще два электрона — на нижнем уровне следующей триады; оставшийся электрон — на среднем уровне той же триады. Еще одно место на этом уровне остается свободным, а верхний уровень полностью пуст. Если взять n атомов ($n \gg 1$), то каждый уровень расщепится на n тесно расположенных уровней, образующих, как говорят, полосу или зону разрешенных значений энергии. В нижней полосе все состояния окажутся занятыми, а во второй — только половина, и именно те, энергия которых лежит ниже. Следующая полоса — полностью пустая.

Расстояние между соседними уровнями в зоне легко оценить. Естественно считать, что при сближении атомов изменение энергии электронов атома примерно равно теплоте испарения вещества, пересчитанной на один атом. Она составляет для металлов обычно несколько электронвольт, а значит, и полная ширина зон ΔE, определяемая взаимодействием соседних атомов, должна иметь тот же масштаб, то есть $\Delta E \sim 1$ эВ $\approx 10^{-19}$ Дж. Для расстояния между уровнями получим $\delta E \sim \Delta E/n$, где n — число атомов в образце. Это число чрезвычайно велико: межатомное расстояние составляет всего несколько ангстремов, и объем, приходящийся на один атом, оказывается всего $\sim 10^{-22}$ см^3. Если наш образец имеет, для определенности, объем 1 см^3, то для него $n \approx 10^{22}$. Поэтому численно оказывается $\delta E \approx 10^{-22} \cdot \Delta E \approx 10^{-41}$ Дж. Эта величина столь мала, что всегда можно пренебречь квантованием энергии внутри зоны и считать, что в пределах зоны разрешены любые значения энергии.

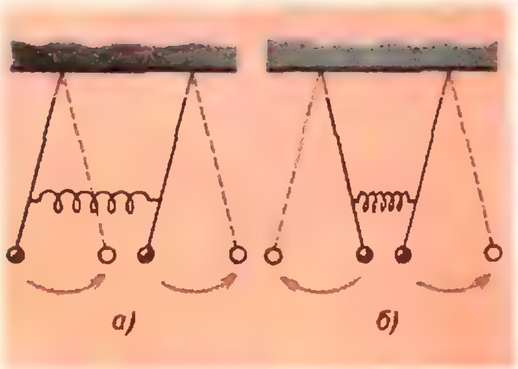


Рис. 4.

Итак, в кристалле уровни энергии размываются в зоны, имеющие ширину, сравнимую с расстоянием между ними. Разрешенными для электронов являются состояния внутри зоны, и здесь электроны могут иметь практически любую энергию (разумеется, в пределах ширины зоны). Но очень важно, что число мест в каждой зоне строго ограничено и равно удвоенному числу атомов, составляющих кристалл. И это обстоятельство, совместно с принципом минимума энергии, определяет распределение электронов по зонам.

Теперь у нас все готово, чтобы наконец понять, почему литий проводит ток. Взглянем опять на рисунок 3. Что же получилось? Пока атомы были сами по себе, все электроны находились во вполне определенных состояниях, строго одинаковых для всех атомов. Теперь атомы объединились в кристалл. Сами атомы в кристалле не только одинаковы, но и совершенно одинаково расположены относительно соседей (за исключением, конечно, тех, которые попали на поверхность кристалла). А все электроны имеют теперь разные энергии. Это может быть только в том случае, если электроны больше не принадлежат отдельным атомам, а каждый электрон «поделили» между собой все атомы. Другими словами, электроны свободно передвигаются внутри идеального кристалла, образуя как бы жидкость, которая заполняет весь объем образца. И электрический ток — это направленный поток этой жидкости, аналогичный текущей по трубам воде.

Чтобы заставить воду течь по трубе, надо создать разность давлений у концов трубы. Тогда под действием внешних сил молекулы приобретут направленную скорость — вода потечет. Очень важно здесь появление именно направленной скорости, ведь сами по себе молекулы хаотически движутся с громадными скоростями — при комнатной температуре средняя скорость теплового движения молекулы порядка 10^3 м/с. Так что дополнительная энергия, приобретаемая молекулой в потоке, мала по сравнению с энергией теплового движения.

Дополнительная энергия, которую надо сообщить электрону, чтобы он участвовал в общем направленном движении электронов в кристалле (а это и есть ток), также мала по сравнению с «собственной» энергией электрона. В этом нетрудно убедиться. Мы уже говорили, что энергия электрона по порядку величины равна $1 эВ = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж. Если вспомнить, что для свободного электрона $E = mv^2/2$ и $m = 9{,}1 \times \times 10^{-31}$ кг, то легко найти скорость: $v \sim 10^6$ м/с. Предположим что все электроны участвуют в токе, а их в 1 м^3 проводника $n \sim 10^{28} Z$ (Z — заряд ядра). Тогда в проводе с поперечным сечением $S = 10^{-6}$ м^2 при токе $I \approx 10$ А (при большем токе провод расплавится) направленная скорость электронов равна $v_н = I/neS \approx 10^{-2} \div 10^{-3}$ м/с. Значит, энергия электрона, участвующего в токе, больше энергии E свободного электрона всего на $10^{-8} E$, то есть на $1{,}6 \cdot 10^{-27}$ Дж.

И тут мы сталкиваемся с удивительным фактом: оказывается электроны, которые расположены в нижней зоне, называемой обычно валентной, не могут изменить свою энергию на малую величину. Ведь если какой-то электрон увеличит свою энергию, то это значит, что он должен перейти на другой уровень. а все соседние уровни в валентной зоне уже заняты. Свободные места есть только в следующей зоне Но чтобы туда попасть, электрон должен изменить свою энергию сразу на несколько электронвольт. Вот так и сидят электроны в валентной зоне и ждут журавля в небе — энергичного кванта. А кванты нужной энергии бывают у электромагнитных волн высокой частоты — у видимого света или у ультрафиолетового света.

Итак, жидкость есть, а течь она не может. И если бы у лития было всего два электрона в атоме, то есть если бы мы строили нашу картинку для атомов, то и получили бы мы изолятор. Но твердый гелий — действительно изолятор, так что мы можем уже поздравить себя с некоторым успехом: мы еще не объяснили, почему в металлах может течь ток, зато поняли, почему диэлектрики, где электронов полным-полно и все они «размазаны» по всему кристаллу, не проводят ток.

А что же литий? Да ведь у него есть вторая зона, которая заполнена только наполовину. Энергию, разделяющую занятые и свободные уровни внутри этой зоны, называют энергией Ферми $E_Ф$. Как мы уже говорили, разность энергий между уровнями в зоне очень невелика. Электрону, который расположен в зоне возле уровня Ферми, достаточно чуть-чуть увеличить свою энергию — и он на свободе, там, где состояния не заняты. Электронам из приграничной полосы ничто не мешает увеличить энергию под действием электрического поля и приобрести направленную скорость. А ведь это и есть ток! Но так же легко этим электронам и потерять направленную скорость, столкнувшись с атомами-примесями (которые всегда есть) или с другими нарушениями идеальной структуры кристалла. Этим объясняется сопротивление току.

Кажется, ясно, почему гелий — изолятор, а литий — проводник. Попробуем-ка наши представления применить к следующему элементу — бериллию. И тут — осечка, модель не сработала. У бериллия — четыре электрона, и, казалось бы, должны быть полностью заняты первая и вторая зоны, а третья обязана быть пустой. Получается изолятор, в то время как берилий — металл.

Дело вот в чем. Если ширина зон достаточно велика, то они могут налезть друг на друга. Про такое явление говорят, что зоны перекрываются. У бериллия так и происходит: минимальная энергия электронов в третьей зоне меньше, чем максимальная во второй. Поэтому электронам оказывается энергетически выгодно оставить пустой часть второй зоны и занять состояния внизу третьей. Вот и получается металл.

А что будет с другими элементами? Перекрываются зоны или нет, заранее сказать нельзя, для этого нужны громоздкие расчеты на ЭВМ, и то не всегда можно получить достоверный ответ. Но вот что примечательно: из нашей схемы следует, что если брать элементы с нечетным числом электронов, то всегда должен получаться металл, если только структурной единицей в кристалле является отдельный атом. А вот водород, например, азот и фтор не желают кристаллизоваться в такую решетку. Они предпочитают сначала объединиться попарно, а уже молекулы, содержащие по четному числу электронов, выстраиваются в кристалл. И законы квантовой механики не мешают ему быть диэлектриком.

Итак, мы теперь знаем, что такое металл с точки зрения физики, и разобрались в самой сути явления, поняв, почему в принципе существуют изоляторы и проводники. Мы увидели, что нельзя предложить простой способ объяснения, почему какое-то конкретное вещество оказалось диэлектриком или металлом. Сделать это можно, лишь вооружившись всей мощью аппарата современной квантовой механики и вычислительной техники, но это уже задача специалистов.

Сила Архимеда и диффузия в жидкостях

Возьмите стеклянную литровую банку и наполовину наполните ее соленой водой. Концентрация поваренной соли в растворе должна быть такой, чтобы куриное яйцо плавало в нем, погрузившись примерно на девять десятых своего объема.

Выньте яйцо из банки, а на поверхность соленой воды аккуратно положите бумажный круг, закрывающий всю воду. Теперь осторожно налейте в банку пресной воды и удалите бумажный круг (лучше всего это сделать пинцетом).

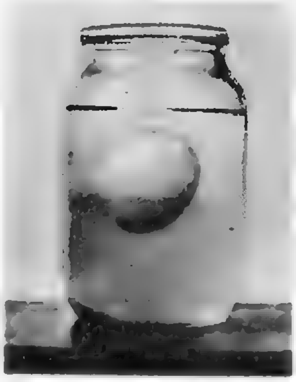


Рис. 1.

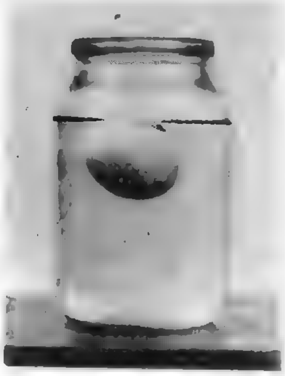


Рис. 2.

Минут через 5—10 опустите в банку яйцо. Вы увидите, что оно как бы повиснет на границе двух слоев, почти не погружаясь в нижний слой (рис. 1).

С течением времени, в результате диффузии, граница пресного и соленого слоев будет перемещаться к поверхности воды в банке. Вместе с границей будет перемещаться и яйцо. Через двое-трое суток, когда граница между слоями совсем исчезнет, яйцо поднимется к поверхности воды и всплывет (рис. 2).

Подумайте, какое практическое применение могло бы найти описанное выше явление.

С. Селицер

А. Бабичев

Об одной задаче Колмогорова

От редакции

Десять лет назад в «Кванте» рассказывалось о проблеме, которую поставил на лекции для школьников академик А. Н. Колмогоров. Вот ее формулировка:

Фиксируем на плоскости угол и точку O внутри него (рис. 1.). Существуют ли отличные от круга фигуры, которые могут вращаться внутри данного угла так, чтобы граница фигуры все время касалась сторон угла и проходила через точку O?

А. Н. Колмогоров отметил, что решение этой проблемы имеет и практическое значение: «На некоторых заводах производят проверку цилиндрических деталей следующим образом: деталь укладывают в лоток и вращают так, чтобы она касалась обеих сторон лотка, затем сверху подводится «щуп» (стержень, который может совершать продольное перемещение) до соприкосновения с деталью. Если во время вращения щуп сдвигается, то деталь бракуется. Таким образом, если существуют отличные от круга фигуры, удовлетворяющие условиям задачи, то цилиндры, имеющие в сечении такую фигуру, будут великолепно проходить через ОТК» («Квант», 1971, № 3, с. 20).

В статье дается частичное решение проблемы Колмогорова.

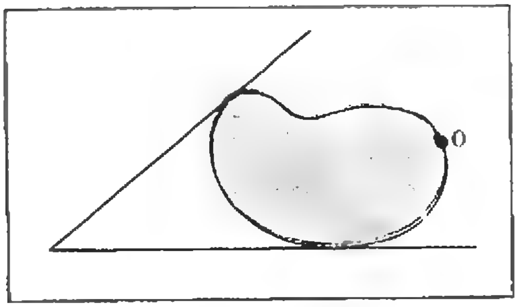


Рис. 1.

Для некоторых видов углов и положений точки O внутри угла мне удалось найти фигуры, отличные от круга и удовлетворяющие условиям, сформулированным А. Н. Колмогоровым. Построение таких фигур может быть произведено следующим образом:

Рассмотрим правильный многоугольник; продолжим две его непараллельные стороны до пересечения. Полученный угол и возьмем в качестве заданного угла. В качестве точки O возьмем одну из вершин многоугольника, например так, как это сделано для пятиугольника на рисунке 2,*а*. Теперь начнем вращать многоугольник так, чтобы при этом он касался обеих сторон угла некоторыми своими вершинами. Наша задача — деформировать многоугольник в такую фигуру, при повороте которой внутри угла точка O все время оставалась бы на ее границе; при этом, конечно, разумно «сохранить вершины» многоугольника, поскольку ими он касается сторон угла.

Будем поворачивать многоугольник до тех пор, пока сторона BC не вернется на исходную сторону угла (начало этого поворота см. на рисунках 2, *а* — *г*). При этом поместим в точку O острие карандаша и последим за тем, какие кривые будет рисовать этот карандаш при нашем повороте.

Полный поворот (на угол от 0 до 2π) пятиугольника естественно разбивается на пять этапов: поворот на угол от 0 до $2\pi/5$, от $2\pi/5$ до $4\pi/5$ и т. д. После первого этапа на исходной стороне угла оказывается соседняя со стороной BC сторона AB пятиугольника, после второго этапа — соседняя с ней сторона AE и т. д. В каждый из этих этапов наш угол опирается на какую-нибудь одну из диагоналей пятиугольника: в первый — на диагональ BE, затем — на AD, потом на EC, на DB и, наконец, на CA. Точка O при этом все время находится на биссектрисе нашего угла.

При повороте пятиугольника из положения, изображенного на рисунке 2, *а*, в положение, изображенное на рисунке 2, *г*, острие карандаша

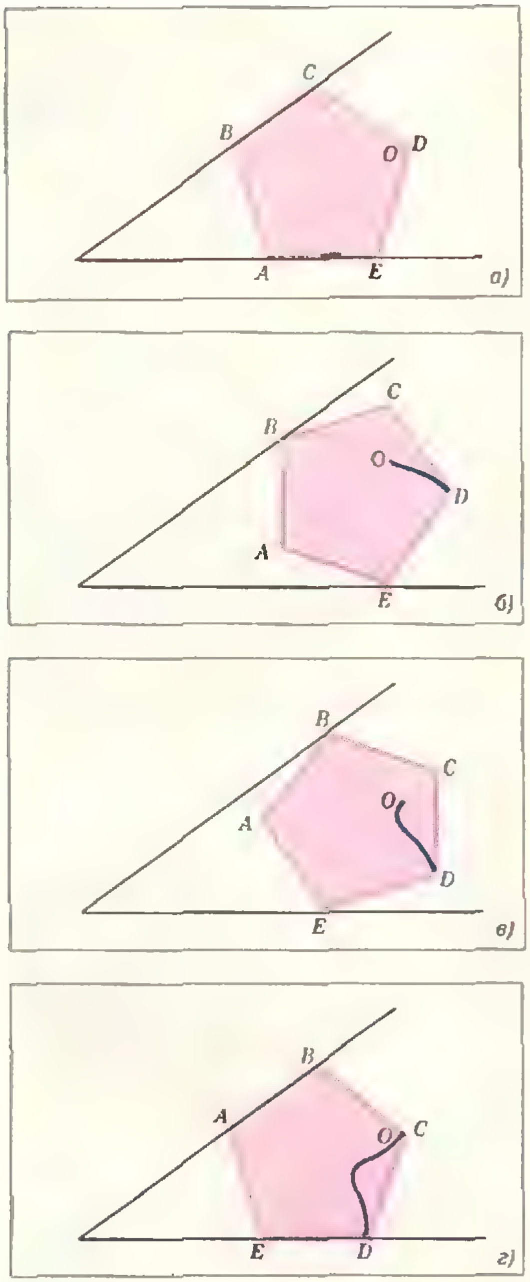


Рис. 2.

прочертит некоторую кривую (см. рисунки 2, *а*—*г*). При полном же повороте пятиугольника карандаш нарисует на нем «звездочку», которая, очевидно, и будет ограничивать искомую фигуру в силу самого способа построения.

Что же за кривые образуют границу этой фигуры?

Чтобы это понять, поступим следующим образом: оставим пятиугольник неподвижным, а вращать будет плоскость с нарисованным на ней углом и гвоздем в точке O. Мы уже отмечали, что при повороте на величину от 0 до $2\pi/5$ наш угол будет опираться на диагональ BE; следовательно, его вершина будет скользить по дуге окружности, показанной на рисунке 3.

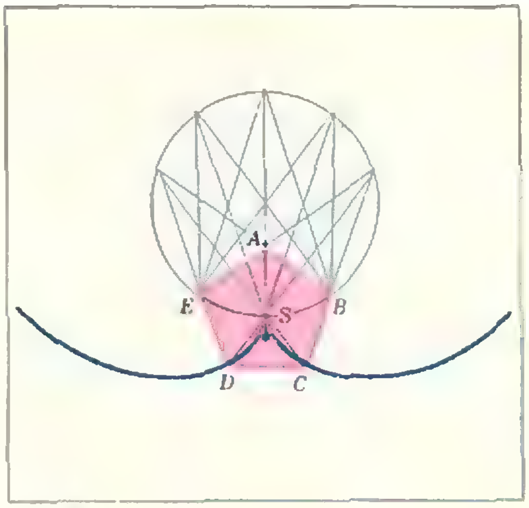


Рис. 3.

Точка O находится на биссектрисе угла и удалена от его вершины на заданное расстояние. Биссектриса угла при движении вершины угла по большей из дуг BE рассматриваемой окружности будет проходить через середину S меньшей дуги BE этой окружности. Таким образом, метод построения искомой кривой ясен: нужно через каждую точку большей дуги BE нашей окружности и середину S меньшей дуги провести прямую и от точки большей дуги отложить отрезок, равный расстоянию от точки O до вершины угла; тогда концы этих отрезков будут описывать искомую кривую.

Затем ту же процедуру нужно проделать с диагоналями AD, EC, DB и CA пятиугольника, поворачивая наш угол соответственно на величины от $2\pi/5$ до $4\pi/5$, от $4\pi/5$ до $6\pi/5$ и от $6\pi/5$ до $8\pi/5$ и от $8\pi/5$ до 2π.

Получающаяся при этом кривая (см. рис. 3) давно известна в математике, о ней «Квант» уже писал на своих страницах. Она называется *улиткой Паскаля* (см. «Квант», 1977, № 5).

Подобным же образом исследуется форма ограничивающей кривой и для других правильных многоугольников. Во всех случаях соот-

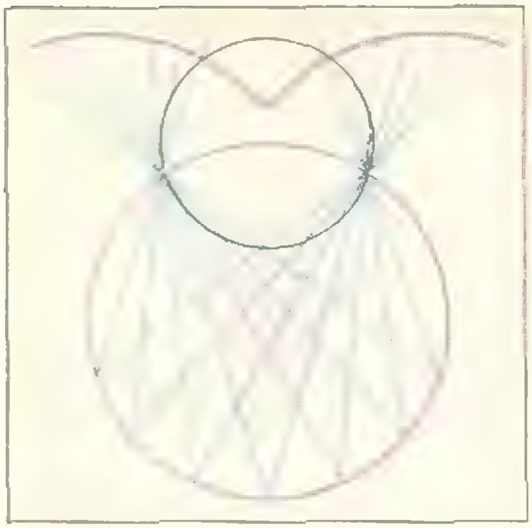


Рис. 4.

ветствующие фигуры ограничиваются дугами улитки Паскаля.

На рисунке 4 изображена «звездочка», соответсвующая пятиугольнику. На второй странице обложки журнала — «звездочка», соответствующая квадрату. Желающие могут нарисовать «звездочки», соответствующие другим правильным многоугольникам, при этом в качестве точки O не обязательно брать вершину на биссектрисе угла. Получающиеся кривые также будут кусками улитки Паскаля, но ее «зубцы» уже не будут симметричными.

Заключение от редакции

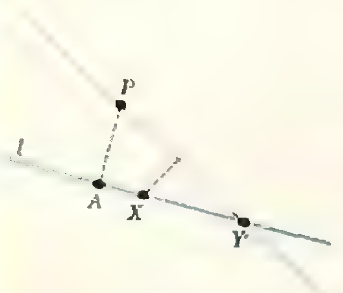
Итак, А. Бабичев частично решил задачу Колмогорова. Однако его решение ставит новый вопрос: существуют ли выпуклые фигуры, отличные от круга, удовлетворяющие условиям задачи? (Фигуры, полученные А. Бабичевым, все невыпуклы.) Ждем ваших писем.

Легкое решение трудной проблемы

В конце прошлого века английский математик Дж. Сильвестр поставил следующую проблему:

Пусть S — конечное множество точек на плоскости такое, что не все его точки лежат на одной прямой. Обязательно ли существует прямая, на которой лежат ровно две точки множества S?

Более сорока лет проблема Сильвестра оставалась нерешенной, а затем около полустолетия считалась очень трудной задачей. Но вдруг возникла следующая прозрачная идея.



Проведем всевозможные прямые через пары точек множества S (быть может, на некоторых из них лежит больше двух точек). Рассмотрим всевозможные расстояния от точек множества S до проведенных прямых. Их — конечное число. Пусть r — наименьшее из этих расстояний ($r>0$). Возьмем ту точку P и ту прямую l, расстояние между которыми равно r. Докажем, что на прямой l лежат ровно две точки из множества S.

Предположим, что на ней лежат три или более точек из множества S. Опустим перпендикуляр из точки P на прямую l; пусть A — основание этого перпендикуляра (см. рисунок). Легко видеть, что $A \notin S$. Значит, на прямой l по крайней мере с одной стороны от точки A лежит не менее двух точек из множества S; обозначим две из них через X и Y, причем пусть X лежит ближе к A, чем Y. Проведем теперь прямую через точки P и Y. Очевидно, расстояние от точки X до этой прямой меньше, чем расстояние от точки P до прямой l, что противоречит выбору P и l.

Следовательно, на прямой l лежат лишь две точки из множества S.

А. П.

Наша обложка

Поверхность причудливой формы, нарисованная на первой странице обложки, получена приемом, который уже описывался на страницах нашего журнала («Квант», 1980, № 10, с. 62): левые части уравнений трех эллипсоидов

$$\frac{x^2}{a_k^2}+\frac{y^2}{b_k^2}+\frac{z^2}{c_k^2}-1=0 \quad (k=1, 2, 3)$$

перемножены и приравнены к нулю, после чего свободный член полученного уравнения шестой степени чуточку изменен.

ЭВМ ЕС-1030, выполняя чертеж по уравнению, показала два семейства линий на поверхности: их отсекают плоскости, расположенные через равные промежутки, параллельные координатным плоскостям Oxz и Oyz. Получившиеся кусочки поверхности машина раскрасила в шахматном порядке.

Машина считала поверхность непрозрачной. На рисунке мы видим, таким образом, «внешнюю часть» поверхности. Подумайте — а что у нее «внутри»?

Ю. Котов

Г. Григорьев

Телевизор — стробоскоп

Как вы думаете: что вы увидите, если будете смотреть на вращающийся предмет через отверстие во вращающемся диске? Оказывается, все зависит от скоростей предмета и диска. И это нетрудно понять.

Пусть диск за время $T_д$ (период обращения диска) совершает один оборот, а предмет — один или несколько оборотов, так что его период обращения $T_п = T_д/n$ $(n > 1)$. В этом случае перед глазом наблюдателя предмет будет появляться все время в одном и том же положении. И если частота вращения велика, из-за инерции зрительного восприятия предмет будет казаться неподвижным.

Если же период вращения диска не кратен периоду вращения предмета, то есть

$$\Delta T = T_д - nT_п \neq 0,$$

и эта разница во времени мала:

$$\Delta T \ll T_д,$$

наблюдатель увидит предмет медленно поворачивающимся по направлению вращения или против него (в зависимости от знака ΔT).

Такое несоответствие кажущегося и истинного движений предмета получило название *стробоскопического эффекта* (от греческих слов στϱoβoζ — кружение и σχoπεω — смотрю). Очевидно, его можно наблюдать различными способами, но всегда процесс наблюдения должен быть периодическим.

Практическое использование стробоскопов как демонстрационных устройств началось еще в начале прошлого века. Именно из этих устройств, демонстрировавших «пляшущих человечков», «кошек-мышек» и другие забавные картинки, родился современный кинематограф.

На кинопленку кадр за кадром снимают последовательные фазы движения. Принятая при съемке частота смены кадров — 24 кадра в секунду (24 Гц). При такой частоте глаз еще замечает мелькание изображения, поэтому во время демонстрации кинофильма каждый остановленный кадр затеняется специальным устройством еще раз. Таким образом, частота мельканий становится 48 Гц, и зритель воспринимает движение как непрерывное.

Явление стробоскопии нашло свое применение и во многих областях современной техники. Сейчас на смену вращающимся дискам пришли стробоскопы с лампами-вспышками. Современный стробоскопический источник света может работать с частотой до 1 кГц. С помощью таких приборов можно исследовать различные машины и механизмы с быстро вращающимися или колеблющимися деталями. Например, можно измерить скорость вращения двигателя, «остановить» и рассмотреть зацепление зубчатых колес, измерить амплитуду вибраций какого-либо механизма и т. д.

Принцип стробоскопии используется и в телевидении. Однако формирование кадра в телевизоре происходит совсем не так, как в кино. В проекционном кино кадр демонстрируется целиком и затем заменяется следующим. В телевизоре кадр «рисуется» электронным лучом на люминесцирующем экране строка за строкой слева направо и сверху вниз (причем интенсивность луча меняется в соответствии с информацией о яркости изображения в данном месте кадра). Говорят, что изображение разворачивается на экране.

По радиотехническим причинам частота смены кадров в телевизоре выбрана равной 25 Гц, но при такой частоте глаз замечает мелькание изображения. Какой выход был найден для кинопроектора, мы уже говорили, а как быть с телевизором? Ведь

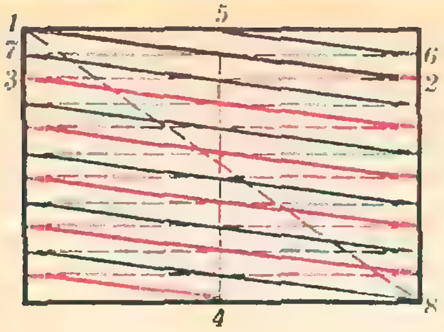


Рис. 1. Ход луча при чересстрочной развертке: *1—2* — начало нечетного полукадра; *5—6* — начало четного полукадра; *2—3*, *4—5*, *6—7* и *8—1* — обратный ход луча.

нельзя затенить электронный луч где-то на середине кадра, так как в этом случае просто пропадет часть изображения. Создателями телевидения был найден оригинальный выход: кадр передается не весь сразу, а полукадрами, так что электронный луч рисует сначала нечетные, а затем четные строки изображения. При этом полукадры меняются с частотой 50 Гц, и глаз воспринимает изображение движения непрерывным. Такой способ формирования кадра на телевизионном экране получил название чересстрочной развертки (рис. 1).

С телевизором в домашних условиях можно провести ряд экспериментов, демонстрирующих стробоскопический эффект.

В первом опыте попробуйте посмотреть на экран телевизора через «классический» стробоскоп — вращающийся диск с отверстиями. Его нетрудно изготовить из куска картона, насаженного на вал микроэлектродвигателя (рис. 2). Для регулировки частоты вращения двигателя его нужно питать от плоской батарейки (с ЭДС 4,5 В) через реостат (с полным сопротивлением 100 Ом). Расстояние от стробоскопа до экрана телевизора должно быть таким, чтобы через отверстие был виден весь экран.

Наблюдаемую картину можно проанализировать с помощью графиков, изображенных на рисунке 3. Первый график (рис. 3, *а*) демонстрирует, как изображение заполняет экран сверху вниз (по оси ординат отложено положение строки в кадре, по оси абсцисс — время). Пунктиром показан обратный ход луча (луч в этот момент гасится). График «видности» стробоскопа (рис. 3, *б*) представляет собой отрезки прямых, верхняя из которых отвечает положению «видно», нижняя — «не видно». Третий и четвертый графики (рис. 3, *в* и *г*) получены наложением первых двух при разном сдвиге фаз между ними. Они объясняют, почему мы видим (при совпадении частот, конечно) лишь половину экрана.

При небольшом изменении частоты вращения диска темная полоса будет пробегать вверх или вниз по экрану, в зависимости от нашего желания.

Попробуйте самостоятельно объяснить, при каком соотношении частот полоса будет бежать вверх, а при каком — вниз. Как будет выглядеть картинка при частоте стробоскопа 100 Гц? 150 Гц? Почему по экрану телевизора, снятого на кинопленку, пробегает темная полоса? Почему иногда на кино- или телеэкране у движущегося вперед авто-

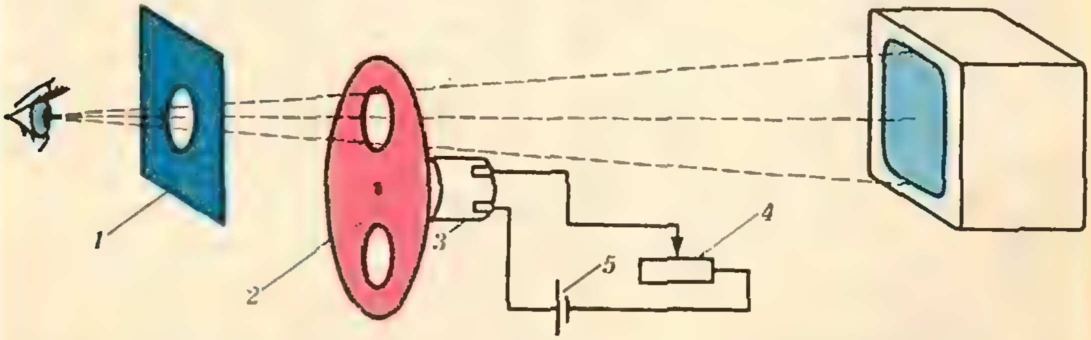


Рис. 2. Схема опыта с «классическим» стробоскопом: *1* — непрозрачный экран; *2* — вращающийся диск с отверстиями; *3* — микроэлектродвигатель; *4* — реостат; *5* — плоская батарейка.

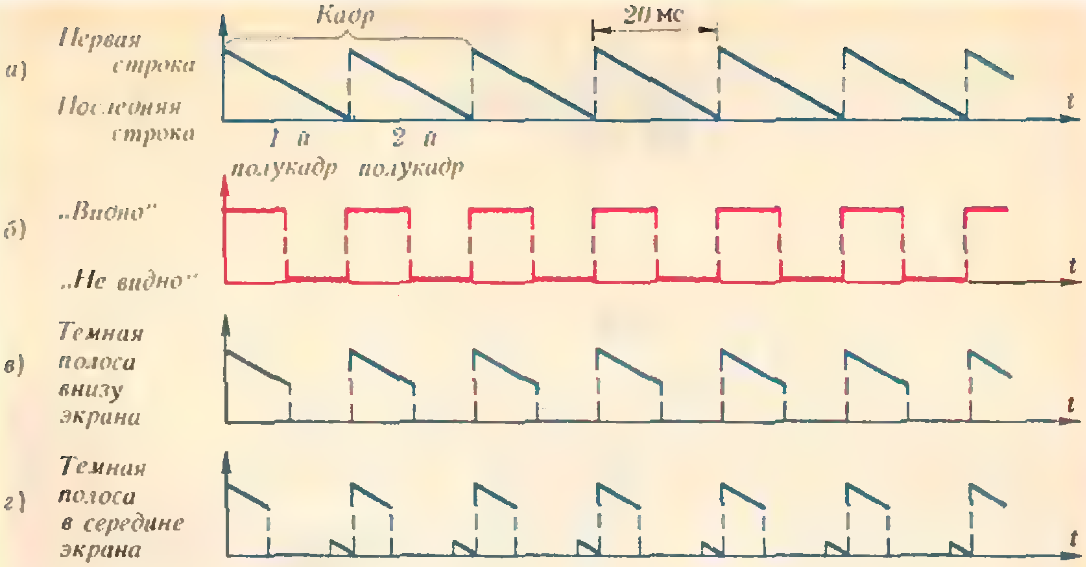


Рис. 3.

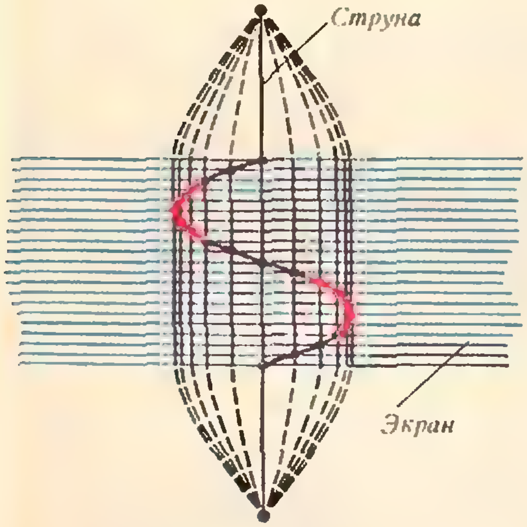


Рис. 4. На рисунке изображена только 21 строка, на самом деле в полукадре 312,5 (а в целом кадре — 625) строк.

мобиля колеса медленно вращаются назад?

Проведите еще один эксперимент. Для этого вам понадобится струна длиной 0,3—0,5 м (можно использовать резинку для авиамоделей). Как будет выглядеть вертикально расположенная колеблющаяся струна на фоне экрана телевизора?

Пусть в момент начала полукадра струна находится в положении равновесия. Пока луч пробежит строку, струна сместится и встретится с лучом в новом месте. В следующей строке «место встречи» опять сместится и так далее. Если период колебаний струны 20 мс (частота 50 Гц), то за это время заполнится весь полукадр, а струна вернется в исходное положение, совершив полное колебание. Многократное повторение этой ситуации приведет к тому, что тень от струны, которую мы увидим на фоне экрана телевизора, будет иметь форму синусоиды (рис. 4).

Что вы увидите, если частота колебаний струны удвоится? утроится? Что вы увидите, если струна будет расположена по диагонали экрана? по горизонтали? Проделайте эти опыты и попробуйте объяснить полученные результаты. Набравшись опыта, попробуйте сообразить, как будет выглядеть на фоне экрана палочка, вращающаяся вокруг своей поперечной оси. Проверьте свои соображения экспериментально.

задачник кванта

Задачи

М681 — М685; Ф693 — Ф697

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 июля 1981 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 5—81» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М681, М682» или «Ф693». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

М681. а) Придумайте целые числа a, b, c, d такие, что числа a^2+b^2, $a^2+b^2+c^2$, $a^2+b^2+c^2+d^2$ — квадраты целых чисел.
б) Существует ли последовательность, состоящая из квадратов целых чисел, такая, что при любом n сумма n ее первых членов — квадрат целого числа?

Г. Григорьев

М682. Внутри треугольника $\triangle$ нужно расположить треугольник $\triangle_1$ так, чтобы у каждого из трех квадратов, построенных на сторонах треугольника $\triangle_1$, две вершины лежали на разных сторонах треугольника $\triangle$ (рис. 1).
а) Докажите, что медианы треугольника $\triangle$ перпендикулярны сторонам треугольника $\triangle_1$.
б) Для любого ли остроугольного треугольника $\triangle$ такое построение возможно?

А. Ягубьянц

М683. Несколько кружков одинакового размера положили на стол так, что никакие два не перекрываются. Докажите, что кружки можно раскрасить в четыре цвета так, что любые два касающихся кружка будут окрашены в разные цвета. Найдите расположение кружков, при котором трех цветов для такой раскраски недостаточно.

Г. Рингель

М684*. Двое играют в следующий вариант «морского боя». Один игрок располагает на доске $n\times n$ некоторое количество непересекающихся «кораблей» $n\times 1$ (быть может, ни одного). Второй игрок наносит одновременно ряд ударов по полям доски и про каждое поле получает от противника ответ — попал или промахнулся. По какому минимальному количеству полей следует нанести удары, чтобы по ответам противника можно было однозначно определить расположение всех его кораблей? Рассмотрите три случая: а) $n=4$, б) $n=10$, в) n — любое натуральное число.

Е. Гик

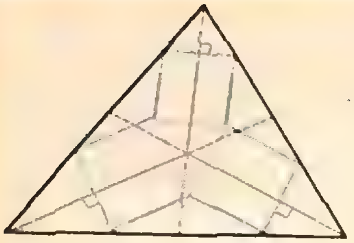


Рис. 1.

М685*. Два подмножества множества натуральных чисел назовем *конгруэнтными*, если одно получается из другого сдвигом на целое число. (Например, множества четных и нечетных чисел конгруэнтны.) Можно ли разбить множество натуральных чисел на бесконечное число (непересекающихся) бесконечных конгруэнтных подмножеств?

А. Федоров

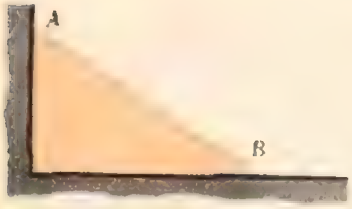


Рис. 2.

Ф693. На неподвижном клине, образующем угол α с горизонтом, лежит нерастяжимая невесомая веревка (рис. 2). Один из концов веревки закреплен в точке A. К нижнему концу веревки (в точке B) прикреплен небольшой грузик. В некоторый момент времени клин начинает двигаться вправо с постоянным ускорением a. С каким ускорением движется грузик, пока он находится на клине?

С. Кротов

Ф694. По длинному прямолинейному желобу, наклоненному под углом α к горизонту, движутся без трения N одинаковых шариков. Какое максимальное число соударений может произойти в системе при произвольных начальных положениях и скоростях шаров? Соударения шаров считать абсолютно упругими.

Е. Сурков

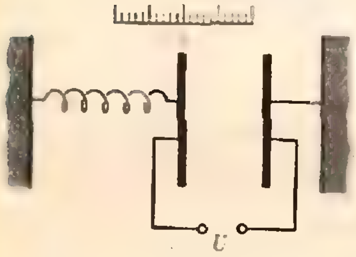


Рис. 3.

Ф695. В простейшей модели звезда рассматривается как газовый шар, находящийся в равновесии в собственном поле тяжести. Считая, что газ состоит из полностью ионизованных атомов водорода и гелия, оценить температуру звезды. Масса звезды M, радиус r; относительное содержание водорода в газе равно n.

В. Тугушев

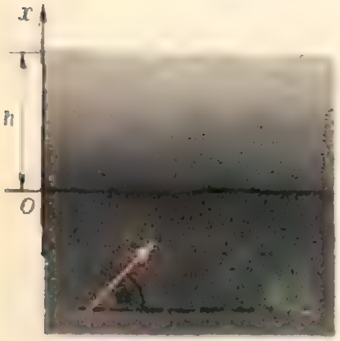


Рис. 4.

Ф696. Емкостный вольтметр представляет собой плоский воздушный конденсатор, одна из пластин которого закреплена неподвижно, а вторая может перемещаться поступательно в направлении, перпендикулярном плоскости пластин. К подвижной пластине прикреплена пружина жесткости k (рис. 3). Мерой приложенного напряжения служит изменение зазора между пластинами. Какое максимальное напряжение можно измерить таким прибором? Площади пластин S, зазор между пластинами при нулевом напряжении d.

Д. Павлов

Ф697. Между двумя средами с показателями преломления $n_0>1$ и $n_1=1$ имеется неоднородный слой высоты $h=H\left(1-\frac{1}{n_0^2}\right)$, где $H=\text{const}$, внутри которого показатель преломления меняется с высотой по закону $n=\sqrt{1-\frac{x}{H}}\;n_0$ (рис. 4). Из среды с показателем преломления n_0 в неоднородный слой входит луч света. При каких значениях угла α (см. рис. 4) луч вернется в оптически более плотную среду? При каком значении угла α_0 расстояние между точками входа и выхода луча максимально?

П. Калугин, ученик 10 кл. (Москва, с. ш. № 444)

Решения задач

М636—М640; Ф647—Ф655

М636. *Множество А состоит из целых чисел, его наименьший элемент равен 1, а наибольший элемент равен 100. Каждый элемент А, кроме 1, равен сумме двух (возможно, равных) чисел, принадлежащих А. Укажите среди всех множеств А, удовлетворяющих этим условиям, множество с минимальным числом элементов.*

Множество {1, 2, 3, 5, 10, 20, 25, 50, 100} удовлетворяет условиям задачи. Значит, искомое множество содержит не более девяти элементов. Упорядочим его элементы по возрастанию:

$$1=k_1<k_2<\ldots<k_n=100,\ n\leqslant 9.$$

Так как $k_j\leqslant 2\cdot k_{j-1}$ ($j=2, 3, \ldots, n$), для любого j имеем $k_j\leqslant 2^{j-1}$. Пусть r — наибольший индекс такой, что $k_r\neq 2k_{r-1}$. Тогда $100=k_n=2^{n-r}\cdot k_r \leqslant 2^{n-r}(k_{r-1}+k_{r-2})\leqslant \leqslant 2^{n-r}\cdot 2(2^{r-2}+2^{r-3})=3\cdot 2^{n-3}$. Из неравенства $100\leqslant \leqslant 3\cdot 2^{n-3}$ следует, что $n\geqslant 9$. Итак, $n=9$ и множество {1, 2, 3, 5, 10, 20, 25, 50, 100} является искомым.

Отметим, что существуют и другие множества из девяти элементов, удовлетворяющие условию задачи. Например, годится и множество {1, 2, 4, 6, 10, 20, 30, 50, 100}.

Ю. Нестеренко

◆

М637. *Дан правильный треугольник АВС. Некоторая прямая, параллельная прямой АС, пересекает прямые АВ и ВС в точках М и Р соответственно. Точка D — центр треугольника PMB, точка E — середина отрезка АР. Определите углы треугольника DEC*

Прямая MP может пересекать как сами стороны AB, BC, так и их продолжения (см. рисунки 1—3). Во всех трех случаях ответ одинаков: $\widehat{EDC}=60°$, $\widehat{DEC}=90°$, $\widehat{DCE}=30°$. Приведем несколько решений.

[Мы ограничимся описаниями решений для случая, соответствующего рисунку 1 (решения для случаев, изображенных на рисунках 2 и 3, находятся по аналогии).]

Первое решение. Достроим трапецию $MPCA$ до параллелограмма $PCAK$ (рис. 4). $|DK|=|DC|$, поскольку треугольник KDM конгруэнтен треугольнику CDP ($|KM|=|MA|=|PC|$, $|MD|=|DP|$, $\widehat{KMD}=150°=\widehat{DPC}$). Следовательно, треугольник KDC — равнобедренный, а так как E — середина $[KC]$, получаем $[DE]\perp[KC]$. $\widehat{EDC}=\frac{1}{2}\cdot\widehat{KDC}=\frac{1}{2}\cdot 120°=60°$ ($\widehat{KDC}=\widehat{MDP}=120°$).

Замечание. Можно было бы сделать поворот треугольника DPC по часовой стрелке на 120° относительно центра D. При этом $P\to M$, $C\to K$, $\widehat{KDC}=120°$; остальное очевидно.

Второе решение. Осуществим поворот треугольника ABC на 60° против часовой стрелки вокруг центра B (рис. 5). При этом $D\to D_1$, $M\to P=M_1$, $P\to P_1$, $E\to E_1$, $C\to C_1$, $A\to C=A_1$.

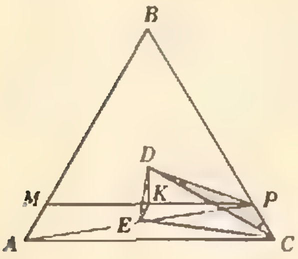


Рис. 1.

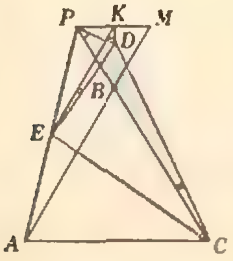


Рис. 2.

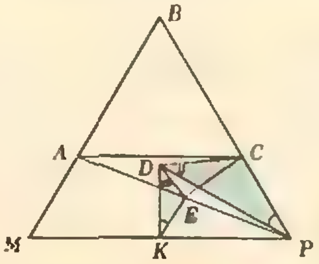


Рис. 3.

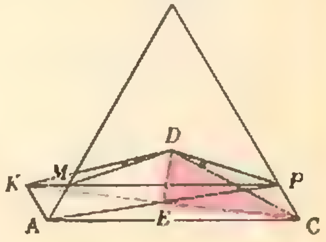


Рис. 4.

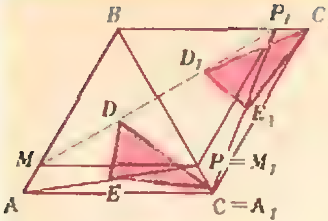


Рис. 5.

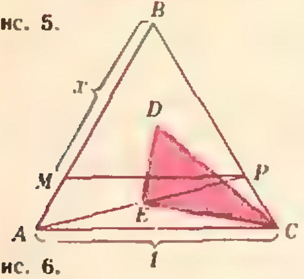


Рис. 6.

Точки D и D_1 как центры треугольников MBP и M_1BP_1 соответственно лежат на отрезке MP_1 и делят его на три равные части. Следовательно, D_1E_1 — средняя линия в треугольнике DP_1C, $|D_1E_1|=\frac{1}{2}|DC|=|DE|$, причем $[D_1E_1]\parallel[DC]$. Но $[D_1E_1]$ получается из $[DE]$ поворотом на 60°; следовательно, $\widehat{EDC}=60°$. Остальное очевидно.

Третье решение (алгебраическое, но почти без вычислений).

Пусть 1 — длина стороны треугольника ABC, x — длина стороны треугольника MBP (рис. 6). При $x=0$ и $x=1$ (см. рис. 7)

$$|DC|^2-|DE|^2-|EC|^2=0. \qquad (1)$$

Равенство (1) несложно проверяется и для $x=\frac{1}{2}$ (рис. 8). В этом месте надо немного повычислять: проведем $(DH)\parallel(AB)$ и $(DF)\parallel(AC)$. Имеем $|DH|=\frac{1}{3}$, $|HE|=\frac{1}{12}$, $|EK|=\frac{1}{4}$, $|DF|=\frac{1}{6}$, а каждый из углов $\widehat{DHE}$, $\widehat{EKC}$ и $\widehat{DFC}$ равен 120°. По теореме косинусов в треугольниках DHE, EKC и DFC

$$|DE|^2=\frac{1}{9}+\frac{1}{144}+\frac{1}{36}=\frac{21}{144}, \quad |EC|^2=\frac{1}{16}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{63}{144},$$

$$|DC|^2=\frac{1}{36}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}=\frac{84}{144}, \quad \text{откуда следует (1).}$$

Левая часть соотношения (1) является квадратным трехчленом от x (квадраты длин сторон можно выразить из соответствующих треугольников при помощи теоремы косинусов). В силу сказанного выше, этот трехчлен в трех точках ($x=0$, $x=\frac{1}{2}$ и $x=1$) обращается в нуль. Значит, он тождественно равен нулю.

Следовательно, (1) выполняется при всех x, то есть при всех x треугольник DEC — прямоугольный: $\widehat{DEC}=90°$.

Аналогично проверяется, что квадратный трехчлен

$$|DE|^2-\frac{1}{4}\cdot|DC|^2 \qquad (2)$$

в трех точках ($x=0$, $\frac{1}{2}$, 1) также принимает нулевое значение, а потому тождественно равен нулю. Значит, $|DE|=\frac{1}{2}|DC|$, то есть $\widehat{CDE}=60°$.

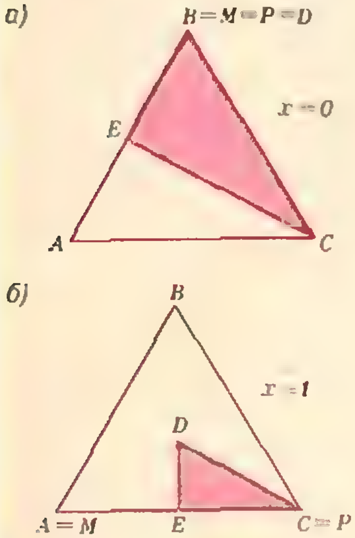


Рис. 7.

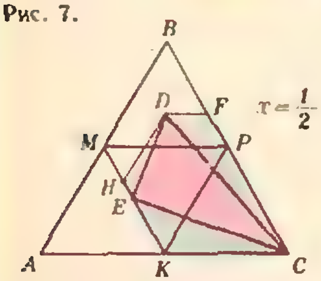


Рис. 8.

Еще одно, четвертое, решение основано на таком наблюдении: треугольник DPC получается из треугольника DKE таким *центральноподобным поворотом:* композицией поворота на угол 60° с центром D и гомотетии с коэффициентом 2. Попробуйте записать это решение так, чтобы оно годилось сразу для всех трех случаев (см. рис. 1, 2, 3).

Л. Купцов

◆

М638. *Некоторые клетки бесконечного листа клетчатой бумаги выкрашены в красный цвет, остальные — в синий, причем так, что каждый прямоугольник из 6 клеток размером 2×3 содержит в точности две красные клетки. Сколько красных клеток может содержать прямоугольник из 99 клеток размером 9×11?*

Ответ. В любом прямоугольнике 9×11 содержится 33 красные клетки

Доказательство. Рассмотрим произвольную красную клетку K_0 и рассмотрим квадрат 3×3 с центром в этой клетке. Соседние с K_0 по горизонтали или вертикали клетки не могут быть красными: если, например, как на рисунке 1, красной оказалась клетка K, то в правом и левом прямоугольниках 2×3 больше красных клеток не будет, поэтому в нижнем таком прямоугольнике окажется всего одна красная клетка (K_0) — противоречие с условием. Итак, соседние с K_0 клетки — синие.

Далее, в правом прямоугольнике должна быть еще одна красная клетка — пусть, например, это будет клетка K_1, как на рисунке 2. Рассматривая верхний и левый прямо-

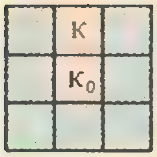


Рис. 1.

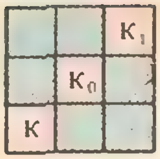


Рис. 2.

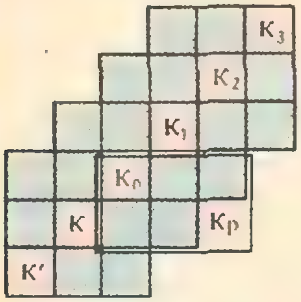


Рис. 3.

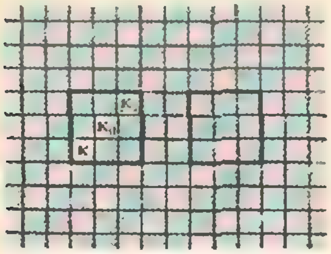


Рис. 4.

угольники 2×3, из условия задачи выводим, что в углу нашего квадрата 3×3, противоположном клетке K_1, тоже должна стоять красная клетка — K, и красные клетки в этом квадрате расположены по диагонали. Рассматривая такие же квадраты с центрами в клетках K_1 и K и сдвигая эти квадраты далее по «красной диагонали», из приведенного рассуждения получаем, что весь диагональный ряд KK_0K_1 состоит из красных клеток, а по два диагональных ряда выше и ниже красного — из синих клеток, как показано на рисунке 3. Рассуждая аналогично (см. рис. 3), получаем, что два следующих (сверху и снизу) ряда — красные, затем два ряда — синие, потом опять идут красные ряды, и так далее, как показано на рисунке 4.

Легко видеть, что раскраска рисунка 4 удовлетворяет условию задачи. При этом каждый квадрат 3×3 содержит в точности три красные клетки, и так как прямоугольник 9×11 можно разбить на 9 квадратов 3×3 и 3 прямоугольника 2×3, заключаем, что в этом прямоугольнике $9\cdot3+3\cdot2=33$ красные клетки.

В приведенном рассуждении доказано больше, чем требовалось условием задачи — фактически нами описаны все возможные раскраски.

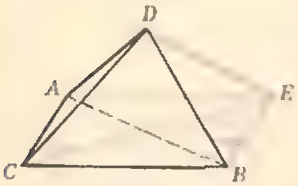
Большинство читателей рассуждали иначе: прямоугольник 9×11 легко разбить на 16 прямоугольников 2×3, после чего останется полоска 1×3. Из условия нетрудно получить, что в этой полоске может содержаться только одна красная клетка, поэтому во всем прямоугольнике — только $16\cdot2+1=33$ красные клетки. После этого достаточно привести пример раскраски, которая удовлетворяет условию задачи.

Отметим, что в этой задаче совсем не обязательно рассматривать раскраску всей плоскости — можно было ограничиться раскраской 99 клеток прямоугольника 9×11.

А. Земляков

◆

М639. *В тетраэдре ABCD* $(AC)\perp(BC)$ *и* $(AD)\perp(BD)$. *Докажите, что косинус угла между прямыми AC и BD меньше, чем* $|CD|/|AB|$.



Проведем $(BE)\parallel(CA)$ и $(AE)\parallel(CB)$ (см. рисунок). Косинус угла между прямыми AC и BD — это $|\cos\widehat{DBE}|$.

С другой стороны, четырехугольник $ACBE$ — прямоугольник, поэтому $|AB|=|CE|$ и $|CD|/|AB|=|CD|/|CE|$.

Заметим, что вершины прямых углов ACB, ADB, AEB лежат на сфере с диаметром AB. Отрезок CE тоже является диаметром этой сферы, поэтому угол CDE — прямой и $|CD|/|CE|=\cos\widehat{DCE}$. Нужное неравенство принимает теперь вид $|\cos\widehat{DBE}|<\cos\widehat{DCE}$.

Пусть R — радиус сферы и r — радиус окружности, получающейся в сечении сферы плоскостью BDE. Так как эта плоскость не проходит через центр сферы, $r<R$ и из равенств $2r\cdot\sin\widehat{DBE}=|DE|=2R\cdot\sin\widehat{DCE}$ получаем $\sin\widehat{DBE}>\sin\widehat{DCE}$. Значит, $|\cos\widehat{DBE}|<|\cos\widehat{DCE}|=\cos\widehat{DCE}$.

Ю. Нестеренко

◆

М640. *Число* $x\in[0;1]$ *записано в виде бесконечной десятичной дроби. Переставив ее первые 5 цифр после запятой в произвольном порядке, получим новую бесконечную десятичную дробь, отвечающую некоторому числу* x_1. *Переставив в десятичной записи числа* x_1 *цифры со 2-й по 6-ю после запятой, получим десятичную запись числа* x_2. *Вообще, десятичная*

а) Очевидно, у всех чисел x_k с номерами $k>m$ первые m цифр после запятой одинаковы — обозначим эти цифры через b_1, b_2, ..., b_m. Здесь m — произвольное, и мы можем рассмотреть число y, записывающееся бесконечной дробью $0,b_1b_2...b_m...$ Тогда при $k>m$ выполнено неравенство $|x_k-y|<10^{-m}$, откуда следует, что $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=y$. Этот пункт задачи носит подготовительный характер — он позволяет понять, как при последовательном «перемешивании» пятерок цифр дроби x получается новая бесконечная десятичная дробь y.

б) Ответ. Можно. Приведем пример. Возьмем дробь $x=0,(10)$ и «перемешаем» ее только на участках цифр с номерами $10^n<k<10^n+5$ при всех натуральных n: вместо 1010 на этих местах поставим 1100. Участки цифр с номера-

запись числа x_{k+1} получается перестановкой цифр в записи x_k с $(k+1)$-й по $(k+5)$-ю после запятой.

а) Докажите, что как бы ни переставлялись цифры на каждом шаге, получающаяся последовательность чисел x_k всегда имеет некоторый предел.

Обозначим этот предел через y.

б) Выясните, можно ли с помощью описанного процесса из рационального числа x получить иррациональное число y.

в) Придумайте такую дробь x, для которой данный процесс всегда приводит к иррациональным числам, каковы бы ни были перестановки пятерок цифр на каждом шаге.

ми $10^n+5\leqslant k\leqslant 10^{n+1}$ по-прежнему будут периодическими. Допустим, что в результате получилась периодическая дробь $y=0,b_1b_2b_3\ldots$ с p цифрами в периоде: $b_{i+p}=b_i$ для всех $i>N$. Выберем n так, чтобы выполнялись неравенства $10^n>N$ и $10^{n+1}-10^n-4>p$; тогда хотя бы один полный период y попадет на оставленный участок периодичности x, поэтому дробь y должна иметь период (10). Но по построению у дроби y сколь угодно далеко от запятой встречаются две единицы подряд — противоречие.

в) Пусть у дроби x на местах с номерами $10^n<k\leqslant 10^n+5$ при всех натуральных n стоят единицы, остальные цифры — нули. Покажем, что ни при каком перемешивании дробь x не превращается в периодическую. Предположим противное: при каком-то последовательном перемешивании пятерок цифр получилась периодическая дробь y. Заметим, что при перемешивании номер данной цифры (нуля или единицы) не может уменьшиться более, чем на четыре. Среди цифр от первой до (10^n+5)-й после запятой всего $5n$ единиц, и, в силу предыдущего замечания, их число на этом участке не может увеличится. Если бы в периоде дроби y было p цифр и среди них $q>0$ единиц, то при достаточно большом n на участке цифр с номерами $1\leqslant k\leqslant 10^n$ было бы по крайней мере $q\cdot\left[\frac{10^n-N}{p}\right]$ единиц, где N — номер цифры y, с которой начинается периодичность. Таким образом, получаем неравенство $q\cdot\left[\frac{10^n-N}{p}\right]\leqslant 5n$, неверное при достаточно больших n. Следовательно, единиц в периоде дроби y быть не может: начиная с некоторого места должны идти одни нули.

Теперь покажем, что при любом перемешивании дроби x сколь угодно далеко от запятой должны остаться единицы Среди цифр дроби x от первой до (10^n+1)-й после запятой имеется некоторое количество нулей. Так как более далекие от запятой нули имеют номера, начиная с 10^n+6, после перемешивания они не могут попасть в указанный участок; число нулей на нем не увеличится, а число единиц соответственно не уменьшится. Следовательно, стоящие в дроби x на участке цифр с номерами $10^n+1\leqslant k\leqslant 10^n+5$ единицы не могут все сдвинуться вправо — хотя бы одна единица должна остаться на участке от первой до (10^n+1)-й цифры. С другой стороны, сдвинуться влево более чем на четыре места они тоже не могут, поэтому при любом n на участке цифр с номерами $10^n-3\leqslant k\leqslant 10^n+1$ у дроби y останется хотя бы одна единица. Очевидно, это противоречит тому, что период дроби состоит только из нуля.

А. Земляков

◆

Ф647. *Крупная дождевая капля покинула облако в безветренную погоду на большой высоте. В момент, когда ускорение капли было равным 7,5 м/с², ее скорость составляла 20 м/с. Вблизи земли капля падала с постоянной скоростью u, попав на боковое стекло автомобиля, оставила на нем след под углом 30° к вертикали. Оштрафует ли инспектор ГАИ водителя за превышение скорости, если разрешенная скорость движения автомобиля 60 км/ч? Силу сопротивления воздуха считать пропорциональной квадрату скорости капли.*

Запишем второй закон Ньютона для момента, когда ускорение капли равно $a=7{,}5$ м/с², и скорость $v_1=20$ м/с:

$$ma=mg-kv_1^2, \qquad (1)$$

где kv_1^2 — значение силы сопротивления в этот момент.

Вблизи земли капля движется с некоторой постоянной скоростью v_2, следовательно:

$$mg=kv_2^2. \qquad (2)$$

Так как след, оставленный каплей на стекле, составляет с вертикалью угол $\alpha=30°$, скорость капли и скорость автомобиля v связаны соотношением

$$v=v_2\operatorname{tg}\alpha. \qquad (3)$$

Из уравнений (1) — (3) найдем скорость автомобиля:

$$v=\frac{v_1\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1-a/g}}\approx 23{,}8\ \text{м/с}\approx 85{,}7\ \text{км/ч}.$$

Штраф придется заплатить.

В. Белонучкин

Ф648. *Шарнирная конструкция состоит из трех ромбов, стороны которых относятся как 3:2:1 (рис. 1). Вершина A_3 перемещается в горизонтальном направлении со скоростью v_0. Определить скорости вершин A_1, A_2, B_1 в тот момент, когда все углы конструкции прямые.*

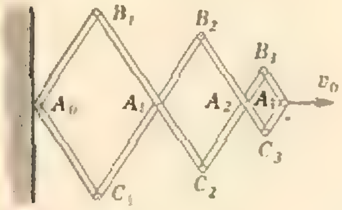


Рис. 1.

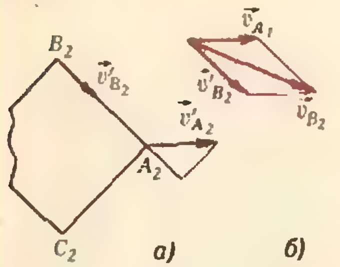


Рис. 2.

Из условия задачи следует, что во время движения конструкции между длинами l_1, l_2, l_3 отрезков A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3 сохраняется соотношение

$$l_1:l_2:l_3=3:5:6.$$

Поэтому скорости точек A_1, A_2, A_3 соотносятся как

$$|\vec{v}_{A1}|:|\vec{v}_{A2}|:|\vec{v}_{A3}|=3:5:6,$$

и следовательно,

$$|\vec{v}_{A_1}|=\frac{v_0}{2},\ |\vec{v}_{A_2}|=\frac{5v_0}{6}.$$

Рассмотрим теперь движение среднего звена $(A_1B_2A_2C_2)$ в тот момент, когда углы конструкции прямые. В системе отсчета, движущейся со скоростью $\vec{v}_{A1}$, в этот момент скорость $\vec{v}'_{B2}$ точки B_2 направлена вдоль стороны B_2A_2; скорость точки A_2 направлена горизонтально и равна

$$|\vec{v}'_{A_2}|=|\vec{v}_{A2}-\vec{v}_{A1}|=\frac{v_0}{3}.$$

Из условия нерастяжимости стержня B_2A_2 следует (рис. 2, *а*):

$$|\vec{v}'_{B2}|=|\vec{v}'_{A2}|\sin 45^\circ=\frac{v_0\sqrt{2}}{6}.$$

Скорость точки B_2 относительно неподвижной системы отсчета найдем, воспользовавшись теоремой косинусов (рис. 2, *б*):

$$|\vec{v}_{B2}|^2=|\vec{v}_{A1}|^2+|\vec{v}'_{B2}|^2+2\frac{\sqrt{2}}{2}|\vec{v}_{A1}||\vec{v}'_{B2}|=\frac{17}{36}v_0^2.$$

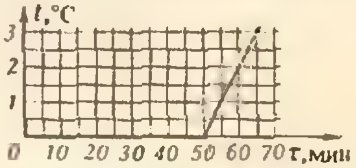
$$|\vec{v}_{B2}|=\frac{v_0}{6}\sqrt{17}.$$

С. Кротов

◆

Ф649. *В ведре находится смесь воды со льдом. Масса смеси 10 кг. Ведро внесли в комнату и сразу же начали измерять температуру смеси. Получившийся график зависимости $t(\tau)$ изображен на рисунке. Известны удельная теплоемкость воды $c_в=4200$ Дж/(кг · К) и теплота плавления льда $\lambda=3{,}4\cdot10^5$ Дж/кг. Определите, сколько льда было в ведре, когда его внесли в комнату. Теплоемкостью ведра пренебречь.*

Как видно из графика, первые 50 мин температура смеси не менялась и оставалась равной 0° С. Все это время тепло, получаемое смесью из комнаты, шло на таяние льда. Через 50 мин весь лед растаял, температура воды начала повышаться.



За 10 мин (от $\tau_1=50$ мин до $\tau_2=60$ мин) температура повысилась на $\Delta t=2^\circ$ С. Тепло, поступившее к воде из комнаты за это время, равно $q=c_вM\Delta t=8{,}4\cdot10^4$ Дж ($M=10$ кг — масса воды). Значит, за первые 50 мин к смеси из комнаты поступило количество тепла $Q=5q=42\cdot10^5$ Дж. Это тепло и пошло на таяние массы m льда: $Q=\lambda m$. Таким образом,

$$m=\frac{Q}{\lambda}\approx1{,}23\text{ кг}.$$

А. Буздин

◆

Ф650. *Для получения напряжения, величина которого мало зависит от температуры, собрана схема по рисунку 1. Вольтамперные характеристики диода Д при трех различных температурах окружающей среды $t_1=125^\circ$ C, $t_2=25^\circ$ C, $t_3=-60^\circ$ C приведе-*

Диод подключен к источнику последовательно с резисторами, сопротивление которых $R_{общ}=5{,}2\cdot10^3$ Ом. Следовательно, в любой момент времени (при любой температуре) ток в цепи равен

$$I=\frac{U-U_д}{R_{общ}},$$

где U, $U_д$ — значения напряжения на источнике и на диоде в данный момент.

ны на рисунке 2. Напряжение источника $U=6$ В при температуре 25° C и с увеличением температуры возрастает на $25\cdot 10^{-3}$ В/град. Найти напряжение между зажимами А и В при $t=25°$C и зависимость этого напряжения от температуры.

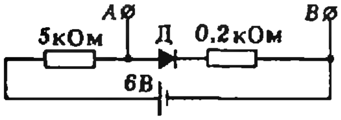


Рис. 1.

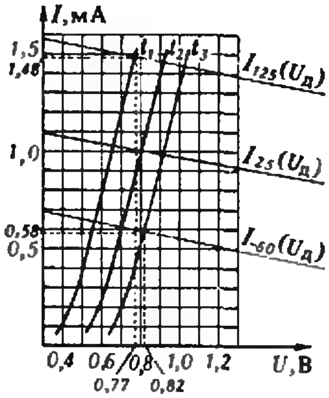


Рис. 2.

Построим на рисунке 2 графики зависимости $I(U_д)$ для трех различных температур:

$$t_1=+125°\text{C} \;-\; U_{125}=8{,}5\text{ В},\quad I_{125}=\frac{8{,}5-U_{д,125}}{5{,}2}\text{ мА};$$

$$t_2=+25°\text{C} \;-\; U_{25}=6\text{ В},\quad I_{25}=\frac{6-U_{д,25}}{5{,}2}\text{ мА};$$

$$t_3=-60°\text{C} \;-\; U_{-60}=3{,}875\text{ В},\quad I_{-60}=\frac{3{,}875-U_{д,-60}}{5{,}2}\text{ мА}.$$

Точки пересечения этих графиков с вольтамперными характеристиками диода (для соответствующих температур) определяют значения напряжения на диоде и ток в цепи при данной температуре. Из рисунка 2 находим (разумеется, приближенно):

$U_{д,125}=0{,}77$ В, $I_{125}=1{,}48$ мА;
$U_{д,25}=0{,}8$ В, $I_{25}=1$ мА;
$U_{д,-60}=3{,}875$ В, $I_{-60}=0{,}58$ мА.

Соответствующие значения напряжения $U_{AB}=U_д+I\cdot 0{,}2$ (В) между зажимами A и B —

$U_{AB,125}=1{,}07$ В;
$U_{AB,25}=1$ В;
$U_{AB,-60}=0{,}94$ В.

Таким образом, температурный коэффициент, характеризующий относительное (относительно $U_{AB,25}$) изменение напряжения U_{AB} при изменении температуры от —60°С до +125°С, равен

$$\alpha=\frac{\Delta U_{AB}}{\Delta t\cdot U_{AB,25}}\approx 7\cdot 10^{-4}\text{ град}^{-1}.$$

По сравнению с исходным температурным коэффициентом $\alpha_c=\frac{25\cdot 10^{-3}}{6}\approx 4\cdot 10^{-3}$ град$^{-1}$ полученное значение α примерно в 6 раз меньше.

Подумайте, как надо изменить сопротивления резисторов, чтобы практически полностью скомпенсировать температурную нестабильность источника.

А. Зильберман

◆

Ф651. *В научно-фантастической повести описывается аварийная ситуация, в которой астронавт массы $M=100$ кг оказался на расстоянии $l=100$ м от корабля со стаканом замерзшей воды. Обеспечивая сублимацию (испарение) льда, астронавт возвращается на корабль. Реален ли такой способ возвращения? Оцените, за какое время астронавт возвращается на корабль. Считайте, что сублимация льда происходит при постоянной температуре $T=272$ К. Давление насыщающих паров при этой температуре $p_н=550$ Па. Универсальная газовая постоянная равна $R=8{,}3\times 10^3$ Дж/(кмоль · К). Размеры стакана и массу льда задайте самостоятельно.*

Если плотно закрыть стакан, то число молекул, падающих на поверхность льда в единицу времени, будет равно числу молекул, сублимирующих с поверхности (динамическое равновесие); при этом условии и измерено давление насыщающих паров $p_н$. Оба указанных потока массы равны по модулю $\frac{1}{6}\varrho_н\bar{v}S$ (кг/с), где $\varrho_н=p_н\mu/RT$ — плотность насыщенных паров, S — площадь поверхности льда, μ — молярная масса воды, $\bar{v}\approx\sqrt{3RT/\mu}$ — средняя скорость молекулы, множитель 1/6 (или, точнее, 1/4) учитывает направленность движения «в одну сторону из шести возможных». Когда стакан открыт, поток улетающих молекул прежний, а возвращающихся молекул нет; давление теперь равно $1/2p_н$. Оценим время полного испарения, подставляя начальную массу льда $m\sim 0{,}2$ кг, площадь стакана $S\sim 30$ см^2, $\mu=18$ кг/кмоль:

$$\tau\sim\frac{m}{\frac{1}{6}\varrho_н\bar{v}S}\approx\frac{6m}{p_нS}\sqrt{\frac{RT}{3\mu}}\approx$$

$$\approx\frac{6\cdot 0{,}2}{550\cdot 3\cdot 10^{-3}}\sqrt{\frac{8{,}3\cdot 10^3\cdot 272}{3\cdot 18}}\text{ с}\approx 150\text{ с}$$

Заметим, что в реальности время испарения будет больше, так как вероятность для молекулы, попавшей на поверхность льда, «прилипнуть» к ней, равна так называемому коэффициенту конденсации и, естественно, меньше 1; соответственно и в поток испарения должен быть введен множитель, меньший 1. Далее, возможно, не все молекулы, испарившись, смогут сразу улететь на бесконечность; часть из них за счет столкновений в паровой фазе может вернуться назад. Таким образом, мы получили для времени испарения оценку снизу.

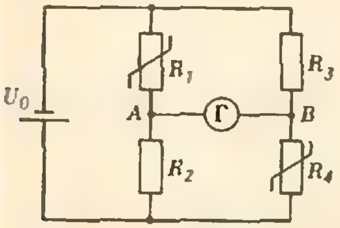
Пока лед испаряется, ускорение космонавта равно $a=p_{н}S/2M$. За это время он пролетит расстояние $L=a\tau^2/2\approx\approx 100$ м $=l$.

Учитывая приближенность наших оценок, можно сказать, что космонавт вернется на корабль за время $\gtrsim 100$ с.

А. Стасенко

◆

Ф652. *Схема, изображенная на рисунке, состоит из двух одинаковых резисторов $R_2=R_3=R$ и двух одинаковых нелинейных резисторов R_1 и R_4, вольтамперная характеристика которых имеет вид $U=\alpha I^2$, где α — некоторый известный постоянный коэффициент. При каком напряжении источника питания U_0 сила тока через гальванометр Г равна нулю?*



Пусть через ветвь схемы течет ток I. Поскольку одинаковы и линейные, и нелинейные резисторы, в ветвях цепи текут одинаковые токи. Напряжение источника питания равно

$$U_0=IR+\alpha I^2. \qquad (*)$$

Ток через гальванометр равен нулю, когда потенциал точки A равен потенциалу точки B. Поэтому

$$IR=\alpha I^2 \Rightarrow I=\frac{R}{\alpha}.$$

Подставив это значение тока в уравнение (*), найдем напряжение источника, при котором ток через гальванометр равен нулю:

$$U_0=2\frac{R^2}{\alpha}.$$

В. Скороваров

◆

Ф653. *Некоторый элемент Z, соединенный с батареей с ЭДС $\mathscr{E}=10$ В и внутренним сопротивлением $r=10$ кОм, подключен к внешнему источнику тока так, как показано на рисунке 1. Вольтамперная характеристика такой цепи показана на рисунке 2 (черная кривая). Постройте вольтамперную характеристику элемента Z.*

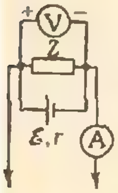


Рис. 1.

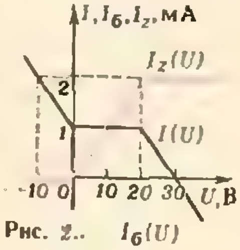


Рис. 2..

Построим вольтамперную характеристику батареи. Согласно закону Ома для полной цепи, напряжение $U_б$ на батарее и ток $I_б$, текущий через батарею, связаны соотношением

$$U_б=\mathscr{E}-I_б r.$$

Поскольку элемент Z и батарея соединены параллельно, $U_б=U_z=U$ (U — напряжение внешнего источника).

На рисунке 2 вольтамперная характеристика батареи — синяя прямая.

Ток I_z, текущий через элемент Z, равен алгебраической разности $I-I_б$. Для построения вольтамперной характеристики элемента Z надо при каждом фиксированном значении напряжения U найти значение I_z вычитанием ординаты $I_б$ соответствующей точки вольтамперной характеристики $I_б(U)$ из ординаты соответствующей точки вольтамперной характеристики цепи.

На рисунке 2 вольтамперная характеристика $I_z(U)$ — красная кривая.

В. Можаев

◆

Ф654. *Штатив массы M стоит на гладком столе. К штативу на легкой нити длины l прикреплен шарик массы m. Нить отклоняют на малый угол α и отпускают (рис. 1). Нари-*

При малом угле отклонения α перемещение шарика мало отличается от горизонтального. В горизонтальном направлении на систему не действуют внешние силы, и импульс системы (точнее — проекция импульса на горизонтальную ось) остается постоянным — равным нулю. Следовательно, при движении шарика штатив движется в противоположную *совать график зависимости скорости штатива от времени. Столкновения шарика с основанием штатива абсолютно упругие.*

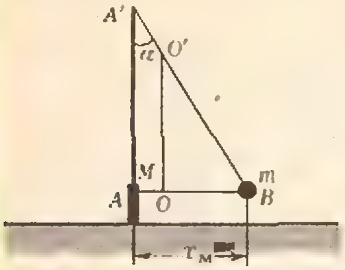


Рис. 1.

$$\left.\begin{array}{l}|AO|:|OB|=m:M;\\ |A'O'|:|O'B|=m:M\\ |A'O'|+|O'B|=l\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |O'B|=l\frac{M}{m+M}.$$

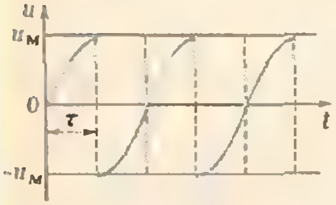


Рис. 2. $\tau=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}\,\frac{M}{m+M}}.$

сторону; абсолютные значения v и u скоростей шарика и штатива (точнее — проекций соответствующих скоростей на горизонтальную ось) связаны соотношением

$$mv=Mu. \qquad (*)$$

Центр масс системы (точка O на рисунке 1) остается неподвижным; значит, неподвижной остается и точка O'.

Таким образом, движение шарика — это колебания маятника с длиной нити

$$l'=|O'B|=l\frac{M}{m+M}$$

(см. рис. 1). Частота этих колебаний равна

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{l'}}=\sqrt{\frac{g}{l}\,\frac{m+M}{M}};$$

скорость шарика —

$$v=v_м\sin\sqrt{\frac{g}{l}\,\frac{m+M}{M}}\,t,$$

где $v_м=\omega x_м=\sqrt{\frac{g}{l}\,\frac{m+M}{M}}\,l\sin\alpha$ — максимальное (по модулю) значение скорости, $x_м=l\sin\alpha$ — амплитуда смещения шарика.

Воспользовавшись соотношением (*), найдем скорость штатива:

$$u=\left(\frac{m}{M}\sqrt{\frac{g}{l}\,\frac{m+M}{M}}\,l\sin\alpha\right)\sin\sqrt{\frac{g}{l}\,\frac{m+M}{M}}\,t=$$

$$=u_м\sin\sqrt{\frac{g}{l}\,\frac{m+M}{M}}\,t.$$

После каждого упругого соударения направления скоростей $v_м$ и $u_м$ меняются на противоположные (проверьте это).

График зависимости скорости штатива от времени приведен на рисунке 2.

А. Зильберман

◆

Ф655. *В настоящее время используются соленоиды со сверхпроводящей обмоткой. Такие соленоиды могут длительное время создавать магнитное поле без затраты энергии. Однако, если вследствие каких-либо причин участок обмотки соленоида утратит сверхпроводящие свойства, произойдет авария. На этом участке током будет выделяться большое количество тепла и произойдет взрыв. Придумайте простейшее приспособление, исключающее подобные аварии (не пытайтесь придумывать какие-либо схемы с реле, размыкающим цепь, — они не помогут).*

Простейший способ исключить аварию при утере каким-либо участком обмотки сверхпроводящих свойств — шунтировать обмотку. Раньше в качестве шунтов использовали массивные медные проводники, которые размещали снаружи обмотки.

В настоящее время сверхпроводящую обмотку делают из пучка тонких жил из сверхпроводника, заключенных в матрицу из металла с высокой электро- и теплопроводностью,— из меди или алюминия. При утрате каким-либо участком обмотки сверхпроводящих свойств ток идет по массивному медному проводнику с малым сопротивлением.

Г. Мякишев

К конкурсу «Малый интеркосмос»

В предыдущем номере нашего журнала помещена информация о Всесоюзном конкурсе учащихся школ и профтехучилищ под названием «Малый интеркосмос». Ниже мы приводим примерный перечень проблем, предложенных специалистами участникам этого конкурса.

1. Земля — Космос — Земля

— Известно, что «потолок» авиации около 30 км, а нижняя граница полета спутников — около 180 км. Предложите физический принцип полета на промежуточных высотах.

— При запуске космических аппаратов первые ступени ракет бесполезно пропадают, падая на Землю. Разработайте варианты использования этих ступеней ракет.

Предложите:

— экономичные способы доставки грузов на орбиту, проект космического самолета, который можно использовать не только для полетов на орбиту, но и как межконтинентальное транспортное средство;

— направления и формы совместной работы школьников и экипажей космических станций в интересах народного хозяйства (например, параллельные наблюдения школьников на Земле, а космонавтов с орбиты за состоянием посевов, водных бассейнов, лесных массивов и т. д.);

— способ спасения космонавтов при возникновении аварийной ситуации на орбитальном космическом корабле. Один из вариантов спасения — возвращение космонавтов на Землю с использованием индивидуальных средств;

— способы моделирования различных условий космоса на Земле;

— метод определения химического состава почвы по изучению площади из космоса, выявления недостатка или избытка питательных веществ;

— формы участия космической науки и техники в решении экологических проблем;

— методы исследования природных ресурсов Земли.

2. Дом на орбите

— При длительных полетах на состояние космонавтов отрицательно действует однообразие обстановки. Предложите способ изменения обстановки на станции по желанию космонавтов.

— Досуг космонавтов можно занять играми, головоломками. Разработайте космическую игру, которая была бы применима в космосе, использовала бы особые условия полета (невесомость, вакуум, перепад температур). Игра может быть и подвижной, рассчитанной, например, на состязание двух команд.

— В настоящее время физические упражнения для космонавтов на орбитальной станции монотонны и непривлекательны. Предложите комплект малогабаритных трансформируемых тренажеров, занятия на которых были бы интересными для космонавтов и обеспечивали нагрузку на возможно большее число мышц (попытайтесь использовать опыт создателей игральных автоматов).

— Космонавты на станции «Салют» тратят много времени на переноску различного оборудования из грузового корабля «Прогресс» и установку его на борту станции. Предложите способ автоматизации этого процесса.

— Сейчас на «Салюте» есть душ. Предложите способ создания на орбитальной станции будущего бассейна для купания космонавтов.

Предложите:

— как наглядно для космонавтов отобразить аварийную ситуацию на корабле, орбитальной станции;

— режим труда и отдыха космонавтов на орбитальной станции в длительном полете;

— устройства, системы для самоконтроля психофизиологического состояния космонавтов, снятия раздражения, эмоциональной напряженности;

— программу и методы исследования влияния литературы и искусства на самочувствие космонавтов;

— методы отдыха космонавта в период его нахождения и работы вне корабля;

— проекты решения проблемы пребывания домашних животных на корабле;

— новые способы космического растениеводства;

— средства и способы приготовления в полете любимых блюд (блинов, жареной картошки, яичницы...);

— проекты создания в малом объеме с помощью технических средств эффекта присутствия космонавтов в различных наземных ситуациях (лес, родной дом, улица, театр);

— свои варианты создания экологически замкнутой системы в космосе;

— как извлечь вредные примеси из атмосферы обитаемого космического корабля;

— варианты космической архитектуры;

— конструкцию долговременной обитаемой космической станции нового поколения. Обоснуйте ее функционально.

Подумайте над проблемами:

— синтетическая пища;

— композиционные материалы и их применение в космонавтике;

— стекло для иллюминаторов;

— генная инженерия в космосе.

3. Индустрия в космосе

— В условиях космического полета в настоящее время проводятся эксперименты с целью выращивания кристаллов и получения сплавов из материалов с разным удельным весом Предложите другие технологические процессы, которые могут быть налажены в космосе

— Применение обычных земных инструментов в невесомости затруднено (например, забить гвоздь молотком тяжело) Придумайте инструменты (молоток, отвертка, гаечный ключ и т д), которые можно использовать в невесомости

— На различных орбитах вокруг Земли обращается большое количество отработавших свой ресурс космических аппаратов Разработайте проекты их использования

Предложите

— конструкцию прибора для быстрого охлаждения жидкого металла (до твердого состояния), находящегося во взвешенном состоянии на борту орбитальной станции,

— способ измерения частоты колебаний капли воды, свободно плавающей в кабине станции,

— методы измерения поверхностного натяжения в условиях невесомости, а также температуры жидкого металла бесконтактным способом,

— конструкцию ампулы (из стекла или кварца), в которую можно поместить твердый материал (металл или полупроводник), полностью заполняющий объем этой ампулы Важно, чтобы при нагреве она не растрескалась в связи с изменением объема материала,

— как получить солнечную энергию в условиях космоса в большом количестве и переправить на Землю,

— как непосредственно в космосе использовать энергию, которую станут получать солнечные электростанции на орбите,

— химические процессы, успешно протекающие в невесомости,

— проект космического химического производства, сырьем которого служил бы материал планет солнечной системы и астероиды

4. В открытом космосе

— Разработайте средства фиксации и перемещения космонавтов на поверхности космического аппарата

— По Земле, в воздухе и в воде с помощью специальных устройств (например, велосипеда) человек может передвигаться, используя только свою мускульную силу Придумайте способ передвижения в космосе между двумя близкорасположенными кораблями, основанный на этом принципе

— Разработайте конструкцию робота манипулятора с дистанционным или программным управлением для проведения монтажных работ на околоземной орбите в открытом космосе

— Если спутник имеет высоту орбиты 36000 км и запущен в плоскости экватора в сторону суточного вращения Земли, то он все время будет находиться над одной и той же точкой земного экватора Это очень удобно для использования таких спутников в качестве ретрансляторов радио и телевидения Предложите другие способы применения таких космических аппаратов

— Наблюдая один и тот же объект одновременно двумя или более радиотелескопами, астрономы получают высокое угловое разрешение (метод радиоинтерферометрии) Можно ли и как именно создать такой же оптический интерферометр на базе двух или нескольких телескопов?

— Известно, что связь с космонавтом вне корабля можно поддерживать по радио и телевизионным каналам, предложите дополнительный (аварийный) вид связи космонавта с экипажем станции

— Большое значение в научной программе выходящего в открытый космос космонавта придается фото- и киносъемкам В то же время современная конструкция скафандра не позволяет поднести окуляр кинокамеры к глазу наблюдателя Разработайте способы приближения условий киносъемки в космосе к земным

Предложите транспортные средства для сообщения между двумя космическими кораблями (космическая шлюпка)

Продумайте

— какими должны быть органы управления, организация рабочего места в этих аппаратах,

— конструкцию индивидуального транспортного средства для перемещения космонавтов-монтажников в открытом космосе в околоземном пространстве,

— конструкцию портативного съемного устройства для транспортировки грузов при осуществлении монтажных работ в открытом космосе,

— способы передвижения, помимо реактивного, которые можно использовать в открытом космосе,

— метод и аппаратуру для проведения эксперимента в открытом космосе по оценке зрительно-двигательной координации, скорости двигательной реакции космонавта,

— свой проект астрономической обсерватории в космосе,

— способы применения лазеров в космическом пространстве,

— средства для вынесения исследовательских приборов за борт космического аппарата на расстояние нескольких десятков метров с последующим возвращением их на борт аппарата

5. Освоение Солнечной системы

— Через несколько десятилетий станут возможны полеты на любое тело Солнечной системы Подумайте, где и по каким причинам лучше всего организовать обсерваторию для

а) изучения физики Солнца,

б) изучения явлений в атмосферах планет,

в) изучения звезд и далеких галактик

— В литературе высказывалась мысль о создании на Луне атмосферы искусственным путем Разработайте проект реализации этой идеи

— На Земле самый быстрый вид транспорта — самолет Разработайте проект аппарата, приспособленного для быстрой транспортировки людей и грузов в условиях Венеры и Марса

— На планетах гигантах сила тяжести значительно превосходит земную Предложите способы облегчения работы астрономов на такой планете

— Известно, что запасы сырья на Земле ограничены. Предложите способ организации массовой транспортировки редких металлов, нефти и других ресурсов с других планет на Землю.

— Существуют предложения провести исследования Солнца в непосредственной близости от него. Разработайте технические средства, необходимые для понижения температуры внутри космического аппарата.

Предложите:

— проект обитаемой научно-исследовательской станции на поверхности Луны или одной из ближайших планет;

— способы посадки на астероиды, ядра комет, спутники планет, транспортные средства для перемещения по поверхности малых тел Солнечной системы;

— программу, методы и технические средства прямого исследования ядра кометы Галлея, которая сблизится с Землей в 1986 г.;

— способы использования силы тяжести на Луне;

— конструкцию исследовательского аппарата для изучения вулканов на Марсе или на спутниках Юпитера;

— конструкцию научно-исследовательской станции, которая могла бы работать в специфических условиях Юпитера;

— методы и технические средства для непосредственного исследования вещества колец Сатурна, Юпитера и Урана;

— конструкцию аппарата для исследования, транспортировки метеорных тел в поясе астероидов;

— свои варианты конструкции вездехода для передвижения на поверхности планет;

— средства охлаждения аппаратов, работающих на поверхности Венеры;

— конструкции передвижных автоматических исследовательских аппаратов для работы на поверхности и в атмосфере Венеры;

— принципы конструирования аппаратуры, способной работать без охлаждения при температуре около 500° С.

Список рекомендуемой литературы

В. И. Алимов, В. П. Денисов, А. А. Ермилов, А. В. Кирсанов. Советские пилотируемые корабли и орбитальные станции. М., «Машиностроение», 1976.

А. Антрушин. Космические ракеты будущего. В книге «Хочу все знать». Л., 1973.

В. Алексеев, И. С. Минчин. Венера раскрывает тайны. М., «Машиностроение», 1975.

А. Н. Бушко и В. С. Городинская. Год в звездолете. М., «Молодая гвардия», 1975.

М. Борисов. На космической верфи. М., «Машиностроение», 1976.

В. П. Бурдаков, Ф. Ю. Зигель. Физические основы космонавтики. «Атомиздат», 1975.

В. С. Губарев. Хроника одного путешествия, или повесть о первом Луноходе. М., «Молодая гвардия», 1971.

Ю. А. Гагарин. Есть пламя! (статьи, речи, письма, интервью). М., «Молодая гвардия», 1971.

Ю. А. Гагарин, В. Лебедев. Психология и космос. М., «Молодая гвардия», 1976.

И. Н. Галкин. Геофизика Луны. М., «Наука», 1978.

К. А. Гильзин. Электрические межпланетные корабли. М., «Наука», 1970.

Ю. Н. Глазков, Л. С. Хачатурьянц, Е. В. Хрунов. На орбите вне корабля. М., «Знание», 1977.

В. П. Глушко. Путь в ракетной технике. М., «Машиностроение», 1977.

А. Ф. Евич. Индустрия в космосе. «Московский рабочий», 1978.

Ю. И. Зайцев. Спутники «Космос». М., «Наука», 1975.

Ф. Зигель. Занимательная космонавтика. М., «Машиностроение», 1970.

А. Д. Коваль, В. П. Сенкевич. Космос далекий и близкий. Л., «Лениздат», 1977.

А. Л. Кемурджиан, В. В. Громов, И. И. Черкасов, В. В. Шварев. Автоматические станции для изучения поверхности Луны. М., «Машиностроение», 1976.

А. Д. Коваль, Ю. А. Тюрин. Космос — Земле. М., «Знание», 1979.

А. Д. Коваль, Г. Р. Успенский. Космос — человеку. М., «Машиностроение», 1974.

Ю. В. Колесников, Ю. Н. Глазков. На орбите космический корабль. М., «Педагогика», 1980.

А. А. Космодемьянский. К. Э. Циолковский. М., «Просвещение», 1980.

Л. Ксанфомалите. Планеты, открытые заново. М., «Просвещение», 1978.

Н. Н. Крупенио. Радиофизические исследования планет. М., «Наука», 1978.

Е. П. Левитан. Астрофизика школьникам. М., «Просвещение», 1977.

В. И. Левантовский. Механика космического полета в элементарном изложении. М., «Наука», 1980.

А. Д. Марленский. Основы космонавтики. М., «Просвещение», 1975.

В. И. Мороз. Физика планеты Марс. М., «Наука», 1978.

Г. Нагаев. Пионеры Вселенной. Трилогия Кибальчич, Циолковский, Цандер. М., «Художественная литература», 1976.

Наука плюс фантазия — рассказы советских ученых. Комментирует журналист Е. Кнорре. М., «Детская литература», 1978.

Л. Николаев. Химия космоса. М., «Просвещение», 1974.

Орбиты сотрудничества. Под ред. Б. Н. Петрова. М., «Машиностроение», 1975.

Освоение космического пространства в СССР. М., «Наука», 1975—1979.

Н. М. Романтеев, Е. В. Хрунов. Астрономическая навигация пилотируемых космических кораблей. «Машиностроение», 1976.

Е. М. Савицкий, В. С. Клячко. Металлы космической эры. М., «Металлургия», 1978.

«Союз-22» исследует Землю. Под ред. Р. З. Сагдеева, И. Х. Штиллера. М., «Наука», 1980.

Физика Вселенной. М., «Наука», 1976.

В. Шаталов, М. Ребров. Космос — рабочая площадка. М., «Детская литература», 1978.

В. Шаталов, М. Ребров. Люди и космос. М., «Молодая гвардия», 1975.

«Квант» для младших школьников

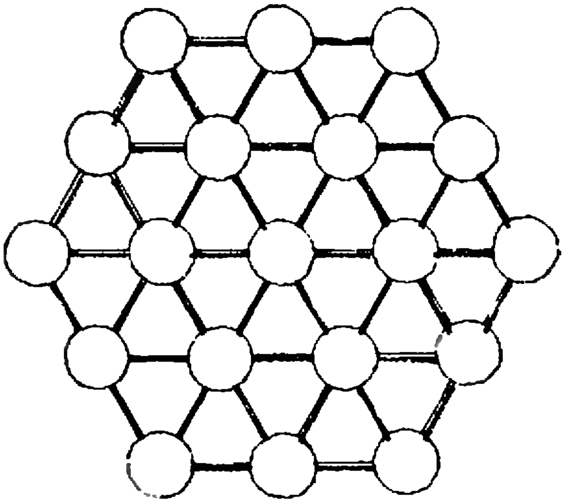
Задачи

$$\begin{array}{r} \text{КАКОЕ} \\ +\ \text{ЧИСЛО} \\ \text{В} \\ \hline \text{ОТВЕТЕ} \end{array}$$

1. Расшифруйте арифметический пример, изображенный на рисунке. Здесь разным буквам соответствуют разные цифры, одинаковым — одинаковые, а про букву A известно, что ей соответствует четная цифра.

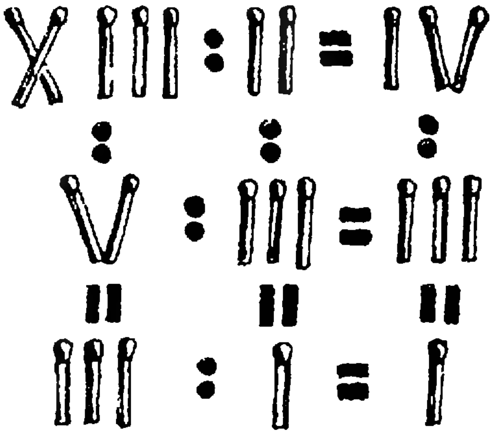
2. Найдите десять последовательных натуральных чисел, среди которых а) нет ни одного простого числа; б) ровно одно простое число; в) два простых числа; г) три простых числа; д) четыре простых числа.
Сколько вообще простых чисел может быть среди десяти последовательных натуральных чисел?

3. На плоскости вокруг точек A и B в одну и ту же сторону поворачиваются два стержня, причем стержень AA_1 поворачивается вдвое медленнее стержня BB_1 и в начальный момент $ABB_1 = 90°$ и $BAA_1 = 45°$. В точке M пересечения этих стержней на них надето колечко. Докажите, что колечко будет двигаться по дуге окружности с центром в точке B. Найдите радиус этой окружности.

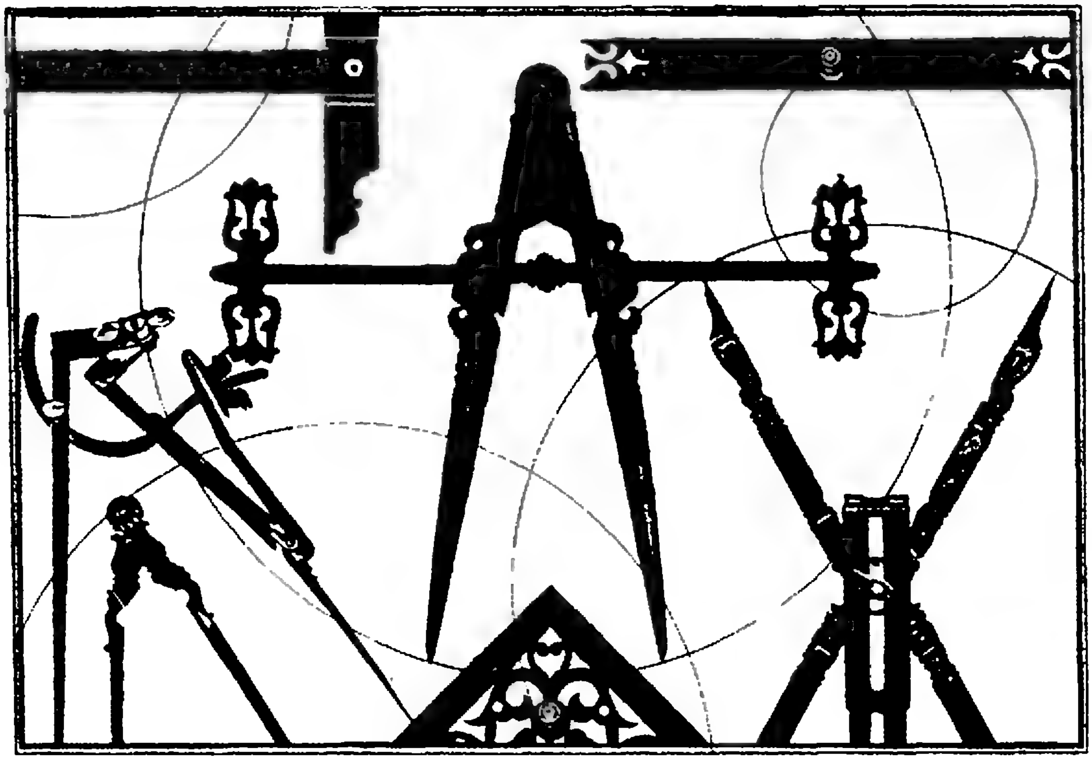


4. В кружках фигуры, изображенной на рисунке, расставьте числа от 1 до 19 так, чтобы сумма чисел, расположенных в кружках-вершинах всех правильных шестиугольников (их девять!), была постоянной.

5. В каждом из трех горизонтальных рядов (см. рисунок) переложите по одной спичке так, чтобы все шесть равенств (вертикальных и горизонтальных) оказались верными.



Эти задачи нам предложили Н. Авилов, Н. Антонович, Н Михайленко, С Савастюк.



А. Савин

Циркулем и линейкой

Циркуль и линейка — вот первые чертежные инструменты, которыми пользовался человек. Что может быть проще? Гладкая дощечка — это линейка, а две заостренные палки, связанные на одном конце, — циркуль. Сейчас и циркуль, и линейка стали изящнее, но назначение у них осталось прежним: по линейке проводят прямые (точнее, отрезки прямых), а циркулем рисуют окружности.

В школе изучают ряд простейших построений циркулем и линейкой. Строят прямую, проходящую через заданную точку и перпендикулярную (или параллельную) данной прямой, делят отрезок на несколько равных частей, делят пополам заданный угол.

А вот пример более сложной задачи: *построить треугольник по высоте, биссектрисе и медиане, выходящим из одной вершины.*

Решение задачи возможно, как нетрудно убедиться, лишь в том случае, когда длины высоты h, биссектрисы b и медианы m удовлетворяют соотношению $h\leqslant b\leqslant m$; в противном случае искомого треугольника не существует.

Проведем на плоскости произвольную прямую l и восставим из некоторой ее точки H перпендикуляр к этой прямой. Отложим на нем отрезок AH длины h. Точка A будет одной из вершин искомого треугольника, а прямая l будет содержать его основание. Отметим точки K и M пересечения прямой l с окружностями радиусов b и m с центром в точке A (рис. 1) и соединим их с точкой A. Это будут биссектриса и медиана нашего треугольника. Заметим, что биссектриса будет лежать между медианой и высотой.

Дальнейшее построение основано на довольно простом, но редко отмечаемом факте: *биссектриса угла треугольника и срединный перпендикуляр к стороне, противолежащей этому углу, пересекаются на окружно-*

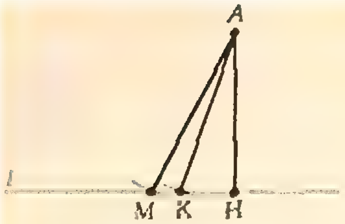


Рис. 1.

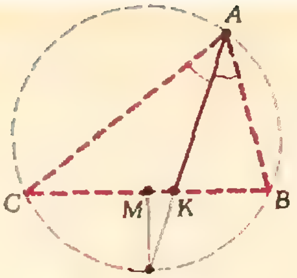


Рис. 2.

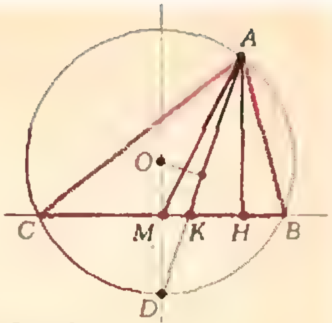


Рис. 3.

сти, описанной вокруг треугольника (эти биссектриса и перпендикуляр делят пополам дугу описанной окружности, опирающуюся на указанную сторону и не содержащую вершины A,— см. рисунок 2).

Кончить построение теперь уже просто. Проводим через точку M перпендикуляр к прямой l и продолжаем биссектрису AK до пересечения с ним в точке D (рис. 3). Итак, точки A и D лежат на окружности, описанной вокруг искомого треугольника, а ее центр O, очевидно, находится на прямой MD — срединном перпендикуляре к одной из ее хорд, и на срединном перпендикуляре к отрезку AD, который также является одной из ее хорд. Построив точку O, как точку пересечения указанных прямых, можно провести окружность, описанную вокруг искомого треугольника, поскольку мы знаем ее центр O и радиус $|OA|$. Точки B и C пересечения этой окружности с прямой l дадут недостающие вершины B и C искомого треугольника.

Искусство построения геометрических фигур при помощи циркуля и линейки было развито в Древней Греции в высокой степени. Одной из труднейших задач на построение, которые тогда умели выполнять, является задача построения окружности, касающейся трех данных окружностей. Эта задача носит название *задачи Аполлония* по имени выдающегося греческого геометра Аполлония из Перги (около 260—170 г. до н. э.)

Однако древнегреческим геометрам никак не удавалось выполнить некоторые построения, используя лишь циркуль и линейку, а построения, выполненные с помощью других инструментов, не считались геометрическими. К числу таких построений относятся построение квадрата, равновеликого данному кругу («квадратура круга»); деление произвольного угла на три равные части («трисекция угла») и построение стороны куба, объем которого вдвое больше объема заданного куба («удвоение куба»).

Эти три знаменитые задачи привлекали внимание выдающихся математиков на протяжении столетий, но окончательное решение получили лишь в середине прошлого века, когда была доказана их неразрешимость, то есть невозможность указанных построений лишь с помощью циркуля и линейки. Эти результаты были получены средствами не геометрии, а алгебры, что еще раз подчеркнуло единство математики.

Еще одной интереснейшей задачей на построение с помощью циркуля и линейки является задача построения правильного многоугольника с заданным числом сторон. Древние греки умели строить правильный треугольник, квадрат, правильные пятиугольник и пятнадцатиугольник, а также все многоугольники, которые получаются из них удвоением числа сторон,— и только их.

Новый шаг в этой области был сделан лишь в 1801 году великим немецким математиком К. Ф. Гауссом. Он указал способ построения циркулем и линейкой правильного 17-угольника и все значения n, при которых построение правильного n-угольника возможно указанными средствами. Этими многоугольниками оказались лишь те многоуголь-

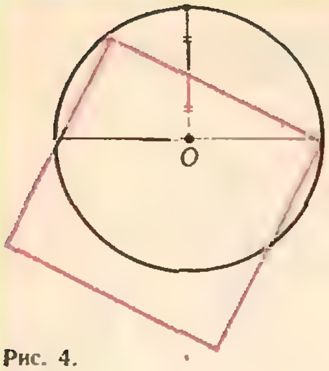


Рис. 4.

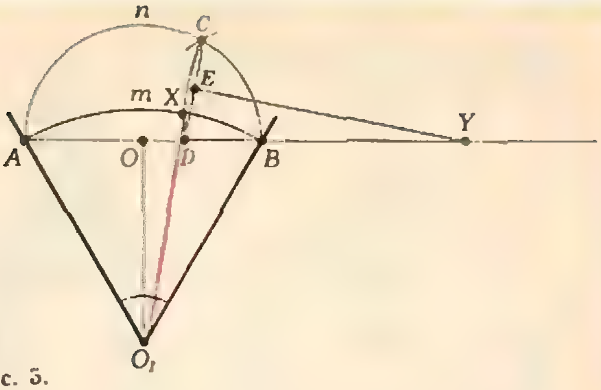


Рис. 5.

ники, у которых количество сторон является простым *числом Ферма**) или произведениями нескольких различных простых чисел Ферма, а также те, которые получаются из них удвоением числа сторон. Таким образом, была доказана невозможность построения с помощью циркуля и линейки правильных семиугольника, девятиугольника, одиннадцатиугольника, тринадцатиугольника.

Теория построений при помощи циркуля и линейки получила широкое развитие в конце XIX века. Например, было показано, что любое построение, выполняемое с помощью циркуля и линейки, можно выполнить с помощью лишь одной линейки, если в плоскости построения задана некоторая окружность и указан ее центр.

Все эти исследования внесли огромный вклад в развитие математики. Однако в практических построениях никто не ограничивает нас в наборе инструментов. Для большинства построений вполне достаточно линейки с делениями и транспортира.

Довольно любопытны некоторые приближенные способы построений. Например, приближенная квадратура круга получается, если за сторону квадрата взять хорду, проходящую через конец одного из диаметров круга и середину перпендикулярного ему радиуса (рис. 4). Этому построению соответствует значение $\pi=3,2$.

Способ приближенной трисекции угла при помощи циркуля и линейки предложил наш читатель *А. Падалко*. Вот его метод: «Чтобы провести трисекцию угла с вершиной O_1 (см. рис. 5), описываем дугу AmB с центром O_1 произвольного радиуса и проводим хорду AB; пусть O — ее середина. Радиусом, равным $|AO|$, описываем полуокружность AnB с центром O. Из точки B делаем на этой полуокружности засечку C радиусом $|AO|$; легко видеть, что $\overset{\smile}{BC}=\frac{\overset{\smile}{AnB}}{3}$. Затем находим точку D такую, что $|BD|=\frac{|AB|}{3}$. Соединяем точки C и D и из середины E отрезка CD восстанавливаем перпендикуляр к $[CD]$. Пусть Y — точка пересечения этого перпендикуляра с продолжением $[AB]$. Радиусом $|DY|$ проводим из Y дугу; пусть X — пересечение этой дуги с дугой AmB. Тогда $\overset{\smile}{BX}=\frac{\overset{\smile}{AmB}}{3}$, то есть $\widehat{BO_1X}\approx\frac{\widehat{AO_1B}}{3}$.»

Оценку точности этого построения мы поручили ЭВМ. Машина выдала следующий результат: точность построения не менее 0,1°, наихудший результат — при угле около 78°, относительная ошибка, то есть отношение величины отклонения к величине самого угла, не превосходит 0,01 и максимальна при угле около 158°.

---

*) См. «Квант», 1979, № 12.

Б. Ерицпохов

Построение изображений наклонных предметов

Чтобы найти изображение светящейся точки в оптической системе, например в линзе или в зеркале, достаточно построить ход двух лучей, вышедших из точки. Обычно выбирают два из трех характерных лучей, ход которых после системы известен. Это луч, проходящий через оптический центр системы, луч, падающий на систему параллельно ее оптической оси, и луч, проходящий через передний фокус системы.

А как быть, если источник света не точечный, а протяженный? Можно, конечно, строить изображения отдельных его точек, но иногда возможны некоторые упрощения. Так, если предмет перпендикулярен к главной оптической оси, изображение тоже перпендикулярно к ней. А если предмет наклонен к оси под произвольным углом? Остановимся подробнее на этом случае.

Пусть предмет AB опирается на ось в точке A и составляет с осью угол α. Построим изображение $A'B'$ этого предмета в оптической системе, например в собирающей линзе (рис. 1). Интуитивно можно предположить, что изображение будет располагаться симметрично предмету относительно оси. Однако это не так. Найдем зависимость угла β от угла α.

Направим оси координат XOY в пространстве предметов и $X'OY'$ в пространстве изображений соответственно правилу знаков, принятому в школьном учебнике. При этом координата x соответствует расстоянию d от предмета до линзы, а координата x' — расстоянию f от линзы до изображения.

Углы α и β будем определять по их тангенсам*). Из рисунка 1

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{d-d_0},\ \operatorname{tg}\beta=-\frac{y'}{f_0-f}=\frac{y'}{f-f_0},$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{f}{d}.$$

Из формулы линзы $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$ и $\frac{1}{d_0}+\frac{1}{f_0}=\frac{1}{F}$ выразим f и f_0:

$$f=\frac{Fd}{d-F},\ f_0=\frac{Fd_0}{d_0-F}.$$

Окончательно получим

$$\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\alpha\left(1-\frac{d_0}{F}\right).$$

---

*) При этом угол α отсчитывается в направлении поворота от оси OX к оси OY, а угол β — от оси OX' к оси OY'.

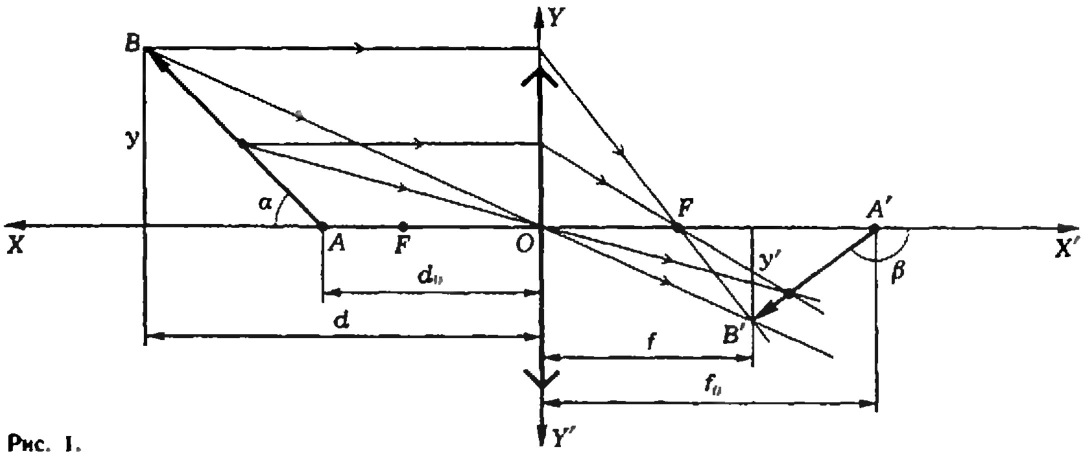


Рис. 1.

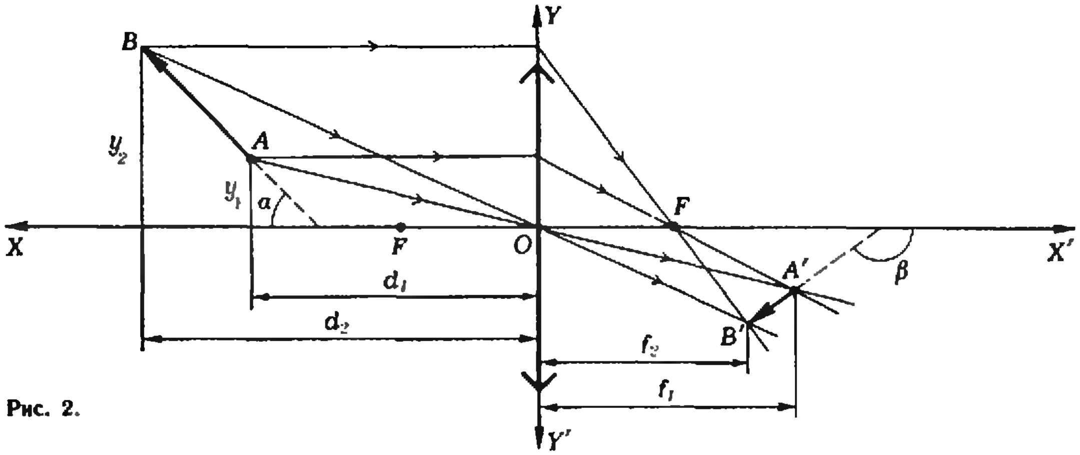


Рис. 2.

На рисунке 2 изображен более общий случай, когда предмет AB и его изображение $A'B'$ не касаются оптической оси. Рассмотрите этот случай самостоятельно и получите более общую формулу для тангенса угла β:

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{y_1(d_2-F)-y_2(d_1-F)}{F(d_2-d_1)}.$$

Предположим, что источником света является светящаяся прямая (рис. 3). Уравнение этой прямой имеет вид $y=kx+b$, где $b=-kd_0$, а $x=d$. Найдем функцию y' в пространстве изображений:

$$y'=y\frac{f}{d}=y\frac{f-F}{F}=$$

$$=k\left(\frac{fF}{f-F}-d_0\right)\frac{f-F}{F}=$$

$$=k\left(1-\frac{d_0}{F}\right)f+kd_0,$$

или

$$y'=k'x'+b',$$

где $k'=k\left(1-\frac{d_0}{F}\right)$ и $b'=kd_0$.

Очевидно, что это уравнение прямой; следовательно, изображением прямой является тоже прямая. Коэффициенты k и k' это тангенсы углов α и β соответственно:

$$k=\operatorname{tg}\alpha,\ k'=\operatorname{tg}\beta.$$

Таким образом, еще раз выведена связь между тангенсами углов α и β.

Заметим, что в геометрической оптике рассматриваются только параксиальные лучи, то есть очень близкие к главной оптической оси. Однако из соображений наглядности на всех рисунках (предыдущих и последующих) углы α изображены достаточно большими.

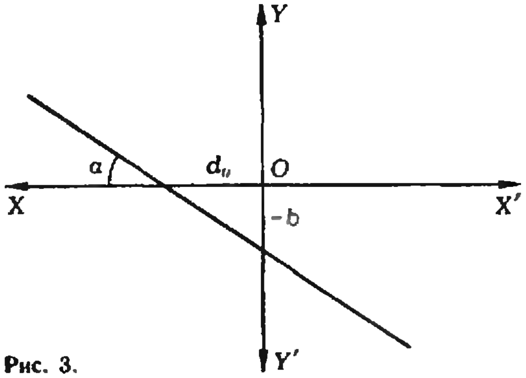


Рис. 3.

Перейдем теперь к конкретным примерам. Договоримся на всех рисунках светящиеся предметы показывать черным цветом, их действительные изображения — красным цветом, а мнимые — синим.

Пример 1. Пусть светящаяся прямая пересекает оптическую ось собирающей линзы в точке с координатой $d_0=2F$ (рис. 4). Тогда

$$k'=k\left(1-\frac{d_0}{F}\right)=k\left(1-\frac{2F}{F}\right)=-k,$$

или

$$\operatorname{tg}\beta=k'=-k=-\operatorname{tg}\alpha.$$

Пример 2. Пусть $d_0=0$. Тогда

$$k'=k\left(1-\frac{d_0}{F}\right)=k.$$

Соответствующая светящаяся прямая и ее изображение в собирающей линзе показаны на рисунке 5.

Пример 3. Найдем изображение прямой линии в вогнутом сферическом зеркале, если $d_0=F/2$ (рис. 6).

Отметим, что в случае вогнутого зеркала ось OX' в пространстве изображений направлена в ту же сторону, что и ось OX в пространстве предметов.

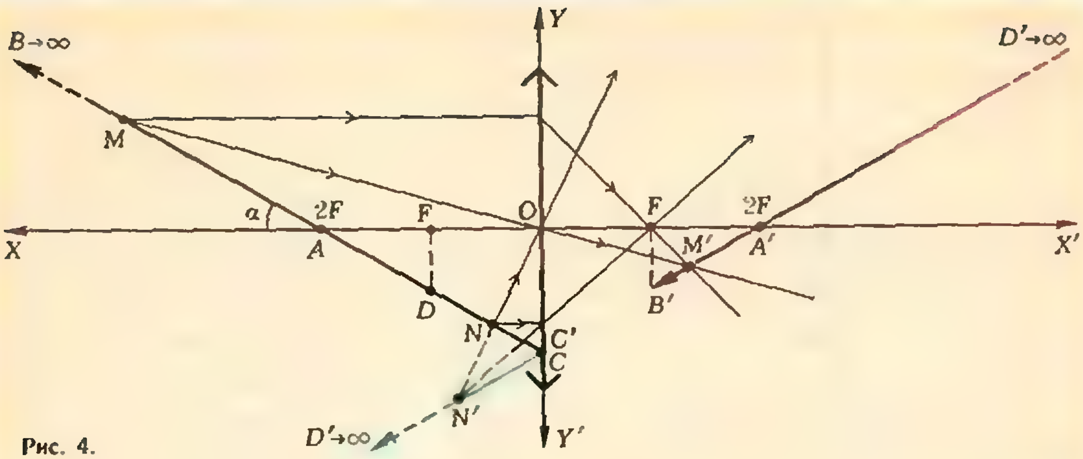

B→∞
Y
D′→∞
M
α
2F
F
O
F
2F
X
A
X′
M′
A′
D
B′
N
C′
C
N′
D′→∞
Y′

Рис. 4.

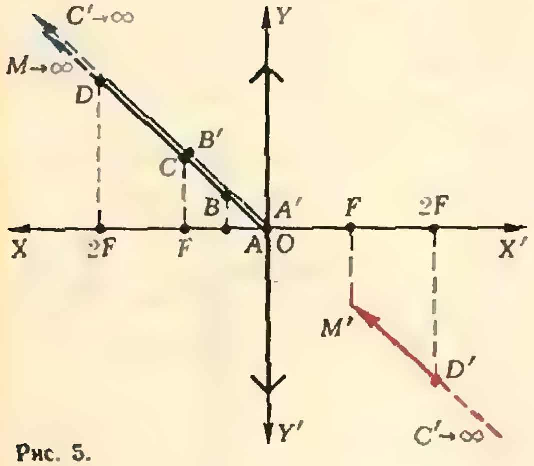

C′→∞
Y
M→∞
D
B′
C
B
A′
F
2F
X
2F
F
A
O
X′
M′
D′
C′→∞
Y′

Рис. 5.

Пример 4. Построим изображение прямой в рассеивающей линзе и в выпуклом зеркале при условии, что $d_0=F$.

Для рассеивающих систем формула линзы имеет вид

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=-\frac{1}{F},$$

поэтому

$$k'=k\left(1+\frac{d_0}{F}\right).$$

В нашем случае

$$k'=k\left(1+\frac{d_0}{F}\right)=2k.$$

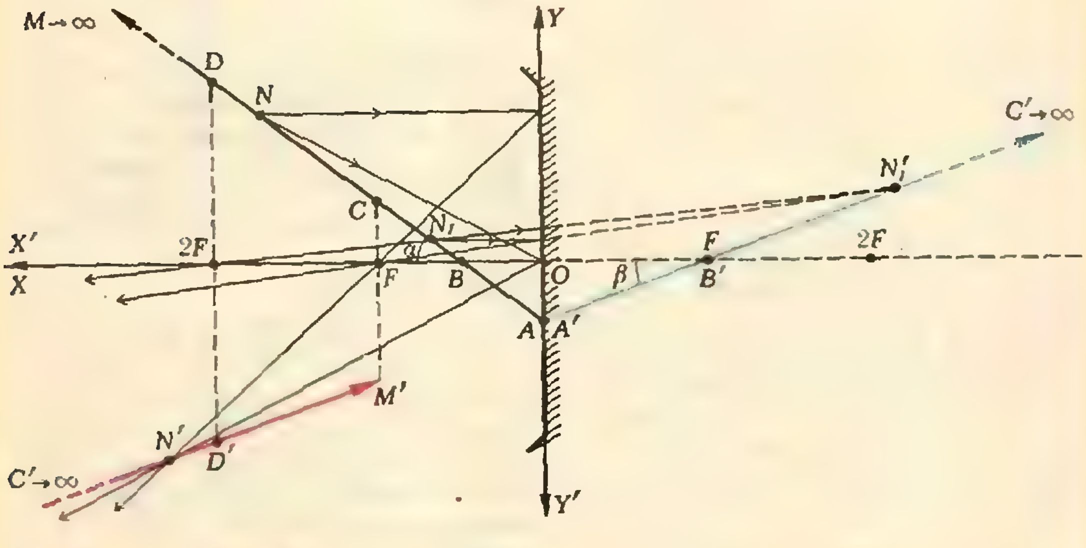

M→∞
Y
D
N
C′→∞
N_1'
C
N_1
X′
2F
α
F
2F
X
F
B
O
β
B′
A
A′
M′
N′
D′
C′→∞
Y′

Рис. 6.

Поскольку все формулы для вогнутого зеркала такие же, как и для собирающей линзы, получаем

$$k'=k\left(1-\frac{d_0}{F}\right)=\frac{k}{2}.$$

Соответствующие построения для рассеивающей линзы и выпуклого зеркала приведены на рисунках 7 и 8.

Пример 5. Пусть светящаяся прямая проходит через точку с координатой $d_0=F$. Каким будет ее изо-

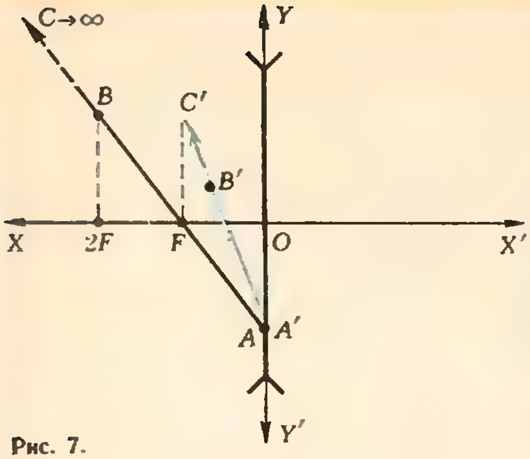


Рис. 7.

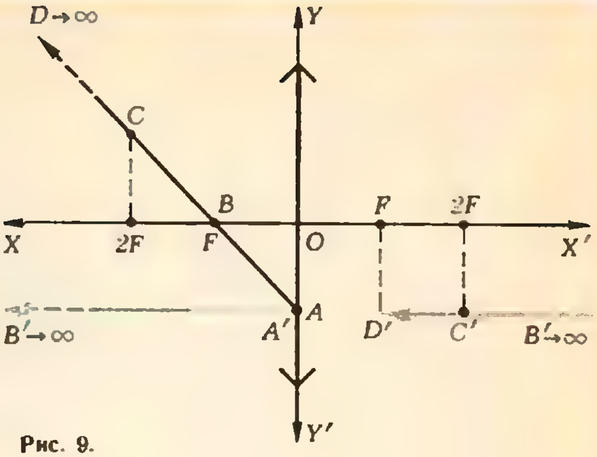


Рис. 9.

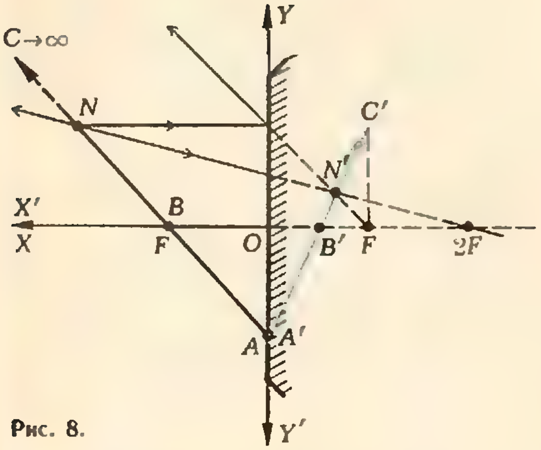


Рис. 8.

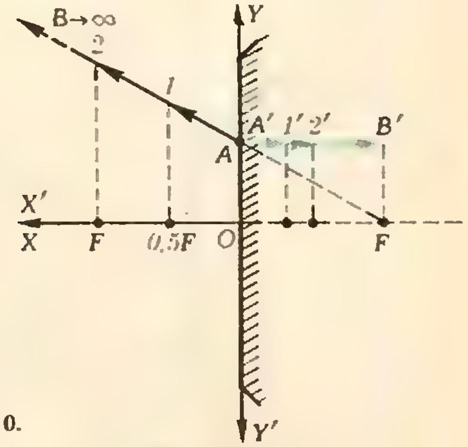


Рис. 10.

бражение в собирающей системе (собирающей линзе или вогнутом зеркале)?

Если $d_0=F$, то

$$k'=k\left(1-\frac{d_0}{F}\right)=0.$$

Это означает, что изображением наклонной линии будет прямая, параллельная главной оптической оси системы. На рисунке 9 проведено построение для собирающей линзы.

Пример 6. Выясним, при каком расположении прямой ее изображение в рассеивающей системе будет параллельно оптической оси системы.

Поскольку для рассеивающей системы

$$k'=k\left(1+\frac{d_0}{F}\right),$$

то k' будет равным нулю при $d_0=-F$. Соответствующее построение для выпуклого зеркала показано на рисунке 10.

Остановимся чуть более подробно на двух последних примерах.

Во-первых, из рисунков 9 и 10 следует, что $y'=F\operatorname{tg}\alpha$. Значит, чем больше угол наклона светящейся прямой к оптической оси системы, тем дальше от оси находится линия изображения.

Во-вторых, отметим, что при равномерном распределении точек на линии предмета на линии изображения точки распределены неравномерно (см., например, рис. 10). Это связано с так называемым продольным увеличением (с увеличением в направлении оптической оси), которое определяется формулой $\Gamma_{\text{прод}}=$ $=\lim\limits_{d_2-d_1\to 0}\frac{f_2-f_1}{d_2-d_1}$. Другими словами, продольное увеличение равно производной от f по d:

$$f'=\left(\frac{Fd}{d-F}\right)'=-\left(\frac{F}{d-F}\right)^2=-\Gamma^2_{\text{попер}}$$

— горизонтальное увеличение равно квадрату вертикального увеличения, взятому с обратным знаком.

* * *

В заключение заметим, что все сказанное в этой статье имеет практическое значение только тогда, когда расстояние от предмета до линзы или зеркала сравнимо с фокусным расстоянием линзы или зеркала. Если же указанное расстояние велико (по сравнению с фокусным), изображение предмета, независимо от его наклона к оптической оси, будет находиться в фокальной плоскости, перпендикулярной оптической оси системы. Это хорошо знают, например, фотолюбители: используя короткофокусные объективы, они получают практически одинаково резкими изображения и близких, и далеких предметов.

Упражнения

1. Постройте изображение светящейся прямой в собирающей линзе, если $d_0=-F$.
2. Найдите изображение прямой в вогнутом зеркале при $d_0=0$.
3. Сделайте построение предмета и изображения для $k=2$ и $d_0=F$ в случае вогнутого зеркала.
4. Сделайте построение для $k=0,5$ и $d_0=-F$ в случае рассеивающей линзы.
5. Постройте изображение прямой, параллельной главной оптической оси системы. Рассмотрите все возможные случаи. *Указание.* Воспользуйтесь принципом обратимости световых лучей.

Как экзаменуют по физике в МФТИ

В редакцию нашего журнала приходит много писем с просьбой рассказать о том, как проходят вступительные экзамены по физике в различные вузы. Предлагаем вниманию читателей интервью, взятое корреспондентом газеты «За науку» Московского физико-технического института Л. Санаевым у заместителя заведующего кафедрой общей физики этого института профессора С. Козела. Интервью перепечатывается с небольшими изменениями и сокращениями.

— Скажите, сколько лет вы уже принимаете вступительные экзамены?

— С небольшими перерывами двадцать лет.

— В чем, по-вашему, заключается отличительная особенность физтеховской системы приема?

— МФТИ готовит кадры для работы на передовых рубежах современной науки. Этим и объясняются высокие критерии приема: отбираются самые способные.

Контингент абитуриентов очень широк: от выпускников сельских школ до выпускников московских физико-математических школ. Мы учитываем это и стремимся выяснить прежде всего наличие не формальных знаний, и способностей, которые впоследствии можно развивать. Задача, конечно, трудная. Но, по-видимому, приемная комиссия решает ее довольно успешно.

— Расскажите, пожалуйста, о письменном и устном экзаменах и связи между ними.

— Письменный экзамен проводится первым, он отсекает определенную часть слабо подготовленных абитуриентов — процентов 30—40. Затем идет устный экзамен. Следует оговориться, что оценка, полученная за письменную работу, никоим образом не влияет на оценку за устный экзамен. Часто получивший тройку за письменную работу затем получает пятерку; бывает и наоборот, но гораздо реже.

— Несколько подробнее о задачах письменной работы.

— По традиции, мы даем четыре задачи, соответственно основным разделам физики: механика, теплота, электричество, оптика. Из них, по крайней мере, две — средней трудности, одна — чуть труднее и одна — трудная. Это приводит к сильной дифференциации оценок.

Перед началом письменной работы экзаменующихся предупреждают: начинайте решать с наиболее простых для вас задач.

— Что больше всего вы цените в ответе на устном экзамене?

— Устный экзамен состоит из коротких, наполовину качественного характера вопросов экзаменатора. Нет возможности заслушивать пространные выступления. Больше всего мы ценим, когда экзаменующиеся дают не заученный ответ, а проявляют понимание физики.

— Среди старшеклассников обычно ходят слухи, что для поступления в МФТИ школьной подготовки недостаточно. Так ли это?

— Задачи и вопросы, предлагаемые на экзаменах, не выходят за рамки школьной программы, но мы требуем более глубокого понимания, что, к сожалению, редко достигается при изучении предмета в школе. В общем, нужна определенная подготовка, а лучшая подготовка — решение задач повышенной трудности, например из физтеховских сборников или журнала «Квант».

Я. Суконник, П. Горнштейн

Можно решить проще!

Тот, кто готовится к вступительным экзаменам по математике, не раз встречался, вероятно, с трудными экзаменационными задачами, решение которых требует долгих рассуждений и длинных вычислений. И каждого, конечно, занимал вопрос: а нельзя ли для такой задачи придумать простое, рациональное и короткое решение?

Довольно часто — можно. Но додуматься до такого решения не просто — нужен долгий и упорный поиск. Зато каждое красивое решение трудной задачи всегда вызывает чувство удовлетворения, свидетельствует о глубоких знаниях и творческих способностях абитуриента. Именно поэтому при подготовке к экзаменам пытаться отыскивать или, в крайнем случае, разбирать такие решения особенно полезно.

Тем более досадно, что в книгах для абитуриентов иногда приводятся неоправданно громоздкие и нерациональные решения.

Возьмем, к примеру, книгу Ю. В. Нестеренко, С. Н. Олехника и М. К. Потапова «Задачи вступительных экзаменов по математике» (М., «Наука», 1980), где воспроизведены варианты по математике, предлагавшиеся в 1977—1979 гг. поступавшим в Московский университет, и указываются решения части вариантов. Решения некоторых задач занимают в этой книге одну, две, даже три страницы. Между тем, зачастую их можно решить много проще и короче.

В настоящей статье приведены восемь задач из указанной книги с более простыми решениями.

Свойства фигур

При решении геометрических задач абитуриенты часто, не особенно размышляя, затевают длинные и громоздкие вычисления, которые, впрочем, обычно и приводят к цели. Между тем, такие задачи иногда удается решить очень быстро, если догадаться применить некую теорему, суметь воспользоваться спецификой конфигурации, увидеть нужное дополнительное построение. В геометрии мы тем успешнее будем продвигаться вперед, чем шире будет наш «геометрический кругозор», чем лучше мы научимся видеть свойства фигур, которые можно «обыграть» в решении.

Задача 1 (МГУ, физфак, 1977). *Дана равнобедренная трапеция, в которую вписана окружность и около которой описана окружность. Отношение высоты трапеции к радиусу описанной окружности равно* $\sqrt{\frac{2}{3}}$. *Найти углы трапеции.*

Решение. Пусть $ABCD$ — данная трапеция (рис. 1). Проведем диагональ BD и высоту BE. Обозначим $\widehat{DAB}$ через x, $\widehat{ADB}$ — через y. Опустив перпендикуляр из центра O описанной окружности (обозначим ее радиус через R) на BD и продолжив его до пересечения с этой окружностью, можно увидеть, что

$$|BD|=2R\cdot\sin x. \qquad (1)$$

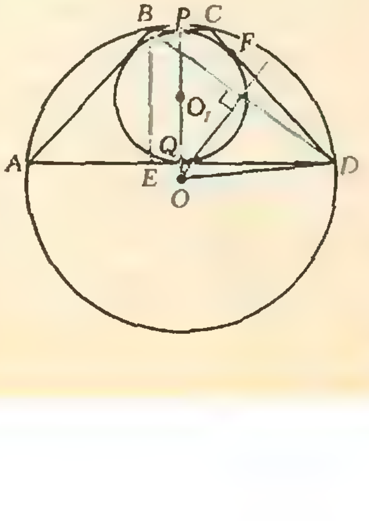


Рис. 1.

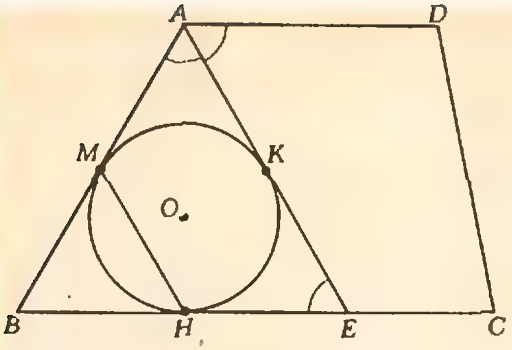


Рис. 2.

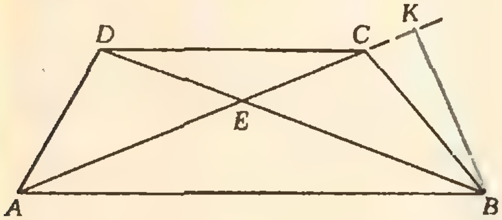


Рис. 3.

Из $\triangle DBE$

$$|BE| = |BD| \cdot \sin y. \qquad (2)$$

Из (1) и (2)

$$|BE| = 2R \cdot \sin x \cdot \sin y,$$

то есть высота треугольника равна диаметру описанной окружности, умноженному на произведение синусов углов, прилегающих к стороне, к которой проведена высота. Таким образом,

$$\frac{|BE|}{R} = 2 \sin x \cdot \sin y = \sqrt{\frac{2}{3}} . \quad (3)$$

Проведем высоту трапеции PQ через центр O_1 вписанной окружности ((PQ) пройдет и через O, но это нам не понадобится). Тогда $|ED| = |EQ| + |QD| = |BP| + |QD| = |PC| + |QD| = |CF| + |FD| = |CD|$, то есть проекция диагонали описанной равнобедренной трапеции на большее основание равна боковой стороне. Из $\triangle BED$

$$\operatorname{tg} y = \frac{|BE|}{|ED|} = \frac{|BE|}{|CD|} = \frac{|BE|}{|AB|} = \sin x. \ (4)$$

Из (3) и (4) получаем уравнение

$$2 \operatorname{tg} y \cdot \sin y = \sqrt{\frac{2}{3}} ,$$

$$2 \cos^2 y + \sqrt{\frac{2}{3}} \cos y - 2 = 0 ,$$

$$\cos y = \frac{-\sqrt{2} \pm 5\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} .$$

Окончательно $\cos y = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\sin x = \operatorname{tg} y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\hat{A} = \hat{D} = x = \frac{\pi}{4}$, $\hat{B} = \hat{C} = \frac{3}{4} \pi$.

Замечание. Решая задачу, мы попутно усмотрели следующее важное усиление теоремы синусов (см. (1)):

$$a = 2R \cdot \sin \hat{A}$$

или

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R.$$

Рассмотрев все случаи расположения центра описанной окружности относительно треугольника, его легко доказать.

Задача 2 (МГУ, химфак, 1978). *В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC длина боковой стороны AB равна 2 см. Биссектриса угла BAD пересекает прямую BC в точке E. В треугольник ABE вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке M и стороны BE в точке H. Длина отрезка MH равна 1 см. Найти величину угла BAD.*

Решение. Поскольку $\widehat{BAE} = \widehat{DAE} = \widehat{BEA}$ (рис. 2), $\triangle ABE$ — равнобедренный. Значит, $|BE| = |BA| = 2$ и $[MH] \parallel [AE]$. Из подобия треугольников BMH и BAE

$$\frac{|BM|}{|MH|} = \frac{|BA|}{|AE|} .$$

Так как $|BM| = |BA| - |MA| = |BA| - |AK| = |BA| - \frac{1}{2}|AE| = 2 - \frac{1}{2}|AE|$.

$$\frac{2 - \frac{1}{2}|AE|}{1} = \frac{2}{|AE|} .$$

Отсюда $|AE| = 2$, $\widehat{BAE} = \frac{\pi}{3}$, $\widehat{BAD} = \frac{2}{3}\pi$.

Задача 3 (МГУ, ф-т почвоведения, 1979). *В трапеции $ABCD$ отрезки AB и DC являются основаниями. Диагонали трапеции пересекаются в точке E. Найти площадь треугольника BCE, если $|BA| = 30$ см, $|DC| = 24$ см, $|AD| = 3$ см и $\widehat{DAB} = \frac{\pi}{3}$.*

Решение. Из подобия треугольников ECD и EAB (рис. 3)

$$\frac{|CE|}{|EA|} = \frac{|CD|}{|AB|} .$$

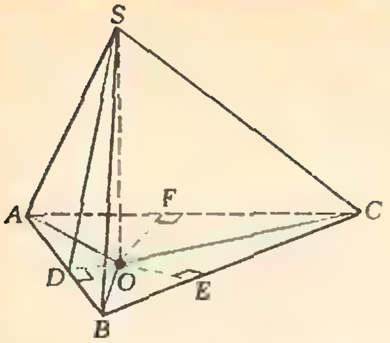


Рис. 4.

Значит, $\frac{|CE|}{|EA|}=\frac{4}{5}$, $\frac{|CE|}{|CA|}=\frac{4}{9}$. Так как $[BK]$ — общая высота треугольников BCE и BCA,

$$\frac{S_{\triangle BCE}}{S_{\triangle BCA}}=\frac{|CE|}{|CA|}.$$

Значит, $S_{\triangle BCE}=\frac{4}{9}S_{\triangle BCA}$. Но $S_{\triangle BCA}=S_{\triangle ADB}=\frac{1}{2}|AD|\cdot|AB|\cdot\sin\widehat{DAB}$. Следовательно, $S_{\triangle BCE}=10\sqrt{3}$.

Задача 4 (МГУ, отд. общей геологии геолог. ф-та, 1979). *Основанием пирамиды $SABC$ является правильный треугольник, длина стороны которого равна $\sqrt{3}$. Основанием высоты, опущенной из вершины S, является точка O, лежащая внутри треугольника ABC. Расстояние от точки O до стороны AC равно 1. Синус угла OBA относится к синусу угла OBC как 2:1. Площадь грани SAB равна $\sqrt{\frac{5}{6}}$. Найти объем пирамиды.*

Решение. Обозначим основания перпендикуляров, опущенных из O на стороны AB, BC, CA соответственно через D, E, F (рис. 4). Из треугольников OEB и ODB

$$\frac{|OE|}{|OD|}=\frac{\sin\widehat{OBC}}{\sin\widehat{OBA}}.$$

Значит, $|OE|=\frac{1}{2}|OD|$. Из равенства $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle OAB}+S_{\triangle OBC}+S_{\triangle OAC}$ следует, что $|OD|+|OE|+|OF|=h$, где h — длина высоты треугольника ABC. (Замечание. Это равенство, очевидно, верно для любой точки O внутри равностороннего треугольника.) Поскольку $h=|BC|\times\times\sin 60°=\frac{3}{2}$ и $|OF|=1$, получаем $|OD|=\frac{1}{3}$. Зная $|AB|$ и $S_{\triangle SAB}$, находим $|SD|$. Затем из $\triangle SOD$ находим $|SO|$. Ответ. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Помогает график

Нередко на вступительных экзаменах предлагаются уравнения-системы-неравенства, содержащие две переменные (скажем, x и a), причем требуется найти все значения одной переменной (например, a), при которых вторая переменная (соответственно, x) или, если угодно, уравнение-система-неравенство обладает некоторым свойством. (В подобных задачах переменная a обычно называется *параметром*.)

Почему-то многие авторы учебных пособий, в том числе авторы вышеназванной книги, сводят решение таких задач к громоздким исследованиям формулы, выражающей x через a, в то время как более целесообразно «геометрическое решение» — построение графика на плоскости Oxa (поэтому этот способ называют иногда «методом Оха»). Искомое множество «считывается» с оси Oa, чем и заканчивается решение.

Задача 5 (МГУ, отд. политэкономии эконом. ф-та, 1977). *Найти все a, при каждом из которых неравенство*

$$3-|x-a|>x^2$$

имеет хотя бы одно отрицательное решение.

Решение. Данное неравенство равносильно неравенству

$$|x-a|<3-x^2,$$

и, следовательно, системе

$$-(3-x^2)<x-a<3-x^2.$$

Поэтому задачу можно переформулировать так: найти все a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x-a<3-x^2 \\ x-a>-(3-x^2) \\ x<0 \end{cases}$$

или система

$$\begin{cases} a>x^2+x-3 \\ a<-x^2+x+3 \\ x<0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение. Нари-

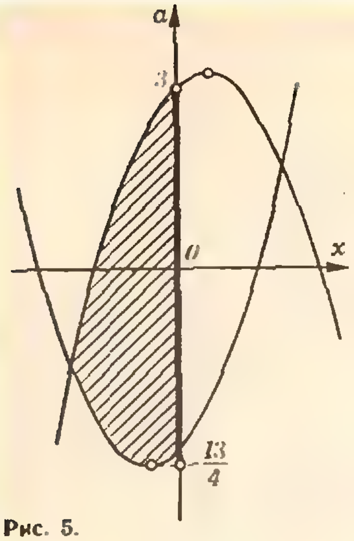


Рис. 5.

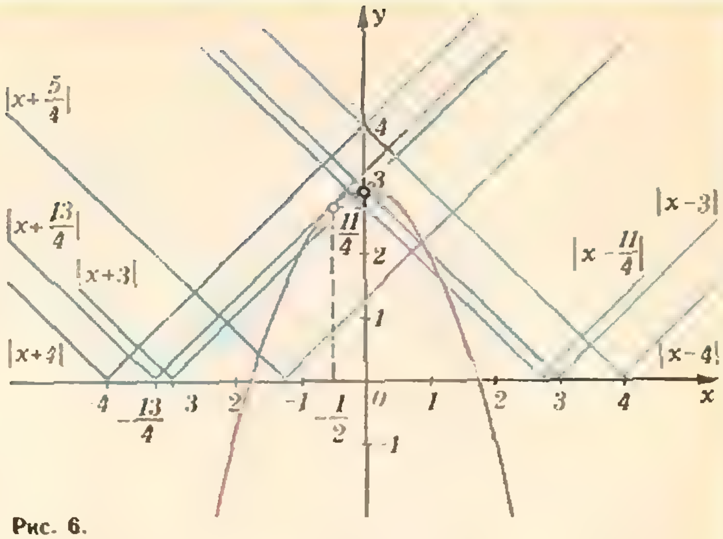


Рис. 6.

совав на плоскости Oxa параболы $a=x^2+x-3$ и $a=-x^2+x+3$ и спроектировав на ось Oa множество решений системы (на рисунке 5 оно заштриховано), получаем ответ: $\left]-\frac{13}{4};\ 3\right[$.

Замечание. Поскольку в данное неравенство параметр a входит в одном месте, задачу можно решить и так: на плоскости Oxy нарисуем параболу $y=3-x^2$ и начнем двигать вдоль оси Ox слева направо «уголок» $y=|x-a|$ (рис. 6); очевидно, у неравенства $|x-a|<3-x^2$, равносильного данному, отрицательные решения начнут появляться после того, как «уголок» коснется параболы [абсцисса точки касания находится из равенства $y'=-2x=1$, абсцисса вершины «уголка» — из уравнения касательной $y=\frac{11}{4}+1\cdot\left(x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$], и кончат появляться, когда «уголок» дойдет до вершины параболы.

Задача 6 (МГУ, отд. общей геологии геолог. ф-та, 1978). *Найти все значения параметра a, при каждом из которых существует хотя бы одно x, удовлетворяющее условиям*

$$\begin{cases} x^2+(5a+2)x+4a^2+2a<0 \\ x^2+a^2=4. \end{cases}$$

Решение. Многочлен, стоящий в левой части неравенства, входящего в данную систему, распадается в произведение двух множителей: $x^2+(5a+2)x+4a^2+2a=(a+x)(4a+x+2)$. Поэтому данная система равносильна системе

$$\begin{cases} (a+x)(4a+x+2)<0 \\ x^2+a^2=4 \end{cases}$$

или совокупности («Алгебра и начала анализа 9—10», п. 74) систем

$$\begin{cases} a+x>0 \\ 4a+x+2<0 \\ x^2+a^2=4 \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} a+x<0 \\ 4a+x+2>0 \\ x^2+a^2=4 \end{cases} \qquad (2)$$

Перепишем системы (1), (2) в виде

$$\begin{cases} a>-x \\ a<-\frac{1}{4}x-\frac{1}{2} \\ x^2+a^2=4 \end{cases} \qquad (1')$$

$$\begin{cases} a<-x \\ a>-\frac{1}{4}x-\frac{1}{2} \\ x^2+a^2=4 \end{cases} \qquad (2')$$

Нарисуем на плоскости Oxa окружность $x^2+a^2=4$ и прямые $a=-x$, $a=-\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}$. Спроектировав на ось Oa множество решений системы (1′) («синяя дуга» на рисунке 7) и множество решений системы (2′) («красная дуга») и объединив проекции, получим ответ: $\left]-\sqrt{2};\ -\frac{16}{17}\right[\ \cup\ \left]0;\ \sqrt{2}\right[$.

Задача 7 (МГУ, биофак, 1978). *Найти все значения a, при каждом из которых уравнение*

$$x|x+2a|+1-a=0$$

имеет единственное решение.

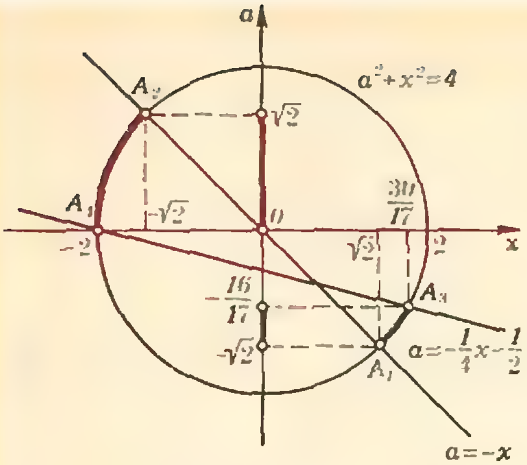


Рис. 7.

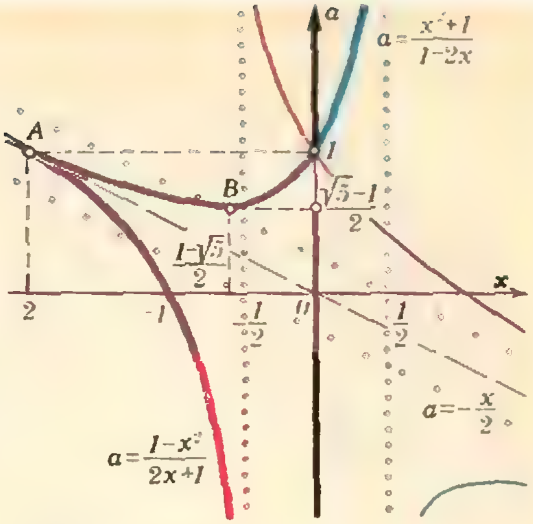


Рис. 8.

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} x+2a\geqslant 0\\ x(x+2a)+1-a=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2a<0\\ x(-x-2a)+1-a=0\end{cases}$$

или систем

$$\begin{cases} a=\dfrac{x^2+1}{1-2x}\\ a\geqslant-\dfrac{x}{2}\end{cases}\qquad(1)$$

$$\begin{cases} a=\dfrac{1-x^2}{2x+1}\\ a<-\dfrac{x}{2}\end{cases}\qquad(2)$$

Построим на плоскости Oxa прямую $a=-\frac{x}{2}$ и, при помощи средств дифференциального исчисления, кривые $a=\frac{x^2+1}{1-2x}$ («синяя кривая» на рисунке 8) и $a=\frac{1-x^2}{2x+1}$ («красная кривая»). Решением системы (1) является «толстая часть» синей кривой, системы (2) — «толстая часть» красной кривой. Прямые, параллельные оси Ox, пересекают объединение этих «толстых кривых» один раз при $a>1$ и при $a<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, два раза — при $a=1$ и при $a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, три раза — при $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<a<1$. Ответ. $\left]-\infty; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right[\cup\left]1; +\infty\right[$.

* *
*

Задача 8 (МГУ, отд. планирования и эконом. кибернетики эконом. ф-та, 1977). *Определить, при каких a уравнение*

$$\log_3(9^x+9a^3)=x$$

имеет ровно два решения.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению

$$3^x=9^x+9a^3.$$

Положив $3^x=t$, получим вспомогательное квадратное уравнение

$$t^2-t+9a^3=0.\qquad(1)$$

Поскольку уравнение $3^x=t$ (относительно x) имеет решения только при $t>0$, причем при каждом таком t оно имеет единственное решение, задача принимает вид: *определить, при каких a уравнение* (1) *имеет ровно два положительных корня*, а для этого необходимо и достаточно, чтобы a удовлетворяло системе

$$\begin{cases} 1-36a^3>0\\ 9a^3>0\end{cases}$$

(достаточность вытекает из теоремы Виета и того, что второй коэффициент в уравнении (1) отрицателен). Ответ. $\left]0; \frac{1}{\sqrt[3]{36}}\right[$.

Горьковский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(радиофизический факультет)

1. Найти все действительные значения x, удовлетворяющие неравенству

$$x-3<\sqrt{x^2+4x-5}.$$

2. Решить уравнение

$$\cos x=\sqrt{3}\sin x+2\cos 3x.$$

3. Определить размеры цилиндра, имеющего наибольший объем, если площадь его полной поверхности равна 2π.

4. Для уборки урожая было выделено несколько одинаковых комбайнов, которые могли убрать поле за 24 часа, если бы приступили к работе одновременно. Но случилось так, что они приступали к работе один за другим через равные промежутки времени, и затем каждый работал до окончания уборки. За какое время была проведена уборка урожая, если первый комбайн работал в 5 раз больше времени, чем последний?

5. Доказать, что $53^{53}-33^{33}$ делится на 10.

Вариант 2

(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Решить уравнение

$$\sin 2x+\sin^4\frac{x}{2}=\cos^4\frac{x}{2}.$$

2. Найти все действительные значения x, удовлетворяющие неравенству

$$\log_{0.25}\frac{35-x^2}{x}>-\frac{1}{2}.$$

3. Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна наименьшему значению трехчлена $2x^2-4x+10$. Найти сумму одиннадцати первых членов этой прогрессии.

4. Вычислить площадь равнобедренной трапеции, если ее высота равна h, а боковая сторона видна из центра описанной окружности под углом 60°.

5. Трое рабочих участвовали в соревновании. Первый и третий из них произвели продукции в два раза больше, чем второй, а второй и третий в 3 раза больше, чем первый. Какое место занял каждый рабочий в соревновании?

Вариант 3

(механико-математический и физический факультеты)

1. Найти все действительные значения x, удовлетворяющие неравенству

$$\log_3\log_{1/2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}>1.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\cos x+\cos y=1/2,\\ \sin^2x+\sin^2y=7/4.\end{cases}$$

3. Диаметр окружности радиуса R является основанием правильного треугольника. Вычислить площадь той части треугольника, которая лежит вне данного круга.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=5+4\cos x-\sin^2x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

5. Представить число 19 в виде разности кубов натуральных чисел.

Физика

Задачи устного экзамена

1. На бруске массой $2m$ установлена невесомая вертикальная стойка, к которой на невесомой нити длиной l подвешен шарик массой m (рис. 1). Брусок без трения может скользить по горизонтальному столу. Чему будет равна скорость бруска в момент прохождения шариком нижней точки, если первоначально брусок покоился, а шарик был отпущен из точки A без начальной скорости?

2. Два тела массами $m_1=4$ кг и $m_2=8$ кг, связанные нитью, съезжают по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол $\alpha=30°$. Коэффициенты трения между наклонной плоскостью и телами различны: для первого тела он равен $\mu_1=0{,}1$, а для второго $\mu_2=0{,}2$. Какова сила натяжения нити, если тело массой m_1 двигается впереди?

3. К потолку вагона на двух невесомых нитях подвешен шарик массой m (рис. 2). Найдите натяжение каждой нити, если вагон движется с горизонтальным ускорением $|\vec{a}|=g/2$.

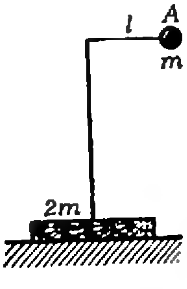


Рис. 1.

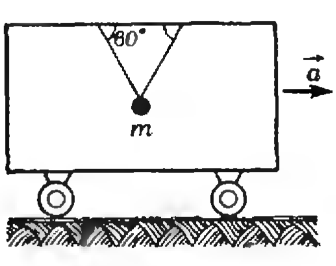


Рис. 2.

4. Однородный стержень покоится, опираясь на гладкую стену и шероховатый пол (рис. 3). Масса стержня $m=10$ кг, угол между стержнем и полом $\alpha=45°$. Найдите силу трения.

5. Положительно заряженный металлический шар создает в точке A напряженность $|\vec{E}_A|=100$ В/м, а в точке C — напряженность $|\vec{E}_C|=36$ В/м (рис. 4). Какова напряженность поля в точке B, лежащей посередине между точками A и C?

6. Большая шарообразная капля воды получена в результате слияния $n=125$ одинаковых шарообразных капелек. До какого потенциала были заряжены капельки, если потенциал большой капли оказался равным $\varphi=2{,}5$ В?

7. Конденсатор емкостью C заряжен до разности потенциалов U. Конденсатор подключают к батарее, ЭДС которой равна $\mathscr{E}$. При этом положительно заряженная пластина конденсатора соединяется с отрицательным полюсом, а отрицательно заряженная — с положительным полюсом батареи. Какой заряд пройдет через батарею?

8. В схеме, приведенной на рисунке 5, ЭДС батареи $\mathscr{E}=12$ В, ее внутреннее сопротивление $r=0$, а сопротивления R одинаковы. Вольтметр, подключенный параллельно к одному из сопротивлений, показал $U=4$ В. Что покажет этот же вольтметр, включенный в цепь последовательно (например, между точками A и $Б$)?

9. С помощью аккумулятора, ЭДС которого $\mathscr{E}=12$ В и внутреннее сопротивление $r=3$ Ом, подогревают воду. Необходимая мощность нагревателя $P=9$ Вт. Рассчитайте сопротивление спирали нагревателя и коэффициент полезного действия данной установки.

10. Имеется два колебательных контура с одинаковыми катушками и конденсаторами. В один из контуров в катушку вставили железный сердечник, увеличивший ее индуктивность в $n=4$ раза. Найдите отношение резонансных частот контуров и их энергий, если максимальные заряды на конденсаторах равны.

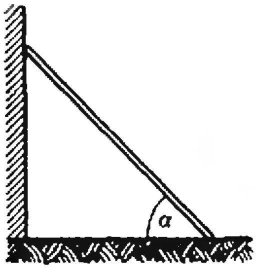


Рис. 3.

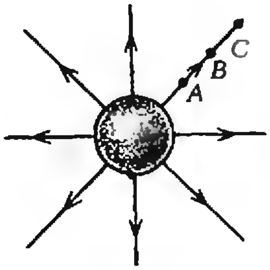


Рис. 4.

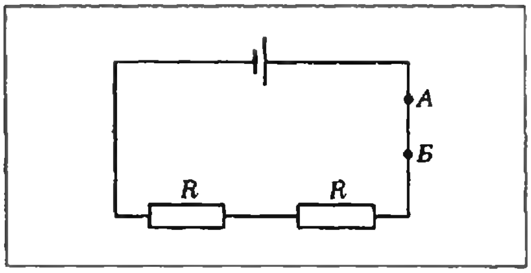


Рис. 5.

С. Бирагов, В. Голубев,
В. Скворцов, Ю. Сорокин

Красноярский государственный университет

Математика

Письменный экзамен

Математический факультет

1. Решить уравнение

$$(2{,}5)^x-2\cdot(0{,}4)^{x+1}+1{,}6=0.$$

2. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} f'(x)<\dfrac{2}{5-2x}, \\ e^{f(x)}<\sqrt{\dfrac{x}{2}}, \end{cases}$$

где $f(x)=\ln(3-x)$.

3. Хорда параболы $y=-a^2x^2+5ax-4$ касается кривой $y=\dfrac{1}{1-x}$ в точке $x=2$ и делится этой точкой пополам. Найти a.

4. В окружность радиуса R вписан равнобедренный треугольник. При каком значении угла α при вершине треугольника высота, проведенная к боковой стороне, имеет наибольшую длину? Найти эту длину.

5. В тетраэдре $ABCD$ двугранные углы при ребрах BC, BD и AC прямые, а величина двугранных углов при ребрах AB и CD равна 15°. Найти радиус шара, вписанного в тетраэдр, если $|CD|=2$.

Физика

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. Из пушки, свободно соскальзывающей с гладкой наклонной плоскости и прошедшей путь l, производится выстрел в горизонтальном направлении. При какой скорости $\vec{v}$ вылета снаряда пушка остановится после выстрела? Масса пушки M, масса снаряда m, угол наклона плоскости к горизонту α.

2. Сфера радиусом R с находящимся в ней шариком вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω. Пренебрегая трением шарика о сферу, определите, в каком месте сферы он находится.

3. На pV-диаграмме изображен замкнутый цикл для идеального газа (рис. 1). Кривая $3-1$ — изотерма. Изобразите этот цикл в координатах T, V и p, T.

4. Электрон влетает со скоростью $\vec{v}$ ($|\vec{v}|=10^7$ м/с) в плоский конденсатор, между пластинами которого поддерживается постоянная разность потенциалов $U=425$ В (рис. 2). Расстояние между пластинами

$d = 1$ см, угол $\alpha = 30°$, удельный заряд электрона $e/m = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг. На какое максимальное расстояние l удалится электрон от положительной пластины?

5. Над столом висит небольшая лампочка, расположенная в вершине конусообразного абажура с углом при вершине $\varphi = 60°$. На пути лучей параллельно поверхности стола поместили плоскопараллельную стеклянную пластину с показателем преломления $n = 1{,}5$. При этом диаметр светового пятна на столе уменьшился на $a = 2$ см. Какова толщина d пластины?

Математический и биолого-химический факультеты

1. Цикл идеального газа состоит из двух изохор и двух изобар (рис. 3). Определите работу A, совершенную одним молем газа за цикл, если известно, что точки *2* и *4* лежат на одной изотерме, соответствующей температуре T, а температуры в точках *1* и *3* равны соответственно T_1 и T_2.

2. На внешнем сопротивлении аккумулятора выделялась тепловая мощность $P_1 = 10$ Вт. Когда к концам этого сопротивления параллельно присоединили второй такой же аккумулятор, выделяемая мощность P_2 увеличилась вдвое. Определите мощность P_3, выделяемую на сопротивлении, если параллельно ему присоединить третий такой же аккумулятор.

3. Пройдя ускоряющую разность потенциалов $U = 3{,}52 \cdot 10^3$ В, электрон влетает в однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$ ($|\vec{B}| = 0{,}01$ Тл) перпендикулярно линиям индукции и движется по окружности радиусом $r = 2$ см. Вычислите отношение e/m заряда электрона к его массе.

4. С помощью тонкой линзы получают двукратно увеличенное действительное изображение предмета. Затем линзу передвигают на $a = 10$ см и получают мнимое изображение такого же размера. Определите фокусное расстояние F линзы.

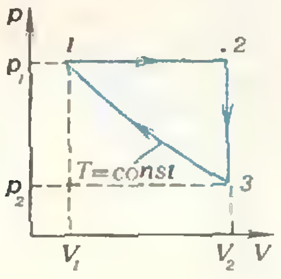


Рис. 1.

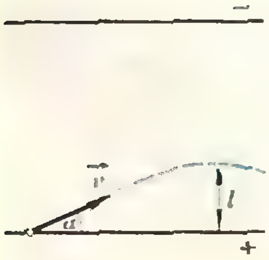


Рис. 2.

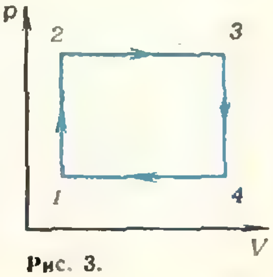


Рис. 3.

5. У данного металла фотоэффект начинается при частоте света $\nu_0 = 6 \cdot 10^{14}$ Гц. Определите частоту ν облучения металла, если вылетающие с поверхности металла фотоэлектроны полностью задерживаются сеткой, потенциал которой относительно металла равен $\varphi = 3$ В.

В. Бытев, С. Качин,
Ю. Макаров, Г. Пынько

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Математика

Письменный экзамен

Математико-механический факультет

Вариант 1

1. Решить неравенство

$$\sqrt{x+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{x-\frac{1}{x^2}} > \frac{2}{x}.$$

2. При каких $a > 0$ уравнение $\cos ax = \frac{1}{4}$ имеет ровно одно решение на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$?

3. Пусть $ABCD$ — квадрат единичной площади, точки K и M лежат соответственно на продолжениях сторон $[AD]$ и $[BC]$, по одну сторону от прямой AB, $|BM| = a + 1$, $|CM| = a$. Пусть L — точка пересечения прямых AM и BK, N — точка пересечения прямых DM и CK. При каком выборе точки K площадь четырехугольника $KLMN$ имеет наименьшее значение?

4. Найти все пары действительных чисел x, y, для которых

$$\log_{|x|} \cos 1 > \log_y \cos 1.$$

5. Пусть $ABCA'B'C'$ — прямая призма с основанием ABC и высотой $|AA'| = h$. Найти площадь сечения, проходящего через середины ребер $[AB]$, $[BB']$ и $[B'C']$, если известно, что $|AB| = |BC| = h$, и $ABC = 90°$.

Вариант 2 *)

1. Параллельные прямые l_1 и l_2 пересечены перпендикулярной им прямой l_3. Точка A удалена на расстояние $a > 0$ от каждой из прямых l_1, l_2 и на расстояние $b > 0$ от прямой l_3. Прямая l проходит через точку A и пересекает каждую из прямых l_1, l_2, l_3. Какое наименьшее значение может иметь

---

*) Этот вариант был также на факультете прикладной математики — процессов управления.

сумма периметров многоугольников, образованных прямыми l_1, l_2, l_3, l?

2. Решить уравнение

$$\sqrt{8x^3+4x^2+1}-\sqrt{8x^3-4x^2+1}=\sqrt{13}x^3-\sqrt{5}x^3.$$

3. Решить неравенство ($b<0$)

$$b\cdot\log_3 x+\log_{3x}3+b>0.$$

4. Через ребро $[AB]$ правильной пирамиды $ABCS$ с вершиной S проведено плоское сечение, имеющее наименьший периметр. Найти площадь этого сечения, если известно, что высота пирамиды равна h, а $|AB|=a$.

5. При каких действительных a уравнение

$$\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x+a=\cos 2x$$

имеет более одного корня на отрезке $\left[\frac{\pi}{8};\ \frac{3\pi}{8}\right]$?

Физический факультет

Вариант 3

1. В момент времени $t>0$ счетчик показывает дозу облучения, полученного объектом за промежуток $[0;\ t]$. Построить график зависимости дозы облучения P от времени, если интенсивность облучения меняется по закону

$$I=\frac{dP}{dt}=|t-a|+|t-2a|,\ t>0\ (a>0).$$

2. Решить уравнение

$$\sin^2 x+\frac{(1+\cos 2x)^2}{2\sin 2x}=a\cos 2x.$$

3. Решить неравенство

$$x^{\cos_x(x^2-2x-2)}>1.$$

4. Длины сторон параллелограмма равны a и b ($a>b$), а острый угол при вершине равен α. Найти радиус окружности, проходящей через вершину этого угла и касающейся двух несмежных с ней сторон параллелограмма (или их продолжений).

5. При каких $a<0$ неравенства $2\sqrt{ax}<3a-x$ и $x-\sqrt{\frac{x}{a}}>\frac{6}{a}$ имеют общие решения?

Вариант 4

1. Два парохода движутся в тумане навстречу друг другу с одинаковыми скоростями. На расстоянии 4 км капитаны включают на 4 мин обратный ход с ускорением 0,1 м/с^2, после чего пароходы продолжают движение с достигнутыми скоростями. При каких значениях начальной скорости V_0 суда не столкнутся?

2. Решить уравнение

$$\sin 2x(0{,}1-\cos x)=\sin 2x+0{,}2\sin^3 x.$$

3. Вычислить предел

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\int\limits_{\pi/2-x}^{\pi/2}t\,dt}.$$

4. В треугольнике ABC $|AB|=|AC|=a$, $|BC|=b$, $AM\perp BC$. Высота $[AM]$ разделена на 5 равных частей. Через вершину B и точки деления проведены прямые. Найти длины отрезков, на которые эти прямые делят сторону $[AC]$.

5. Решить неравенство

$$2^{\frac{1}{\cos^2 x}}\sqrt{y^2-y+\frac{1}{2}}<1.$$

Задачи из вариантов других факультетов

1. На ребрах $[CC']$, $[AB]$ и $[AD]$ куба $ABCDA'B'C'D'$ выбраны соответственно точки P, Q и R так, что $|AQ|=2|BQ|$, $|DR|=2|AR|$, $|PC|=|PC'|=a$. Найти площадь сечения куба, проходящего через точки P, Q и R.

2. При каком значении параметра $a\in R$ площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс, графиком функции $y=x^3+3x^2+x+a$ и прямыми, параллельными оси ординат и пересекающими ось абсцисс в точках экстремума этой функции, будет наименьшей?

3. В основании правильной призмы лежит треугольник, вершины которого являются серединами ребер основания правильной пирамиды. Какая часть объема призмы находится вне пирамиды, если известно, что высота пирамиды в 3 раза меньше высоты призмы?

4. Решить неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{1}{\sqrt{x}-1}>\frac{a}{\sqrt{x}}.$$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=\frac{1}{\sin x+4}-\frac{1}{\cos x-4}.$$

6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}2^{\log_x 7}=y^{\log_2 a},\\ 2^{\log_y 10}=x^{\log_2 x}.\end{cases}$$

7. Две окружности радиуса R расположены таким образом, что радиус наименьшей окружности, касающейся их обеих, равен r. Найти радиус окружности, касающейся всех трех данных.

8. Равносторонний треугольник разбит на три части одинакового периметра прямыми, перпендикулярными одной из его сторон. Найти отношение площадей этих частей.

9. Сколько тупых углов может иметь выпуклый двадцатиугольник? Указать все возможности.

Физика

Письменный экзамен

Физический факультет

Вариант А

1. Задача. В вертикально стоящей цилиндрической трубе, закрытой с обоих концов, на высоте $h_0=1$ м от дна закреплен поршень массой $M=40$ кг. Под ним находятся $m=0{,}16$ г гелия при температуре $t=27$°C, над поршнем — вакуум. На какой высоте h окончательно установится поршень, если его освободить? Стенки трубы и поршень считать не поглощающими и не проводящими тепло. Газовая постоянная $R=8{,}3$ Дж/(К · моль); ускорение свободного падения g принять равным 10 м/с^2.

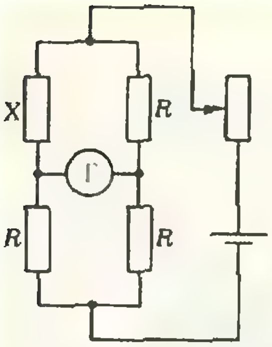


Рис. 1.

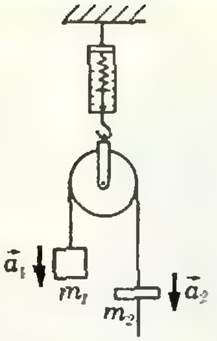


Рис. 2.

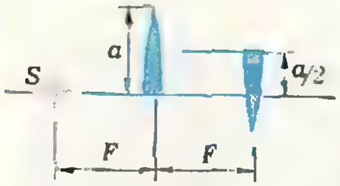


Рис. 3.

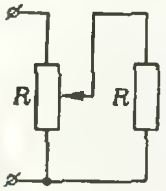


Рис. 4.

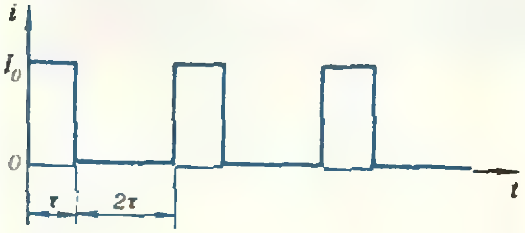


Рис. 5

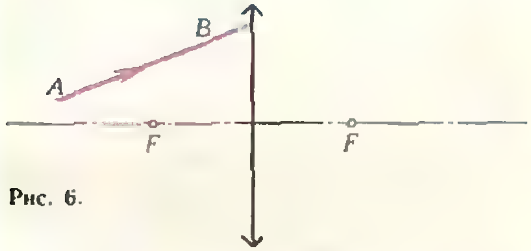


Рис. 6.

2. З а д а ч а. Груз массой $m=10^3$ кг опускают вниз на упругом стальном тросе с постоянной скоростью $|\vec{v}|=10$ м/с. Какова будет максимальная сила $\vec{F}_{max}$ натяжения троса, если внезапно остановить его верхний конец? Коэффициент упругости троса $k=10^6$ Н/м. Массой троса пренебречь. Считать ускорение свободного падения g равным 10 м/с^2.

3. З а д а ч а. В сверхпроводящем соленоиде, замкнутом на малое сопротивление, течет ток. Магнитная индукция $|\vec{B}|$ в соленоиде уменьшается на 2% за сутки. Оцените величину сопротивления R. Индуктивность соленоида $L=5$ Гн.

4. З а д а ч а. На рисунке 1 показана схема для измерения сопротивлений (мост Уитстона). Для резистора X закон Ома не справедлив и зависимость тока I через него от приложенного напряжения U имеет вид: $I=\frac{U}{R_0}+\alpha U^3$ $(\alpha>0)$. В остальные плечи моста включены одинаковые сопротивления R $(R<R_0)$. При каком токе I_0 через батарею будет отсутствовать ток в гальванометре Г?

5. Теоретический вопрос. Понятие о волновых свойствах света.

Вариант В

1. З а д а ч а. В закрытый баллон емкостью $V=24{,}9$ л, в котором при атмосферном давлении находятся $m_1=4$ г гелия, попала льдинка массой $m_2=1$ г, имеющая температуру $t_0=0$°C. Каким будет давление гелия, когда льдинка растает? Газовая постоянная $R=8{,}3$ Дж/(К · моль), удельная теплота плавления льда $\lambda=3{,}3\cdot10^5$ Дж/кг. Стенки баллона не проводят и не поглощают тепло.

2. З а д а ч а. Через легкий, вращающийся без трения блок перекинут шнурок, массой которого можно пренебречь (рис. 2). На одном конце шнурка висит груз массой m_1. По другому концу шнурка скользит с направленным вниз постоянным относительно шнурка ускорением $\vec{a}_2$ кольцо массой m_2. Найдите ускорение $\vec{a}_1$ груза и силу трения $\vec{F}$ кольца о шнурок. Какую силу покажет динамометр Д, если движение кольца относительно оси блока равномерное?

3. З а д а ч а. Точечный источник света S находится в фокусе собирающей линзы, радиус круговой апертуры которой $a=2$ см. Линзу разрезают пополам, и нижнюю половину ее помещают в плоскости второго фокуса — так, как показано на рисунке 3. Постройте изображение источника. Фокусное расстояние линзы $F=3$ см.

4. З а д а ч а. Для регулирования напряжения на нагрузке собрана схема, изображенная на рисунке 4. Сопротивления нагрузки и регулировочного реостата одинаковы и равны R. Нагрузка подключена к половине реостата. Во сколько раз изменится напряжение на нагрузке, если ее сопротивление уменьшить вдвое?

5. Теоретический вопрос. Основные положения молекулярно-кинетической теории, ее опытное обоснование.

Задачи устного экзамена

Математико-механический факультет и факультет прикладной математики — процессов управления

1. Математический маятник длиной l находится в поезде, движущемся с постоянным ускорением $\vec{a}$, направленным вправо. Каков период колебаний маятника?

2. Когда газ, объем которого оставался неизменным, нагрели на $\Delta T=30$ К, его давление увеличилось на 10%. Какова начальная температура газа?

3. Два сосуда, содержащие одинаковую массу одного и того же газа, соединены трубкой с краном. В первом сосуде давление газа $p_1=4000$ Па, а во втором — $p_2=6000$ Па. Какое установится давление после открытия крана? (Температура газа постоянна.)

4. Определите напряжение на зажимах источника питания, если он обеспечивает в цепи ток $I=2$ А. Цепь состоит из двух параллельно включенных лампочек мощностью $P=30$ Вт каждая. Потери мощности в проводах составляют 10% полезной мощности.

5. Переменный ток изменяется со временем так, как показано на рисунке 5. Каково действующее значение этого тока?

6. На рисунке 6 показана тонкая собирающая линза, находящаяся в воздухе; F — ее фокусы. Найдите построением ход произвольного луча AB после линзы.

В. Бойцов, С. Валландер

Уральский государственный университет им. А. М. Горького

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(математико-механический факультет)

1. При каких значениях параметра a неравенство $ax^2+2ax+0{,}5>0$ выполняется на всей числовой оси?

2. Решить уравнение

$$\log_{(x^2)}[(2x-1)^2]+\log_{(x^2)}\left[\left(\frac{1}{2}-x\right)^3\right]=2\int\limits_{1/4}^{3/4}(4t-1)\,dt.$$

3. В полукруг радиуса R вписана трапеция $ABCD$ так, что ее основание AD является диаметром, а вершины B и C лежат на окружности. Какова величина угла при основании у трапеции $ABCD$, имеющей наибольший периметр?

4. Найти все решения уравнения

$$1+(\sin x-\cos x)\sin\frac{\pi}{4}=2\cos^2\frac{5}{2}x,$$

которые удовлетворяют условию $\sin 6x<0$.

Вариант 2

(физический факультет)

1. Решить неравенство

$$|2^x-1|+x>x\cdot 2^x.$$

2. Решить уравнение

$$3\log_{27}(3^{x^2-2x+2})=\left[\sin^2\left(x-1+\frac{\pi}{4}\right)\right]'.$$

3. Какой угол образует хорда AC с диаметром AB, если произведение длины AC на длину перпендикуляра CD, опущенного на диаметр AB, имеет наибольшее значение?

4. Найти все значения α из отрезка $[-\pi;\ 0]$, удовлетворяющие равенству

$$\sin\alpha+\int\limits_{\alpha}^{2\alpha}\cos 2x\,dx=0.$$

Физика

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. Газ массой $m=1$ кг, имеющий удельную теплоемкость при постоянном объеме $c_V=700$ Дж/(кг · К), нагревают при постоянном давлении $p=2\cdot 10^5$ Па. Какова удельная теплоемкость газа в этом процессе, если его температура повысилась на $\Delta T=2$ К, а объем увеличился на $\Delta V=0{,}001$ м^3?

2. Чему равны напряжения на клеммах аккумулятора, электродвижущая сила которого $\mathscr{E}=12$ В, а внутреннее сопротивление $r=2$ Ом, при зарядке и разрядке током $I=1$ А?

3. На высоте h над поверхностью воды (показатель преломления $n=4/3$) расположен точечный источник света. Где будет находиться изображение этого источника, даваемое плоским зеркальным дном сосуда, если глубина сосуда с водой d?

4. Расстояние между двумя точечными источниками света $L=48$ см. Где между ними нужно поставить собирающую линзу с фокусным расстоянием $F=18$ см, чтобы изображения обоих источников попали в одну точку на главной оптической оси?

Математико-механический факультет

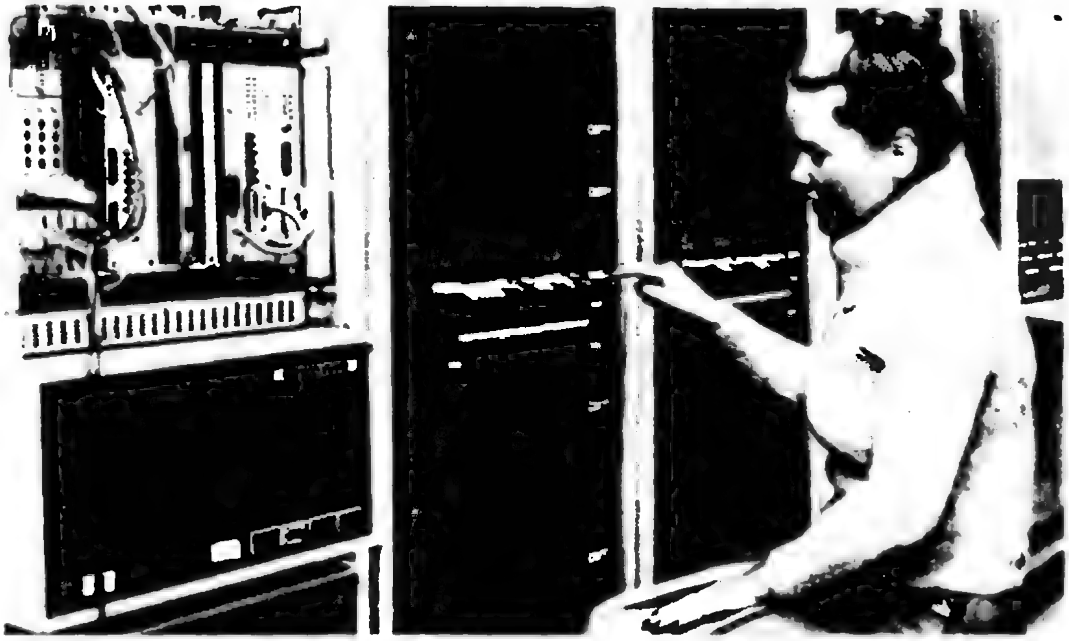
1. Три одинаковых маленьких шарика массой $m=0{,}02$ г каждый подвешены в одной точке на шелковых нитях длиной $L=30$ см. Какие равные заряды следует сообщить шарикам, чтобы каждая нить составляла с вертикалью угол $\alpha=30°$?

2. При замыкании аккумулятора на сопротивление $R_1=5$ Ом в цепи идет ток $I_1=5$ А. Параллельное подключение к сопротивлению R_1 сопротивления $R_2=10/3$ Ом увеличивает ток до $I_2=8$ А. Найдите внутреннее сопротивление аккумулятора r и его электродвижущую силу $\mathscr{E}$.

3. Квадратная металлическая рамка со стороной $a=0{,}02$ м находится в однородном магнитном поле, индукция которого перпендикулярна к плоскости рамки и с течением времени меняется по закону $|\vec{B}|=0{,}02t$ (в единицах СИ). Определите напряженность электрического поля $|\vec{E}|$ в рамке.

4. Точечный источник света находится на главной оптической оси выпуклого сферического зеркала. Расстояние между источником и оптическим центром зеркала равно L_1, а между источником и его изображением — L_2. Чему равен радиус кривизны зеркала?

Э. Голубов, Р. Емлин



Г. Звенигородский,
Е. Кузнецов

Что такое мини-ЭВМ?

Не так уж давно, всего 15—20 лет назад, большинство специалистов в области вычислительной техники считали, что магистральный путь развития ЭВМ — это создание супермашин, обладающих огромной емкостью памяти и способных выполнять сотни миллионов и даже миллиарды операций в секунду. На рубеже шестидесятых годов многим казалось, что спустя одно-два десятилетия все вычислительные потребности страны будут удовлетворяться несколькими такими гигантами.

Действительность оказалась совершенно иной. Разумеется, большие и сверхбольшие машины продолжают создаваться и успешно работают во многих отраслях. Но наряду с ними (а в ряде случаев — вытесняя их) в последние десятилетия начали бурно развиваться малые вычислительные машины — мини-ЭВМ.

Не миниатюрные, а минимальные

Если судить по названию, можно подумать, что мини-ЭВМ — это маленькие, миниатюрные ЭВМ. С одной стороны, конечно, почти все современные мини-компьютеры*) имеют весьма скромные размеры и занимают один — два небольших шкафчика, а некоторые из них помещаются в ящике стола. С другой стороны, в наш век микроэлектроники даже так называемые «большие ЭВМ» имеют не на много бóльшие габариты. Тогда, может быть, мини-машины — это дешевые ЭВМ с малыми возможностями? Дешевые — это верно, а что касается малых возможностей, то это как посмотреть: по объему оперативной памяти и быстродействию «мини» практически не уступают своим «коллегам» средней мощности, а по возможностям работы с внешними устройствами намного их превосходят.

Так в чем же особенность мини-машин, почему их выделяют в особый класс?

---

*) Не следует путать мини-ЭВМ (мини-компьютер) — машину, способную исполнять самые разнообразные программы, с *микрокалькулятором* — карманным или настольным прибором, предназначенным для числовых расчетов («Квант», 1978, № 4, с. 23).

По словам Н. П. Брусенцова, автора книги «Мини-компьютеры» (М., «Наука», 1979), приставка «мини» в обозначении этого класса ЭВМ означает не *миниатюрные*, а *минимальные*. Разработчики этих машин исключили из их архитектуры все элементы, предназначенные для выполнения вычислений и не обязательные при других формах использования ЭВМ. К таким элементам относится, прежде всего, арифметический блок, позволяющий быстро и с большой точностью выполнять сложение, вычитание, умножение и деление рациональных чисел. Большая длина машинного слова в машинах средней и высокой мощности (32, 36, 45 и даже 48 двоичных разрядов) тоже связана с обеспечением высокой точности представления таких чисел. Для представления других видов данных иметь такое длинное слово совсем не обязательно: для любого стандартного символа, например, достаточно одного байта*), а целые числа, встречающиеся в большинстве практических задач, вполне помещаются в двух байтах. В большинстве мини-машин принята длина слова в два байта (16 битов), а иногда и того меньше.

Сокращение длины слова и отказ от специального арифметического оборудования позволили сделать мини-машины простыми по конструкции, а следовательно, дешевыми и надежными, сохранив высокое быстродействие и достаточный объем памяти.

А как же они считают?

Вероятно, у читателя возникли вопросы: неужели мини-ЭВМ совсем не умеют выполнять точные вычисления с рациональными числами? А если умеют, то как у них это получается без арифметического оборудования? Как организовать хранение чисел с высокой точностью при коротком машинном слове?

Ответ очень прост: если в какой-то задаче нужно работать с такими числами, то их записывают не в одно слово, а в несколько последовательных машинных слов, а операции над ними выполняют при помощи процедур, составленных из более простых машинных команд. Разумеется, такие вычисления происходят в несколько раз медленнее, чем на средних и больших машинах. Но ведь выполнять такие операции современным ЭВМ приходится не так уж часто (об этом уже говорилось в одной из первых статей нашего раздела), поэтому «в среднем» быстродействие мини-машин почти не снижается.

Бегемот в спичечном коробке

Сокращение длины машинного слова ставит перед разработчиками мини-ЭВМ проблему, которая, на первый взгляд, может показаться неразрешимой. Это проблема адресации: как обеспечить возможность обращения к любому слову памяти, если длина команды — всего 2 байта? В машинах среднего класса с небольшим числом слов и с большой длиной каждого слова такая проблема не возникала.

Например, в одной из самых распространенных советских ЭВМ начала шестидесятых годов — машине М-20 — было всего 4096 45-разрядных слов. При таких параметрах для адреса*) любого слова достаточно двенадцать битов (проверьте это!). Поэтому в каждой команде этой машины указывались адреса трех слов, шесть битов выделялись для записи кода операции, что позволяло закодировать 64 разных команды, и еще оставалось место!

В мини-машинах, разумеется, о трех адресах речи быть не может: даже для одного адреса не хватает места. Действительно, если отвести для кода операции всего 4 разряда (а это — всего 16 различных команд!), то для адреса остается 12 битов, то есть удается указать адреса тех же 4096 слов. Но ведь объем памяти современных мини-машин бывает в 30 раз больше (см. таблицу на с. 55), да и 16 команд маловато для работы. Если же записывать команду не в одно, а в два или три последовательных сло-

---

*) Напоминаем, что *байт* — это 8 битов, то есть 8 двоичных разрядов.

*) См. статью Ю. Первина в предыдущем номере.

ва, то она будет выполняться очень медленно и быстродействие резко снизится.

Ухищрения разработчиков ЭВМ, направленные на решение этой проблемы, напоминают попытки запихнуть бегемота в спичечный коробок: огромный адрес слова 256-килобайтной памяти пытаются «засунуть» в те несколько разрядов, которые остаются после размещения кода операции. Укажем лишь несколько приемов:

1. Используются безадресные команды для работы со специальными ячейками памяти — регистрами, обращение к которым происходит очень быстро. В машинах СМ-1 и СМ-2 — по два таких регистра, в СМ-3 и СМ-4 — семь.

2. Выделяется несколько форматов команд: с коротким кодом операции и длинной адресной частью (загрузка регистров, передача управления) и с длинным кодом, но с коротким адресом. В последнем случае обычно указывается относительный адрес, то есть число, которое нужно прибавить к адресу исполняемой в данный момент команды, чтобы получить адрес нужного слова.

3. Применяется косвенная адресация: требуемый адрес записывают в отдельное слово (тогда он может занимать все 16 битов), а адрес этого слова указывают в команде (например, с помощью относительной адресации).

Однако ни один из этих способов не позволяет одной программе работать с памятью, превышающей 64 К. Большая память обычно используется для работы в многопрограммном режиме: каждой программе выделяется некоторая часть памяти — сегмент (не больше 64 К), а внутри этой программы достаточно указать адрес слова относительно начала сегмента.

Где применяются мини-ЭВМ? Ответить на этот вопрос не так уж просто. Пожалуй, проще было бы перечислить те отрасли, где мини-ЭВМ пока еще не применяются. Приведем лишь несколько примеров, которые помогут в какой-то степени представить себе разнообразие форм использования этих машин:

— управление атомными и гидроэлектростанциями;

— диспетчерское управление энергосистемами страны;

— управление доменными печами;

— управление технологическими процессами в цветной металлургии, горной, цементной, целлюлозно-бумажной, легкой промышленности;

— резервирование мест и продажа билетов на авиалиниях страны (система «Сирена»);

— управление городским автобусным движением (в Омске, Алма-Ате, Ворошиловграде);

— управление метрополитеном (в Ленинграде, Харькове);

— управление нефтепроводом (например, нефтепровод «Дружба»);

— в информационно-вычислительных центрах АСУ «Олимпиада-80».

Наш технический справочник

СМ — Система Мини-ЭВМ социалистических стран

Показатель	Модель Единица	СМ-1	СМ-2	СМ-3	СМ-4
Производительность	тыс. оп./сек	400	500	200	700
Прямо адресуемая память	К(=1024) слов	32	32	32	32
Длина слова	бит	16	16	16	16
Минимальный объем оперативной памяти	К байт	8	64	32	32,64
Максимальный объем оперативной памяти	К байт	64	256	64	248
Скорость объема с устройствами ввода — вывода	К слов/сек	250	700	800	800

Модели СМ-1, 2 отличаются от моделей СМ-3, 4. Есть разница в архитектуре машины — в системе команд, в способах адресации, в системах программного обеспечения, в организации и структуре систем ввода—вывода. Это означает, что программы, написанные для ЭВМ СМ-1, 2, не подходят для ЭВМ СМ-3, 4, и обратно, то есть эти модели ЭВМ несовместимы.

Заочная физическая школа

Заочная физическая школа (ЗФШ) при физическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова (МГУ) объявляет набор учащихся в 9 и 10 классы на очередной учебный год.

Основная цель ЗФШ — помочь учащимся средней школы глубже изучить физику в объеме школьной программы, а также лучше подготовиться к вступительным экзаменам по физике в высшие учебные заведения, в первую очередь — на физический факультет МГУ.

Прием в ЗФШ проводится на основании результатов решения вступительного задания, публикуемого ниже. Решение вступительного задания необходимо отослать до *15 сентября* по адресу: *117234, Москва, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ЗФШ*. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим домашним адресом и два экземпляра анкеты, написанной на листах плотной бумаги размером 7×12 см и заполненной по следующему образцу:

Фамилия, имя, отчество	*Сидоров Петр Иванович*
Класс	*9-й*
Профессия родителей	*отец — инженер, мать — врач*
Подробный домашний адрес	*248016, Калуга, ул. К. Либкнехта, д. 4, кв. 73*
Номер и адрес школы	*школа № 10, ул. Пушкина, д. 3*

Решение приемной комиссии ЗФШ о зачислении будет сообщено до 5 октября 1981 года. Проверенные вступительные задания обратно не высылаются.

Вступительное задание

Поступающим в 9 класс предлагаются задачи 1—5, поступающим в 10 класс — 3—7.

1. С высоты H на землю начинает свободно падать тяжелый камень (рис. 1). Одновременно стрелок, находящийся на расстоянии L от линии падения камня, производит выстрел и попадает в камень. Какова зависимость высоты h камня от поверхности земли в момент попадания в него пули от модуля v скорости пули и угла α?

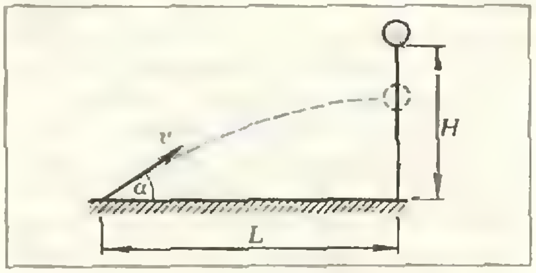


Рис. 1.

2. Три человека несут однородный по плотности и толщине лист железа массой M, имеющий форму треугольника с углами α, β и γ. Каким образом можно сделать так, чтобы испытываемые каждым человеком нагрузки были одинаковыми?

3. Оцените, какой высоте свободного падения соответствует по скорости приземления прыжок парашютиста с большой высоты.

4. Тело массой m соскальзывает без начальной скорости с горки массой M и высотой H, оканчивающейся горизонтальным трамплином высотой h (рис. 2). Горка гладкая, но на трамплине имеется участок длиной L с коэффициентом трения μ. Сама горка может скользить без трения по горизонтальной плоскости. Какую работу совершит сила трения за время движения тела по горке?

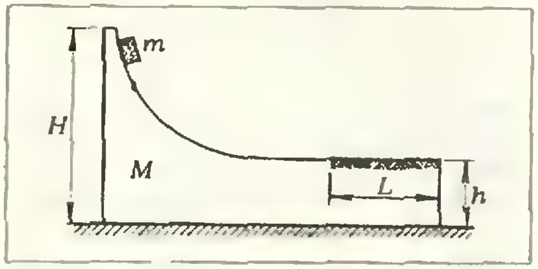


Рис. 2.

5. Доска массой M прикреплена к пружине жесткостью k (рис. 3). На доску налетает шарик массой m, движущийся со скоростью $\vec{v}$ под углом α к вертикали. Под каким углом отлетит шарик, если удар о доску абсолютно упругий?

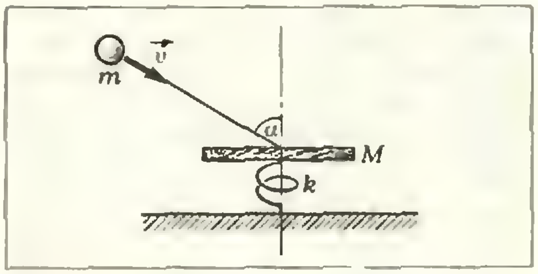


Рис. 3.

6. Кубический сосуд с ребром l и массой M, в котором находится азот при температуре T, покоится на горизонтальной поверх-

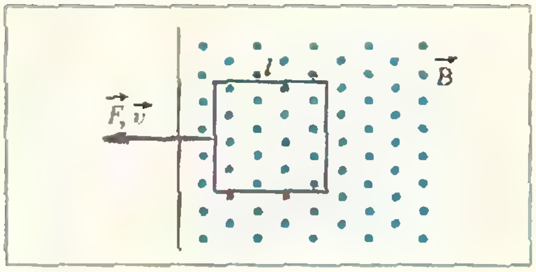


Рис. 4.

ности. Коэффициент трения сосуда о поверхность μ, масса азота в сосуде m. Вне сосуда находится воздух с обычным содержанием азота при атмосферном давлении p_0 и температуре T_0. В некоторый момент времени верхняя и одна из боковых граней сосуда стали проницаемыми для азота. При каких значениях m и T сосуд начнет двигаться?

7. В однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ ($|\vec{B}|=0{,}1$ Тл) находится квадратная рамка со стороной $l=5$ см (рис. 4). Сопротивление рамки $R=1$ Ом. Какую силу необходимо прикладывать к рамке, чтобы выдвигать ее из магнитного поля с постоянной скоростью $\vec{v}$ ($|\vec{v}|=4$ см/с)? Плоскость рамки остается перпендикулярной к направлению магнитных линий; поле имеет резко очерченную границу, две стороны рамки перпендикулярны к этой границе.

Московская городская олимпиада по физике

В марте 1980 года состоялась традиционная 41-я олимпиада по физике, проводимая физическим факультетом МГУ. Начиная с 1978 года, для учащихся 8—10 классов эта олимпиада одновременно является и Московской городской олимпиадой.

Первый отборочный тур проводится по районам города, а три последующих — на физическом факультете МГУ. На первом, втором и третьем турах каждому участнику олимпиады предлагается по пять теоретических задач. Последний тур — экспериментальный; на него приглашаются победители предыдущих туров.

На дне открытых дверей физического факультета МГУ проходит награждение победителей: им вручаются дипломы и книги по физике. Из призеров городской олимпиады формируется команда Москвы для участия во Всесоюзной олимпиаде по физике.

Вашему вниманию предлагаются наиболее интересные теоретические задачи Московской городской олимпиады 1980 года. После каждой задачи указан класс, в котором предлагалась эта задача, и ее автор.

1. На горизонтальной поверхности находится куб. Сверху на него положили стержень, нижний конец которого шарнирно прикреплен к поверхности (рис. 1). При каких углах α между стержнем и поверхностью система будет находиться в равновесии, если коэффициенты трения μ_1 между стержнем и кубом и μ_2 между кубом и поверхностью удовлетворяют соотношению $\mu_1\mu_2=1$? (8 кл.)

В. Ильин

2. Тело соскальзывает без начальной скорости с вершины наклонной плоскости с углом наклона α. Коэффициент трения μ между телом и плоскостью изменяется с увеличением расстояния x от ее вершины по закону $\mu=bx$. Тело останавливается, не дойдя до основания наклонной плоскости. Найдите время t, прошедшее с начала движения тела до его остановки. (10 кл.)

Г. Пустовалов

3. Лифтер высотного здания, будучи человеком пунктуальным, повесил на стенку своего лифта точные маятниковые часы, чтобы знать, когда кончается рабочий день. Как вы думаете, закончит он работу точно в срок, переработает или недоработает? Время движения (по неподвижным часам) с ускорением, направленным вверх и направленным вниз, одинаково; одинаковы также модули ускорений. (10 кл.)

М. Семенов

4. Длина математического маятника медленно меняется со временем следующим образом: $l=l_0(1+\alpha t)$, где α — постоянная величина и $\alpha t \ll 1$. Запишите формулу зависимости от времени смещения s маятника от положения равновесия. Маятник выведен из положения равновесия толчком и в начальный момент смещение маятника равно нулю. Амплитуду колебаний s_0 считать постоянной. (10 кл.)

Г. Мякишев

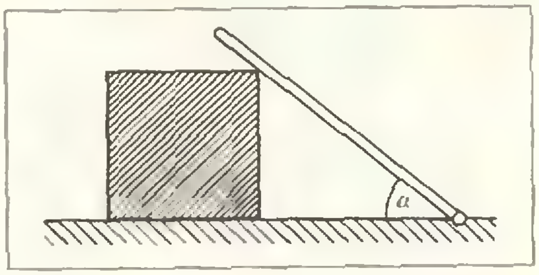


Рис. 1.

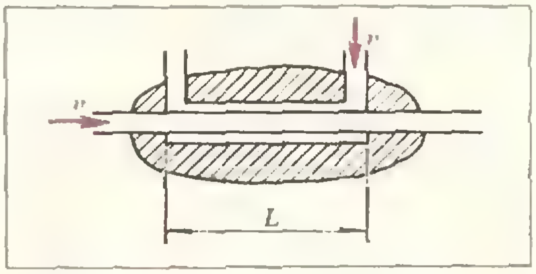


Рис. 2.

5. Теплообменник длиной L состоит из трубы с площадью сечения $2S$, внутри которой проходит труба с площадью сечения S (рис. 2). Трубы тонкостенные. Вся конструкция теплоизолирована от внешней среды. В трубах со скоростью v прокачивается жидкость плотностью ρ с удельной теплоемкостью c. Температуры жидкости при входе в теплообменник $T_{1н}$ и $T_{2н}$ соответственно. Определите температуры жидкости при выходе из теплообменника. Жидкости в трубах текут в противоположных направлениях. Считать, что количество теплоты, переданное в единицу времени через единичную площадку, пропорционально разности температур с коэффициентом пропорциональности k; теплопроводностью жидкости пренебречь. (10 кл.)

А. Крюков

6. Имеются две елочные гирлянды с последовательным соединением лампочек. Гирлянды потребляют одинаковую мощность, но первая предназначена для включения в электрическую сеть с напряжением 127 В, а вторая — с напряжением 220 В. Что произойдет, если две лампочки из разных гирлянд поменять местами и включить гирлянды в соответствующие им электрические сети? Число лампочек в каждой гирлянде более 10. (9 кл.)

В. Петерсон

7. Если смотреть на освещенную поверхность через широкое отверстие корпуса шариковой ручки, то вокруг узкого отверстия в корпусе видно несколько концентрических темных и светлых колец. Почему наблюдаются эти кольца? (10 кл.)

А. Пухов

С углубленным изучением

В школе № 13 города Саратова — только 7—10 классы. При конкурсном отборе поступающих проводятся вступительное собеседование и письменная работа по математике. Заявлений обычно вдвое больше, чем мест.

Учащиеся классов с углубленным изучением математики, физики, химии, биологии — постоянные участники всероссийских и даже всесоюзных олимпиад. Несмотря на «несчастливый» номер, аттестаты этой школы давно пользуются признанием в вузах Саратова, а их обладатели всегда уверенно сдают вступительные экзамены.

Большой интерес восьмиклассников вызвал задачник под названием «Радикал». Однажды на стенде, выполненном в форме радикала, было вывешено условие задачи, а спустя несколько дней — ее решение, данное одним из учащихся. Вначале это было задумано как помощь в разъяснении более сложных задач; участвовали в решении и разборе лишь наиболее сильные учащиеся. Но постепенно заинтересовались остальные — и «Радикал» приобрел широкую популярность. А если для решения задачи не хватало каких-либо сведений, учительница указывала дополнительную литературу.

— Позже мы стали вывешивать 2—3 решения, выполненных разными учащимися и отобранных редколлегией, — рассказывает учительница математики Виктория Иосифовна Игумнова. — А всеобщее обсуждение позволяло определить, какие из этих решений наиболее рациональны.

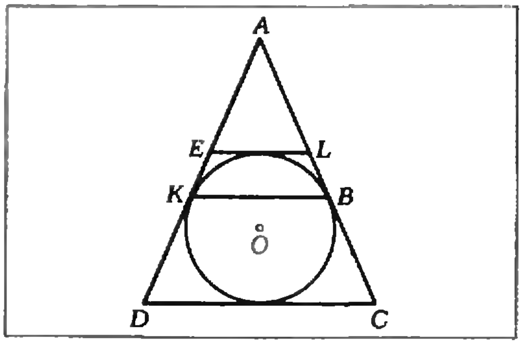
— Многие ребята, заметив недочеты в вывешенных решениях, предлагают свои поправки,— рассказывает член редколлегии «Радикала» Ира Азаренко.— Если редколлегия не находит опровержения, автор тут же вносит красной пастой поправку и безмерно гордится своим участием. А некоторые приносят новые задачи, отобранные из разных книг и научно-популярных журналов.

Порой против поправки или новой задачи находятся возражения, начинается бурное обсуждение. Однако, как только раздается негромкая речь Виктории Иосифовны, все страсти мгновенно утихают.

Остается добавить, что почти каждый ученик физматклассов выписывает «Квант», а потом, поступив в вуз, оставляет собранный комплект школе.

В заключение приведем две задачи из «Радикала»:

1. В треугольнике CAD вписана окружность радиуса $r=5$ см. Расстояние $|BK|$ между точками касания (см. рисунок) равно 8 см. Касательные LE и CD параллельны BK. Найти стороны трапеции $EDCL$.



2. В треугольнике ABC даны точки O — точка пересечения высот, O_1 — точка пересечения медиан и O_2 — центр описанной окружности. Доказать, что $\widehat{O_2O_1O}=180°$ и $|O_2O_1|:|O_1O|=1:2$. Примечание. Это — одно из утверждений теоремы Эйлера (см. «Квант», 1972, № 11, с. 33).

А. Яковлев

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку — мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

Играет Гарик Каспаров

В прошлом году бакинский школьник Гарик Каспаров добился замечательных успехов. Одержав победу в крупном международном турнире, он стал самым юным гроссмейстером в мире, блестяще выступил за сборную страны в начале года — на первенстве Европы, а в конце — на шахматной Олимпиаде. Все это не помешало Гарику с золотой медалью закончить школу (в очередной раз опровергнув мнение, будто шахматы мешают учебе) и поступить в Институт иностранных языков.

Ведущий страничку встретился с Каспаровым у него дома в Баку, вскоре после его возвращения из ФРГ, где Гарик одержал еще одну победу — завоевал звание чемпиона мира среди юношей. Конечно, хотелось задать много шахматных вопросов, но, имея в виду публикацию в «Кванте», я начал с математической головоломки. Дело в том, что было время, когда Гарик увлекался математикой.

— Итак, Гарик, — сказал я, — из доски вырезаны два противоположных угловых поля. Можно ли оставшуюся часть доски покрыть костями домино размером 2×1?

Каспаров думал меньше минуты.

— Нельзя, — твердо ответил он. Как и в шахматах, интуиция не подвела молодого гроссмейстера.

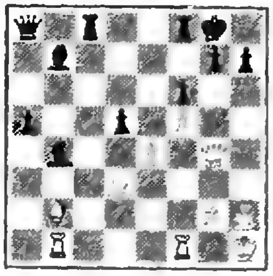
— Гарик, известно ли тебе, что весь шахматный мир обсуждает возможность будущего матча на первенство мира Карпов — Каспаров?

— Не скрою, такие разговоры до меня доходят. Но я всегда планирую свои шахматные дела только на один ход вперед — сыграть получше в данном соревновании. В крайнем случае можно помечтать о межзональном турнире.

В беседе с Гариком обнаружилось, что он знает на память множество стихов, увлекается историей, географией, не лишен чувства юмора. Кумиром семнадцатилетнего шахматиста является А. Алехин (которому, кстати, посвящен сегодняшний тур нашего шахматного конкурса).

По наследству юноше должны были передаться и «научные» и «художественные» гены — его отец К. Вайнштейн (он умер, когда Гарику было всего семь лет) был разносторонне развитым человеком, но посвятил себя технике, как и его мать К. Каспарова. Дедушка Гарика был известным в Азербайджане композитором, дядя, тоже композитор, только что написал очередную песню, которую исполняет Муслим Магомаев. Талант же Гарика Каспарова проявился в смежной области — ведь шахматы, как известно, сочетают в себе элементы и науки, и искусства.

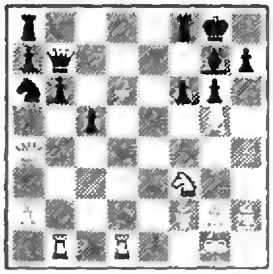
На следующий день в обществе «Знание» Каспаров делился своими впечатлениями о юношеском чемпионате мира. Лекция была интересной, но особенно охотно Гарик показывал свои партии. Лучшей из них он назвал победу над шведским шахматистом, финал которой мы приводим.



Каспаров — Акессон

Белые пожертвовали пешку, а теперь отдают еще и слона **1.С:f6! Л:f6 2.e5 Лh6**. Спасало только 2...Лf7, вот основной вариант, показанный белыми сразу после партии: 3.f6 Лcf8 4.Лf3 Сc8 5.Фg5 Крh8 6.Л:b4! gf 7.Фh6 ab 8.С:h7 Сg4! 9.Сb1+ Крg8 10.ef С:f3 11.Фg5+ с вечным шахом. Видите, какими счетными способностями обладает Гарик. **3.f6 Лc7 4.e6 Фd8 5.e7 Л:e7 6.fe Ф:e7 7.Лbc1 Фd8 8.Фf5 Фb8? 9.Фf7+ Крh8 10.Лc7. Черные сдались.**

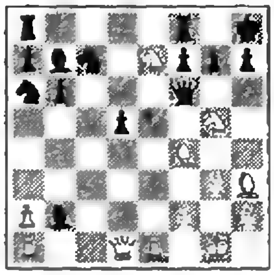
Следующий эпизод взят из партии Каспарова, сыгранной им на чемпионате Европы.



Каспаров — Пршибыл

1.d7! Как и в предыдущем примере, белые вслед за пешкой жертвуют слона. **1...fg 2.Фc4+ Крh8 3.К:g5 Сf6** (3...Сd4 4.Л:d4! cd 5.Ф:d4+ Крg8 6.Кe6) **4.Кe6 Кc7 5.К:f8 Л:f8 6.Лd6 Сe7 7.d8Ф!** Эффектное завершение атаки: белые расстаются с гордостью своей позиции — проходной пешкой. **7...С:d8 8.Фc3+ Крg8 9.Лd7 Сf6 10.Фc4+ Крh8 11.Фf4 Фa6 12.Фh6. Черные сдались.**

На Всемирной шахматной олимпиаде в Мальте Каспаров внес наибольший вклад в копилку сборной СССР — 9,5 очков в двенадцати сыгранных им партиях. Эффектно завершил он поединок в матче с югославами.



Каспаров — Марьянович

1.К:h7 Фd4 (1...Кр:h7 2.Фh5+) **2.Фh5 g6 3.Фh4 С:a1 4.Кf6+. Черные сдались.**

Построение изображений наклонных предметов

1. См. рис. 1.
2. См. рис. 2.
3. См. рис. 3.
4. См. рис. 4.
5. См. рис. 5 (рисунок сделан для собирающей линзы).

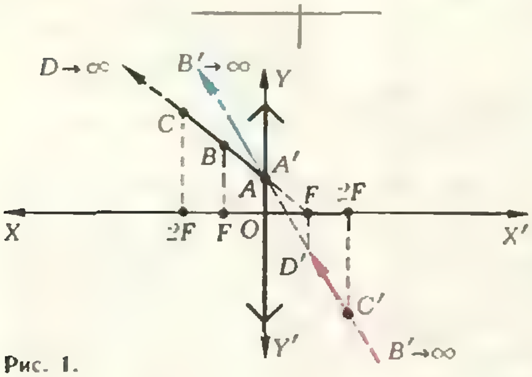

D→∞
B′→∞
Y
C
B
A′
A
F
2F
X
2F
F
O
X′
D′
C′
B′→∞
Y′

Рис. 1.

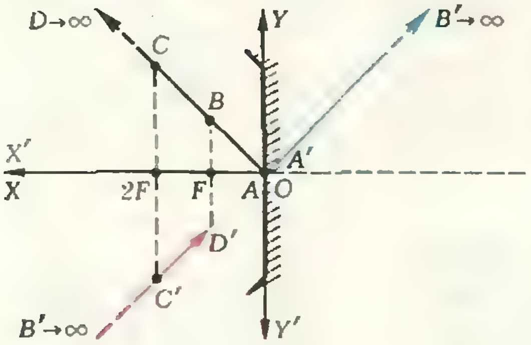

D→∞
Y
B′→∞
C
B
X′
A′
X
2F
F
A
O
D′
C′
B′→∞
Y′

Рис. 2.

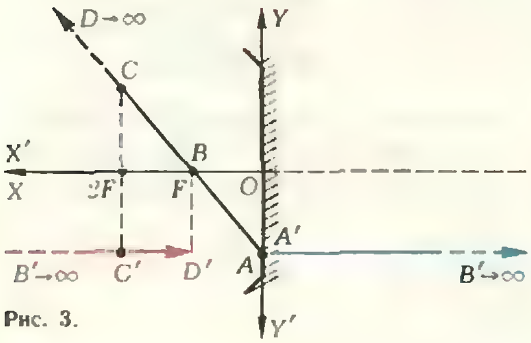

D→∞
Y
C
X′
B
X
2F
F
O
A′
B′→∞
C′
D′
A
B′→∞
Y′

Рис. 3.

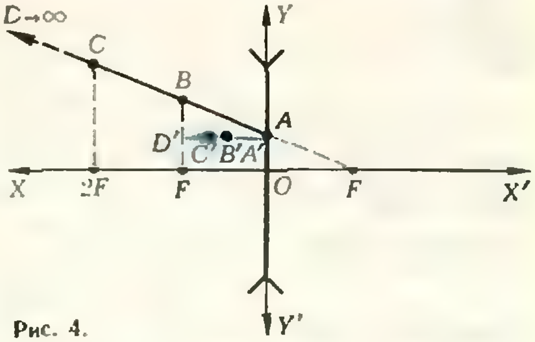

D→∞
Y
C
B
A
D′
C′
B′
A′
X
2F
F
O
F
X′
Y′

Рис. 4.

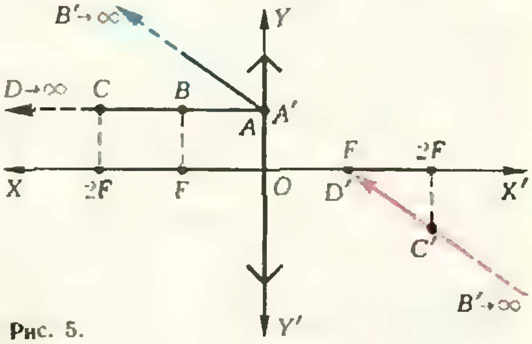

B′→∞
Y
D→∞
C
B
A′
A
F
2F
X
2F
F
O
D′
X′
C′
B′→∞
Y′

Рис. 5.

Горьковский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Математика

Вариант 1

1. $]-\infty;-5]\quad[1;+\infty[$.

2. $x_1=-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k,\ x_2=\frac{\pi}{6}+\pi l\ (k,l\in\mathbf{Z})$.

3. Диаметр основания и высота цилиндра равны $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

4. 40 часов.

5. Указание. Докажите, что последние цифры десятичной записи чисел 53^{53} и 33^{33} равны 3.

Вариант 2

1. $x_1=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\quad x_2=\frac{\pi}{2}+\pi l\ (k,l\in\mathbf{Z})$.

2. $[-7;-\sqrt{35}[\,\bigcup\,[5;\sqrt{35}[$. 3. 44.

4. $h^2\sqrt{3}$. 5. На первом месте — третий рабочий, на втором — второй, на третьем — первый.

Вариант 3

1. $\left[\frac{63}{65};1\right[$.

2. $\left\{\left(\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi l\right);\quad\left(\pm\frac{\pi}{3}+2\pi m,\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)\right\}\ (k,l,m,n\in\mathbf{Z})$.

3. $\left(\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}\right)R^2$. Указание. Докажите, что $|AM|=|CM|=|CN|=|NB|=R$ (рис. 6).

4. $\max\limits_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}y=9,\quad\min\limits_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}y=4$.

5. $19=3^3-2^3$. Разложив левую часть равенства $m^3-n^3=19$ на множители и воспользовавшись тем, что 19 — простое число, можно доказать, что такое представление единственно.

Физика

1. $|\vec{v}|=\sqrt{gl/3}$.

2. $|\vec{T}|=\dfrac{m_1m_2g(\mu_2-\mu_1)\cos\alpha}{m_1+m_2}\approx 2{,}3$ Н.

3. $|\vec{T}_1|=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{2}\right)mg$;

$|\vec{T}_2|=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{2}\right)mg$.

4. $|\vec{F}_{\text{тр}}|=mg/2\approx 50$ Н.

5. $|\vec{E}_B|=\dfrac{4|\vec{E}_A||\vec{E}_C|}{|\vec{E}_A|+|\vec{E}_C|+2\sqrt{|\vec{E}_A||\vec{E}_C|}}=56{,}25$ В/м.

6. $\varphi_0=\varphi/\sqrt[3]{n^2}=0{,}1$ В.

7. $q=C(\mathcal{E}+U)$.

8. $U'=\dfrac{\mathcal{E}U}{2\mathcal{E}-3U}=4$ В.

9. $R_1=9$ Ом; $R_2=1$ Ом; $\eta_1=75\%$; $\eta_2=25\%$.

10. $\nu_1/\nu_2=\sqrt{n}=2$; энергии контуров одинаковы.

Красноярский государственный университет

Математика

1. $\{-1\}$. 2. $\left[2;\ \dfrac{5}{2}\right[\ \cup\ \left]\dfrac{11}{4};\ 3\right[$. 3. 1. Указание. Поскольку абсциссы x_1 и x_2 концов хорды удовлетворяют уравнению $x-3=a^2x^2+5ax-4$, задача сводится к решению системы $D=(5a-1)^2-4a^2>0$, $\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{5a-1}{2a^2}=2$. 4. При $\alpha=2\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ длина равна $\dfrac{8R}{3\sqrt{3}}$. 5. $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}$. Указание. Для нахождения радиуса r вписанного шара воспользуйтесь формулой $V=\dfrac{1}{3}rS$, где V — объем, а S — площадь полной поверхности тетраэдра (см. «Геометрия 9—10», задача 346).

Физика

Физический факультет

1. $|\vec{v}|=\dfrac{M+m}{m\cos\alpha}\sqrt{2gl\sin\alpha}$.

2. Возможны два случая: 1) $\alpha=\arcsin 0=0$; 2) $\alpha=\arccos\dfrac{g}{\omega^2R}$. Здесь α — угол, который образует с вертикалью радиус, проведенный в точку нахождения шарика.

3. См. рис. 7.

4. $l=\dfrac{|\vec{v}|^2d\sin^2\alpha}{2Ue/m}\approx 0{,}17$ см.

5. $d=\dfrac{a/2}{\operatorname{tg}\varphi/2-\dfrac{\sin\varphi/2}{\sqrt{n^2-\sin^2\varphi/2}}}\approx 4{,}5$ см.

Математический и биолого-химический факультеты

1. $A=R(T_1+T_2-2T)$.

2. $P_3\approx 27$ Вт.

3. $\dfrac{e}{m}=\dfrac{2U}{|\vec{B}|^2r^2}=1{,}76\cdot 10^{11}$ Кл/кг.

4. $F=a=10$ см.

5. $\nu=\nu_0+\dfrac{e\varphi}{h}\approx 1{,}3\cdot 10^{15}$ Гц. Здесь $h=6{,}62\times$ $\times 10^{-34}$ Дж · с — постоянная Планка.

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Математика

Вариант 1

1. $\left[\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}};\ +\infty\right[$.

2. $[\alpha;\ 2\alpha]\cup]2-\alpha;\ 2+\alpha[\cup]4-2\alpha;\ 4-\alpha[$, где $\alpha=\dfrac{1}{\pi}\arccos\dfrac{1}{4}$. Решение. Данное уравнение имеет решение

$$x=\pm\frac{1}{a}\arccos\frac{1}{4}+\frac{2\pi}{a}k\ (k\in\mathbb{Z})$$

или

$$x=\pm\frac{\pi}{a}\alpha+\frac{2\pi}{a}k\ (k\in\mathbb{Z}).$$

Для дальнейшего заметим, что

$$0<\arccos\frac{1}{4}<\frac{\pi}{2}$$

$$0<\alpha<\frac{1}{2}$$

$$0<3\alpha<\frac{3}{2}<2$$

Если длина отрезка $\left[\dfrac{\pi}{2};\ \pi\right]$ больше периода $\dfrac{2\pi}{a}$ функции $y=\cos ax$, то на этом отрезке данное уравнение имеет больше

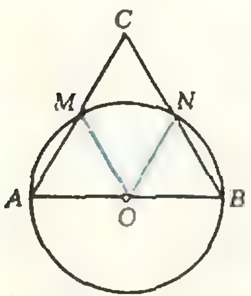


Рис. 6.

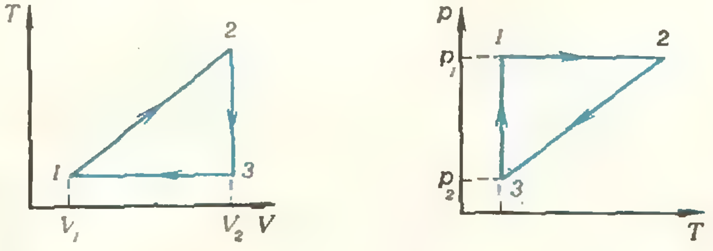


Рис. 7. а) б)

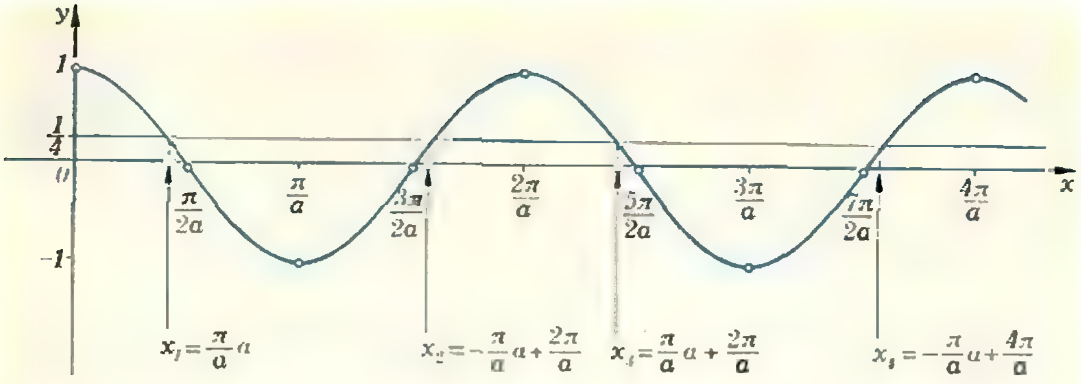


Рис. 8.

одного корня. Следовательно, если $a>0$ удовлетворяет требуемому условию, то

$$\frac{\pi}{2}<\frac{2\pi}{a}$$

$$a\leqslant 4$$

Поэтому наибольший из корней, который может — в одиночку — попасть на отрезок $\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$, есть $x_3=\frac{\pi}{a}\alpha+\frac{2\pi}{a}$ (рис. 8): если

$$\frac{\pi}{a}\alpha+\frac{2\pi}{a}<\frac{\pi}{2}\leqslant-\frac{\pi}{a}\alpha+\frac{4\pi}{a}\leqslant\pi,$$

то $a>2\alpha+4>4$. Значит, надо рассмотреть три возможности:

$$\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{a}\alpha\leqslant\pi<-\frac{\pi}{a}\alpha+\frac{2\pi}{a} \qquad (1)$$

$$\frac{\pi}{a}\alpha<\frac{\pi}{2}\leqslant-\frac{\pi}{a}\alpha+\frac{2\pi}{a}\leqslant\pi<\frac{\pi}{a}\alpha+\frac{2\pi}{a} \qquad (2)$$

$$-\frac{\pi}{a}\alpha+\frac{2\pi}{a}<\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{a}\alpha+\frac{2\pi}{a}\leqslant\pi<-\frac{\pi}{a}\alpha+\frac{4\pi}{a} \qquad (3)$$

В случае (1)

$$\begin{gathered}a\leqslant 2\alpha\\ a\geqslant\alpha\\ a<-\alpha+2\end{gathered}$$

Поскольку $2\alpha<-\alpha+2 \Leftrightarrow 3\alpha<2$,

$$\alpha\leqslant a\leqslant 2\alpha \qquad (4)$$

В случае (2)

$$\begin{gathered}a>2\alpha\\ a\leqslant-2\alpha+4\\ a\geqslant-\alpha+2\\ a<\alpha+2\end{gathered}$$

Поскольку $-\alpha+2>2\alpha \Leftrightarrow 3\alpha<2$ и $\alpha+2<-2a+4 \Leftrightarrow 3\alpha<2$,

$$-\alpha+2\leqslant a<\alpha+2 \qquad (5)$$

В случае (3)

$$\begin{gathered}a>-2\alpha+4\\ a\leqslant 2\alpha+4\\ a\geqslant\alpha+2\\ a<-\alpha+4\end{gathered}$$

Поскольку $-2\alpha+4>\alpha+2 \Leftrightarrow 3\alpha<2$ и $-\alpha+4<2\alpha+4 \Leftrightarrow 3\alpha>0$,

$$-2\alpha+4<a<-\alpha+4. \qquad (6)$$

Из (4), (5), (6) получаем ответ.

3. $|AK|=a+1$, $|DK|=a$. Указание. Пусть $|DK|=x$, тогда $2S_{KLMN}=1-\frac{(1+a)^2}{2+x+a}+\frac{a^2}{x+a}$. Полученную функцию исследуйте с помощью производной.

4. 1) $0<x<1$, $0<y<x$; 2) $0<x<1$, $y>1$; 3) $x>1$, $1<y<x$; 4) $-1<x<0$, $0<y<-x$; 5) $-1<x<0$, $y>1$; 6) $x<-1$, $1<y<-x$. Множество точек $(x;\ y)$ показано на рисунке 9.

5. $\frac{3\sqrt{3}}{8}h^2$. Указание. Если дополнить основание призмы до квадрата, получится куб.

Вариант 2

1. $2a+2b+2\sqrt{a^2+b^2}$. Указание. Рассмотрите два случая: а) прямая l_4 пересекает отрезок прямой l_3, заключенный между l_1 и l_2; б) прямая l_4 пересекает продолжение этого отрезка.

2. $\left\{0,\ 1,\ \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{\frac{\sqrt{65}-5}{2}}\right)\right\}$

3. $]\ 0;\ 3^{-1-\sqrt{-17b}}]\ \cup\ [\frac{1}{3};\ 3^{-1+\sqrt{-17b}}]$.

4. Замечание. Поскольку в условии задачи говорится о периметре сечения, это сечение должно быть многоугольником. Значит, оно не может быть отрезком $[AB]$. Ответ. Если $h>\frac{a}{\sqrt{6}}$, то $S=\frac{3a^2h}{4\sqrt{a^2+3a^2}}$; если $h\leqslant\frac{a}{\sqrt{6}}$, то $S=\frac{a}{2}\sqrt{h^2+\frac{a^2}{12}}$. Указание. Рассмотрите отдельно случай, когда плоские углы при вершине пирамиды — тупые.

5. $[\frac{2\sqrt{2}-1}{4};\ \frac{19\sqrt{19}-28}{108}[$. Указание.

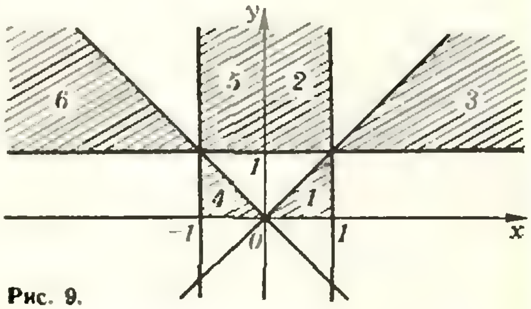


Рис. 9.

Положив $t=\cos 2x$, приведем уравнение к виду $-2t^3-t^2+3t=a$. Осталось выяснить, какие значения многочлен $f(t)=-2t^3-t^2+3t$ принимает на отрезке $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ более одного раза.

Вариант 3

1.
$$P(t)=\begin{cases} 3at-t^2 & \text{при } t\in[0,\ a] \\ at+a^2 & \text{при } t\in[a,\ 2a] \\ t^2-3at+5a^2 & \text{при } t\in[2a,\ +\infty[\end{cases}$$

2. $x=\operatorname{arctg}\frac{a+1\pm\sqrt{a^2-2a-3}}{2(a+1)}+\pi k \quad (k\in \mathbf{Z})$ при $a\in]-\infty;\ -1[\cup[3;\ +\infty[$, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi l$ $(l\in \mathbf{Z})$ при $a\in[-1;\ 3[$.

3. $]3;\ +\infty[$.

4. $\left(a+b\pm 2\sqrt{ab}\sin\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

5. $\left[-\frac{2}{3};\ 0\right[$.

Вариант 4

1. $[0;\ 20]$ (м/с).

2. $x_1=\pi k$, $x_2=\pm\arccos\frac{-3\pm\sqrt{5}}{6}+2\pi l\,(k,\ l\in \mathbf{Z})$ (годятся четыре комбинации знаков).

3. $\frac{2}{\pi}$.

4. $\frac{a}{9},\ \frac{5a}{36},\ \frac{5a}{28},\ \frac{5a}{21},\ \frac{a}{3}$.

5. $x=\pi k$, $y=\frac{1}{2}$ $(k\in \mathbf{Z})$.

Задачи из вариантов других факультетов

1. $\frac{16\sqrt{241}}{63}a^2$. Указание. Найдите косинус угла между секущей плоскостью и плоскостью основания куба. 2. -1. 3. Весь объем, если пирамида и призма лежат по разные стороны от плоскости основания пирамиды, и $\frac{29}{36}$ объема — в противном случае. 4. $]0;\ \frac{|a|}{2+|a|}[\cup]1;\ +\infty[$ при $a\in]-\infty;\ 0[$; $]1;+\infty[$ при $a\in[0;\ 2]$; $]1;\ \frac{a}{a-2}]$ при $a\in]2;+\infty[$. 5. $\min\limits_{x\in R} y=\frac{4}{8+\sqrt{2}}$, $\max\limits_{x\in R} y=\frac{4}{8-\sqrt{2}}$. 6. $\{(2^{\log^{\frac{2}{3}}10\cdot\log^{\frac{1}{3}}7},\ 2^{\log^{\frac{2}{3}}7\cdot\log^{\frac{1}{3}}10})\}$. 7. $r+R$, $r\frac{r+R}{|R-r|}(r\neq R)$. 8. $1:\frac{8-3\sqrt{3}}{3}:1$. 9. 17, 18, 19, 20.

Физика

Физический факультет

Вариант А

1. $h=\frac{2}{5}h_0+\frac{3}{5}\ \frac{m}{\mu}\ \frac{RT}{Mg}\approx 0{,}55$ м.

2. $|\vec{F}_{\max}|=mg+|\vec{v}|\sqrt{km}\approx 3{,}2\cdot 10^5$ Н.

Указание. При равномерном движении сила натяжения троса $|\vec{F}_0|=kx_0=mg$. В момент внезапной остановки энергия системы складывается из кинетической энергии груза $m|\vec{v}|^2/2$ и потенциальной энергии растянутого троса $kx_0^2/2$ (потенциальную энергию тяготения груза считаем равной нулю в этот момент). Максимальная сила натяжения $|\vec{F}_{\max}|=kx$ соответствует моменту, когда груз занимает самое низкое положение и покоится. В этот момент энергия системы равна сумме потенциальной энергии троса $kx^2/2$ и потенциальной энергии груза $mg(x-x_0)$. Из закона сохранения механической энергии следует уравнение

$$x^2-\frac{2mg}{k}x+\left(\frac{mg}{k}\right)^2-\frac{m|\vec{v}|^2}{k}=0,$$

или

$$|\vec{F}_{\max}|^2-2mg|\vec{F}_{\max}|+(mg)^2-km|\vec{v}|^2=0,$$

откуда и получается искомое значение $|\vec{F}_{\max}|$ (второй корень уравнения — отрицательный и физического смысла не имеет):

3. $R=\frac{L}{\Delta t}\ \frac{|\Delta\vec{B}|}{|\vec{B}|}\approx 1{,}16\cdot 10^{-6}$ Ом.

4. $I_0=\frac{2}{R}\sqrt{\frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_0}\right)}$.

Вариант В

1. $p=\frac{3/2p_0+(cT_0-\lambda)m_2/V}{3/2+cm_2\mu_1/(m_1R)}\approx 90$ кПа.

2. $|\vec{a}_1|=\frac{g(m_1-m_2)+m_2|\vec{a}_2|}{m_1+m_2}$;

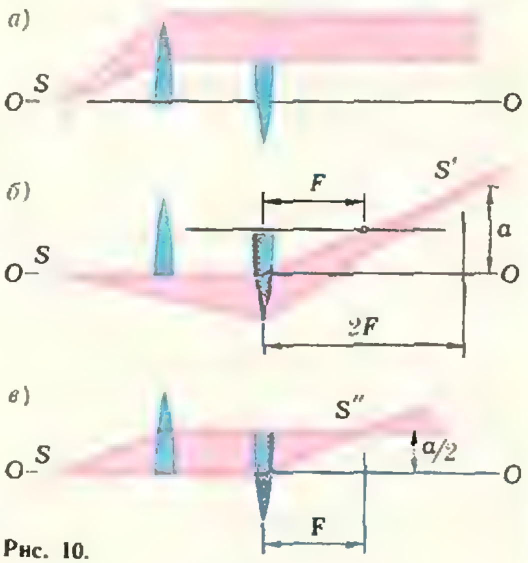


Рис. 10.

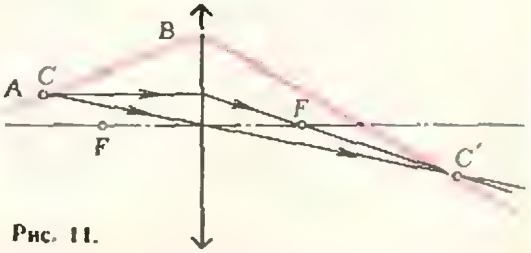


Рис. 11.

$$|\vec{F}|=\frac{m_1m_2(2g-|\vec{a}_2|)}{m_1+m_2};\ |\vec{T}|=2m_2g.$$

Указание. Сила натяжения шнурка равна силе трения кольца о шнурок; ускорение кольца относительно оси блока направлено вверх и равно по модулю $|\vec{a}_1|-|\vec{a}_2|$.

3. Существуют три изображения источника. Первое изображение (рис. 10, *а*) образовано лучами, проходящими только через левую половину линзы. После преломления лучи идут параллельным пучком вдоль оптической оси OO. Второе изображение (рис. 10, *б*) создано лучами, проходящими только через правую половину линзы. Оно находится на расстоянии $2F=6$ см от правой половины на высоте $a=2$ см над оптической осью OO. Третье изображение создают лучи, испытавшие преломление в обеих половинах линзы (рис. 10, *в*). Оно расположено на расстоянии $F=3$ см от правой половины на высоте $a/2=1$ см над осью OO.

4. $U_2/U_1=5/6$.

Математико-механический факультет и факультет прикладной математики — процессов управления

1. $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{\sqrt{g^2+|\vec{a}|^2}}}$.

2. $T=\dfrac{\Delta T}{0{,}1}=300$ К.

3. $p=\dfrac{2p_1p_2}{p_1+p_2}=4800$ Па.

4. $U=2{,}2P/I=33$ В.

5. $I=I_0/\sqrt{3}$.

6. Один из способов построения (построение изображения точки C) показан на рисунке 11.

Уральский государственный университет им. А. М. Горького

Математика

Вариант 1

1. $\left[0;\ \dfrac{1}{2}\right]$. 2. $\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}$. 3. $\dfrac{\pi}{3}$. 4. $x=\dfrac{5}{16}\pi+\pi k\ (k\in\mathbb{Z})$.

Вариант 2

1. $[-1;\ 1]$. 2. $\{1\}$. 3. $\arcsin\sqrt{\dfrac{1}{3}}$. 4. $\left\{-\pi,\ -\dfrac{\pi}{3},\ 0\right\}$.

Физика

Физический факультет

1. $c_p=c_V+\dfrac{p\Delta V}{m\Delta t}=800$ Дж/(кг · К).

2. $U_з=Ir+\mathcal{E}=14$ В; $U_р=\mathcal{E}-Ir=10$ В.

3. Изображение источника будет находиться на расстоянии $x=h+\dfrac{2d}{n}=h+\dfrac{3}{2}d$ от поверхности воды.

4. Линза должна находиться на расстоянии $d_1=\dfrac{L}{2}+\sqrt{\dfrac{L^2}{4}-\dfrac{LF}{2}}=36$ см или $d_2=\dfrac{L}{2}-\sqrt{\dfrac{L^2}{4}-\dfrac{LF}{2}}=12$ см от первого источника.

Математико-механический факультет

1. $q=2L\sin\alpha\sqrt{2\pi\varepsilon_0 mg\,\mathrm{tg}\,\alpha\cos 30^\circ}\approx 2{,}2\cdot 10^{-8}$ Кл.

2. $r=\dfrac{I_1R_1-I_2\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}}{I_2-I_1}=3$ Ом;

$\mathcal{E}=I_1(R_1+r)=40$ В.

3. $|\vec{E}|=\dfrac{a}{4}|\vec{B}|'=10^4$ В/м.

4. $R=\dfrac{2L_1(L_1-L_2)}{2L_1-L_2}$.

Московская городская олимпиада по физике

1. Система находится в равновесии при любых углах α.

2. $t=\dfrac{\pi}{\sqrt{bg\cos\alpha}}$.

3. Лифтер переработает.

4. $s=s_0\sin(\omega_0 t-\omega_0\alpha t^2/4)$, где $\omega_0=\sqrt{g/l_0}$.

5. Конечные температуры жидкости равны

$$T_{1к}=\frac{T_{1н}-\eta LT_{2н}}{1-\eta L}\ и\ T_{2к}=\frac{T_{2н}-\eta LT_{1н}}{1-\eta L},$$

где $\eta=\dfrac{2k}{\varrho Svc}\sqrt{\dfrac{\pi}{S}}$.

6. Лампочка, включенная в первую гирлянду, перегорит, а включенная во вторую гирлянду будет гореть с недокалом.

7. Отверстие в корпусе ручки можно считать источником света. Светлые кольца представляют собой изображения этого источника, полученные в результате однократного, двукратного и т. д. отражений от внутренней поверхности ручки.

Номер подготовили:
А. Виленкин, А. Егоров, И. Клумова, Т. Петрова,
А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров,
И. Смирнова, Л. Черниевская

Зав. редакцией Л. Чернова
Художественный редактор Т. Макарова
Корректор О. Кривенко
113035, Москва, М-35, Б. Ордынка 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62

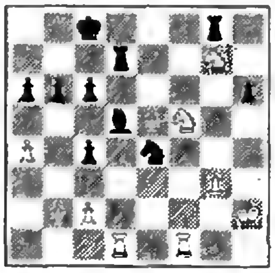
Сдано в набор 23.3.81
Подписано в печать 18.4.81
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 6,96 Т-05768
Цена 30 коп. Заказ 617 Тираж 237 464 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета
СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли,
г. Чехов Московской области

ШАХМАТНЫЙ КОНКУРС

ЭРА АЛЕХИНА

Свой первый матч в ранге чемпиона мира А. Алехин провел с Е. Боголюбовым в 1929 году. В то время в шахматном мире у Алехина не было равных соперников, что подтвердилось и в данном поединке. Матч, в котором планировалось 30 партий, был интересным, но закончился крупной победой чемпиона со счетом 15,5:9,5. Повторный матч, состоявшийся через пять лет, мало чем отличался от предыдущего. Перевес Алехина вновь был бесспорным — 15,5:10,5. Вот эпизод из шестнадцатой партии второго матча.



Алехин — Боголюбов

Последним ходом Лh8 — g8 черные решили отогнать коня (к сложной игре вело Кg5), однако он не тронулся с места. **30.e6!!** (красивая комбинация, опровергающая маневр черных) **30...Л:g7 31.К:g7 Л:g7 32.Л:d5!** (еще один эффектный удар, на котором строится вся комбинация) **32...cd 33.Лf8+ Крc7 34.Лf7+ Крd6** (иначе белая пешка проходит в ферзи) **35.Л:g7 Кр:e6 36.Лg6+ Крe5 37.Крg2 b5 38.a5! d4 39.Л:a6 b4 40.Крf3 c3 41.bc bc 42.Лe6+** (весьма прозаический финал) **42... Кр:e6 43.Кр:e4. Черные сдались.**

В 1935 году, встречаясь с голландским гроссмейстером М. Эйве, Алехин явно недооценил своего соперника и в результате на два года уступил чемпионское звание (счет матча 14,5:15,5). Макс Эйве стал пятым в истории чемпионом мира.

Матч-реванш, состоявшийся в 1937 году, закончился убедительной победой великого русского шахматиста со счетом 15,5:9,5.

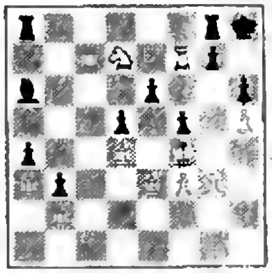
Александр Алехин (1892 — 1946)

Алехин играл в своем лучшем стиле и легко вернул себе корону. Быстро закончилась шестая партия матча.

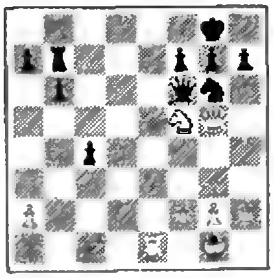
Алехин — Эйве

1.d4 d5 2.c4 c6 3.Кc3 dc 4.e4 e5 5.С:c4 ed. Этот вариант славянской защиты не сулит белым особых достижений. Видимо, Алехин связывал свои надежды со следующим ошеломляющим продолжением — **6.Кf3!?** Такие ходы обычно встречаются в сеансах одновременной игры. Впоследствии была доказана некорректность жертвы коня, однако во время партии Эйве не решился принять ее и тут же допустил решающую ошибку. **6...b5? 7.К:b5 Сa6** (7...cb 8.Сd5) **8.Фb3 Фe7 9.0—0 С:b5 10.С:b5 Кf6 11.Сc4 Кbd7 12.К:d4 Лb8 13.Фc2.** Итак, у белых лишняя пешка и огромный позиционный перевес. Через десять ходов черные сдались.

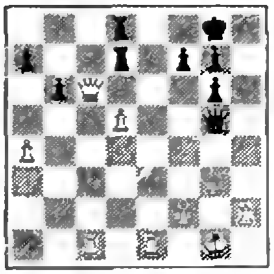
Признаемся, что выбрать всего три конкурсных задания из богатейшего шахматного наследия Алехина было чрезвычайно сложно.



1. Белые начинают и выигрывают.



2. Белые начинают и выигрывают.



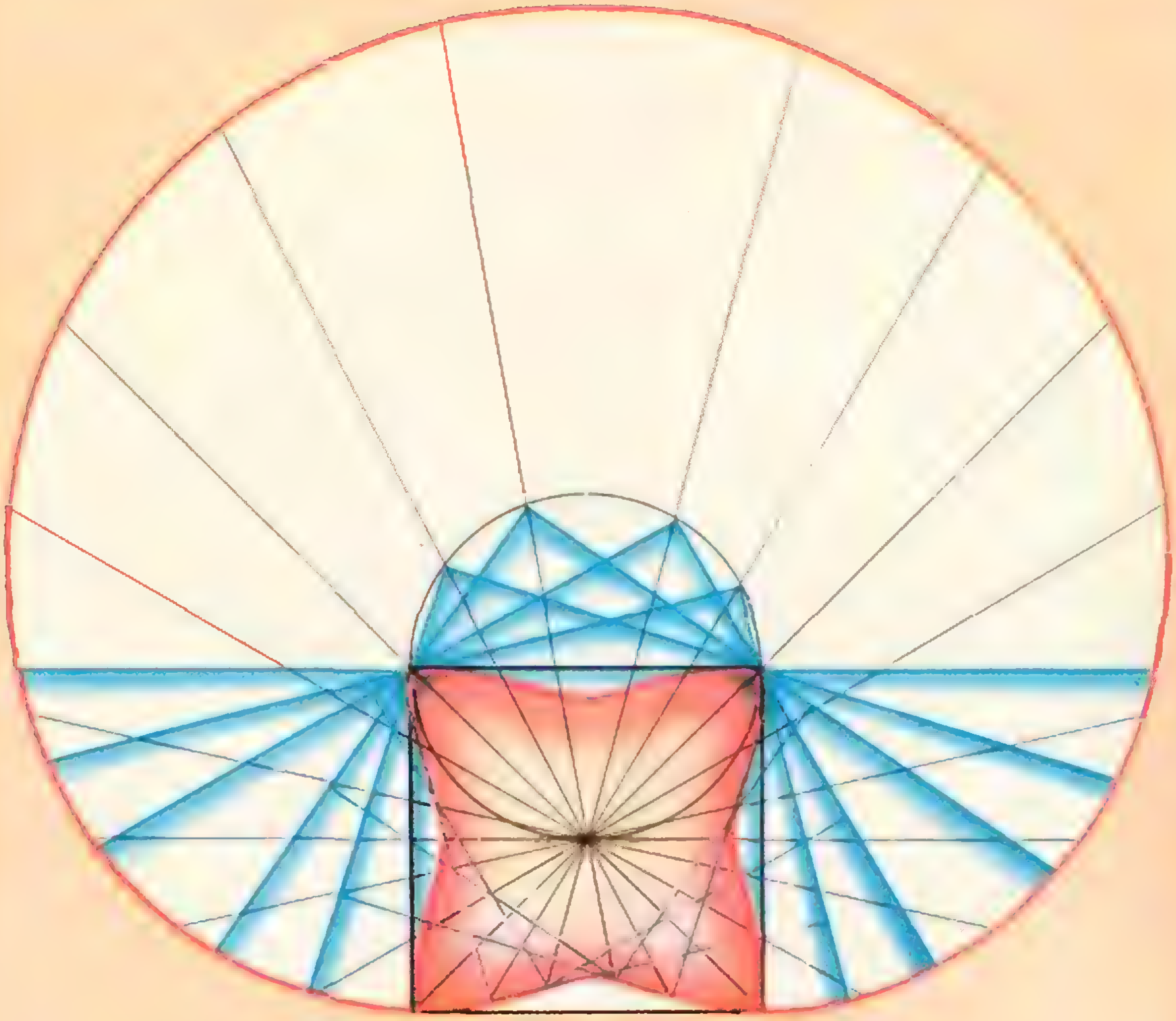
3. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 30 июня 1981 г.

Итоги шахматного конкурса 1980 года

Победителями конкурса признаны: Г. Бедный (Бердичев), И. Варвус (Черновцы), В. Васильев (Бугульма), Й. Вутев (Ловеч, НРБ), А. Груздев (Ленинград), М. Грушко (Житомир), В. Зенькович (Новая Каховка), Б. Калинский (с. Нижнедевицк Воронежской обл.), Б. Каплан (Москва), И. Кваша (Новочеркасск), А. Котлов (Киев), М. Креймер (Житомир), А. Кузнецов (Ленинград), З. Курганов (Чирчик), М. Мельцын (Ленинград), В. Погосян (с. Верин-Арташат Арм. ССР), Г. Полиевец (Колпино), В. Попов (с. Субботино Красноярского края), А. и Ж. Прокопчук (Ужгород), Р. Самборский (Тернополь), В. Семененко (Ставрополь), А. Скороход (Чернигов), А. Солдатов (Пермь), В. Спирин (Караганда), А. Тихонков (д. Моисеевка Гомельской обл.), Ю. Тищенко (Мелитополь), И. Ченцов (Кирово-Чепецк).

Редакция поздравляет победителей. Все они осенью этого года будут награждены шахматно-математической литературой с автографами А. Карпова и Е. Гика.



«Объемлющая» кривая, нарисованная на этой странице обложки, давно известна в математике — это так называемая *улитка Паскаля*. Получается она следующим образом: для каждого прямого угла, опирающегося на «горизонтальный» диаметр «порождающей окружности» (на рисунке все эти углы — голубые), отложим на прямой, содержащей его биссектрису, от вершины угла в обе стороны отрезки заданной (одинаковой для всех углов!) длины (от этой длины зависит *форма кривой*); *множество концов этих* отрезков и есть нужная кривая.

(Между прочим, все описанные прямые пересекаются в одной точке окружности; это точка называется *полюсом* улитки Паскаля.)

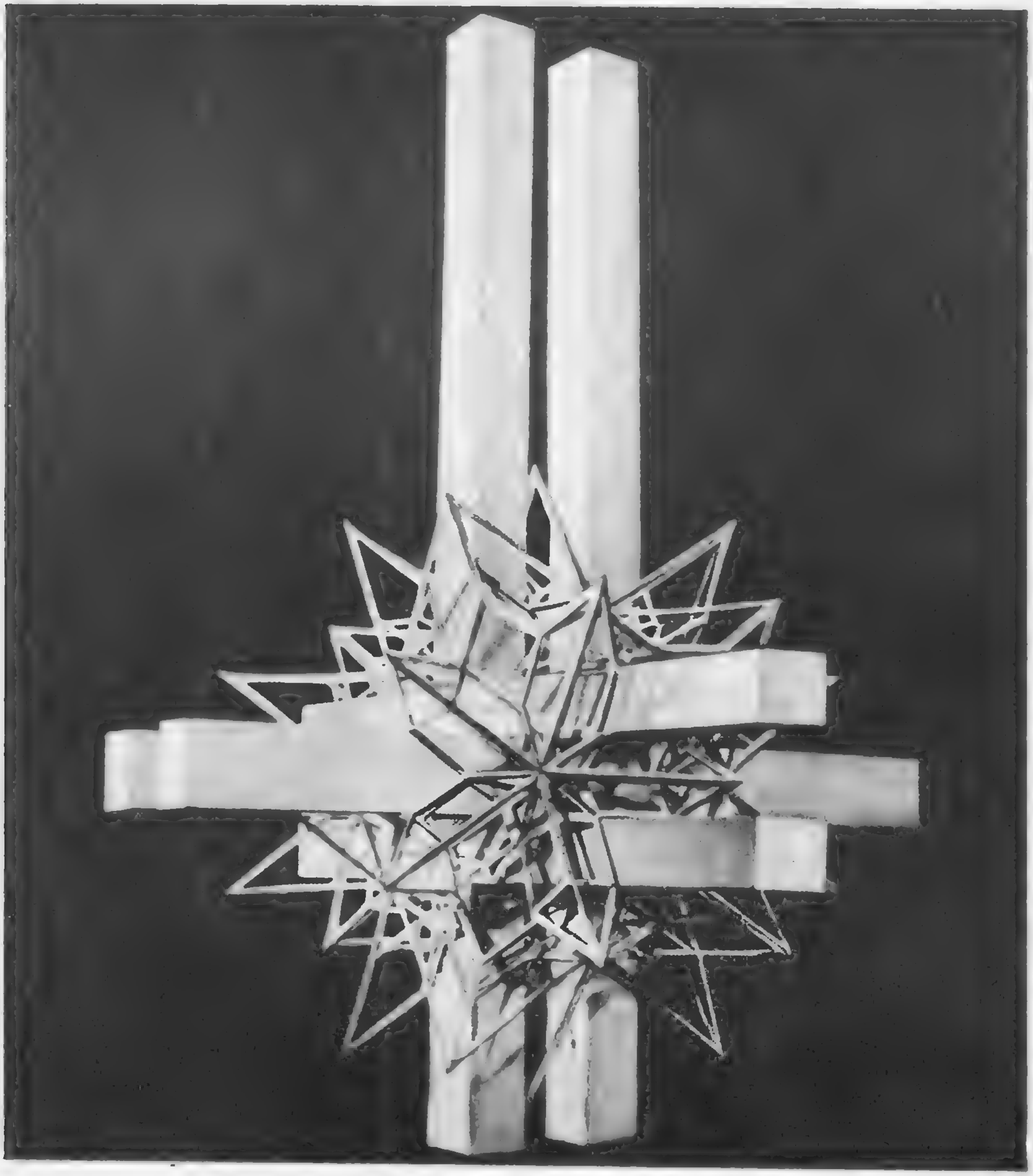
А «звездочка», симметрично составленная из дуг улитки Паскаля, обладает следующим замечательным свойством: она может вращаться внутри любого из описанных прямых углов так, что ее граница все время будет касаться сторон угла и проходить через точку пересечения биссектрисы этого угла с улиткой Паскаля.

Почему это так, вы узнаете, прочитав статью А. Бабичева «Об одной задаче Колмогорова».

Цена 30 коп.

Индекс 70465

Глубокого математического смысла в этой конструкции, выполненной из тонкого картона В. Гамаюновым, мы не сумели найти. Но это не мешает нам восхищаться тем, как удивительно порой взаимодействуют совсем непохожие геометрические формы: шесть длинных балок с квадратным сечением пронизывают каркас сложного звездчатого многогранника, (объединения пяти кубов — см. статью «Сложный многогранник» в «Кванте», 1979, № 1, с. 27), касаясь его ребер, но нигде не разрушая их замысловатую сеть. Не только математиков привлекает эта конструкция — советский архитектор В. А. Сомов взял ее за основу проекта административного здания в одном из итальянских городов.



НОМЕР
6

Квант

6
1981

Основан в 1970 году

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд

В НОМЕРЕ:

Ученые обращаются к молодежи

2 *В. Амбарцумян.* Во имя расцвета науки нашей Родины

* * *

5 *В. Болтянский.* Топология графов
11 *Ю. Брук, А. Стасенко.* Метод размерностей помогает решать задачи
20 *А. Михайлов.* О солнечных затмениях вообще и конкретно о затмении 31 июля 1981 года

Лаборатория «Кванта»

25 *П. Канаев.* Несколько опытов с пустотелым прозрачным шариком

Математический кружок

27 *Н. Васильев, Т. Маликов.* Рассмотрим разность

Задачник «Кванта»

31 Задачи М686 — М690; Ф698 — Ф702
33 Решения задач М641 — М644; Ф657 — Ф662
41 Список читателей, приславших правильные решения

«Квант» для младших школьников

43 Задачи
44 *Г. Топадзе.* В волшебном мире чисел

Практикум абитуриента

45 *Н. Берюлева.* Интерференция света

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1980 году

50 Воронежский государственный университет
51 Азербайджанский государственный педагогический институт
52 Киевский государственный педагогический институт
53 Ленинградский государственный педагогический институт
53 Московский государственный педагогический институт
54 Одесский государственный педагогический институт
55 Волгоградский политехнический институт
56 Ленинградский политехнический институт
57 Московский архитектурный институт

Информация

59 *А. Савин.* Международные математические соревнования школьников
60 **Шахматная страничка**
61 **Ответы, указания, решения**
Смесь *(10)*
Новости науки *(19)*

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1981

В. Амбарцумян

Во имя расцвета науки нашей Родины

Одна из современных легенд говорит о юноше, который был начинающим исследователем в области теоретической физики. Он явился к своему руководителю А, ученому, отличавшемуся огромной научной инициативой и оригинальностью мысли, и получил от него тему для своего первого исследования и указания, с чего надо начать работу над предложенной темой. Юноша сел в самолет и прилетел в город, где жил другой крупный ученый — В, который прославился глубоким умением применять в теоретической физике математический аппарат. Молодой человек описал ему сущность своей темы и направление, с которого он собирается начать ее разработку. Тема очень понравилась В, он высоко оценил ее оригинальность и правильность выбора направления первых шагов. Более того, владея безукоризненной техникой исследования, он посоветовал, как именно лучше всего осуществить эту первую часть работы. Перенеся все это на бумагу, юноша полетел в третий город, где жил теоретик С, славившийся феноменальной эрудицией в той же области. Теоретик был восхищен как темой, так и выполнением первых шагов и, рассказав об ошибках, которые делались в прежние времена другими учеными, работавшими над аналогичными проблемами, дал ряд ценных советов. Юноша вернулся к А и доложил о достигнутых результатах. Весьма удовлетворенный успехом настойчивого юноши, А с удовольствием дал совет, как преодолеть очередные трудности и продвинуться вперед.

Предприимчивый молодой человек несколько раз повторил облет своих консультантов. Получилась весьма оригинальная, блещущая техникой исполнения и эрудицией работа, за которую ему были присуждены все степени и отличия, какие только может получить физик.

Академик Виктор Амазаспович Амбарцумян — дважды Герой Социалистического Труда, лауреат Государственных премий, президент Академии наук Армянской ССР, директор Бюраканской астрофизической обсерватории.

Статья с небольшими сокращениями перепечатывается из сборника «Ленин. Наука. Молодежь», выпущенного в 1980 году издательством «Наука».

Легенда прибавляет только одну деталь. В разговоре с каждым из консультантов молодой ученый не распространялся о помощи, полученной от двух других. Из этой детали авторы легенды делали вывод, осуждающий ее героя.

Полностью присоединяясь к этому моральному осуждению, я хотел бы вместе с тем отметить, что юноша по сути дела показал некоторые качества, которые сами по себе не только не содержат ничего плохого, но были бы нелишни для многих организаторов науки.

В самом деле, как было бы хорошо, если бы существовало больше людей, которые умели бы объединять научные усилия ученых разного типа, привыкших работать изолированно друг от друга, и делали бы это не из каких-то «частнособственнических» или карьеристических интересов, а по долгу организаторов науки.

Обычно считают, что организатор науки должен удачно выбирать предмет исследования, подбирать нужные кадры, распределять среди них работу, снабжать их аппаратурой и находить пути применения законченной работы в жизни. Конечно, организатору науки нужно все это уметь.

Но, вероятно, нужно, чтобы он умел и активно сопоставлять между собой мысли разных авторов, объединять их знания и, глубоко вникая в сущность их мыслей, строить научные мозаики, объединяющие разнотипное творчество разных ученых.

При этом в самой работе такого организатора будет много творческих элементов.

Значит, если молодых людей с такими способностями, как у героя легенды, направить по правильному пути, то получится выигрыш в организации науки.

О вышеприведенной легенде я узнал как раз перед вводом в строй нового большого телескопа Бюраканской астрофизической обсерватории, в момент, когда сам остро нуждался в научной консультации. После первых испытаний необходимо было начать первую серию фотографических снимков неба с помощью нового инструмента. Зная, что два молодых сотрудника, не имевшие никаких ученых степеней, Армен Гюльбудагян и Тигран Магакьян только что успешно закончили поиски на картах известного Паломарского атласа неба очень слабых кометарных туманностей, не обнаруженных до тех пор другими астрономами, я обратился к ним с просьбой отобрать из числа найденных туманностей наиболее интересные объекты для включения в программу нового телескопа. И они показали мне в атласе объект, вид которого был совершенно нетипичен для кометарных туманностей. Последние обычно обращают на себя внимание наличием хвоста, или «веера», упирающегося вершиной в звезду. Здесь же была только звезда, не было никакого веера, и только на значительном расстоянии от звезды обозначался небольшой слабо светящийся «огрызок», связь которого со звездой мне показалась весьма проблематичной. Разочарованный первым впечатлением, я стал возражать, но, почувствовав убежденность своих сотрудников в необходимости исследования этого объекта, уступил и согласился на включение его в программу. Всю вторую половину дня, после их ухода, я упрекал себя за мягкость и уступчивость.

Через два или три дня мне принесли снимок этого объекта, полученный на большом телескопе Обсерватории. Светящегося «огрызка» уже не было. За два десятка лет, прошедших после снимков Паломарского атласа, он исчез, но зато к звезде примыкал роскошный, яркий веер, которого не было раньше и подробности строения которого были хорошо видны. Сама звезда также изменилась. Яркость ее сильно увеличилась, а цвет вместо красного стал голубым. Для нашей Обсерватории и для всей нашей астрономии это было счастливым открытием, так как у нас во все большей степени интерес сосредоточивается вокруг явлений изменчивости объектов и их нестационарности. Хотя изменчивость и раньше наблюдалась у некоторых кометарных туманностей (за последние сто лет отмечено четыре или пять случаев значительной изменчивости), но примера таких сильных изменений еще не было. Из архива Обсерватории сейчас же были извлечены другие снимки этой области неба и была восстановлена картина изменений на протяжении почти двадцати лет. Больше того, продолжение наблюдений на новом телескопе, спектральные исследования этого объекта дали интереснейшие результаты.

Не легенда, приведенная выше, а именно этот реальный случай, связанный с именами двух молодых астрофизиков, характерен для поведения нашей советской научной молодежи.

Размышления над изложенными выше небольшими историями дают мне повод высказать в адрес молодежи, идущей в науку, некоторые пожелания.

Прежде всего хочу пожелать ей быть смелой и готовой встретить все перемены в жизни и науке, все предстоящие трудности и неожиданности. Нужна смелость, и еще раз смелость.

В качестве второго требования я назвал бы интерес, всепоглощающий интерес и любовь к науке и основанную на этой любви преданность ей. Если не отдаваться науке целиком, то легко можно превратиться в неудачника от науки.

Но одного лишь интереса и даже любви недостаточно. Наука требует способностей. Я верю, что человек может развивать имеющиеся у него способности, но нужно, чтобы было что развивать.

Однако даже всех этих качеств, взятых вместе, недостаточно. Нужно гигантское трудолюбие. Тому, кто намерен ограничиваться официальными часами работы (скажем, восемь часов в день), я советовал бы не идти в науку. Иначе ему угрожает опасность стать ее прихлебателем.

Дело в том, что объем знаний, накопленный в науке, со временем быстро возрастает. Но это значит, что объем научного материала, которым мы должны владеть, возрастает такими же темпами. К этому следует добавить, что перекрещивание путей исследований требует постоянного расширения кругозора и привлечения знаний из все более отдаленных от твоей специальности областей. Все это требует напряженного труда и огромных затрат времени. Все большую важность приобретает сотрудничество между представителями разных специальностей, умение работать в коллективе.

Но и этого мало. Молодой ученый должен уметь на каждом этапе определять, в каком направлении ему следует идти, какое место в общей системе научной работы ему занять, как найти оптимальный путь использования своих возможностей и способностей. Здесь, конечно, все зависит от сложившихся в данную эпоху и в данной области науки конкретных условий. Но выбранное им решение будет тем более правильным, чем лучше при этом он учтет интересы страны и ее науки.

И еще один совет: в науке важно правильно оценивать свои силы. Крайне вредна их недооценка, но опасна также их чрезмерная переоценка. Тем не менее следует быть оптимистом, чтобы тебя не вывели из строя возможные и даже частые в науке неудачи. Надо уметь использовать и неудачи, находя в них ценные уроки.

Итак, все время учиться, учиться до последнего часа своей жизни, работать и работать до самозабвения, но все же никогда не забывать главного: ты работаешь для Родины, для ее расцвета, для ее науки.

В. Болтянский

Топология графов

Известный французский математик Андре Вейль сказал как-то, что за душу каждого математика борются «дьявол абстрактной алгебры и ангел топологии». В этой статье, посвященной графам, мы будем прислушиваться в первую очередь к голосу ангела топологии, хотя легкий на помине дьявол тоже скажет свое веское слово.

Граф (конечный) — это множество точек (*вершин* графа), соединенных — на плоскости или в пространстве — конечным числом дуг (*ребер* графа), причем дуги пересекаются только в вершинах*) (рис. 1). В большей части статьи для нас будет важно, что граф — это некоторая фигура (множество всех точек дуг); выделенные точки этой фигуры — вершины — мы будем часто игнорировать.

Какие графы одинаковы?

Ангел топологии считает одинаковыми *гомеоморфные графы* — такие графы G_1 и G_2, для которых существует непрерывное (без разрывов) и обратимое (без склеиваний) отображение h: $G_1 \to G_2$ множества G_1 на все множество G_2 (такое отображение называется *гомеоморфизмом**)).

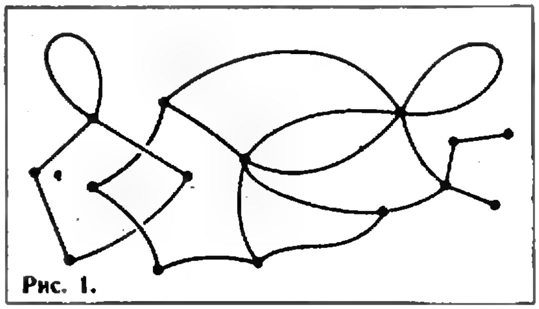


Рис. 1.

---

*) В общей теории графов принято несколько иное — «абстрактное» определение графа (ср. «Квант», 1981, № 3, с. 18)

*) При определении гомеоморфизма произвольных фигур требуется еще непрерывность обратного отображения h^{-1} (для конечных графов она выполняется автоматически, что нам шепнул на ухо без доказательства ангел топологии).

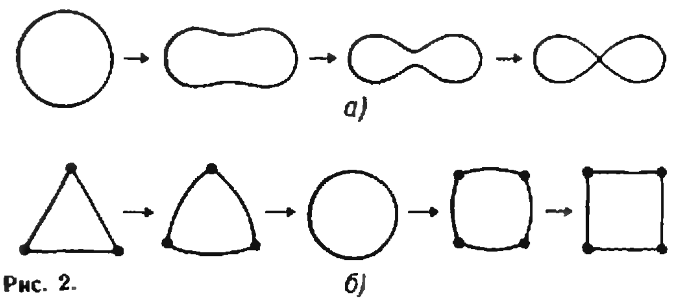


Рис. 2.

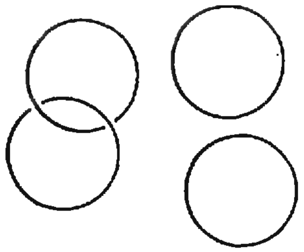


Рис. 3.

Из этого определения следует, что два графа гомеоморфны, в частности, если, как угодно изгибая и растягивая ребра, но не допуская разрывов и склеиваний, можно один из них наложить на другой. На рисунке 2, *а* показано, как можно окружность превратить в восьмерку; однако это не означает, что окружность и восьмерка гомеоморфны (ведь при этом превращении произошло склеивание двух точек). Окружность можно превратить и в полуинтервал, но для этого ее нужно разорвать и лишь потом распрямить. Поскольку разрывы не разрешены, такое превращение не будет гомеоморфизмом; к тому же, полуинтервал не является графом. А вот контур треугольника и контур квадрата гомеоморфны, и оба они гомеоморфны окружности, что показано на рисунке 2, *б*.

Заметим, что не всегда удается, как в этом примере, реализовать гомеоморфное отображение $h: G_1 \to G_2$ изгибанием, растяжением и сжатием графов в самом пространстве. Так, пара зацепленных окружностей (рис. 3) гомеоморфна паре незацепленных, хотя в пространстве расцепить их, не разрывая, невозможно.

Как показывает пример с треугольником и квадратом, при гомеоморфизме вершина не обязана перейти в вершину. К этому мы еще вернемся.

Пример 1. Будем представлять себе буквы русского алфавита в виде линий. Буквы Г, Л, М, П, С гомеоморфны между собой. Буквы Е, У, Т, Ч, Ш, Ц, Э также гомеоморфны между собой, но не гомеоморфны указанным ранее буквам. Буква О не гомеоморфна никакой другой букве русского алфавита *).

Поучительно сравнить понятие гомеоморфизма и понятие конгруэнтности фигур. В геометрии рассматриваются перемещения, то есть отображения, сохраняющие расстояния между точками. Две фигуры, которые переводятся одна в другую («совмещаются») с помощью перемещения называются *конгруэнтными* и рассматриваются как одинаковые (с геометрической точки зрения). В топологии рассматриваются отображения более общие, чем перемещения, а именно *гомеоморфные отображения*, которые могут не сохранять расстояний, а сохраняют лишь непрерывность расположения точек в фигурах (не допускают разрывов и склеиваний). Поэтому две гомеоморфные между собой фигуры рассматриваются (с топологической точки зрения) как одинаковые.

Простейшие инварианты

Свойства фигур, которые сохраняются при переходе от фигуры к гомеоморфной ей фигуре, называются *топологическими свойствами* фигур, или *топологическими инвариантами* (от латинского слова invariant — неизменный). Изучением топологических свойств фигур и занимается топология.

Чаще всего применяют такие топологические инварианты, которые являются числами (или другими алгебраическими объеками), так как

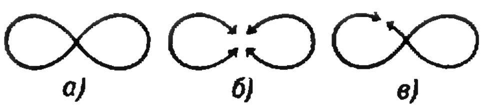


Рис. 4.

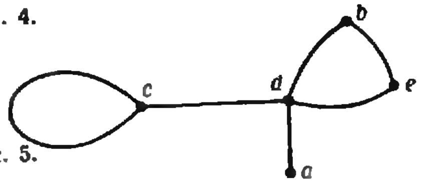


Рис. 5.

с такими инвариантами удобно обращаться. Используются они в основном для решения на первый взгляд безнадежной задачи: доказать, что две фигуры A и B **не** гомеоморфны.

Действительно, доказывая, что нечто можно простроить (у нас — гомеоморфизм $h\colon A\to B$), достаточно придумать один вариант этого построения. А как доказать, что нечто нельзя построить? Для этого нужно перебрать всевозможные варианты построений (у нас — отображений $h\colon A\to B$) и проверить, что ни один вариант не годится (не является гомеоморфизмом). Но обычно отображений $h\colon A\to B$ бесконечно много, всех не проверишь. Как быть?

Здесь и помогают числовые инварианты. Пусть каждой фигуре A рассматриваемого класса приписывается число $q(A)$, причем гомеоморфным фигурам приписываются одно и то же число. Пусть фигуры A и B таковы, что $q(A)\neq q(B)$. Тогда они не могут быть гомеоморфными, нельзя построить гомеоморфизм $h\colon A\to B$!

Удивительная простота этого рассуждения скрывает его глубину и важность. Создается впечатление, что нас обманули, спрятав неизвестно куда трудность задачи. Это не удивительно: появились инварианты — числа, за которыми скрывается дьявол абстрактной алгебры, большой хитрец и мистификатор.

Пример 2. Буква Ы представляет собой фигуру, состоящую из двух не связанных между собой частей. Большинство остальных букв русского алфавита состоит из одного связного куска (исключение составляют буквы Й, Ё). Число связных «кусков», из которых состоит фигура (говорят также: *число компонент* фигуры), является топологическим инвариантом. Поэтому буква Ы не гомомеоморфна, например, букве О, букве П, букве Ц и т. д.

Пример 3. На восьмерке (рис. 4, *а*) имеется такая точка x, что после ее удаления (рис. 4, *б*) мы получаем несвязную фигуру (содержащую больше одной компоненты). Точку, обладающую этим свойством, называют *разбивающей* точкой фигуры. Никакая отличная от x точка восьмерки не является разбивающей (рис. 4, *в*).

Если точка x фигуры A является разбивающей, она остается таковой при любом гомеоморфизме фигуры A, аналогично — для неразбивающей точки. Поэтому число разбивающих точек данной фигуры есть ее топологический инвариант, число неразбивающих точек — также топологический инвариант.

Задачи

1. Для каждой из букв русского алфавита укажите, сколько разбивающих и неразбивающих точек она содержит. Докажите, что буквы О, Г, Т, Ь попарно не гомеоморфны.

2. Докажите, что для любого натурального n существует фигура, содержащая ровно n разбивающих точек, а также фигура, содержащая ровно n неразбивающих точек.

Пример 4. Пусть A — граф и x — его вершина. Число ребер графа A, сходящихся в x, называется *индексом* вершины x в графе A (при этом *петля* — ребро с началом и концом в одной и той же вершине x — считается за два ребра, ибо она входит в x двумя своими концами). На рисунке 5 вершины a, b, c, d имеют индексы 1, 2, 3, 4 соответственно. Число вершин индекса $n\neq 2$, содержащихся в графе, — топологический инвариант. Почему приходится исключать вершины индекса 2?

Задачи

3. Докажите, что буквы Ю и Ф не гомеоморфны. Указание. Воспользуйтесь тем, что число вершин индекса k ($k\neq 2$) является инвариантом.

4. Сформулируйте необходимое и достаточное условие, при выполнении которого фигура, составленная из конечного числа дуг, гомеоморфна окружности.

5. Пусть G — граф. Через $a_k(G)$ обозначим число вершин этого графа, имеющих индекс k. Докажите, что число ребер графа G

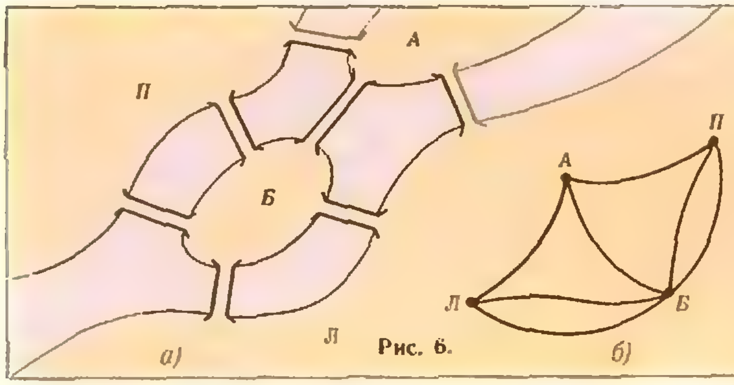


Рис. 6.

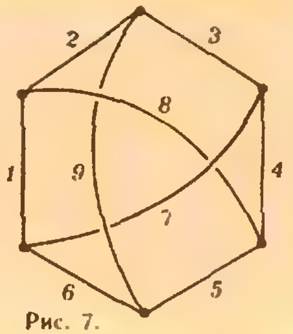


Рис. 7.

равно

$$\frac{1}{2}\left(a_1(G)+2a_2(G)+3a_3(G)+\dots\right).$$

6. Докажите, что во всяком графе число вершин, имеющих нечетный индекс, четно.

Кёнигсбергские мосты

Граф называется *уникурсальным* (или эйлеровым), если его можно «нарисовать одним росчерком», то есть обойти его весь непрерывным движением, не проходя одно и то же ребро дважды. Свойство графа быть уникурсальным является, очевидно, топологическим инвариантом. Однако этот топологический инвариант не является новым, а выражается через понятие индекса вершины (см. задачу 9).

Задачи

7. Докажите, что если каждая вершина графа имеет индекс, не меньший двух, то из ребер этого графа можно составить линию, гомеоморфную окружности.

8. Докажите, что если все вершины связного графа имеют четный индекс, то этот граф можно «нарисовать одним росчерком», начав движение из произвольной вершины и возвратясь в ту же вершину.

9. Докажите, что связный граф тогда и только тогда уникурсален, когда он содержит не больше двух вершин нечетного индекса.

С уникурсальными графами связана задача о кёнигсбергских мостах, рассмотренная еще Эйлером. В то время в Кёнигсберге было семь мостов через реку Прегель (рис. 6, *а*). Задача состоит в том, чтобы выяснить, можно ли, прогуливаясь по городу, пройти через каждый мост точно по одному разу. Сопоставим с планом города некоторый граф: вершина *Л* обозначает левый берег, *П* — правый берег, *А* и *Б* — острова, а ребра графа соответствуют мостам (рис. 6, *б*). В этом графе все четыре вершины имеют нечетный индекс. Следовательно, граф не уникурсален, и потому требуемого маршрута не существует.

Задачи

10. Докажите, что, добавив еще один мост (где угодно на плане рисунка 6, *а*), мы получим схему города, по которому можно пройти через каждый мост ровно по одному разу.

11. *Полным графом* называется граф без петель, у которого любые две вершины соединены ровно одним ребром. В каком случае полный граф уникурсален?

Как построить связный граф

Всякий граф можно «построить», добавляя одно ребро за другим (разумеется, при этом нужно будет отмечать и вершины графа). Нумерация ребер графа на рисунке 7 выбрана так, что при вычерчивании графа в соответствии с этой нумерацией все время получаются связные графы. Если бы, однако, мы занумеровали ребра в обратном порядке, то при вычерчивании у нас сначала получался бы несвязный граф. Оказывается, *во всяком связном графе существует такая нумерация ребер, что при вычерчивании графа в соответствии с этой нумерацией все время получаются связные графы.* Это утверждение можно назвать «теоремой о вычерчивании связных графов».

Задачи

12. Докажите, что любой связный граф можно «нарисовать одним расчерком», если разрешить проходить каждое ребро ровно два раза.

13. Выведите из утверждения предыдущей задачи теорему о вычерчивании связных графов.

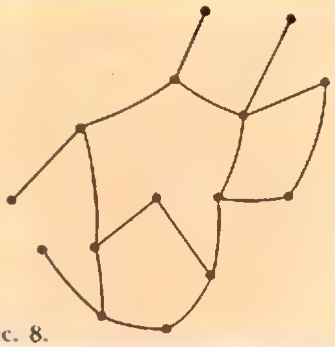


Рис. 8.

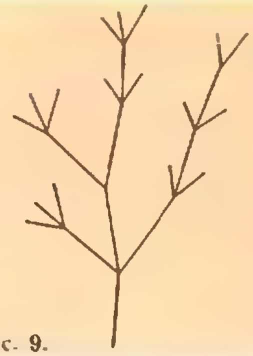


Рис. 9.

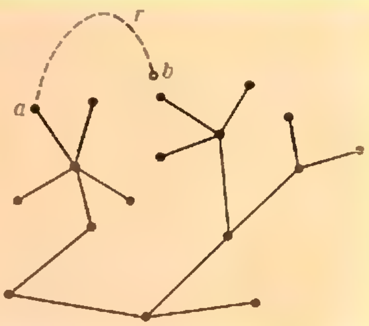


Рис. 10.

14. Докажите, что любые две вершины связного графа G можно соединить в G *простой цепочкой* ребер — такой цепочкой, что объединение ребер этой цепочки представляет собой линию, гомеоморфную отрезку.

Сколько деревьев в лесу?

Контуром в графе называется замкнутая цепочка ребер, объединение которых представляет собой линию, гомеоморфную окружности (рис. 8). Связный граф, не содержащий ни одного контура, называется *деревом* (рис. 9). Докажем, что *в любом дереве число вершин и число ребер P связаны соотношением*

$$\boxed{B - P = 1.} \qquad (1)$$

Для доказательства проведем индукцию по числу ребер P. При $P = 1$ (дерево состоит только из одного ребра и имеет две вершины) соотношение (1) справедливо. Предположим, что для любого дерева, имеющего n ребер, соотношение (1) уже доказано, и пусть G — дерево, имеющее $n+1$ ребер. Так как граф G — связный, его можно получить из некоторого связного графа G' добавлением одного ребра r. Граф G' содержит n ребер и тоже является деревом (почему?). По предположению индукции соотношение (1) для графа G' справедливо, и потому в нем имеется $n+1$ вершин. Заметим теперь, что только один конец добавляемого ребра r является вершиной графа G' (иначе, в силу задачи 14, при добавлении ребра r в графе G появился бы контур — см. рис. 10). Следовательно, при добавлении ребра r в графе G появляется одно новое ребро и одна новая вершина. Иначе говоря, в графе G имеется $n+2$ вершин и $n+1$ ребер, и потому соотношение (1) для него справедливо. Проведенная индукция доказывает равенство (1) для любого дерева.

Разность $B - P$ называется *эйлеровой характеристикой* графа G и обозначается через $\chi(G)$. Таким образом, равенство (1) означает, что *эйлерова характеристика любого дерева равна 1.*

Задачи

15. Граф, не содержащий контуров, называется *лесом*. Ясно, что если граф G представляет собой лес, то каждая его компонента является деревом. Докажите, что если G — лес, то число деревьев, которые «растут» в лесу (то есть число компонент графа G), равно $\chi(G)$.

16. Докажите, что если граф G является деревом, то каждые две его вершины могут быть соединены только одной простой цепочкой. Верно ли обратное?

Максимальное дерево и системы токов

Пусть теперь G — связный граф, не являющийся деревом. Тогда в G имеется контур; пусть r_1 — какое-либо ребро, входящее в этот контур (рис. 11, *а*). Удалив из G ребро r_1, мы получим связный граф G' (поскольку концы выброшенного

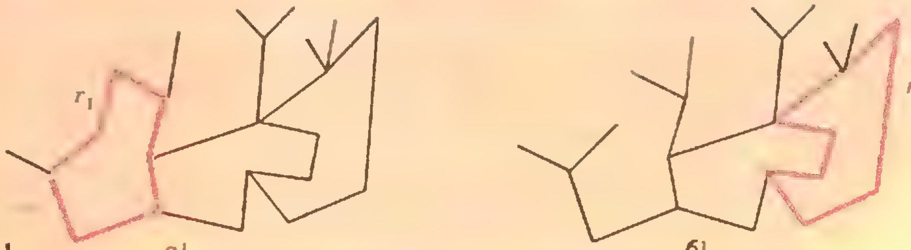


Рис. 11. *а)* *б)*

ребра r соединены в G' простой цепочкой — оставшейся частью контура), причем вершины у графа G' — те же, что и у G. Если G' еще не является деревом, то есть в G' также имеется контур (рис. 11 *б*), то мы можем взять произвольное ребро r_2 этого контура и, выбросив его, получить связный граф G'' с теми же вершинами, что и у G, и т. д. Так как число ребер конечно, этот процесс должен на каком-то шаге остановиться; иначе говоря, после выбрасывания какого-то ребра r_k мы получим связный граф G^*, содержащий все вершины графа G и уже не имеющий контуров, то есть являющийся деревом. Граф G^* называется *максимальным деревом* графа G, а ребра $r_1, r_2, \ldots, r_k$, которые пришлось выбросить из G, чтобы получить максимальное дерево G^*, называются *перемычками*.

Если B — число вершин графа G, то максимальное дерево G^* тоже имеет B вершин. Согласно (1), граф G^* имеет $B-1$ ребер, и потому число ребер графа G равно $B-1+k$ (чтобы из G^* получить G, надо «возвратить» k выброшенных ребер-перемычек). Следовательно,

$$\chi(G)=B-(B-1+k)=1-k. \quad (2)$$

Так как $k \geqslant 1$, получаем $\chi(G) \leqslant 0$. Таким образом, учитывая (1), мы видим, что *для любого связного графа G справедливо соотношение*

$$\boxed{\chi(G) \leqslant 1,}$$

причем равенство достигается в том и только в том случае, когда G — дерево.

Далее, согласно (2), число перемычек равно

$$k=1-\chi(G).$$

Задачи

17. Докажите, что если граф G содержит l компонент, то $\chi(G) \leqslant l$. В каком случае достигается равенство?

18*. Будем говорить, что в графе G задана *система токов*, если каждому ребру приписано направление (указываемое стрелкой) и некоторое неотрицательное число (ток), причем выполняется *правило Кирхгофа:* для каждой вершины сумма входящих в нее токов равна сумме исходящих. Докажите, что если граф является деревом, то в нем существует только *тривиальная* система токов (все токи равны нулю).

19. Пусть G — связный граф, G^* — его максимальное дерево, а $r_1, r_2, \ldots, r_k$ — перемычки (то есть ребра графа G, не содержащиеся в G^*). Докажите, что если произвольно задать токи на ребрах $r_1, r_2, \ldots, r_k$, то их можно однозначно дополнить токами на остальных ребрах так, чтобы получилась система токов в G.

Указание. Для каждой перемычки r_i существует единственный контур, содержащий ее и не содержащий других перемычек. Если пустить по этому контуру ток такой величины и направления, как указано на перемычке r_i, а затем взять сумму всех этих «контурных токов», то мы и получим требуемую систему токов на графе G. Если бы существовали две различные системы токов, совпадающие на перемычках, то их разность была бы нетривиальной системой токов на дереве G^*.

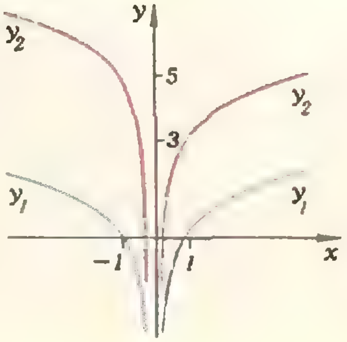
Итак, экскурсия по теории графов, проведенная под крылом ангела топологии, оказалась полезной для решения математических и даже физических задач. Мы надеемся, что она была приятной и вы захотите ее продолжить. В следующем номере журнала мы остановимся на более глубоких вопросах топологии графов. Но для их изучения нам придется более внимательно прислушаться к «дьяволу абстрактной алгебры».

В чем дело?

Согласно «основному свойству первообразной» («Алгебра и начала анализа 9—10», п. 57), если производные двух функций совпадают, то эти функции должны отличаться на константу. Производные функций:

а) $y_1=\frac{1}{1-x^2}$

и $y_2=\frac{x^2}{1-x^2}$,



б) $y_1=\ln|x|$ и

$$y_2=\begin{cases}\ln x+3, \text{ если } x>0,\\ \ln(-x)+5, \text{ если } x<0\end{cases}$$

(см. рисунок), совпадают. С другой стороны, в случае а) функция y_2 получается умножением функции y_1 на x^2, а в случае б) функции y_2 и y_1 отличаются на разных промежутках на разные константы. В чем дело?

Н. Александров,
Н. Смирнов

Ю. Брук, А. Стасенко

Метод размерностей помогает решать задачи

> *В физике... нет места для путаных мыслей... Действительно понимающие природу того или иного явления должны получать основные законы из соображений размерности.*
>
> Э. Ферми

Введение. Основные идеи

Едва ли не каждое выступление на научных семинарах или конференциях, где обсуждаются новые теоретические или экспериментальные работы, начинается с качественого описания и оценки того эффекта, о котором хочет рассказать выступающий. Даже в очень подробном докладе, лекции или статье нет возможности рассказать обо всех экспериментальных деталях или всех теоретических хитростях, которые были существенны для выполнения самой работы, для решения той или иной задачи. Но есть вопросы, о которых нужно скзать всегда, не дожидаясь вопросов слушателей или читателей.

К таким вопросам всегда и прежде всего относятся оценка порядка величины ожидаемого эффекта, простые предельные случаи и характер функциональной связи определяющих явление величин. Все эти вопросы тесно связаны друг с другом, анализ их и есть по существу то, что мы называем качественным описанием физической ситуации.

Одним из наиболее эффективных методов такого анализа является метод размерностей. Мы рассмотрим в этой статье его основы. Не будет преувеличением сказать, что метод размерностей обладает «максимальным КПД», экономя горы бумаги теоретикам, деньги и время экспериментаторам. Быстрая оценка масштабов исследуемых явлений, построение принципиальной схемы эксперимента, получение качественных и функциональных зависимостей, восстановление забытых формул на экзаменах — таковы лишь некоторые достоинства и приложения метода размерностей.

Анализ размерностей применяется в физике еще со времен Ньютона. Именно Ньютон сформулировал тесно связанный с методом размерностей принцип подобия, который мы и проиллюстрируем сейчас на совсем простом и хорошо понятном примере.

Представим себе, что тело с массой m перемещается прямолинейно под действием постоянной силы F. Если начальная скорость тела равна нулю, а скорость в конце пройденного отрезка длиной s равна v, то мы можем написать равенство, выражающее закон сохранения энергии: $mv^2/2=Fs$. Между величинами v, F, m и s существует, таким образом, функциональная связь.

Предположим теперь, что мы не знаем пока закона сохранения энергии (или не хотим его использовать), но знаем, что функциональная зависимость между v, F, m и s существует. Очень часто (но, конечно, не всегда!) функциональная зависимость физических величин имеет степенной характер. Допустим, что и в нашем примере это так. Можно сказать это же другими словами: мы считаем, что формула, определяющая скорость v как функцию F, m и s, имеет степенной вид

$$v\sim F^x m^y s^z. \qquad (*)$$

Здесь x, y и z — некоторые числа, которые нам предстоит еще определить. Знак $\sim$ означает, что левая часть формулы пропорциональна правой, то есть $v=kF^x m^y s^z$, где k — числовой коэффициент. Поскольку k — величина безразмерная, определить этот коэффициент с помощью метода размерностей, естественно, нельзя.

Левая и правая части соотношения (*) должны, конечно, измеряться одними и теми же единицами, то есть иметь одинаковые размерности. Будем измерять v в «м/с», F — в «Н», m — в «кг» и s — в «м». Иными словами, размерности величин v, F, m и s выберем такими: $[v]$ = м/с = м $\cdot$ с$^{-1}$, $[F]$ = Н = кг $\cdot$ м $\cdot$ с$^{-2}$, $[m]$ = кг, $[s]$ = м. (Символ $[A]$ обозначает размерность величины A.) Запишем условие того, что размерности левой и правой частей соотношения (*) одинаковы:

$$\text{м}\cdot\text{с}^{-1}=\text{кг}^x\cdot\text{м}^x\cdot\text{с}^{-2x}\cdot\text{кг}^y\cdot\text{м}^z=$$
$$=\text{кг}^{x+y}\cdot\text{м}^{x+z}\cdot\text{с}^{-2x}.$$

Заметьте, что сейчас мы написали уже равенство. В левой части вообще нет килограммов, поэтому и справа их быть не должно. Это значит, что

$$x+y=0.$$

Справа метры входят в степени $x+z$, а слева — в степени 1, поэтому

$$x+z=1.$$

Аналогично, из сравнения показателей степени при секундах следует

$$-2x=-1.$$

Полученные нами уравнения дают возможность найти числа x, y и z:

$$x=1/2, \quad y=-1/2, \quad z=1/2.$$

Теперь нам осталось записать окончательную формулу

$$v\sim\left(\frac{F}{m}\right)^{1/2} s^{1/2}.$$

Возведя в квадрат левую и правую части этого соотношения, мы найдем, что $v^2\sim\frac{F}{m}s$, или $mv^2\sim Fs$. В последней формуле читатель без труда узнает закон сохранения энергии, правда, без числового коэффициента.

Принцип подобия, сформулированный Ньютоном, заключается в том, что отношение v^2/s прямо пропорционально отношению F/m. Возьмем, например, два тела с разными массами m_1 и m_2; будем действовать на них разными силами F_1 и F_2, но такими, что отношения F_1/m_1 и F_2/m_2 будут одинаковыми. Под действием этих сил тела начнут двигаться. Если начальные скорости тел равны нулю, то скорости, приобретаемые телами на отрезке пути длины s, будут равны. Мы пришли к закону подобия с помощью идеи о равенстве размерностей правой и левой частей формулы, описывающей степенную связь значения конечной скорости со значениями силы, массы и длины пути.

Нелишне упомянуть здесь о том, что, хотя метод размерностей был по существу введен уже при построении основ классической механики, его эффективное применение для решения физических задач началось в конце прошлого — в начале нашего века. Большая заслуга в пропаганде этого метода и решении с его помощью ряда интересных и важных задач принадлежит выдающемуся физику Джону Вильяму Стрэтту (лорду Рэлею). В 1915 году Рэлей писал: «Я часто удивляюсь тому незначительному вниманию, которое уделяется великому принципу подобия даже со стороны весьма крупных ученых. Нередко случается, что результаты кропотливых исследований преподносятся как вновь открытые «законы», которые, тем не менее, можно было получить априорно в течение нескольких минут».

В наши дни физиков уже нельзя упрекнуть в пренебрежительном отношении или недостаточном внимании к принципу подобия и к методу размерностей. Мы разберем ниже две классические задачи, часто называемые задачами Рэлея. Задач, рассмотренных Рэлеем, в том числе и с помощью соображений размерности, конечно, намного больше, но те, о которых мы расскажем, довольно типичны. На этих и других примерах мы и познакомимся подробнее с тем, когда и как можно использовать для решения задач метод размерностей.

Задача Рэлея о колебаниях шарика на струне

Пусть между точками A и B натянута струна. Сила натяжения струны F. На середине этой струны в точке C находится тяжелый шарик. Длина отрезка AC (и соответственно CB) равна l. Масса M шарика намного больше массы самой струны. Струну оттягивают и отпускают. Довольно ясно, что шарик будет совершать колебания. Если амплитуда этих колебаний много меньше длины струны, то процесс будет гармоническим.

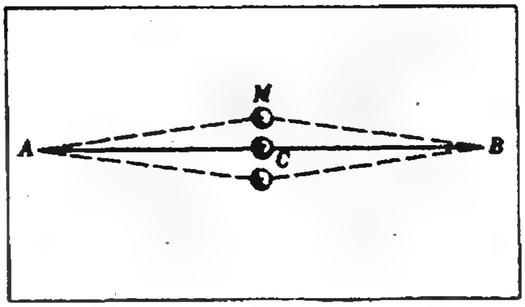


Рис. 1.

Рэлей показал, как найти зависимость частоты этих колебаний ω от натяжения струны F, массы шарика M и размера l. Мы воспроизведем сейчас его рассуждение.

Предположим, что величины ω, F, M и l связаны степенной зависимостью:

$$\omega \sim F^x M^y l^z. \qquad (**)$$

Показатели степени x, y и z — числа, которые нам нужно определить. Как и в задаче, рассмотренной выше, выпишем размерности интересующих нас величин в какой-либо системе единиц, например, в системе СИ:

$$[\omega] = \text{с}^{-1}, \quad [F] = \text{Н} = \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2}, \quad [M] = \text{кг}, \quad [l] = \text{м}.$$

Если формула (**) выражает реальную физическую закономерность, то размерности правой и левой частей этой формулы обязаны совпадать, то есть должно выполняться равенство

$$\text{с}^{-1} = \text{кг}^x \cdot \text{м}^x \cdot \text{с}^{-2x} \cdot \text{кг}^y \cdot \text{м}^z = \text{кг}^{x+y} \cdot \text{м}^{x+z} \cdot \text{с}^{-2x}.$$

В левую часть этого равенства вообще не входят метры и килограммы, а секунды входят в степени -1. Это означает, что должны удовлетворяться следующие уравнения для чисел x, y и z:

$$x + y = 0, \quad x + z = 0, \quad -2x = -1.$$

Решая эту систему, находим:

$$x = 1/2, \quad y = -1/2, \quad z = -1/2.$$

Следовательно,

$$\omega \sim F^{1/2} M^{-1/2} l^{-1/2}.$$

Мы уже говорили раньше о том, что из-за незнания числового коэффициента знак равенства нам приходится заменять символом пропорциональности. Интересно отметить, однако, что точная формула для частоты отличается от найденной нами всего в $\sqrt{2}$ раз ($\omega^2=2F/Ml$). Другими словами, мы можем в данном случае считать, что оценку для ω мы получили не только качественную (в смысле характера зависимости от величин F, M и l), но и количественную. По порядку величины найденная степенная комбинация F, M и l дает правильное значение частоты. Нас и в дальнейшем будут интересовать оценки по порядку величины. В простых задачах довольно часто коэффициенты, неопределяемые методом размерностей, можно считать числами порядка единицы. Следует иметь в виду, конечно, что это не есть строгое правило. Окончательный вывод о значении числового коэффициента можно сделать только из каких-то дополнительных соображений. (Заметьте, кстати, что в примере, рассмотренном во «Введении», числовой коэффициент в формуле, определяющей скорость v как функцию силы, массы и длины пути, — также число порядка единицы.)

Само собой разумеется, решая задачу о колебаниях струны, мы могли бы с самого начала ввести вместо частоты ω однозначно связанный с ней период колебаний $T=2\pi/\omega$ и искать степенную зависимость именно периода T от натяжения струны F, массы M и размера l. Множитель 2π здесь вовсе «не портит» (но и не «улучшает»!) формулы, полученной из соображений размерностей, — ведь мы все равно не можем написать числовой коэффициент без точного решения уравнения колебаний.

Любопытно, что в другом, совсем простом и хорошо всем известном примере — о колебаниях математического маятника — для частоты колебаний уже из соображений размерности мы получили бы точную формулу $\omega^2=g/l$. Неопределяемый методом размерностей числовой коэффициент равен в этом случае единице. Если же мы с самого начала отыскивали бы связь периода колебаний математического маятника с его длиной l и ускорением свободного падения g, то мы пришли бы к формуле $T\sim\sqrt{l/g}$, которая отличается от точной на множитель 2π. Но и из этого примера вовсе не следует, что при использовании метода размерностей частота колебаний имеет какие-то преимущества перед периодом; происхождение множителя 2π связано лишь с определением $\omega=2\pi/T$.

Вернемся к рассмотренной задаче Рэлея и еще раз сформулируем предположения, которые позволили решить ее методом размерностей.

Во-первых, мы предположили, что действительно существует связь между величинами ω, F, M и l. Во-вторых, мы считали, что формула, выражающая эту связь, имеет степенной вид: $\omega\sim F^xM^yl^z$.

Метод размерностей помогает находить функциональные зависимости между разными физическими величинами, но только для тех ситуаций, когда эти зависимости степенные. К счастью, таких зависимостей в природе довольно много, и метод размерностей должен стать нашим хорошим помощником.

Правило $N-K=1$

Понятие размерности физической величины вводится тогда, когда уже выбраны некоторые основные физические величины и установлены единицы для их измерения. В механике традиционными основными величинами мы считаем массу, длину и время. В системе СИ эти величины измеряются соответственно в килограммах, метрах и секундах, в системе СГС — в граммах, сантиметрах и секундах.

Напомним, что основными единицами измерения в каждой системе (основными размерностями) называются единицы измерения (размерности) основных величин. Единицы измерения всех прочих, не основных величин выражаются через основные единицы измерения. Например, в системе СИ единица измерения силы «Ньютон» — это кг • м/с^2, единица измерения энергии «Джоуль» — кг • м^2/с^2; в системе СГС это соответственно «дина» — г • см/с^2 и «эрг» — г • см^2/с^2. Такие единицы называют производными.

Если мы рассматриваем задачи, в которых фигурируют немеханические величины (например, электрический заряд, температура и т. д.), можно увеличить число основных величин. В системе СИ в число основных величин включают силу тока (измеряют ее в «Амперах»), температуру (единица измерения — «Кельвин») и т. д.

В общем случае выбор основных величин и единиц для их измерения может производиться разными способами. Здесь многое зависит от удобства, традиций и существующих стандартов и соглашений. Для нас очень важно отметить, что пользоваться методом размерностей можно в любой системе единиц. Каждый раз, конечно, выражения для размерностей различных величин нужно писать в одной и той же заранее выбранной системе.

Представим себе, что в какой-то задаче нам надо отыскать функциональную зависимость между N величинами. Предполагая, что эта зависимость имеет степенной характер, мы можем пытаться решить задачу методом размерностей. *Если размерности всех N величин выражаются через размерности K основных величин и если при этом $N-K=1$, то существует единственная формула, задающая степенную зависимость между N величинами,* *и эта формула может быть найдена методом размерностей.*

Убедиться в этом нетрудно. Общий вид искомой формулы мы записываем так: в левой части стоит одна из величин в степени 1, а в правой части — произведение степеней остальных $N-1$ величин. Показатели степени пока неизвестны. Всего неизвестных показателей тоже $N-1$. Для определения этих показателей нам нужно $N-1$ уравнений. Каждое из уравнений мы получаем, сравнивая показатели степени, стоящие слева и справа при одной из основных размерностей. Если в нашей задаче встречается ровно $N-1$ основных размерностей, мы получим ровно столько уравнений, сколько нам требуется. Уравнения эти линейные, а существование и единственность решения системы таких уравнений гарантируют нам существование и единственность искомой степенной формулы. Это правило хорошо иллюстрируют разобранные выше примеры. Записывая формулы $v \sim F^x m^y s^z$ или $\omega \sim F^x M^y l^z$, мы каждый раз имели $N=4$ величины, число неизвестных показателей $N-1=3$ совпадало с числом основных размерностей $K=3$ (кг, м, с). Системы трех линейных уравнений для трех неизвестных имели единственные решения, окончательные формулы для v и ω также были единственно возможными. Таким образом, для четырех функционально связанных величин мы всегда можем построить только одну формулу, если число основных размерностей, встречающихся в задаче, равно трем.

Задача Рэлея о колебаниях сферической капельки

Пусть из круглого отверстия вытекает капля. Довольно естественно считать, что в равновесии капля должна иметь сферическую форму — поверхностная энергия при этом минимальна, а всякая система стремится попасть в состояние с минимальной энергией. Даже очень малые деформации капли приведут к тому, что силы поверхностного натяжения «заставят» ее пульсировать — форма капли будет периодически изменяться. Мы предполагаем, что колебания продолжаются достаточно долго и затухание их мало. Нас интересует вопрос о частоте (или периоде) процесса. Эта частота может зависеть, очевидно, от величины поверхностного натяжения жидкости σ, плотности жидкости ϱ и радиуса капли r*. Будем искать эту зависимость в виде

$$\omega \sim \sigma^x \varrho^y r^z.$$

Выпишем размерности всех величин в системе СИ:

$$[\omega] = \text{с}^{-1},\ [\sigma] = \text{Н} \cdot \text{м}^{-1} = \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{м}^{-1} = \text{кг} \cdot \text{с}^{-2},$$

$$[\varrho] = \text{кг} \cdot \text{м}^{-3},\ [r] = \text{м}.$$

Число величин, связь между которыми мы отыскиваем, снова на единицу больше числа основных размерностей. Правило $N-K=1$ говорит нам, что формула для частоты должна получиться единственной. Уравнения для определения x, y и z получаются из соотношения:

$$\text{с}^{-1} = \text{кг}^x \cdot \text{с}^{-2x} \cdot \text{кг}^y \cdot \text{м}^{-3y} \cdot \text{м}^z = \text{кг}^{x+y} \cdot \text{с}^{-2x} \cdot \text{м}^{-3y+z}.$$

Для трех неизвестных чисел есть три уравнения:

$$-2x = -1,\ x+y=0,\ -3y+z=0.$$

Эта система имеет единственное решение

$$x = 1/2,\ y = -1/2,\ z = -3/2.$$

Окончательно интересующая нас формула для частоты колебаний запишется так:

$$\omega \sim \sqrt{\frac{\sigma}{\varrho r^3}}.$$

Эта формула подсказывает и возможный способ экспериментального определения величины σ. Для этого нужно знать плотность жидкости ϱ, радиус капли r и определить на опыте частоту ω. То, что мы не знаем числового коэффициента в этой формуле, не должно быть серьезным препятствием. Мы можем определить его, например, проделав опыт с жидкостью, для которой вели-

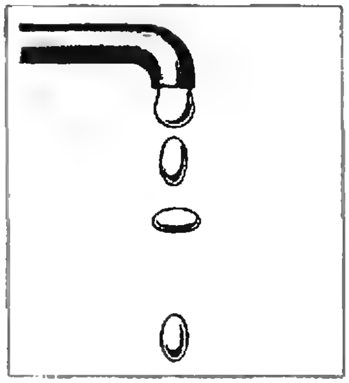


Рис. 2.

---

*) Возможно, в этом месте у вас возник вопрос: почему не предположить, что частота может зависеть еще и от силы тяжести, действующей на каплю? Вопрос этот очень естественный, и мы обязательно обсудим его. Но немного позже.

чина поверхностного натяжения известна.

По существу мы сталкиваемся сейчас с простым случаем моделирования — колебания капли исследуемой жидкости можно промоделировать колебаниями капли жидкости с известными σ и ϱ. Можно говорить здесь и о подобии колебаний формы капли в двух разных жидкостях.

Можно проинтерпретировать формулу для частоты колебаний ω и по-другому. Перепишем ее так:

$$(\sigma/\varrho)\sim r^3\omega^2.$$

Считая σ и ϱ параметрами, характеризующими жидкость и потому одинаковыми для капель этой жидкости, имеющих разные размеры, мы приходим к заключению, что периоды $T_1=2\pi/\omega_1$ и $T_2=2\pi/\omega_2$ колебаний двух капель одной и той же жидкости и радиусы r_1 и r_2 этих капель связаны соотношением

$$\frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{r_1^3}{r_2^3}$$

— квадраты периодов колебаний двух капель относятся как кубы их размеров! Не напоминает ли это вам один из законов Кеплера? Аналогия, пожалуй, далекая, но в обоих случаях речь идет о периодических процессах!

Сделаем еще одно замечание. Уже при выписывании набора величин, связь между которыми мы хотим отыскать, нужно отдавать себе отчет в том, что существенно и что несущественно для конкретного физического явления. Если речь идет о динамике (например, о колебаниях), то в задаче должны появиться силовая и массовая характеристики. Роль первой из них в задаче о колебаниях капли играла величина σ, роль второй — плотность жидкости ϱ. По существу мы считали, что колебания определяются только поверхностным натяжением. Полученное нами решение, безусловно, годится, если капля колеблется в кабине космического корабля. А годится ли оно вблизи Земли? Не должны ли мы учесть еще и силу тяжести, действующую на каплю?

Будем рассуждать так. Сила тяжести $F_{\text{т}}\sim\varrho r^3 g$, а силы поверхностного натяжения $F_{\text{п. н}}\sim\sigma r$. Ясно, что при достаточно малых r силы поверхностного натяжения больше силы тяжести. Опуская числовые множители, запишем неравенство, выражающее условие, при котором можно пренебречь силой тяжести: $\sigma r\gg\varrho r^3 g$. Это неравенство эквивалентно такому: $r\ll(\sigma/\varrho g)^{1/2}$. Можно утверждать, что для достаточно малых капель сила тяжести не должна сказываться на колебаниях. Оцените сами, каковы максимальные размеры капель воды, при которых еще можно пользоваться полученной нами выше формулой для частоты колебаний.

С какой частотой колеблются атомные ядра?

Оказывается, что на поставленный вопрос можно получить ответ, используя формулу для частоты колебаний капли.

В капельной модели атомного ядра ядро рассматривается как капелька ядерного вещества — «жидкости», состоящей из протонов и нейтронов. Ядро-капельку удерживают от распада силы поверхностного натяжения.

Нуклоны (протоны и нейтроны) находятся внутри ядра в связанном состоянии. Это значит, что для того, чтобы «оттащить» их друг от друга, нужно затратить определенную энергию. В расчете на один нуклон эта энергия равна $\varepsilon\approx 13\cdot10^{-13}$ Дж/нуклон. Радиус ядра $r\approx10^{-14}$ м, масса протона $m_p\approx1{,}7\cdot10^{-27}$ кг. Попробуем использовать всю эту информацию для вычисления характерных частот, с которыми колеблются атомные ядра — капельки ядерного вещества*).

Для частоты колебаний капельки ядерного вещества можно было бы воспользоваться той же формулой, что и для колебаний капель обычной жидкости, если бы только мы научились вычислять поверхностное натяжение «ядерной жидкости». Полная поверхностная энергия в капельной модели должна быть по порядку величины такой же, как и энергия связи всех частиц, находящихся внутри капли. Если число нуклонов в ядре равно A (это число называют «массовым числом»), то полная энергия связи всех нуклонов равна $A\varepsilon$ и поверхностная энергия ядра-капельки по порядку величины тоже равна $A\varepsilon$. Поделив ее на площадь поверхности капли $S=4\pi r^2$, мы и получим оценку для поверхностного натяжения: $\sigma \sim A\varepsilon/4\pi r^2$. Масса ядра из A нуклонов порядка Am_p, объем ядра — $\frac{4}{3}\pi r^3$; следовательно, плотность «ядерной жидкости» по порядку величины равна $\varrho \sim 3Am_p/4\pi r^3$. Подставив полученные выражения для σ и ϱ в формулу $\omega \sim (\sigma/\varrho)^{1/2} r^{-3/2}$, мы придем к интересующему нас результату:

---

*) Нас интересует сейчас только качественная зависимость частоты колебаний от параметров ядра и количественная оценка по порядку величины; поэтому мы можем не учитывать разницу масс протона и нейтрона и считать массу нуклона равной, например, массе протона.

$$\omega \sim \frac{1}{\sqrt{3}\, r}\left(\frac{\varepsilon}{m_p}\right)^{1/2} \sim \frac{1}{r}\left(\frac{\varepsilon}{m_p}\right)^{1/2}.$$

Типичные «ядерные» частоты — порядка $10^{22}\,\text{с}^{-1}$. Проверьте, что написанная формула дает близкий результат, не определенный нами числовой коэффициент — порядка единицы.

Метры «вдоль» и «поперек»

Те задачи, которые мы рассматривали до сих пор, решались по существу, одинаково и однозначно. Не нужно думать, что так всегда и бывает. Существуют ситуации, когда правило $N-K=1$ не выполняется, и тогда приходится прибегать к новым идеям. Одна из таких идей заключается в том, что можно попытаться увеличить число основных величин, то есть по существу перейти к изучению задачи в системе с большим числом основных размерностей.

Чтобы проиллюстрировать такую идею, рассмотрим две простые задачи.

Первая — безусловно, всем хорошо известна. Представим себе, что со стола высоты H падает на пол шарик. Скорость шарика в момент отрыва от стола горизонтальна и равна v_0. Дальность его полета можно, конечно, связать с H и v_0. Мы предлагаем читателю проделать сейчас эти простые вычисления, прежде чем читать эту статью дальше. Проделали? А теперь подумайте — нельзя ли найти связь между H и v_0 с помощью метода размерностей? Давайте попытаемся. Пусть дальность полета равна x_0. Кроме H и v_0, для задачи существенной величиной является, несомненно, ускорение свободного падения g. От массы шарика ответ зависеть не должен — ведь это чисто кинематическая задача. Таким образом, у нас есть четыре величины — x_0, v_0, H и g. В выражения же для размерностей всех этих величин входят только метры и секунды, то есть $N=4$, $K=2$ и $N-K=2>1$! Если записать $x_0 \sim v_0^{\alpha} H^{\beta} g^{\gamma}$, то для трех неизвестных чисел α, β, γ мы сможем написать только два уравнения. Как же быть?

Давайте введем отдельные единицы для измерения расстояний по вертикали и по горизонтали: расстояния вдоль вертикальной оси Y будем измерять в «вертикальных» метрах — м_y, а расстояния вдоль горизонтальной оси X — в «горизонтальных» метрах — м_x. Тогда размерности таковы:

$$[g]=\text{м}_y\text{с}^{-2},\ [v_0]=\text{м}_x\text{с}^{-1},$$
$$[H]=\text{м}_y,\ [x_0]=\text{м}_x.$$

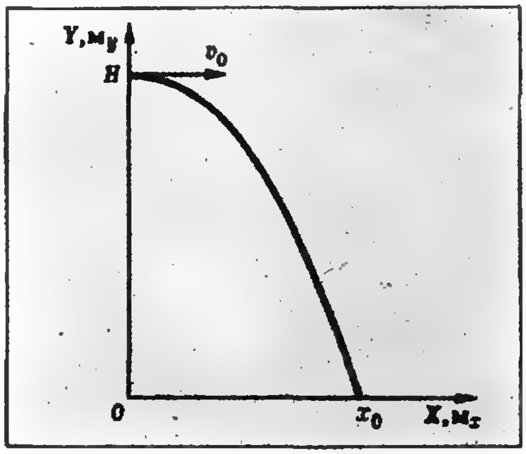


Рис. 3.

Теперь для $N=4$ уже $K=3$ — основными размерностями стали м_x, м_y и с. Формула $x_0 \sim v_0^{\alpha} H^{\beta} g^{\gamma}$ приводит к соотношению

$$\text{м}_x = \text{м}_x^{\alpha} \cdot \text{с}^{-\alpha} \cdot \text{м}_y^{\beta} \cdot \text{м}_y^{\gamma} \cdot \text{с}^{-2\gamma} = \\ = \text{м}_x^{\alpha} \cdot \text{с}^{-\alpha \cdot 2\gamma} \cdot \text{м}_y^{\beta+\gamma}.$$

Система уравнений

$$\alpha=1,\ -\alpha-2\gamma=0,\ \beta+\gamma=0$$

имеет единственное решение

$$\alpha=1,\ \beta=1/2,\ \gamma=-1/2,$$

и мы получаем искомый ответ:

$$x_0 \sim v_0 \sqrt{H}/g\ .$$

Сравните это решение с тем, которое получилось у вас при точном вычислении.

Вторая задача, иллюстрирующая ту же идею, относится к кинетической теории газов. Молекулы газа имеют конечные размеры и могут сталкиваться друг с другом даже в разреженном газе. Среднее расстояние, пролетаемое молекулами между двумя последовательными столкновениями, называется длиной свободного пробега. Нас интересует, как зависит длина свободного пробега l от размера молекул r и их концентрации n.

Выписываем размерности: $[n] = \text{м}^{-3}$, $[l] = \text{м}$, $[r] = \text{м}$. Ясно, что, пытаясь связать l, r и n, мы опять обнаружим, что правило $N-K=1$ не выполняется: $N=3$, а $K=1$ — в задаче есть только одна основная размерность — м.

В этом случае также удобно ввести «продольные» и «поперечные» длины. Будем условно считать молекулы шариками и следить за одним из таких шариков. Договоримся измерять расстояние вдоль траектории шарика-молекулы «продольными метрами» — $\text{м}_\parallel$. Ясно, что «помешать» движению избранной нами молекулы могут те молекулы, которые попадают в цилиндр, образующая которого параллельна траектории, а основанием служит сечение молекулы-шарика, перпендикулярное к траектории. Площадь этого сечения пропорциональна r^2. Естественно считать в такой ситуации, что r измеряется в «поперечных метрах» — $\text{м}_\perp$. Тогда объем измеряется в единицах $\text{м}_\parallel \cdot \text{м}_\perp^2$ и размерность n есть $\text{м}_\parallel^{-1} \cdot \text{м}_\perp^{-2}$. После этих рассуждений у нас появляются две основные размерности — $\text{м}_\parallel$ и $\text{м}_\perp$ — для трех величин l, r и n. Этого уже достаточно, чтобы получить однозначную формулу, их связывающую. Легко проверить, что эта формула такова:

$$l \sim 1/nr^2.$$

Задачи и рекомендации

Мы познакомились выше с основными элементами анализа задач с помощью метода размерностей. Еще раз подчеркнем, что формулы полученные из подобных рассуждений, обычно позволяют делать и количественные оценки. Здесь нужна, конечно, известная осторожность, и тем не менее, просто грех не пользоваться тем, что числовые коэффициенты в формулах часто оказываются порядка единицы.

Само собой разумеется, что оценки, построение простых моделей и использование аналогий — это всегда только первый этап исследования физических процессов. За этим этапом должно следовать более аккуратное и по возможности точное изучение обсуждаемых явлений. Мы вовсе не хотели бы, чтобы у вас сложилось впечатление о всесильности метода размерностей. Прежде чем использовать его в той или иной форме, нужно постараться яснее представить себе физический процесс, хорошо продумать интересующие нас характеристики. Только при этом условии можно надеяться на успех.

Ниже мы предлагаем вам для самостоятельных раздумий задачи.

Задачи

1. Найдите формулу, описывающую связь между массой планеты M, ее радиусом R и минимальным периодом вращения планеты вокруг своей оси. Учтите, что само существование столь грандиозных «шариков», которыми являются планеты, обусловлено гравитационным взаимодействием частиц, из которых такие «шарики» состоят. Каков минимальный период вращения для планеты с массой и радиусом такими же, как у Земли? Нужно получить оценку по порядку величины.

2. Линейные размеры двух геометрически подобных стальных камертонов отличаются в три раза. Как отличаются частоты этих камертонов?

3. Найдите зависимость периода пульсаций газового пузыря, образовавшегося при глубинном подводном точечном взрыве, если известно, что при взрыве выделилась энергия E, а давление воды равно p. Попробуйте оценить также максимальный размер газового пузыря. Как зависит период пульсаций от глубины H?

4. Оцените давление в центре звезды с массой M и радиусом R. Вычислите соответствующие числовые значения для Солнца ($M_C = 2 \cdot 10^{30}$ кг, $R_C = 7 \cdot 10^5$ км), для белого карлика ($R_к = 10^3$ км), для нейтронной звезды ($R_н \approx 20$ км). Массы белого карлика и нейтронной звезды порядка массы Солнца.

5. Сравните поверхностные натяжения ядерной жидкости и воды.

И еще мы хотим указать вам несколько книг и статей, в которых можно найти много примеров использования метода размерностей при анализе вопросов из разных областей физики. (Ссылки расположены в порядке возрастающей сложности.)

1. Б. Ю. Коган. «Размерность физической величины» (Библиотечка физико-математической школы) (М., «Наука», 1968).
2. А. С. Компанеец. «Размерность физических величин и подобие явлений» («Квант», 1975, № 1).
3. Н. Д. Кришталь. «Метод размерностей», («Квант», 1975, № 1).
4. Ю. М. Брук, А. Л. Стасенко. «Как физики делают оценки — метод размерностей и порядки физических величин» (в сб. «О современной физике — учителю»). (М., «Знание», 1975).
5. Г. Хантли. «Метод размерностей» (перевод с англ.) (М., «Мир», 1970).
6. Л. И. Седов. «Теория размерности и физическое подобие» (в кн. Л. И. Седова «Размышления о науке и об ученых») (М., «Наука», 1980).

Новости науки

Распадается ли протон?

Казалось бы, сам факт нашего существования свидетельствует о том, что протон — стабильная частица и его распад принципиально невозможен. Много лет физики так и думали.

Все хорошо знали, что свободный нейтрон распадается, превращаясь в протон, электрон и антинейтрино:

$$n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}.$$

Этот распад оправдан тем, что нейтрон немного тяжелее протона (примерно на 0,138% его массы).

Распаду нейтрона отвечает среднее время жизни $\tau \approx 900$ с. Это значит, что, если наблюдать за большим количеством свободных нейтронов, в одну секунду будет распадаться 1/900 часть от их полного числа N:

$$\Delta N = -\frac{1}{900} N.$$

Со временем число свободных нейтронов будет убывать по экспоненциальному закону

$$N = N_0 e^{-\frac{t}{900}},$$

где N_0 — число нейтронов в некоторый момент времени, принятый за начальный ($t = 0$).

Процесс распада нейтрона обладает важной особенностью: и нейтрон, и протон — это нуклоны, тяжелые частицы, из которых построены атомные ядра. При распаде нейтрона число нуклонов остается одним и тем же: один нуклон — нейтрон — превращается в один нуклон — протон.

Такой закон сохранения числа нуклонов — один из самых фундаментальных законов природы. Но всегда ли он верен? Не может ли протон распасться и превратиться, например, в положительный мю-мезон и нейтрино:

$$p \rightarrow \mu^+ + \nu$$

или еще во что-нибудь?

Ясно, что, если такой распад и возможен, он должен быть очень редким. А среднее время жизни протона должно быть, соответственно, очень большим. Во всяком случае, значительно больше времени существования нашей Вселенной, что составляет, по современным представлениям, приблизительно 15—20 миллиардов лет, то есть порядка 10^{18} секунд.

Во многих лабораториях мира ученые безуспешно пытались обнаружить распад протона. Поиски велись в течение почти 10 лет ($\sim 10^8$ с) на больших массах вещества. В принципе при таких условиях можно зарегистрировать очень редкие события.

Проведенные опыты позволяют утверждать, что, если протон и распадается, то его среднее время жизни

$$\tau > 3 \cdot 10^{30} \text{ лет}.$$

(Это при условии, что распад происходит с образованием мю-мезона. Для других возможных вариантов распада чувствительность опытов была несколько меньшей и они приводили к выводу, что $\tau > 10^{30}$ лет.)

Представляет ли интерес дальнейшее уточнение опытов? Ведь вероятность распада протона так мала!

Оказывается, выяснить, насколько точен закон сохранения числа нуклонов, очень важно для современной теории. Сейчас физики думают, что на ранних этапах развития Вселенной вероятность распада протона была большой — просто эта вероятность уменьшается со временем, или — точнее — уменьшается с уменьшением плотности вещества.

Разные варианты теории, пока еще очень гипотетические, указывают на то, что среднее время жизни протона должно быть примерно около 10^{31} — 10^{32} лет. Это на 1—2 порядка больше, чем можно было заметить в уже проведенных опытах. Если физикам повезет и оценка (очень грубая) возможной величины среднего времени жизни протона окажется верной, то в ближайшие несколько лет распад может быть зарегистрирован. Если же это время еще больше, то задача становится очень и очень трудной.

Я. С.

А. Михайлов

О солнечных затмениях вообще и конкретно о затмении 31 июля 1981 года

Утром 31 июля 1981 года произойдет интересное астрономическое явление — солнечное затмение, видимое как частное на всей территории Советского Союза и как полное на узкой, но длинной полосе, идущей от берегов Черного моря через Кавказ, Казахстан, Сибирь, Дальний Восток и Охотское море к просторам Тихого океана. Но прежде чем описать это затмение, поясним некоторые общие вопросы солнечных затмений.

Эти явления вызываются Луной, когда она частично или полностью закрывает солнечный диск. Луна по своему диаметру почти в 400 раз меньше Солнца, но примерно во столько же раз она ближе к Земле, вследствие чего видимые размеры Солнца и Луны для земного наблюдателя практически одинаковы. Однако небольшое отклонение земной орбиты от круговой вызывает небольшие изменения в расстояниях до Солнца, а вместе с тем и в угловом диаметре Солнца. То же происходит и с Луной при ее движении вокруг Земли. Поэтому лунный диск бывает виден нам временами немного больше солнечного, а временами немного меньше. В первом случае Луна может полностью закрыть все Солнце и произвести полное солнечное затмение, а во втором случае — оставить видимыми края Солнца в виде узкого кольца, окружающего темный диск Луны, и произвести кольцеобразное затмение. Ежегодно в зимнее время, когда Земля бывает ближе к Солнцу и поэтому Солнце видно нам под наибольшим углом, происходят преимущественно кольцеобразные затмения, а в летнее время, когда Земля дальше от Солнца, преобладают полные затмения.

Во время солнечных затмений Луна повернута к Земле своей неосве-

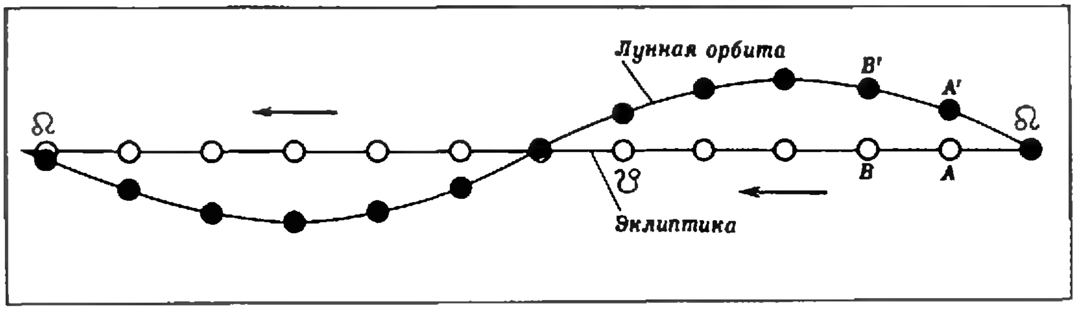


Рис. 1.

щенной стороной и находится в новолунии. В течение полного года бывает 12 или 13 новолуний, но далеко не каждое сопровождается затмением, так как плоскость лунной орбиты не совпадает с плоскостью эклиптики, по которой совершается видимое годичное движение Солнца, а наклонена к ней под углом 5°8′. Если развернуть линии эклиптики и лунной орбиты на плоскость, получится картина, представленная на рисунке 1. Здесь AA', BB' и т. д. изображают ряд новолуний, в большинстве которых Луна проходит выше (севернее) или ниже (южнее) Солнца, не производя затмений. Лишь новолуния, происходящие близ точек пересечения лунной орбиты с эклиптикой, называемых узлами, сопровождаются солнечными затмениями. Узлы изображаются специальными значками: ☊ — восходящий узел, в котором Луна переходит из южного эклиптического полушария в северное, и ☋ — нисходящий узел, в котором Луна переходит из северного полушария в южное. Эти значки представляют схематические изображения дракона: по древнекитайскому поверью он караулит близ узлов Солнце, чтобы его проглотить.

Оценим, какова протяженность области вокруг узла, в которой Луна может закрыть хотя бы край Солнца. Для воображаемого наблюдателя, находящегося в центре Земли, предельное новолуние с затмением изображено на рисунке 2, где диски Солнца и Луны соприкасаются. Полагая их кругами с радиусами 16′ (все расстояния будем измерять в угловых единицах), получим равнобедренный треугольник Л☊С с основанием $|ЛС| = 32'$ и углом $i = 5°8'$.

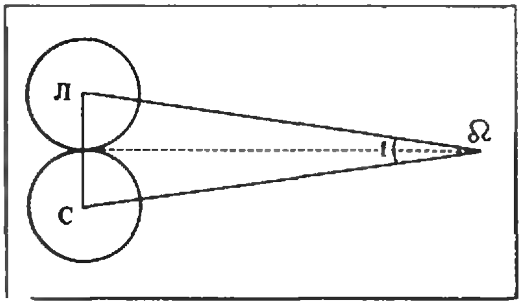


Рис. 2.

Из этого треугольника (считая его плоским) найдем искомое предельное расстояние R Луны от узла:

$$R = \frac{|ЛС|}{2\sin i/2} = 357' \approx 6°.$$

Однако наблюдатель, находящийся на поверхности Земли, видит Луну смещенной на величину ее параллакса, который может достигать 61′. На столько же нужно увеличить сторону ЛС: $|ЛС| = 32' + 61' = 93'$. Повторив вычисление с этим значением, получим $R = 994'$ или приблизительно 16,6°, так что вся зона затмений (в обе стороны от узла) охватывает 33°.

При этой оценке мы пользовались средними значениями радиусов Солнца и Луны. Если скомбинировать их крайние значения и учесть, что наш треугольник — не плоский, а сферический, то получилось бы для минимума области затмений 31,8° и для максимума — 35,8°. Таковы размеры обиталища дракона, поджидающего Солнце, чтобы, если и не проглотить его целиком, то хотя бы откусить кусочек, вызвав частное затмение малой фазы.

Посмотрим, может ли Солнце в своем видимом годичном движении по эклиптике проскочить эту область, не пав жертвой дракона. За сутки Солнце проходит в среднем 57′, а зимой, при наиболее быстром движении, — 61′. Между двумя новолуниями бывает 29,53 суток; за это время, при наибольшей скорости, Солнце пройдет 30°, то есть меньше, чем минимальная область затмений. Следовательно, оно не успеет беспрепятственно пройти область затмений между двумя новолуниями, и по крайней мере одно из них застигнет Солнце внутри этой зоны. Если это случится близко от узла, затмение будет большой фазы, даже полное или кольцеобразное. Если же первое новолуние произойдет в самом начале вхождения Солнца в зону затмений, то следующее новолуние случится еще до выхода Солнца из опасной зоны, так что два новолуния подряд будут сопровождаться затмениями, но частными и очень малой фазы (которые для широкой публики могут остаться незамеченными). После этого почти через полгода повторятся такие же явления вблизи другого узла.

Таким образом, ежегодно бывают две эпохи, когда происходят солнечные затмения. В каждую эпоху бывают либо одно затмение большой фазы, либо два малой фазы, а в течение года могут быть два затмения большой фазы или четыре малой. Конечно, возможны и промежуточные случаи — одно затмение большой фазы и два малой или два большой и одно малой. Но если первое затмение случится в начале января, то еще до истечения года (в конце декабря) Солнце вступит опять в опасную зону и может произойти еще одно затмение малой фазы. (Этому способствует и то обстоятельство, что лунные узлы не остаются неподвижными на эклиптике, а движутся навстречу Солнцу, так что время между прохождениями Солнца через данный узел на 19 дней короче календарного года.) В этом случае в течение одного года возможны пять затмений. Таким был, например, 1935 год, когда частные затмения наблюдались 5 января, 3 февраля, 30 июня, 30 июля и 25 декабря.

Если говорить о Земле вообще, то солнечные затмения — совсем не редкие явления. В течение ста лет в среднем бывает 84 частных, 77 кольцеобразных, 11 кольцеобразно-полных и 66 полных, а всего — 238 затмений. Однако каждое частное затмение видимо не на всей Земле, а на ограниченной, хотя и большой, ее части. Лунная полутень (рис. 3) обычно имеет радиус около 3500 км и скользит по Земле в сторону движения Луны — в восточном направлении. В центре полутени находится пятно тени, радиус которого может достигать 135 км. Но может быть и так, что вершина конуса тени не достигает Земли, тогда на ее поверхность падает расширяющаяся полость конуса, производящая кольцеобразное затмение. В случае полного затмения пятно тени уносится Луной со скоростью порядка одного километра в секунду, так что наибольшая продолжительность полного затмения в данном месте не превышает 7 минут.

Можно ли заранее предсказывать затмения? Оказывается, день предстоящего затмения умели предсказывать еще в глубокой древности, когда были уточнены период чередо-

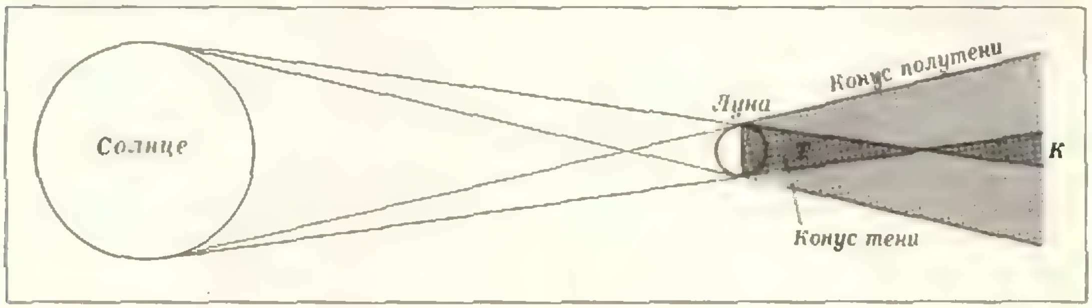


Рис. 3. *T* — область полного затмения; *K* — область кольцеобразного затмения.

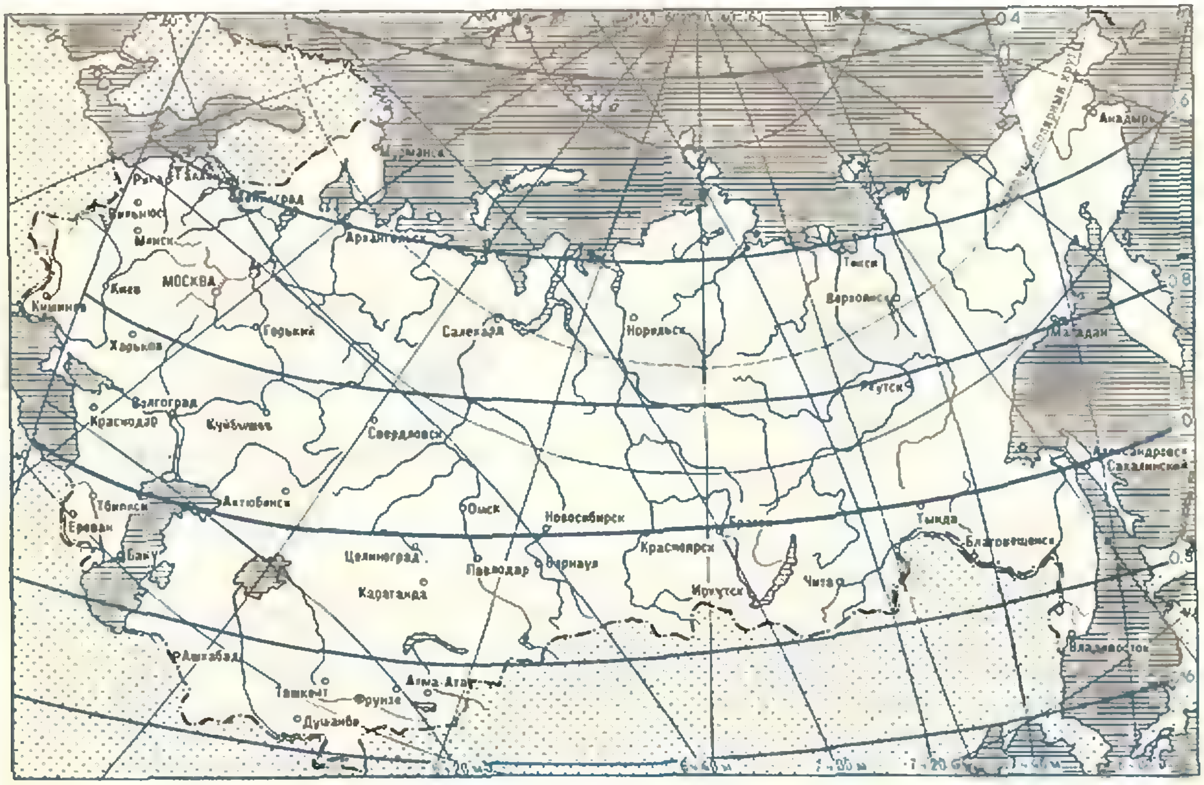

Мурманск
Анадырь
Таллин
Рига
Ленинград
Вильнюс
Минск
Архангельск
Тикси
Верхоянск
МОСКВА
Киев
Кишинев
Горький
Салехард
Норильск
Магадан
Харьков
Якутск
Волгоград
Краснодар
Куйбышев
Свердловск
Александровск-Сахалинский
Тбилиси
Ереван
Актюбинск
Омск
Новосибирск
Тында
Братск
Благовещенск
Баку
Целиноград
Павлодар
Барнаул
Красноярск
Караганда
Иркутск
Чита
Владивосток
Ашхабад
Ташкент
Алма-Ата
Фрунзе
Душанбе

Рис. 4.

вания фаз Луны и положение лунной орбиты относительно эклиптики. Новолуния чередуются через так называемый синодический месяц, равный 29,5306 суток, а возвращение Луны к данному узлу происходит через 27,2122 суток — промежуток времени, называемый драконическим месяцем. Эти числа почти соизмеримы:

242 драк. мес. = 6585, 357 суток,
223 син. мес. = 6585, 321 —»— ,
разность = 0,036 —»— .

Этот период, округленно равный 6585 1/3 суток, или 18 лет и 10 1/3 или 11 1/3 дней, в зависимости от числа високосных лет в этом периоде, называется саросом. По свидетельству Геродота он был известен еще в шестом веке до н. э. В течение одного сароса происходят 15 частных, 14 кольцеобразных, 2 кольцеобразно-полных и 12 полных, а всего — 43 солнечных затмения, которые по истечении сароса чередуются в прежнем порядке. Однако дробное число суток в саросе приводит к тому, что по окончании сароса Земля оказывается дополнительно повернутой на 1/3 оборота, так что затмения каждый раз сдвигаются на 120° к западу. Поэтому с помощью сароса можно предсказать лишь день и общий характер будущего затмения, но без подробного указания мест его видимости.

Теперь же затмения предсказываются на многие годы вперед с точностью до нескольких секунд во времени и до двух километров по месту его видимости, что является результатом огромной и длительной работы по изучению движения Солнца и Луны по звездному небу.

1981 год отмечен двумя затмениями — кольцеобразным, которое наблюдалось 5 февраля в южной части Тихого океана, и интересующим нас полным, которое произойдет 31 июля. Оно начнется на Кавказе, когда полоса полного затмения шириной в 65 км вступит на черноморское побережье близ Очамчира и отсюда пройдет в северо-восточном направлении через Нальчик и Моздок, пересечет северную часть Каспийского моря, затронет Актюбинскую область (станция Берчогур на Ташкентской железной дороге),

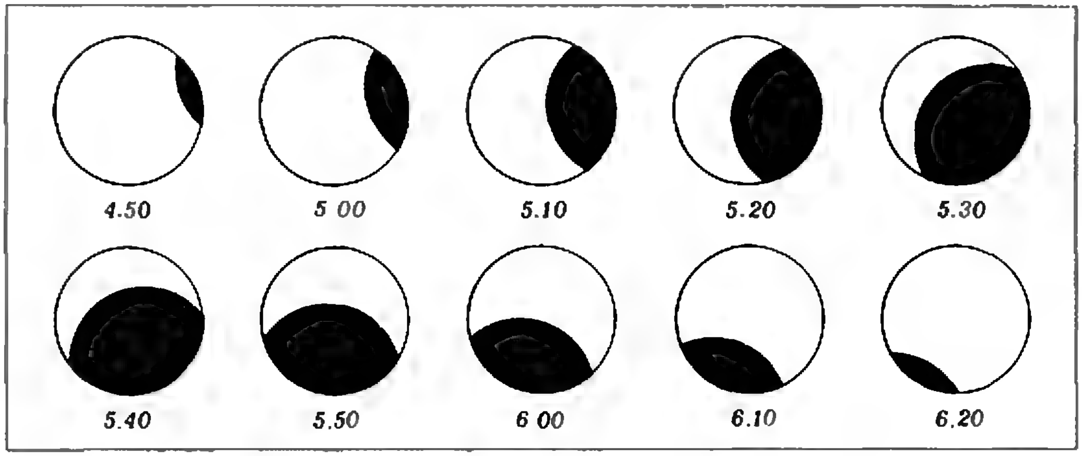


Рис. 5. Течение затмения в Москве.

пройдет немного севернее Целинограда и Павлодара, между Новосибирском и Барнаулом, через Ленинск-Кузнецкий, южнее Красноярска, через Тайшет, Братск, Северо-Байкальск и Тынду, где продолжительность полной фазы достигнет 120 секунд, а ширина полосы полного затмения — 110 км при высоте Солнца над горизонтом 53°. Северную часть Татарского пролива полоса пересечет у Де-Кастри и пройдет через Александровск-Сахалинский и Охотское море, охватит еще один из небольших островов Курильской гряды и, не затрагивая больше суши, закончится далеко в Тихом океане. В пределах СССР весь путь длиной около 7400 км лунная тень пробежит за 101 минуту.

Для наблюдения полного затмения многочисленные советские и иностранные экспедиции направляются в полосу полной фазы — преимущественно в Сибирь и на Дальний Восток, где затмение будет наиболее продолжительным и хорошая погода вполне вероятна. Пожелаем же им успеха.

На маленькой карте (рис. 4) жирной линией изображена полоса полного затмения, а параллельные ей линии, оцифрованные 0,8, 0,6 и 0,4 (называемые изофазами), указывают места, в которых наибольшая фаза частного затмения имеет соответствующую величину. Косые линии, называемые изохронами, дают московское декретное время наступления наибольшей фазы. Так, например, Москва находится между изофазами 0,6 и 0,8, но ближе к последней, так что величину наибольшей фазы можно оценить в 0,72. По изохронам можно определить времы наступления этой фазы — 5 ч 35 мин. Точное вычисление для Москвы дает по летнему декретному времени:

восход Солнца	5 ч 32 мин,
начало частного затмения	5 ч 43,0 мин,
наибольшая фаза затмения	6 ч 34,7мин,
конец частного затмения	7 ч 29,4 мин.

На рисунке 5 изображен вид Солнца в Москве в течение всего затмения через каждые 10 мин.

В заключение напомним, что во время частного затмения, во избежание серьезного повреждения зрения, нельзя смотреть на Солнце без защитного темного стекла, так как незакрытая часть солнечного диска имеет такую же яркость, как и вне затмения. Лишь при наступлении полной фазы затмения можно любоваться красивым зрелищем хромосферы и короны невооруженным глазом или в бинокль.

П. Канаев

Несколько опытов с пустотелым прозрачным шариком

В магазинах спортивных товаров продается нехитрый предмет для рыболовов — «груз плавучий». Это пустотелый пластмассовый шарик с двумя ушками и небольшим слегка вытянутым отверстием (рис. 1). С ним можно провести ряд интересных физических опытов.

Прежде чем приступить непосредственно к опытам, научитесь быстро наполнять шарик водой (или какой-нибудь другой жидкостью). В этом вам может помочь шприц без иглы или резиновая груша, в отверстие которой вставлена пустая трубочка от шариковой авторучки.

1. Несколько кристалликов марганцовки (марганцовокислого калия) растворите в небольшом количестве горячей воды до получения раствора темно-малинового цвета. Этим раствором наполните шарик и на нитке опустите его отверстием вверх в стеклянный сосуд с водой комнатной температуры. (Для устойчивости шарика к нижнему его ушку привяжите небольшой груз.)

Сразу же из отверстия начнет подниматься окрашенная струя диаметром, равным диаметру отверстия (рис. 2). Струя доходит до «потолка» (до поверхностного слоя), откуда отдельными потоками стекает вниз. Процесс этот продолжается довольно долго.

Несколько видоизмените опыт. Приготовьте раствор марганцовки комнатной температуры и погрузите шарик в воду той же температуры — окрашенной струи из отверстия не возникает.

Теперь добавьте в раствор несколько капель этилового спирта и повторите опыт — окрашенная струя устремляется вверх и существует длительное время.

Почему возникает окрашенная струя в первом и последнем случаях и не возникает во втором случае?

Причиной всему — движение молекул. В первом опыте скорость движения молекул горячего раствора больше скорости движения молекул холодной воды в сосуде — теплая струя поднимается вверх. Во втором опыте температуры раствора и воды одинаковы — одинаковы и скорости движения молекул. В третьем опыте температуры тоже одинаковы, но движение молекул спирта более интенсивное, благодаря чему и вытесняется раствор из отверстия.

2. Наполните шарик водой до краев отверстия. Затем с помощью пипетки удалите часть воды (приблизительно три полные пипетки) и влейте такое же количество этилового спирта. После этого закройте отверстие пластилином.

Примерно через 20 минут в верхней части шарика появится воздушный пузырек величиной с горошину.

Если этиловый спирт заменить раствором борной или уксусной ки-

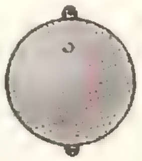


Рис. 1.

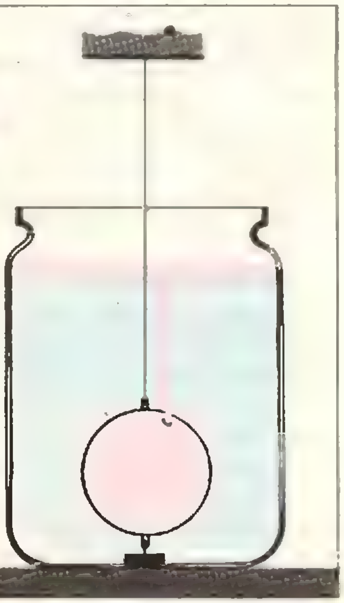


Рис. 2.

слоты, результат будет таким же. Если же воду смешать с глицерином, пузырька не возникнет.

Как это можно объяснить?

Молекулярно-кинетическая теория учит, что между молекулами есть промежутки. При смешивании воды со спиртом объем смеси оказывается меньше суммы объемов воды и спирта в отдельности; в результате появляется пузырек. То же наблюдается в смеси воды с борной или уксусной кислотой, а в смеси с глицерином сжатия не происходит (очевидно, в этом случае промежутки между молекулами не заполняются).

3. Возьмите шарик и краями его отверстия коснитесь поверхности воды. Отверстие затянется пленкой, но секунд через 30—40 пленка лопнет (при этом вы услышите легкий щелчок), а внутри шарика у края отверстия образуется капля воды.

Еще раз затяните отверстие шарика пленкой, но теперь пленку в середине проткните иглой. Пленка очень долго остается целой.

Почему пленка так недолговечна в первом случае и долговечна во втором?

Дело в том, что образующаяся на отверстии водяная пленка толще по краям, чем в середине (благодаря смачиванию). Поэтому, если плоскость пленки не строго горизонтальна (что весьма вероятно), вода будет смещаться по уклону, а пленка будет утончаться. В некоторый момент пленка лопнет, а вода соберется в каплю.

Долговечность пленки во втором случае объясняется тем, что игла хорошо смачивается водой и вода стягивается с краев к месту соприкосновения с иглой. Пленка становится толще и прочнее.

4. Приготовьте две стеклянные банки емкостью 0,5 литра каждая. Обе банки доверху наполните водой комнатной температуры. В одну из них капните из пипетки немного разведенного в воде (в отношении 1:4) шампуня.

Наполните шарик чистой водой и осторожно опустите его в банку с раствором шампуня. Тотчас же шарик опустится на дно.

Вымойте под краном поверхность шарика и так же осторожно опустите его в банку с чистой водой. Почти полностью погрузившись в воду, шарик не тонет, хотя сила тяжести несколько превышает выталкивающую силу.

Почему шарик с водой в одном случае тонет, а в другом — нет? Будет ли шарик тонуть в слабом растворе сахара в воде?

Оказывается, все зависит от поверхностного натяжения жидкости и от того, смачивает или нет эта жидкость поверхность шарика. Так, коэффициент поверхностного натяжения у чистой воды почти в два раза больше, чем у мыльного раствора, и пластмасса плохо смачивается водой. Вот почему шарик в воде не тонет.

Сахар еще увеличивает поверхностное натяжение воды, так что в слабом растворе сахара шарик тоже не утонет.

5. Возьмите проволоку диаметром 2—3 миллиметра и длиной около метра. Один конец проволоки опилите напильником и, согнув его под прямым углом, воткните в ближайшее к отверстию ушко шарика. Теперь шарик медленно опускайте в бак или ведро с водой и так же медленно поднимайте его на поверхность. Вы увидите, что при поднятии шарика из его отверстия будут вылетать воздушные пузырьки. Чем глубже погружается шарик, тем больше вылетает пузырьков.

Как объяснить образование и отрыв пузырьков воздуха при подъеме шарика?

Когда шарик опускается, воздух внутри него сжимается и в шарик входит некоторое количество воды. При подъеме внешнее давление уменьшается, воздух в шарике расширяется и на краях отверстия образуется пузырек. Размеры пузырька постепенно увеличиваются, а около отверстия образуется шейка, которая сужается. При этом выталкивающая сила, направленная вверх, увеличивается, а сила поверхностного натяжения, удерживающая пузырек, уменьшается. В некоторый момент эти силы уравниваются, пузырек отрывается и принимает шарообразную форму.

Н. Васильев, Т. Маликов

Рассмотрим разность

Трудно найти сборник олимпиадных или алгебраических задач, где не встречались бы задачи такого типа: *доказать, что при любом натуральном* n

а) $7^{2n}-5^{2n}$ *делится на* 24;

б) n^3-n *делится на* 6;

в) $\dfrac{n^5-5n^3+4n}{120}$ — *целое число;*

г) $3^{2n+3}+40n-27$ *делится на* 64;

д) $2^{2n-1}-9n^2+21n-14$ *делится на* 27;

е) $5^n(5^n+1)-6^n(3^n+2^n)$ *делится на* 91;

ж) $\dfrac{n^5}{5}+\dfrac{n^3}{3}+\dfrac{7n}{15}$ — *целое число.*

Попробуйте порешать эти задачи. Вероятно, у вас возникнут разные соображения вроде следующих: в задаче

а) воспользоваться тем, что $7^2-5^2=24$, и тождеством

$$a^n-b^n= \qquad (1)$$
$$=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+b^{n-1}),$$

показывающим, что a^n-b^n всегда делится на $a-b$;

б) выделить три случая: $n=3k$, $n=3k+1$ и $n=3k+2$, соответствующие разным остаткам при делении n на 3;

в) разложить многочлен в числителе на пять множителей $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ и заметить, что из пяти последовательных чисел найдется одно, делящееся на 3, одно — на 5, одно — на 4 и еще одно, делящееся на 2 (и не делящееся на 4);

е) представить разность как $(25^n-18^n)-(12^n-5^n)$ и как $(25^n-12^n)-(18^n-5^n)$, чтобы доказать ее делимость на 7 и на 13;

ж) доказать отдельно делимость $5n^3+7n$ на 3 и делимость $3n^5+7n$ на 5.

Не умаляя красоты и полезности этих и других подобных рассуждений, мы хотим разобрать один общий рецепт для всех таких задач. Мы увидим, что справедливость каждого из утверждений а) — ж) достаточно проверить лишь для небольшого числа первых значений n (в задаче а) — для двух, г) — для трех и т. п.), чтобы быть уверенным в их справедливости при всех n. А читатель, который разберется в заметке достаточно основательно, сможет сам составлять новые задачи в неограниченном количестве (причем даже такие, где встречаются иррациональные числа):

з) *число* $45^n+(-44)^n-1$ *делится на* 1980;

и) *число* $[(6+\sqrt{31})^n]-2^n+1$ *делится на* 10; *вообще, если* m, a, b — *натуральные числа и* $b<2a$, *то число* $[(am+1+\sqrt{a^2m^2+bm+1})^n]-2^n+1$ *делится на* $2m$ (здесь $[x]$ — целая часть числа x)*).

Сумма разностей

Прежде чем формулировать общие теоремы, продемонстрируем ход наших рассуждений на примере д). Эта задача, а также следующие ниже следствие из теоремы 2 и лемма 1 составляют содержание задачи **М629** из Задачника «Кванта».

Рассмотрим разность значений данной функции

$$f(n)=2^{2n-1}-9n^2+21n-14$$

в точках $n+1$ и n:

$$g(n)=f(n+1)-f(n)=$$
$$=3\cdot 2^{2n-1}-18n+12.$$

Мы хотим доказать, что $f(n)$ делится на 27 при всех $n=1, 2, \ldots$

---

*) Эти две задачи прислали в прошлом году наши читатели *В. Чичин* из с. Вознесенское Хабаровского края и *Вальтер Якоус* из Инсбрука (Австрия).

Поскольку $f(n)$ можно представить как сумму разностей

$$f(n)=(f(n)-f(n-1))+(f(n-1)-$$
$$-f(n-2))+\ldots+(f(2)-f(1))+f(1)=$$
$$=g(n-1)+g(n-2)+\ldots+g(1)+f(1)$$

и число $f(1)=0$ делится на 27, нам достаточно доказать, что $g(n)$ делится на 27 при всех n.

Поступим так же с $g(n)$: рассмотрим разность

$$h(n)=g(n+1)-g(n)=9\cdot 2^{2n-1}-18$$

и представим $g(n)$ как сумму $h(n-1)+h(n-2)+\ldots+h(1)+g(1)$. Поскольку $g(1)=0$, достаточно доказать, что $h(n)$ делится на 27 при всех n. Но это уже нетрудно: ведь $h(1)=0$, а при $n\geqslant 2$ число $h(n)=2\cdot 9(4^{n-1}-1)$ делится на $2\cdot 9(4-1)$ согласно (1). Тем самым задача д) решена.

Нам помог здесь тот факт, что для многочлена $\varphi(x)$ степени s разность $\Delta\varphi(x)=\varphi(x+1)-\varphi(x)$ — многочлен на единицу меньшей степени $s-1$, «вторая разность» $\Delta(\Delta\varphi(x))=\Delta^2\varphi(x)$ — многочлен степени $s-2$ и т. д., так что s-я разность $\Delta^s\varphi(x)$ — просто число (многочлен степени 0). Отметим также полезную формулу для суммы разностей, которую мы применили дважды:

$$\varphi(n)=\sum_{1<j<n-1}\Delta\varphi(j)+\varphi(1). \qquad (2)$$

Многочлен плюс геометрическая прогрессия

Сформулируем теперь две общие теоремы, которые можно доказать тем же приемом («рассмотрим разность»).

Теорема 1. *Если число* $b_0+b_1n+\ldots+b_{k-1}n^{k-1}$ *— целое при* $n=1$, $n=2,\ldots$, $n=k$, *то оно целое при всех натуральных* n. (Здесь b_i — не обязательно целые!)

Теорема 2. *Если число* q *— целое и*

$$f(n)=cq^n+b_0+b_1n+\ldots+b_{k-1}n^{k-1}$$

— целое при $n=1$, $n=2$, ..., $n=k+1$, *то* $f(n)$ *— целое при всех натуральных* n.

Следствие. *Если число* q *— целое и число* $f(n)$ *делится на* m *при* $n=1$, $n=2$, ..., $n=k+1$, *то* $f(n)$ *делится на* m *при всех натуральных* n.

(Конечно, аналогичное следствие можно сформулировать и для многочлена из теоремы 1.)

Чтобы вывести следствие, достаточно применить теорему 2 к выражению $\bar f(n)=f(n)/m$, у которого все коэффициенты поделены на m: условие «$f(n)$ *делится на* m» эквивалентно тому, что

$$\bar f(n)=\frac{c}{m}q^n+\frac{b_0}{m}+\frac{b_1}{m}n+\ldots+\frac{b_{k-1}}{m}n^{k-1}$$

— целое число.

Например, для функции $f(n)$ из примера д) и $m=27$ можно применять теорему 2 к выражению $\bar f(n)=f(n)/27=$

$$=\frac{1}{54}4^n-\frac{1}{3}n^2+\frac{7}{9}\,n-\frac{14}{27}.$$

Легко проверить, что $\bar f(1)=\bar f(2)=\bar f(3)=0$, $\bar f(4)=2$ и по теореме 2 число $\bar f(n)$ — целое (то есть $f(n)$ делится на 27) при любом натуральном n.

Теперь перейдем к доказательству теоремы 2 (доказательство теоремы 1 мы оставляем читателям в качестве упражнения).

Пусть сначала $k=1$.

Лемма 1. *Если* q, $cq+b$ *и* cq^2+b *— целые числа, то* cq^n+b *— целое при любом натуральном* n.

В самом деле, рассмотрим разность

$$(cq^{n+1}+b)-(cq^n+b)=$$
$$=cq^n(q-1)=q^{n-1}[(cq^2+b)-(cq+b)].$$

Это число — целое, а потому, согласно (2), cq^n+b — целое при любом натуральном n. (Можно рассуждать несколько иначе: рассмотреть разность $(cq^n+b)-(cq+b)$ и воспользоваться (1).)

Итак, при $k=1$ теорема 2 верна. Теперь точно так же, рассмотрев разности, можно доказать ее для $k=2$, затем для $k=3$ и т. д. — индукцией по k. В самом деле, если степень $k-1$ многочлена $b(n)=b_0+b_1n+\ldots+b_{k-1}n^{k-1}$ больше нуля, то разность

$$g(n)=f(n+1)-f(n)=$$
$$=cq^{n+1}-cq^n+b(n+1)-b(n)=$$
$$=c(q-1)\cdot q^n+\Delta b(n)$$

будет представляться как сумма геометрической прогрессии (с тем же знаменателем q) и многочлена, степень которого на единицу меньше, причем в условиях теоремы 2 числа q и $g(n)$ при $1<n<k$ — целые, так что для $g(n)$ теорему 2 можно считать доказанной.

Замечание. Теорему 2 можно, очевидно, слегка обобщить: достаточно проверить, что в каких-то $k+1$ последовательных целых точках $n_0\leqslant n<n_0+k$ данное выражение принимает целые значения — тогда оно будет принимать целые значения при всех следующих n. Например, иногда удобно при проверке начинать с $n_0=0$ или $n_0=-1$.

Это замечание, как и доказанное выше следствие, относятся также к теореме 1 и ко всем обобщениям, о которых пойдет речь ниже.

Как придумать новую задачу?

Нет ничего проще. Подберем, например, a, b и c так, чтобы выражение $f(n)=an+b+c\cdot 9^n$ принимало (какие угодно!) целые значения при $n=-1$, $n=0$ и $n=1$. Тогда по теореме 2 (при $k=2$) число $f(n)$ будет целым при любом целом $n\geqslant -1$.

Возьмем, скажем, $f(-1)=-1$, $f(0)=0$, $f(1)=4$. Решив систему

$$\begin{cases}-a+b+c/9=-1,\\ b+c=0,\\ a+b+9c=4,\end{cases}$$

мы найдем $a=\frac{5}{8}$, $b=-\frac{27}{64}$, $c=\frac{27}{64}$. Именно так, возможно, и был придуман когда-то давно пример г). Советуем читателю в качестве отдыха самому придумать несколько новых примеров.

Но наш путь еще не закончен: теорему хотелось бы обобщить так, чтобы она включала и примеры, где имеется несколько геометрических прогрессий.

Сумма прогрессий

Попробуйте доказать такой аналог наших теорем 1 и 2:

Теорема 3. *Если $q_1, q_2, \ldots, q_r$ — целые числа и*

$$f(n)=c_1q_1^n+c_2q_2^n+\ldots+c_{r-1}q_{r-1}^n+c_rq_r^n$$

— целое при $n=1, 2, \ldots, r$, то $f(n)$ — целое при любом натуральном n. (Лемма 1 — частный случай этой теоремы при $r=2$, $q_2=1$.)

Указание. Для доказательства теоремы 3 полезно рассмотреть разность $g(n)=f(n+1)-q_rf(n)$. Поскольку

$$g(n)=c_1(q_1-q_r)q_1^n+\ldots+c_{r-1}(q_{r-1}-q_r)q_{r-1}^n$$

— сумма $r-1$ геометрических прогрессий и в условиях теоремы число $g(n)$ — целое при $1<n<r-1$, доказать теорему можно индукцией по r: ведь

$$f(n)=g(n-1)+q_rg(n-2)+\\ +q_r^2g(n-3)+\ldots+q_r^{n-1}g(1)+q_r^nf(1).$$

(Так, в задаче з) можно рассмотреть разность $f(n+1)-45f(n)$.)

Упражнение 1. Проверьте примеры а), е) с помощью теоремы 3 и придумайте к ней несколько новых примеров.

Мы надеемся, что пробудили у читателя страсть к обобщениям, и предлагаем ему следующие, более трудные упражнения:

2. Сформулируйте и докажите аналоги теорем 1—3

а) для суммы r прогрессий и многочлена степени $k-1$;

б) для произведения прогрессии (с целым знаменателем) на многочлен.

Придумайте несколько примеров на применение ваших теорем.

3. Какую более общую теорему такого типа вы можете сформулировать?

4. Можно ли в условиях наших теорем уменьшить число точек, в которых требуется проверка?

5. Докажите утверждение и) и постарайтесь обобщить теорему 3 так, чтобы она годилась и для прогрессий с иррациональными знаменателями.

Указание. $[(6+\sqrt{31})^n]+1=(6+\sqrt{31})^n+(6-\sqrt{31})^n$, причем $y_1=6+\sqrt{31}$ и $y_2=6-\sqrt{31}$ — корни квадратного уравнения $y^2-12y+5=0$ с целыми коэффициентами.

Самая общая теорема

Найти естественное обобщение ряда фактов бывает интересно еще потому, что очень часто более общее утверждение доказывается яснее и проще, чем частное. Прекрасная иллюстрация этому — следующая теорема, довольно громоздкая по формулировке, но обобщающая предыдущие и позволяющая ответить на все вопросы упражнений 2—5.

Теорема 4. *Пусть выражение $f(n)$ является суммой r многочленов, умноженных на некоторые геометрические прогрессии. Составим многочлен со старшим коэффициентом 1, корни которого — знаменатели этих r прогрессий, а кратность каждого корня на единицу больше степени соответствующего ему многочлена.* (Степень k этого *характеристического* многочлена равна сумме количества r прогрессий и степеней всех многочленов, на которые они умножены.) *Если (1) все коэффициенты характеристического многочлена — целые числа и (2) значения $f(n)$ — целые при $n=1, 2, \ldots, k$, где k — степень характеристического многочлена, то $f(n)$ будет целым и при всех натуральных $n>k$.*

Разумеется, для выполнения условия (1) достаточно (но не обязательно), чтобы все знаменатели прогрессий были целыми числами. Какова роль коэффициентов характеристического многочлена — ясно из следующей очень важной леммы, проверку которой мы оставляем читателю:

Лемма 2. Пусть

$$f(x)=B_1(x)q_1^x+B_2(x)q_2^x+\ldots$$
$$\ldots+B_r(x)q_r^x, \quad (3)$$

где $B_i(x)$ *— многочлен степени* k_i-1 $(i=1, 2, \ldots, r)$, *и*

$$D(\lambda)=(\lambda-q_1)^{k_1}(\lambda-q_2)^{k_2}\ldots(\lambda-q_r)^{k_r}=$$
$$=\lambda^k+d_1\lambda^{k-1}+d_2\lambda^{k-2}+\ldots+d_{k-1}\lambda+d_k.$$

Тогда при всех x *выполнено ривенство:*

$$f(x)+d_1f(x-1)+d_2f(x-2)+\ldots$$
$$\ldots+d_kf(x-k)=0. \quad (4)$$

Теорема 4 следует отсюда сразу же: если все коэффициенты $d_1, \ldots, d_k$ характеристического многочлена $D(\lambda)$ — целые, то из равенства (3) вытекает, что $f(n)$ при каждом $n>k$ получается сложением целых значений $f(n-1)$, $f(n-2), \ldots$, $f(n-k)$, умноженных на фиксированные целые коэффициенты.

В качестве иллюстрации рассмотрим два прежних примера.

д) Пусть $f(n)=\frac{1}{2}\cdot 4^n+(-9n^2+21n-14)\cdot 1^n$. Здесь $D(\lambda)=(\lambda-4)(\lambda-1)^3=\lambda^4-7\lambda^3+15\lambda^2-13\lambda+4$. Поэтому для всех n

$$f(n)=7f(n-1)-15f(n-2)+$$
$$+13f(n-3)-4f(n-4).$$

В частности, вслед за $f(1)=f(2)=f(3)=0$ и $f(4)=54$ идут $f(5)=7\cdot 54=378$, $f(6)=7\cdot 378-15\cdot 54=1836, \ldots$; естественно, все они будут делиться на 27 (даже на 54).

и) Пусть $f(n)=\frac{(6+\sqrt{31})^n}{10}+\frac{(6-\sqrt{31})^n}{10}-\frac{2^n}{10}$. Здесь коэффициенты многочлена $D(\lambda)=(\lambda^2-12\lambda+5)(\lambda-2)=\lambda^3-14\lambda^2+19\lambda-10$ — также целые. Вслед за первыми членами $f(0)=\frac{1}{10}$, $f(1)=1$, $f(2)=13$ все дальнейшие $f(n)$ определяются рекуррентным соотношением

$$f(n)=14f(n-1)-19f(n-2)+$$
$$+10f(n-3).$$

В частности, $f(3)=14\cdot 13-19\cdot 1+\frac{10}{10}=124$ — целое, следовательно, будут целыми числами также все $f(n)$ при $n=4, 5, \ldots$

В качестве последнего упражнения предлагаем читателю разобраться в том, как с помощью леммы 2 можно доказать частные случаи теоремы 4, о которых шла речь выше, и придумать новые упражнения (например, в качестве q_1, q_2, q_3 можно взять числа $2\cos\frac{\pi}{7}$, $2\cos\frac{2\pi}{7}$, $2\cos\frac{3\pi}{7}$, впрочем, убедиться, что это — корни многочлена с целыми коэффициентами, не так просто!).

Заканчивая наш рассказ, заметим, что для выяснения более глубоких вопросов делимости целых чисел наши теоремы не приносят большой пользы (например, чтобы доказать, что $n^{1693}-n$ при всех n делится на 1981 или хотя бы на 6, требуется проверка в 1694 точках!).

Однако замечательный результат, который скрыт в лемме 2, относится по существу уже к совершенно другой, не менее интересной и важной теме: *линейным рекуррентным уравнениям*. Можно показать, что все последовательности $f(n)$, определяемые формулой (4) и любыми начальными членами $f(1), \ldots, f(k)$, задаются формулой (3) (для того, чтобы этот результат сформулировать в естественной общности, нужно рассматривать не только вещественные, но и комплексные корни многочлена $D(\lambda)$). С выражениями (3) наши читатели, без сомнения, еще встретятся, когда будут знакомиться с дифференциальными уравнениями: общий вид решений любого линейного дифференциального уравнения степени k

$$y^{(k)}+d_1y^{(k-1)}+\ldots$$
$$\ldots+d_{k-2}y''+d_{k-1}y'+d_ky=0$$

имеет такую же форму (3).

задачник Кванта

Задачи

M686—M690; Ф698—Ф702

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 августа 1981 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 6—81» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М686, М687» или «Ф698». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

M686. Для любого ли числа $x \geqslant 1$ верно равенство

$$[\sqrt{[x]}] = [\sqrt{\sqrt{x}}]?$$

(Здесь через $[y]$ обозначена целая часть числа y.)

В. Прасолов

M687. а) В девятиугольной пирамиде все 9 боковых ребер и все 27 диагоналей основания окрашены: некоторые — в красный цвет, остальные — в синий. Докажите, что существуют три вершины пирамиды, служащие вершинами треугольника, все стороны которого окрашены в одинаковый цвет.

б) Верно ли аналогичное утверждение для восьмиугольной пирамиды?

Н. Ненов (Болгария)

M688. Даны натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ такие, что $a_k \leqslant k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$. Докажите, что одно из выражений

$$a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_n$$

равно нулю.

С. Ненашев

M689*. Докажите, что из одинаковых плиток, имеющих форму равнобедренных трапеций с основаниями 3 см, 1 см и высотой 1 см, нельзя составить прямоугольник.

С. Рукшин

M690*. а) Внутри выпуклого многоугольника площади S_1 и периметра P_1 расположен выпуклый многоугольник площади S_2 и периметра P_2. Докажите неравенство

$$2\frac{S_1}{P_1} > \frac{S_2}{P_2}.$$

б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для выпуклых многогранников.

А. Келарев

Ф698. На некотором производстве детали перемещают с помощью двух транспортеров, ленты которых движутся во взаимно перпендикулярных

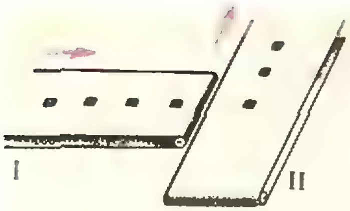


Рис. 1.

направлениях с одинаковыми по абсолютной величине скоростями v_0 (рис. 1). При этом деталь, въезжая на транспортер II, останавливается на середине ленты. Скорость транспортера II увеличили в n раз. Как надо изменить скорость транспортера I, чтобы детали по-прежнему останавливались на середине ленты транспортера II? Размерами деталей пренебречь; считать, что переход на транспортер II происходит без удара.

А. Омельянчук

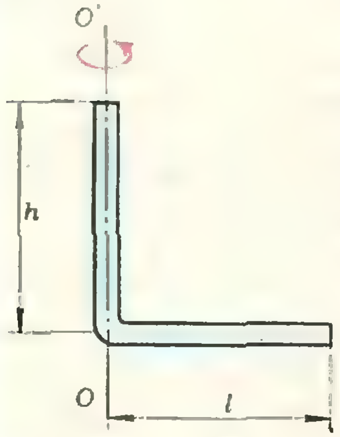


Рис. 2.

Ф699. Изогнутый капилляр радиуса r (рис. 2), полностью заполненный жидкостью, вращается вокруг вертикальной оси OO'. При какой угловой скорости вращения жидкость начнет выливаться из капилляра? Плотность жидкости ϱ, поверхностное натяжение σ, жидкость полностью смачивает капилляр; размеры капилляра указаны на рисунке 2.

А. Буздин

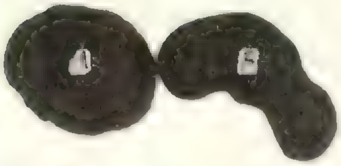


Рис. 3.

Ф700. Имеются два проводника A и B произвольной формы. Первоначально на проводнике A имеется заряд Q, а проводник B не заряжен. Проводники приводят в соприкосновение (рис. 3), и на проводник B перетекает заряд q. Соприкасающимся проводникам сообщили дополнительно некоторый заряд q_x, и в результате на проводнике A оказался заряд q. Определить заряд q_x.

С. Кротов

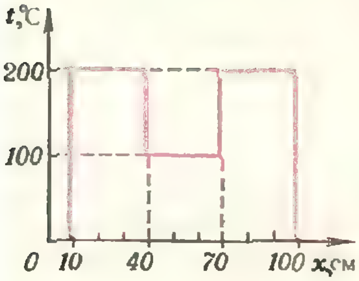


Рис. 4.

Ф701. На рисунке 4 показано распределение температуры вдоль тонкого однородного теплоизолированного стержня в некоторый момент времени. Как будет меняться распределение температуры в дальнейшем? Какое распределение установится через достаточно долгое время?

О. Савченко

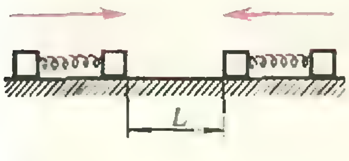


Рис. 5.

Ф702. Две системы, каждая из которых состоит из двух одинаковых масс m, связанных пружинкой жесткости k, движутся по гладкой горизонтальной поверхности навстречу друг другу с одинаковыми по величине скоростями v_0. В некоторый момент времени расстояние между системами равно L (рис. 5). Определить время, через которое расстояние между теми же массами снова будет равно L. Столкновение систем считать абсолютно упругим.

В. Можаев

Решения задач

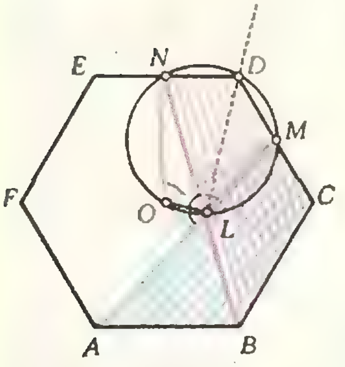
М641—М644; Ф657—Ф662

М641. *Дан правильный шестиугольник ABCDEF с центром O. Точки M и N — середины сторон CD и DE. Прямые AM и BN пересекаются в точке L. Докажите, что*

а) треугольник ABL и четырехугольник DMLN имеют равные площади;

б) $\widehat{ALO}=\widehat{OLN}=60^\circ$;

в) $\widehat{OLD}=90^\circ$.



Все утверждения задачи нетрудно получить из одного наблюдения: при повороте на 60° вокруг центра O четырехугольник $AMCB$ отображается на четырехугольник $BNDC$.

Действительно, при повороте $R_O^{60^\circ}$ (против часовой стрелки) точка A переходит в точку B, точка B — в точку C, сторона CD отображается на сторону DE, так что середина M стороны CD переходит в середину N стороны DE (см. рисунок). Следовательно, четырехугольники $AMCB$ и $BNDC$ конгруэнтны, так что площади их равны. Вычитая из этих равных площадей площадь четырехугольника $BCML$, получим равные площади, то есть треугольник ABL и четырехугольник $DMLN$ равновелики.

Так как при повороте $R_O^{60^\circ}$ луч AM отображается на луч BN, угол между направлениями этих лучей равен углу поворота, то есть $\widehat{ALB}=60^\circ$. Следовательно, $\widehat{ALN}=120^\circ$. Приведем два доказательства того, что $\widehat{ALO}=\widehat{OLN}=60^\circ$ и $\widehat{OLD}=90^\circ$.

1°. Воспользуемся таким очевидным фактом: если две прямые, пересекающиеся в точке K, равноудалены от точки P, то прямая PK служит биссектрисой угла между этими прямыми (содержащего точку P). Поскольку точка O равноудалена от прямых AM и BN, OL — биссектриса угла ALN, то есть $\widehat{ALO}=\widehat{OLN}=60^\circ$. Поскольку точка D удалена от прямых AM и BN одинаково (на такое же расстояние, как C — от прямой AM), $\widehat{NLD}=\widehat{DLM}=30^\circ$, то есть $\widehat{OLD}=90^\circ$.

2°. Около четырехугольника $DMON$ можно описать окружность, так как углы при его вершинах M и N — прямые. Точка L также принадлежит этой окружности. Это следует из того, что в четырехугольнике $DMLN$ сумма углов при вершинах D и L равна 180°. Заметив, что $\widehat{ODN}=60^\circ$, применим теорему о вписанном угле. Тогда получим $\widehat{OLN}=\widehat{ODN}=60^\circ$ и $\widehat{OLD}=\widehat{OMD}=90^\circ$.

Э. Готман

◆

М642. *Докажите, что каждое натуральное число представляется в виде $a_0+2a_1+2^2a_2+\ldots+2^na_n$, где каждое из чисел $a_k=0$, -1 или 1 и $a_k\cdot a_{k+1}=0$ для всех $0\leqslant k\leqslant n-1$, причем такое представление единственно.*

Рассматривая требуемые представления

$$A=a_0+2a_1+2^2a_2+\ldots+2^na_n \qquad (*)$$

($a_k=0$, -1 или 1, $a_k\cdot a_{k+1}=0$) для нескольких первых натуральных чисел, нетрудно заметить, что

1) последний знак + стоит при 2^n (старшая цифра $a_n=+1$) для чисел A от $2^n-2^{n-2}-2^{n-4}-\ldots$ до $2^n+2^{n-2}+2^{n-4}+\ldots$ (например, в нашей таблице на полях последний знак + стоит при 2^3 для чисел A от $2^3-2=6$ до $2^3+2=10$, при 2^4 — для чисел A от $2^4-2^2-1=11$ до $2^4+2^2+1=21$ и т. д.);

2) первый знак (младшая цифра $a_0\neq 0$) периодически повторяется с периодом 4, то есть зависит лишь от остатка при делении A на 4 ($a_0=0$ повторяется даже чаще — с периодом 2).

На этих двух наблюдениях построены два доказательства нужного представления (*) и его единственности. Оба эти доказательства проводятся по индукции, то есть справедливость утверждения для данного числа A выводится из его справедливости для всех чисел, меньших A.

1°. Обозначим через M_n число $2^n+2^{n-2}+2^{n-4}+\ldots$ (последнее слагаемое здесь $2^1=2$ при нечетном n и $2^0=1$ при четном n). Докажем, что *каждое число $A\leqslant M_n$ представляется в виде (*) единственным образом, причем $a_n=1$ для чисел*

$$2^n-M_{n-2}\leqslant A\leqslant 2^n+M_{n-2}=M_n. \qquad (1)$$

A	1	2	2^2	2^3	2^4
1	+				
2		+			
3	—		+		
4			+		
5	+		+		
6		—		+	
7	—			+	
8				+	
9	+			+	
10		+		+	
11	—		—		+
12			—		+
13	+		—		+
14		—			+
15	—				+
16					+
17	+				+
18		+			+
19	—		+		+
20			+		+
21	+		+		+

Мы можем (поскольку мы доказываем по индукции) считать наше утверждение доказанным для чисел A, не превосходящих M_{n-2}. Пользуясь этим, мы получим представление (∗) для любого целого числа A из промежутка (1). В самом деле, либо $A=2^n$, либо $1\leqslant A-2^n\leqslant M_{n-2}$, либо $1\leqslant 2^n-A\leqslant M_{n-2}$. Добавляя к 2^n представление числа $A-2^n$ или вычитая из него представление числа 2^n-A, мы получим представление (∗) для A.

Заметим, что

$$2^n-M_{n-2}-1=M_{n-1}; \qquad (2)$$

это равенство становится очевидным, если записать его так:

$$2^n-1=M_{n-2}+M_{n-1}=2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-3}+\ldots+1.$$

Как видно из равенства (2), промежутки (1) для $n=1, 2, 3, \ldots$ не перекрываются и заполняют все множество натуральных чисел **N**, поэтому представление (∗) существует для любого A. Отсюда ясна также его единственность: по данному $A\in\mathbf{N}$ однозначно определяется разряд n старшей цифры $a_n=1$, и добавок $|2^n-A|$ представляется единственным образом по предположению индукции.

2°. Если A четно, то $a_0=0$ и представление (∗) числа $A=2m$ получается из представления меньшего числа m «сдвигом» на один разряд. Если A нечетно, то $a_0=\pm 1$ и a_1 должно равняться нулю; поэтому число $A-a_0$ делится на 4 и представление (∗) числа $A=4m+a_0$ получается из представления меньшего числа m «сдвигом» на два разряда и добавлением слева цифры a_0. Во всех этих случаях единственность представления числа A следует из единственности представления числа m.

Единственность представления числа 1 очевидна: если $n>1$ и $|a_n|=1$, то $|a_0+a_1\cdot 2+\ldots+a_n\cdot 2^n|\geqslant 2^n-(2^{n-2}+2^{n-1}+\ldots)\geqslant 2$.

Н. Васильев

◆

М643. *Карточки с числами 1, 2, ..., 32 сложены в стопку по порядку. Разрешается снять сверху любое число карточек и вложить их между некоторыми из оставшихся или под ними, не меняя порядка тех и других, а в остальном произвольно.*
Эта операция называется перемешиванием.
I. *Докажите, что за 5 перемешиваний можно*
а) переложить карточки в обратном порядке;
б) разложить карточки в любом порядке.
II. *Докажите, что не всякий порядок карточек можно получить за 4 перемешивания.*

Приведем два решения этой задачи.

Первое решение. Будем считать, что карточки в стопке расположены в произвольном порядке. Докажем, что за пять перемешиваний их можно упорядочить, а за четыре — не всегда. Тем самым задача будет решена.

Назовем *отрезком* группу лежащих подряд карточек, номера которых возрастают при удалении от верха стопки. *Длиной* отрезка будем называть количество входящих в него карточек.

Если имеются два отрезка, то всегда можно, не меняя порядка следования карточек в каждом из них, перемешиванием получить отрезок, состоящий из карточек этих отрезков и только из них. Будем говорить, что такой отрезок получен операцией *слияния* двух отрезков. Понятно, что длина результата слияния равна сумме длин сливаемых отрезков.

Отметим сначала в стопке карточек 32 отрезка единичной длины и затем будем проделывать перемешивания так:

1) разделим стопку пополам;

2) сливаем попарно отмеченные отрезки соответственно из первой и второй половин стопки;

3) отметим отрезки, получившиеся в результате слияний пункта 2).

Эту операцию повторим пять раз (на рисунке 1 изображено, что происходит с отрезками, получившимися после второго слияния). Длины отрезков, отмеченных до перемешивания, вдвое меньше длин отрезков, отмеченных после него (см. рис. 1). Следовательно, после пяти таких операций длина (единственного!) отмеченного отрезка будет равна $2^5=32$. Это доказывает утверждения а) и б) задачи (для пункта а) нужные перемещения приведены на полях).

Для доказательства того, что произвольно расположенные карточки нельзя упорядочить за 4 перемешивания, введем

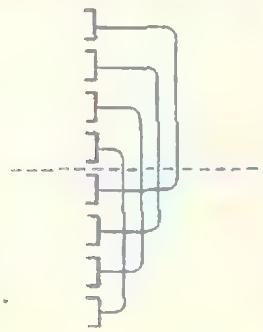


Рис. 1.

еще одно понятие. Назовем две соседние в стопке карточки *дефектной парой*, если карточка с большим номером находится выше карточки с меньшим номером.

Лемма. *Если в стопке $n>1$ дефектных пар, то после перемешивания в ней будет не менее чем $m=\left[\frac{n}{2}\right]$ дефектных пар.*

Доказательство. Разделив стопку на две, получим по крайней мере в одной из стопок не менее чем m дефектных пар. Действительно, пусть в одной стопке оказалось k, а в другой l дефектных пар. Если предположить, что $k \leqslant m-1$ и $l<m$, то $k+l<2m-1 \leqslant n-1$. Однако должно быть $k+l \geqslant n-1$, поскольку при разделении стопки могло «разойтись» не более одной дефектной пары. Значит, либо $k \geqslant m$, либо $l \geqslant m$.

Заметим теперь, что если между карточками дефектной пары вставлять любые карточки, то при этом образуется хотя бы одна дефектная пара (убедитесь, что это так для одной вставляемой карточки). Тем самым лемма доказана.

Пусть теперь в стопке более 15 дефектных пар. Применив доказанную лемму четыре раза, получим, что после четырех перемешиваний в стопке останется хотя бы одна дефектная пара.

В связи с последней леммой возникает интересная задача: *зная количество дефектных пар расположения, определить точно минимальное количество перемешиваний, необходимых для достижения этого расположения из упорядоченной стопки.* Оказывается, если N — количество дефектных пар расположения, то необходимо $[\log_2 N]+1$ перемешиваний.

Второе решение. I б) Рассмотрим операцию, обратную перемешиванию: из произвольных мест стопки вытаскиваем несколько карточек и кладем их сверху. При этом относительный порядок как среди вытащенных, так и среди оставшихся карточек не меняется. Докажем более общее утверждение: *2^n карточек, расположенных в произвольном порядке, можно упорядочить за n обратных перемешиваний.*

Доказательство проведем по индукции.

Для упорядочения двух карточек ($n=1$) достаточно одного обратного перемешивания. Пусть уже доказано, что для упорядочения 2^k карточек достаточно k обратных перемешиваний. Докажем, что 2^{k+1} карточек всегда можно упорядочить за $k+1$ обратных перемешиваний.

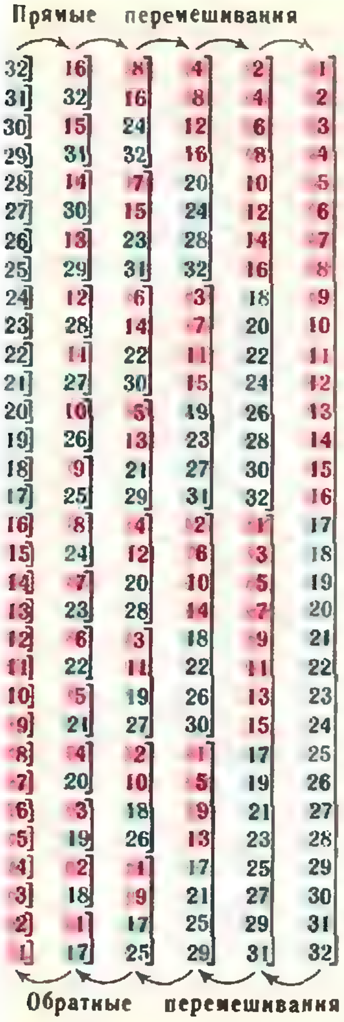


Рис. 2.

Рассмотрим какое-то расположение 2^{k+1} карточек в стопке. Стопки карточек с номерами от 1 до 2^k (назовем эту стопку *красной*) и с номерами от 2^k+1 до 2^{k+1} (назовем эту стопку *голубой*) — с относительным расположением карточек внутри каждой стопки таким же, как в стопке из 2^{k+1} карточек — по предположению индукции можно упорядочить за k обратных перемешиваний. Обозначим эти перемешивания через $A_1, A_2, \ldots, A_k$ для красной стопки и $B_1, B_2, \ldots, B_k$ для голубой.

Произведем теперь k обратных перемешиваний большой стопки (из 2^{k+1} карточек) следующим образом: при i-м обратном перемешивании вытаскиваем красные карточки, которые должны быть вытащены при перемешивании A_i, и голубые карточки, которые должны быть вытащены при перемешивании B_i, после чего кладем и те и другие на верх стопки — одни под другие (разобраться в том, что происходит, вам поможет рисунок 2). После k таких операций красная и голубая стопки оказываются упорядоченными. Остается за последнее, $(k+1)$-е перемешивание вытащить карточки красной стопки и положить их сверху.

II. Докажем, что если в стопке находится больше 2^n карточек, то за n перемешиваний их нельзя расположить в обратном порядке — по убыванию номеров.

Доказательство проведем по индукции. При $n=1$ число карточек в стопке не меньше трех. Так как при перемешивании мы либо берем сверху не менее двух карточек, либо оставляем не менее двух, после одного перемешивания найдутся две карточки, у которых не изменился относительный порядок.

Пусть утверждение задачи верно при $n=k$. Для $n=k+1$ предположим противное, то есть предположим, что за $k+1$

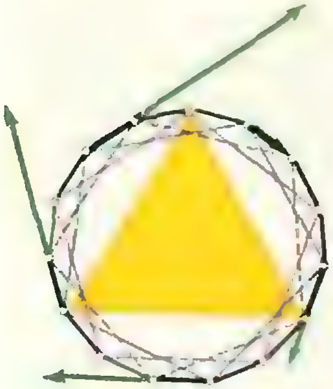
перемешиваний удалось получить обратный порядок в стопке, содержащей больше 2^{k+1} карточек. Посмотрим внимательнее, что происходит.

При первом перемешивании либо снимаются сверху, либо остаются неснятыми по крайней мере 2^k+1 карточек, что есть найдется стопка из 2^k+1 карточек, относительный порядок которой после первого перемешивания не изменился. Но по предположению индукции за оставшиеся k перемешиваний карточки этой стопки нельзя расположить в обратном порядке. Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

Ю. Лысов, В. Турчанинов

◆

М644. *а) Докажите, что существует выпуклый 1980-угольник со сторонами длины 1, 2,..., 1980, все углы которого равны по величине.*
б) Существует ли такой 1981-угольник?



Докажем, что если n не есть степень простого числа, то есть $n=p\cdot q$, $n>3$ и p и q — взаимно простые числа, отличные от единицы, то всегда можно составить n-угольник со сторонами длины 1, 2,..., n, параллельными сторонам правильного n-угольника. Так как $1980=4\cdot 495$, а $1981=7\cdot 283$, этим мы решим задачу.

Рассмотрим правильный n-угольник $(n=p\cdot q)$. Выделим среди его вершин p штук, образующих правильный p-угольник (на рисунке $n=15$, $p=3$, $q=5$). Теперь рассмотрим p наборов по q вершин нашего (правильного) n-угольника таких, что в каждом наборе эти вершины образуют правильный q-угольник, а первая вершина i-го набора совпадает с i-й вершиной выделенного p-угольника (см. рисунок). В силу взаимной простоты чисел p и q эти наборы не пересекаются. Поэтому ими исчерпываются все вершины n-угольника.

Теперь «устроим» p наборов по q векторов. Первые q векторов с длинами 1, 2,..., q расположим следующим образом: начала векторов поместим в последовательные вершины первого q-угольника, а направление каждого вектора возьмем совпадающим с направлением стороны n-угольника, прилегающей к соответствующей вершине q-угольника (направление обхода фиксировано). Обозначим сумму векторов первого набора через $\vec{b}_1$.

Второй набор q векторов получается так же, как и первый, только его «порождают» вершины второго q-угольника. Сумма $\vec{b}_2$ векторов второго набора при этом, очевидно, получается из вектора $\vec{b}_1$ поворотом на угол $360°/p$ вокруг центра n-угольника. Увеличив длину каждого вектора второго набора на q единиц, мы не изменим суммы $\vec{b}_2$, поскольку такое увеличение является добавлением q векторов, образующих правильный q-угольник (их сумма равна $\vec{0}$).

Так мы можем получить p наборов по q векторов: направления векторов i-го набора определяются вершинами i-го q-угольника, а длины их равны $1+q(i-1)$, $2+q(i-1)$,..., qi. Сумма $\vec{b}_i$ этих векторов получается из $\vec{b}_1$ поворотом на угол $360°\cdot(i-1)/p$ вокруг центра нашего n-угольника.

Из сказанного следует, что векторы $\vec{b}_i$ образуют правильный p-угольник. Следовательно, их сумма равна нулю, а значит, равна нулю и сумма всех $pq=n$ построенных векторов, направления которых соответствуют направлениям сторон нашего правильного n-угольника, а длины охватывают все натуральные числа от 1 до n. Остается последовательно расположить эти n векторов так, чтобы их направления соответствовали направлениям последовательных сторон правильного n-угольника.

При $n=p^k$, где p — простое, построить такой n-угольник нельзя, но элементарное доказательство этого факта нам неизвестно.

Ю. Лысов

◆

Ф657. *Радиусы кривизны двух одинаковых слипшихся друг с другом мыльных пузырей равны R. После того как перего-*

Рассмотрим условие равновесия двух слипшихся пузырей с перегородкой. Давление воздуха слева и справа от перегородки равно

$$p=p_0+\frac{4\sigma}{R},$$

родка между пузырями лопнула, образовался один пузырь радиуса R_1. Найти атмосферное давление. Коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора равен σ.

где p_0 — атмосферное давление, $4\sigma/R$ — избыточное давление в пузырях под искривленной поверхностью радиуса R (перед σ стоит коэффициент 4, а не 2, поскольку у мыльной пленки две поверхности). Условие равенства давлений слева и справа от перегородки означает, что перегородка плоская (в противном случае давления в пузырях должны были бы отличаться одно от другого на величину избыточного давления под искривленной поверхностью перегородки). Поскольку радиусы пузырей одинаковы, плоскость перегородки расположена на одинаковых расстояниях от центров пузырей.

На любой участок поверхности пленки, принадлежащий и перегородке, действуют три силы: две силы натяжения со стороны пленок, образующих собственно пузыри, и сила натяжения со стороны пленки-перегородки. Так как абсолютные значения этих сил одинаковы, в условиях равновесия эти силы направлены под углами 120° друг к другу (рис. 1).

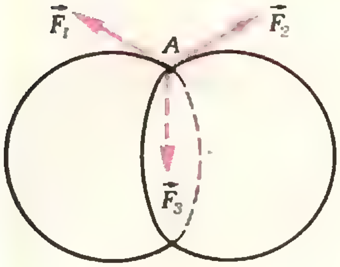


Рис. 1.

Таким образом, в начальном состоянии воздух в пузырях при давлении $p=p_0+4\sigma/R$ занимает объем $V=2\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)-V'$, где $V'=2\cdot\frac{1}{6}\pi h\,(3r^2+h^2)$ — объем двух шаровых сегментов, «отсеченных» перегородкой от пузырей (рис. 2). Как видно из рисунка 2, радиус перегородки $r=R\sqrt{3}/2$, высота шарового сегмента $h=R/2$ и

$$V'=\frac{1}{3}\pi\frac{R}{2}\left(3\frac{3R^2}{4}+\frac{R^2}{4}\right)=\frac{5}{12}\pi R^3,$$

$$V=\frac{8}{3}\pi R^3-\frac{5}{12}\pi R^3=\frac{9}{4}\pi R^3.$$

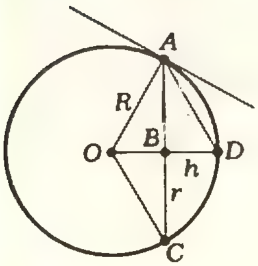


Рис. 2. $\widehat{OAB}=30°$;
$|OB|=\frac{1}{2}|OA|=\frac{1}{2}R$;
$r=\sqrt{R^2-\frac{R^2}{4}}=\frac{R\sqrt{3}}{2}$;
$h=|OD|-|OB|=$
$=R-\frac{R}{2}=\frac{R}{2}$.

После того как перегородка лопнула, воздух в пузыре радиуса R_1 занимает объем $V_1=\frac{4}{3}\pi R_1^3$ при давлении $p_1=p_0+\frac{4\sigma}{R_1}$.

Будем считать, что температура воздуха в пузырях остается неизменной (равной температуре окружающей среды). Тогда $\frac{p}{p_1}=\frac{V_1}{V}$, или

$$\frac{p_0+\frac{4\sigma}{R}}{p_0+\frac{4\sigma}{R_1}}=\frac{16}{27}\frac{R_1^3}{R^3}.$$

Отсюда находим атмосферное давление:

$$p_0=\frac{4\sigma(16R_1^2-27R^2)}{27R^3-16R_1^3}.$$

(Из выражения для p_0 следует, что радиусы R и R_1 связаны соотношением

$$\frac{3\sqrt[3]{4}}{4}<\frac{R_1}{R}<\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Убедитесь в этом самостоятельно.)

Т. Петрова

◆

Ф658. *Из баллона, в котором находятся сильно разреженные пары калия, через узкую горизонтальную трубку выходит пучок атомов. Определить температуру паров, если на горизонтальном пути длиной $l=50$ см среднее смещение атомов по вертикали составляет $h=3{,}2$ мкм.*

Температура паров определяется средней (точнее, среднеквадратичной) скоростью молекул паров:

$$T\approx\frac{\mu v_{\text{ср}}^2}{3R}. \qquad (1)$$

Для определения температуры надо найти $v_{\text{ср}}$.

Смещение по вертикали происходит в результате действия силы тяжести. Время τ движения молекул, длина l проходимого ими за это время пути и смещение h молекул по вертикали связаны соотношениями $\tau=l/v_{\text{ср}}=\sqrt{2h/g}$, откуда

$$v_{\text{ср}}=l\sqrt{\frac{g}{2h}}. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), находим

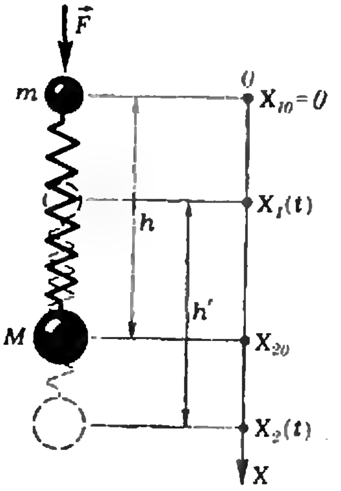
$$T \approx \frac{\mu l^2 g}{6Rh} \approx 6 \cdot 10^2 \text{ К}.$$

(Бо́льшая точность расчетов не нужна, поскольку мы довольно грубо оценили среднюю скорость движения молекул, воспользовавшись среднеквадратичной скоростью.)

А. Зильберман

◆

Ф659. *Небольшой станок массой $m=200$ кг вибрирует при работе из-за неоднородности тяжелого маховика, вращающегося с угловой скоростью 600 об/с. Чтобы снизить вибрации перекрытия в цехе, в котором установлен станок, под станину положили упругую прокладку толщиной $h=10$ см из материала с модулем упругости $E=3{,}1\times\times 10^8$ Н/м². Площадь основания станины $S=2$ м². Приведет ли установка прокладки к уменьшению вибраций перекрытия?*



$h = X_{20}$;
$x_1 = X_1(t)$, $x_2 = X_2(t) - X_{20}$;
$h' = X_2(t) - X_1(t)$;
$\Delta h = h' - h = x_2 - x_1$.

Колебания станка, вызванные вращением несбалансированного маховика приводят к появлению гармонической силы $F = F_0 \sin \omega t$, действующей со стороны станка на опору (F_0 — амплитуда, $\omega = 2\pi f$ — круговая частота, f — частота силы). Взаимодействие станка и перекрытия, разделенных упругой прокладкой, можно исследовать на основе упрощенной системы двух точечных масс m и M, соединенных пружиной с жесткостью k (см. рисунок; роль масс играют соответственно станок и перекрытие, а пружина имитирует прокладку между ними). Жесткость k пружины (жесткость прокладки) равна

$$k = \frac{ES}{h}. \qquad (1)$$

Масса перекрытия M намного превышает массу станка m. Действительно, если перекрытие сделано из железобетона (плотность около 2500 кг/м³) и имеет толщину примерно 0,2 м, то масса лишь одного квадратного метра (поверхностная плотность) перекрытия составляет 500 кг, что уже намного превышает массу станка (по условию 200 кг).

Пусть x_1 и x_2 — смещения масс m и M вдоль оси OX относительно координат масс в невозмущенном состоянии. Тогда ускорения масс, согласно второму закону Ньютона, можно записать в виде

$$\vec a_1 = x_1'' = -\frac{k\Delta h}{m} + \frac{F}{m} = \frac{k}{m}(x_2 - x_1) + \frac{F_0}{m}\sin \omega t,$$
$$\vec a_2 = \frac{k\Delta h}{M} = \frac{k}{M}(x_1 - x_2) \qquad (2)$$

При гармонических колебаниях $x_1 = A_1 \sin \omega t$, $x_2 = A_2 \sin \omega t$, $a_1 = -\omega^2 A_1 \sin \omega t$, $a_2 = -\omega^2 A_2 \sin \omega t$, где A_1, A_2 — амплитуды колебаний масс m и M соответственно. Подставляя эти выражения в (2), получим

$$\left(-\omega^2 + \frac{k}{m}\right)A_1 - \frac{k}{m}A_2 = \frac{F_0}{m},$$
$$-\frac{k}{m}A_1 + \left(-\omega^2 + \frac{k}{m}\right)A_2 = 0,$$

или

$$-\omega^2 A_1 + \frac{k}{m}(A_1 - A_2) = \frac{F_0}{m},$$
$$-\omega^2 A_2 - \frac{k}{m}(A_1 - A_2) = 0. \qquad (2')$$

Отсюда находим

$$A_1 - A_2 = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{-\omega^2 + \frac{k(m+M)}{mM}} = \frac{F_0}{m(\omega_p^2 - \omega)}, \qquad (2'')$$

где

$$\omega_p \approx \sqrt{\frac{k(m+M)}{mM}}$$

— резонансная круговая частота гармонических колебаний системы масс, соединенных пружиной. При $M \gg m$

$$\omega_p \approx \sqrt{\frac{k}{m}}. \qquad (3)$$

Из (2′) (2″) определяем амплитуду смещения массы M:

$$A_2 = \frac{F_0}{(m+M)\omega^2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2-1}.$$

В отсутствие прокладки сила F сообщает системе станок — перекрытие с массой $m+M$ ускорение

$$|\vec{a}_0| = \frac{|\vec{F}|}{m+M}.$$

Амплитуду A_0 колебаний в этом случае находим из условия $a_0 = -\omega^2 A_0 \sin \omega t$:

$$A_0 = -\frac{F_0}{(m+M)\omega^2}.$$

Таким образом, отношение амплитуд смещения перекрытия после установки прокладки и до этого равно

$$\frac{A_2}{A_0} = \frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2} = \frac{1}{1-\left(\frac{f}{f_p}\right)^2}, \qquad (4)$$

где

$$f_p = \frac{1}{2\pi}\omega_p \approx \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{ES}{hm}} \approx 885 \text{ Гц}$$

(см. (1) и (3)). Так как по условию $f = 600$ Гц, из (4) находим

$$\frac{A_2}{A_0} = \frac{1}{1-\left(\frac{600}{885}\right)^2} \approx 1{,}85,$$

то есть вибрации после установки прокладки усилятся.

Как же уменьшить воздействие на перекрытие? Как видно из формулы (4), этого можно добиться, выбирая параметры прокладки таким образом, чтобы выполнялось условие $f_p \ll f$, то есть следует выбирать материал для прокладки с малым модулем Юнга или увеличивать толщину прокладки. Так, если $E = 3{,}1 \cdot 10^9$ Н/м², то есть в 100 раз меньше, чем по условию задачи, то можно получить

$$\left|\frac{A_{20}}{A'_{20}}\right| \approx 0{,}02,$$

то есть вибрации перекрытия значительно уменьшатся.

Р. Винокур

Ф660. *Поплавок, изготовленный из однородного материала, имеет форму чечевицы — тела, ограниченного двумя сферическими поверхностями радиусов $R_1=R_2=R=3$ см. Максимальная толщина чечевицы $h=4$ см; масса чечевицы $m_1=5$ г. В поплавок на всю толщину вдоль оси симметрии воткнута спица длиной $l=10$ см и массой $m_2=3$ г. Устойчиво ли положение поплавка, когда он плавает на поверхности воды спицей вверх? Считать, что в жидкость погружена меньшая часть чечевицы.*

◆

Убедиться в том, что в жидкость погружена меньшая часть чечевицы, можно, воспользовавшись данными, приведенными в условии задачи. Условие равновесия поплавка в положении «спицей вверх» — $\vec{F}_т + \vec{F}_А = \vec{0}$, или $|\vec{F}_т| - |\vec{F}_А| = 0$, где $|\vec{F}_т| = (m_1+m_2)|\vec{g}|$ — сила тяжести, действующая на поплавок со спицей, $|\vec{F}_А| = \rho_в |\vec{g}| V'$ — выталкивающая сила (V' — объем погруженной в воду части поплавка). Из равенства

$$(m_1+m_2)|\vec{g}| = \rho_в |\vec{g}| V'$$

определяем V':

$$V' = \frac{m_1+m_2}{\rho_в} = 8 \text{ см}^3.$$

Объем половины чечевицы (объем шарового сегмента) равен

$$V = \frac{1}{6}\pi h_1 (3r^2 + h_1^2) \approx 29 \text{ см}^3$$

(см. рис. 1). Условие $V' < V$ и означает, что в воду погружена меньшая часть чечевицы.

Теперь рассмотрим вопрос об устойчивости поплавка в положении «спицей вверх». Будем считать, что при малом отклонении поплавка, когда спица составляет малый угол α с вертикалью (рис. 2), погруженная в воду часть поплавка

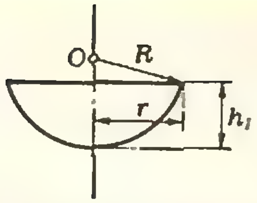


Рис. 1. $R=3$ см; $h_1=h/2=2$ см; $r=\sqrt{R^2-(R-h_1)^2}=\sqrt{8}$ см.

по-прежнему имеет форму шарового сегмента и осадка поплавка не меняется. (Отклонение поплавка — это поворот его вокруг точки O, то есть вокруг центра сферы, ограничивающей нижнюю часть поплавка.) Это условие означает, что, как и раньше, $\vec{F}_т+\vec{F}_А=\vec{0}$. Если в результате отклонения появляющиеся моменты сил стремятся возвратить поплавок в прежнее положение, это положение — «спицей вверх» — устойчиво; если моменты сил таковы, что поплавок будет продолжать отклоняться, положение «спицей вверх» неустойчиво.

Пока поплавок был в положении равновесия, силы $\vec{F}_т$ и $\vec{F}_А$ были приложены вдоль одной прямой — вертикали, проходящей через спицу. Сила $\vec{F}_т$ приложена в точке C — в центре масс поплавка со спицей, а сила $\vec{F}_А$ приложена в точке O (сила $\vec{F}_А$ есть результирующая сил давления, действующих со стороны воды на поплавок). Точка C находится на расстоянии $x=|DC|$ (см. рис. 2) от дна поплавка таком, что

$$m_1\left(\frac{l}{2}-x\right)=m_2\left(x-\frac{h}{2}\right);$$

отсюда

$$x=\frac{m_1l/2+m_2h/2}{m_1+m_2}=3{,}125\text{ см}.$$

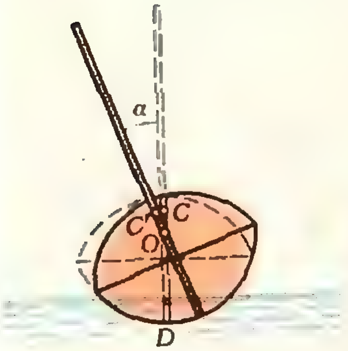


Рис. 2.

Точка O находится на расстоянии $|DO|=R=3$ см от дна поплавка. Следовательно, точка C лежит выше точки O.

При малом отклонении поплавка (при повороте вокруг точки O) точка приложения силы $\vec{F}_А$ остается прежней — точка O; точка же C смещается с вертикали DC. Таким образом, при отклонении поплавка на него действует пара сил; моменты этих сил стремятся повернуть поплавок в сторону дальнейшего отклонения от положения равновесия (на рисунке 2 — против часовой стрелки).

Следовательно, положение поплавка «спицей вверх» — положение неустойчивого равновесия.

Д. Кузнецов

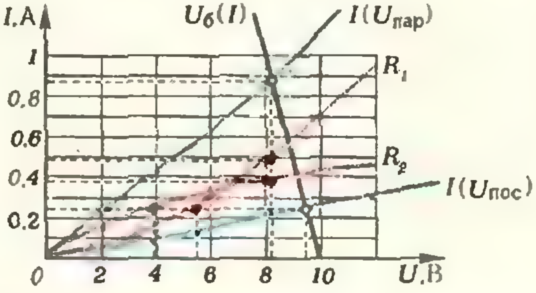
◆

Ф661. *На рисунке приведены вольтамперные характеристики двух нелинейных резисторов R_1 и R_2. Какими будут токи, идущие через резисторы и источник с ЭДС $\mathcal{E}=10$ В и внутренним сопротивлением $r=2$ Ом, если оба резистора подключить к источнику, соединив их а) последовательно, б) параллельно?*

Если резисторы соединены последовательно, то при каждом значении тока напряжение $U_{пос}$ на участке цепи, содержащем резисторы, равно сумме напряжений на каждом из них. При параллельном соединении ток в цепи при каждом значении напряжения $U_{пар}$ на резисторах равен сумме токов, текущих через каждый из них. Зависимости $I(U_{пос})$ и $I(U_{пар})$ построены на рисунке.

Напряжение $U_б$ на зажимах батареи меняется при изменении тока в цепи:

$$U_б=\mathcal{E}-rI=10-2I.$$



Зависимость $I(U_б)$ также построена на рисунке. Точки пересечения прямой $I(U_б)$ с кривыми $I(U_{пос})$ и $I(U_{пар})$ дают значения токов и напряжения в цепи соответственно при последовательном и параллельном соединениях резисторов.

Из рисунка находим:

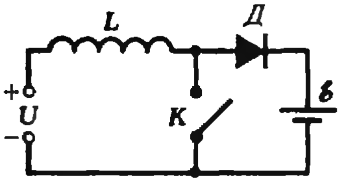
а) $I_1=I_2=I_б=0{,}25$ А; $U_1=5{,}5$ В, $U_2=3{,}9$ В;

б) $I_1=0{,}49$ А, $I_2=0{,}38$ А, $I_б\approx 0{,}87$ А; $U_1\approx U_2\approx 9{,}2$ В. (Цифры, разумеется, приближенные — график довольно мелкий, и более точные значения получить трудно.)

А. Зильберман

◆

Ф662. *Для подзарядки аккумулятора с ЭДС $\mathcal{E}=12$ В от мощного источника напряжения $U=5$ В собрана схема из катушки с индуктивностью $L=1$ Гн, диода Д и прерывателя К (см. рисунок), который периодически замыкается и размыкается на одинаковые промежутки времени $\tau_1=\tau_2=0{,}01$ с. Определить средний ток заряда аккумулятора.*



Для того чтобы найти средний ток заряда аккумулятора, нужно определить заряд, протекающий на аккумуляторе за один цикл замыкания — размыкания ключа.

Когда ключ замкнут, катушка непосредственно подключена к источнику и возникающая ЭДС самоиндукции равна U. Значит, ток через катушку меняется по линейному закону. Считая, что в момент замыкания ключа ток через катушку отсутствовал, получим

$$I=\frac{U}{L}t.$$

К моменту размыкания ключа ток будет равен

$$I_0=\frac{U}{L}\tau_1.$$

После размыкания ключа диод откроется и ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_{си}$ станет равной разности напряжения батареи и аккумулятора — $\mathcal{E}_{си}=U-\mathcal{E}$ — и изменит знак. Значит, ток через катушку начнет линейно убывать по закону

$$I=I_0-\frac{\mathcal{E}-U}{L}t.$$

Скорость убывания тока (при разомкнутом ключе) оказывается больше скорости возрастания тока (при замкнутом ключе). Это означает, что еще до истечения времени τ_2 через время τ_3 (от момента размыкания ключа) ток упадет до нуля и в этот момент диод закроется. Время τ_3, в течение которого аккумулятор подзаряжается, найдем из условия

$$\frac{\mathcal{E}-U}{L}\tau_3=I_0=\frac{U}{L}\tau_1,$$

откуда

$$\tau_3=\frac{U}{\mathcal{E}-U}\tau_1.$$

Заряд, который протечет через аккумулятор за это время равен

$$\Delta q=I_{ср}\tau_3=\frac{1}{2}I_0\frac{U}{\mathcal{E}-U}\tau_1=\frac{1}{2}\frac{U^2\tau_1^2}{L(\mathcal{E}-U)}.$$

Средний ток заряда аккумулятора равен

$$I_{ср}=\frac{\Delta q}{\tau_1+\tau_2}=\frac{U^2\tau_1^2}{2L(\mathcal{E}-U)(\tau_1+\tau_2)}\approx 8{,}9 \text{ мА}.$$

А. Зильберман

Список читателей, приславших правильные решения

В этом номере мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения задач М626—М630, М641—М645 и Ф633—Ф662 [жирные цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач].

Математика

Большинство читателей, приславших свои решения, успешно справились с задачами **М630, М641**. Остальные задачи решили: *Э. Абдуллаев* (Масаллы) **26, 28**; *В. Алексеев* (Москва) **26, 29**; *М. Алексеев* (Москва) **26, 45**; *А. Аралкин* (Новокузнецк) **27**; *М. Арасланов* (Запорожье) **28**; *Я. Базалий* (Донецк) **26, 29**; *А. Барг* (Киев) **28, 29, 43, 45**; *С. Баталов* (Арзамас) **42, 45**; *Е. Белова* (Видное) **26**; *Ю. Белоцерковский* (Минск) **26 27, 29, 42, 45**; *М. Беруашвили* (Хашури) **26**; *Ю. Беспалов* (Шостка) **26, 28, 29**; *И. Блюсс* (Днепропетровск) **26**; *А. Болдырихин* (Могилев-Подольский) **26**; *А. Брудный* (Ярославл) **26—29, 42**; *А. Вольнов* (Киев) **26**; *А. Гаврилов* (Белгород-Днестровский) **28**; *М. Гайсинский* (Ташкент) **42, 43, 45**; *М. Гапонова* (Горький) **26**; *В. Гешкенбейн* (Москва) **26, 42, 44, 45**; *З. Гиунашвили* (Тбилиси) **26**; *С. Горшков* (Москва) **42**; *Е. Горшкова* (Пермь) **26, 42, 44**; *А. Григорьян* (Ленингр д) **26, 27**; *В. Грина* (п. Дятлово Гродненской обл.) **26**;

С. Гузов (Львов) **26, 27**; *А. Гутин* (Клинцы) **26, 27, 42**; *В. Денисов* (Кашира) **26, 42**; *С. Дипчак* (Ташкент) **26**; *О. Дранко* (Киев) **42**; *А. Дробышев* (Ленинград) **42**; *О. Ерошкин* (Днепропетровск) **27, 29, 42**; *И. Жуков* (Ленинград) **27, 29, 43, 45**; *А. Зеге* (Минск) **28, 45**; *А. Золотых* (Курск) **26, 27, 42**; *И. Зябрев* (Кролевец) **26, 28**; *З. Ибрагимов* (Масаллы) **26, 28**; *А. Кагарманов* (Белорецк) **42, 44**; *Д. Камунтавичус* (Вильнюс) **42**; *Н. Качан* (д. Якимовка Минской обл.) **26**; *В. Ким* (Бектемир) **26, 27, 42**; *С. Ким* (Бектемир) **26, 42, 45**; *А. Киселев* (Ташкент) **45**; *В. Кисиль* (Одесса) **45**; *В. Козловский* (д. Н. Двор Гродненской обл.) **26**; *И. Колпаков* (Сочи) **28**; *А. Коньшин* (Ростов-на-Дону) **26, 27, 42**; *И. Корнеева* (Москва) **45**; *А. Корнилов* (Ростов-на-Дону) **42**; *Д. Короткин* (Ленинград) **27, 42—45**; *А. Коротков* (Горький) **45**; *О. Крижановский* (Харьков) **42, 43**; *А. Крушельницкий* (Казань) **26**; *С. Ламихов* (Ташкент) **26—29, 42**; *В. Левин* (Москва) **26**; *Л. Лейцин* (Чернигов) **26, 42, 45**; *В. Лихачев* (Львов) **27, 28**; *О. Малов* (Казань) **45**; *С. Мамедов* (Баку) **26, 29, 42**; *В. Мангазеев* (Кемерово) **26**; *С. Матюшов* (Вологда) **26—29**; *Л. Меркявичус* (Лентварис) **26—29, 42**; *А. Мильман* (Одесса) **26, 28**; *Э. Мирзоян* (Ереван) **26, 29, 42**; *С. Морейно* (Москва) **28, 29**; *Ю. Назаренко* (Киев) **26—29, 42, 45**; *Ю. Николаевский* (Харьков) **27, 29, 42**; *А. Никонов* (Кировоград) **26, 27, 42**; *П. Овчинников* (Вязники) **26, 27, 42**; *М. Окроян* (Ереван) **42**; *К. Пелих* (Павловский Посад) **26—28**; *Н. Пендюрин* (Пенза) **26, 27**; *Г. Перельман* (Ленинград) **26, 28, 42**; *Е. Попов* (Белорецк) **26, 27**; *С. Попов* (с. Эльгай Якутской АССР) **26**; *Ю. Прохоров* (Орехово-Зуево) **26, 28**; *Л. Прядко* **45**; *В. Романюк* (с. Куснище Волынской обл.) **26—28**; *А. Руденский* (Донецк) **42, 45**; *Н. Сайгина* (Саратов) **26, 28**; *Э. Салимов* (Кировабад) **26**; *М. Свердликов* (Новосибирск) **45**; *В. Светлицкий* (Запорожье) **26**; *В. Сидорин* (Реутов) **26**; *А. Сикса* (Киев) **26**; *И. Скрыпник* (Ивано-Франковск) **26**; *А. Слинкин* (Москва) **42**; *А. Смирнов* (Курган) **26, 27, 45**; *А. Сохет* (Харьков) **45**; *А. Спивак* (Стерлитамак) **27—29, 42, 43**; *С. Спичак* (Припять) **28, 29, 43, 45**; *Э. Степанян* (Баку) **26, 28, 42**; *Ю. Талденко* (Сумы) **26, 45**; *В. Титенко* (д. Блужа Минской обл.) **26, 27, 29, 42, 45**; *Р. Угриновский* (Хмельник) **26, 28**; *Н. Федин* (Омск) **26**; *Я. Фельдман* (Киев) **42**; *Д. Фомин* (Ленинград) **42**; *О. Фонарев* (Сумгаит) **26—28**; *А. Харитонский* (Киев) **43**; *А. Хилков* (Новомосковск) **26, 28**; *А. Хохлов* (Москва) **26, 42**; *В. Цекановский* (Донецк) **26**; *И. Цимох* (Кировоград) **26, 28, 42**; *В. Цолов* (Панагюрище, НРБ) **42**; *О. Чалых* (Витебск) **26, 28, 42**; *В. Шабунин* (п. Хохольский Воронежской обл.) **26, 45**; *С. Шарапов* (Ташкент) **26**; *В. Шах* (с. Замшаны Волынской обл.) **26, 27, 45**; *З. Шибзухов* (Нальчик) **26**; *В. Шириков* (Москва) **42**; *Ю. Школьников* (Киев) **28**; *Л. Элькун* (Ташкент) **26, 28**; *Л. Эпремидзе* (Тбилиси) **42, 43**.

Физика

Почти все читатели, приславшие свои решения, справились с задачами **Ф634, Ф647—Ф649, Ф658** и **Ф661**. Остальные задачи решили: *В. Абаджев* (Львов) **39—43, 45, 46, 50—52, 60, 62**; *В. Аветисов* (Баку) **42, 43, 46, 50—55, 57, 60, 62**; *И. Аглиуллин* (Москва) **35, 39, 40, 50—53, 57**; *Э. Алиев* (Баку) **42, 52, 57**; *В. Аненков* (Подольск) **52**; *К. Аракелов* (Моздок) **50—52, 57**; *А. Аралкин* (Новокузнецк) **43, 46, 52**; *А. Арбузов* (Чита) **46**; *А. Астахов* (Железнодорожный Московской обл.) **50, 52, 53**; *Н. Афанасьев* (Новороссийск) **52**; *А. Ахметзянов* (Уральск) **39—41, 43, 50—52, 54, 55**; *Э. Багдасарян* (Баку) **50—53**; *А. Баглюк* (Киев) **39, 40, 42, 43, 45, 50—54, 59, 60**; *С. Баталов* (Арзамас) **50—52, 54, 57, 60**; *В. Белоцерковский* (Донецк) **46, 50—54, 57, 60**; *О. Бендер* (Запорожье) **33, 37—42, 54, 55, 57**; *В. Бережной* (Киев) **36**; *Ю. Беспалов* (Шостка) **43, 45, 46**; *С. Бобровин* (Киев) **57**; *А. Бойко* (п. Ракитное Киевской обл.) **57**; *К. Бураковский* (Варшава, ПНР) **43—45, 54, 57**; *Л. Бураковский* (Киев) **55, 57**; *М. Вакула* (Одесса) **36**; *В. Васильев* (Великие Луки) **43, 50—52, 54, 55, 57, 60**; *В. Васильев* (д. Тобурданово Чув. АССР) **35—37**; *В. Вачев* (Ямбол, НРБ) **33, 43**; *Б. Вейцман* (Одесса) **35—37, 39—42, 44, 46, 50—55, 57, 60**; *Е. Велько* (п. Сахарный Завод Минской обл.) **50—52**; *А. Вернета* (ст. Старошинская Краснодарского кр.) **40, 45, 46, 51, 52, 54, 55, 57, 60**; *А. Ветчинкин* (Москва) **35—37**; *А. Владимиров* (Пущино) **39, 40, 50, 53, 54**; *Ю. Воеводов* (Гомель) **35, 39, 50—52, 55, 57**; *С. Вознюк* (Харьков) **50, 51, 55, 57, 60**; *А. Волков* (п. Палатка Магаданской обл.) **40, 41**; *А. Вольнов* (Киев) **52, 53, 57**; *А. Воробьев* (Тихвин) **54, 57, 60**; *Г. Гаев* (Саратов) **50—52, 60**; *Р. Габдуллин* (Москва) **50—52**; *М. Гапонова* (Горький) **43, 46**; *Е. Гасакова* (п. Ярдымлы Аз. ССР) **52**; *А. Глушков* (Йошкар-Ола) **44, 45**; *А. Голубков* (Щелково) **36, 39, 43, 51, 52**; *С. Горбачевский* (Минск) **57**; *М. Горбунов* (Горький) **50, 52**; *Д. Григорьев* (Москва) **33, 35—42, 53—55, 60, 62**; *И. Губин* (Ереван) **40, 50—52, 60**; *С. Гузов* (Львов) **39**; *И. Гуль* (Дрокия) **50—52**; *В. Гурбич* (Запорожье) **55**; *А. Гутин* (Клинцы) **33, 35—40, 42—46, 50—55, 57, 59, 60, 62**; *И. Дамм* (Черновцы) **35, 40, 43, 46, 50—52, 55, 59, 60, 62**; *В. Дворцевой* (Тамбов) **60, 62**; *П. Демкович* (Краснодар) **52**; *О. Держко* (Омск) **53**; *И. Дмитриев* (Донецк) **33, 39, 46, 50, 52**; *В. Добрецов* (Москва) **36, 40, 42, 43, 52, 57**; *А. Долгополов* (Дрокия) **36, 38, 42, 50, 52, 54, 55, 57**; *С. Дорфман* (Киев) **39, 40, 42, 57**; *С. Евдокимов* (Витебск) **35, 39—41, 46, 52—55, 57, 60, 62**; *И. Елишевич* (Чернигов) **35, 38—41, 43, 51, 52—55, 57, 60**; *В. Житомирский* (Харьков) **52**; *А. Жупинский* (Молодечно) **40**; *В. Зац* (Ташкент) **35**; *Ю. Звегинцев* (Харьков) **33, 35, 37, 39, 50—53, 59, 60, 62**; *М. Зейфман* (Вологда) **33, 35, 36, 39—41, 45, 46, 50—54, 60**; *Э. Зиннурова* (Уфа) **39**; *И. Златогорский* (Саратов) **52, 60**; *В. Зубяк* (Нововолынск) **40**; *В. Кагаловский* (Харьков) **35, 36, 40, 50, 52, 53, 57, 62**; *А. Каледин* (Москва) **51**; *А. Калиниченко* (Сумы) **55, 57**; *С. Калмыков* (Копейск) **52**; *Ю. Канский* (с. Городовка Винницкой обл.) **52**; *А. Каштанов* (Челябинск) **40**; *А. Кечерджян* (Ереван) **43, 52**; *И. Климкович* (с. Чернелица Ивано-Франковской обл.) **46**; *А. Клиновский*

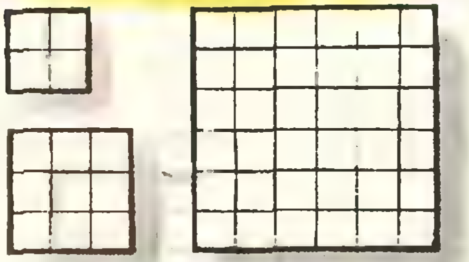
(Окончание см. на с. 58)

Квант для младших школьников

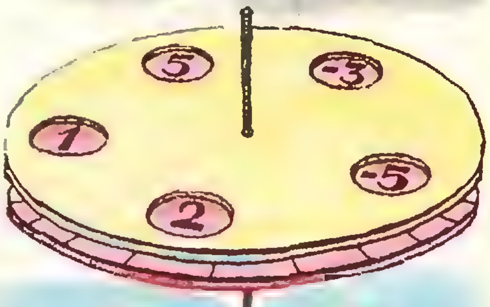
Задачи

Москва
Фрунзе

1. По расписанию поезд из Москвы во Фрунзе отправляется ежедневно в 23 часа 50 минут и находится в пути ровно 75 часов, а поезд из Фрунзе в Москву отправляется ежедневно в 12 часов 50 минут (время московское) и находится в пути (по техническим причинам) 73 часа 28 минут. Состав поезда, прибыв на конечную станцию, отправляется обратно в тот же день. Сколько необходимо сформировать составов, чтобы обеспечить бесперебойную работу маршрута Москва — Фрунзе и обратно?

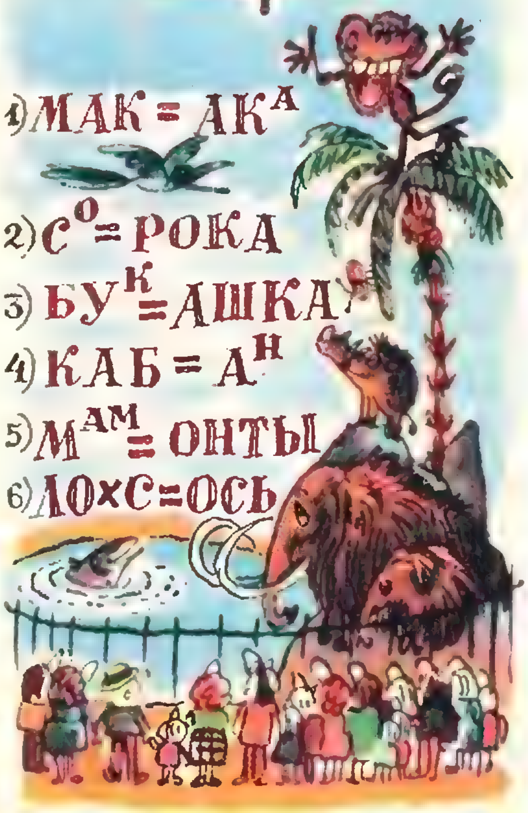


2. Из трех квадратов: 2×2, 3×3 и 6×6 (см. рисунок) нужно сложить один. Как разрезать эти квадраты, чтобы количество частей было минимальным?



3. Круглый диск разделен на 21 сектор; секторы одинаковы; в каждый из них записано некоторое число. Во втором диске, укрепленном на одной оси с первым, сделано 5 окошечек так, что при любом повороте второго диска из некоторого начального положения на угол, кратный $\frac{2\pi}{21}$, в каждое окошечко видно одно из чисел первого диска. Известно, что при любом таком повороте второго диска сумма видных через окошечки чисел равна нулю. Докажите, что сумма всех чисел, написанных на первом диске, равна нулю.

4. Зоопарк. В каждом из ребусов, изображенных на рисунке, одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные. Расшифруйте эти ребусы.



Эти задачи нам предложили
Л. Мочалов, В. Произволов,
В. Радунский, Н. Розов

Г. Топадзе

В волшебном мире чисел

В мире чисел нередко встречаются удивительные равенства и соотношения. Мы хотим познакомить читателя с некоторыми из них.

Симметричные произведения

Взгляните на следующие равенства:

$$12 \cdot 42 = 24 \cdot 21,$$
$$102 \cdot 402 = 204 \cdot 201,$$
$$1002 \cdot 4002 = 2004 \cdot 2001,$$
$$10002 \cdot 40002 = 20004 \cdot 20001.$$

Замечательная симметрия — не правда ли? Этот ряд равенств можно продолжать — стоит лишь заметить, что

$$(10^n+2) \cdot (4 \cdot 10^n+2) = (2 \cdot 10^n+4) \cdot (2 \cdot 10^n+1).$$

(При $n=1$, 2, 3, 4 получаются наши равенства.)

«Стойкие» квадратные числа

Кто не знает, что 121 — «квадратное число»: оно равно 11^2. Интересно, что это число обладает некоторой «стойкостью» — является квадратным не только в десятичной, но и в любой другой системе счисления, основание которой больше двух.

В самом деле, пусть основание системы счисления равно a и $a>2$:

$$121_a = 1 \cdot a^2+2 \cdot a+1 = (a+1)^2,$$

то есть 121_a есть квадрат числа, полученного прибавлением единицы к основанию системы.

А существуют ли другие стойкие квадратные числа? Оказывается, существуют. Например, числа 144 и 441 являются квадратными в любой системе счисления с основанием $a>4$.

Предлагаем читателю найти другие такие же числа.

Возведение в квадрат

Посмотрите, как оригинально можно возвести в квадрат числа 44, 55, 66:

$$\begin{array}{c} 44^2 \\ \hline 16 \\ +1616 \\ 16 \\ \hline 1936 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 55^2 \\ \hline 25 \\ +2525 \\ 25 \\ \hline 3025 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 66^2 \\ \hline 36 \\ +3636 \\ 36 \\ \hline 4356 \end{array}$$

Подобным же образом можно найти 77^2, 88^2, 99^2. А все здесь упирается в равенство

$$11^2 = 121 = 10+101+10.$$

В самом деле, например, для 44^2 имеем

$$44^2 = (4 \cdot 11)^2 = 16 \cdot 121 = 16 \cdot (10+101+10) = 160+1616+160.$$

Полученный результат можно представить в виде вышеприведенной первой записи.

Аналогично, если воспользоваться равенством

$$111^2 = 12321 = 100+1010+10101+1010+100,$$

можно установить своеобразный способ возведения в квадрат некоторых трехзначных чисел. Например,

$$555^2 = (5 \cdot 111)^2 = 25 \cdot 12321 = 25(100+1010+10101+1010+100) = 2500+25250+252525+25250+2500,$$

$$666^2 = (6 \cdot 111)^2 = 36 \cdot 12321 = 36(100+1010+10101+1010+100) = 3600+36360+363636+36360+3600.$$

На основании полученных равенств можем написать

$$\begin{array}{c} 555^2 \\ \hline 25 \\ 2525 \\ +252525 \\ 2525 \\ 25 \\ \hline 308025 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 666^2 \\ \hline 36 \\ 3636 \\ +363636 \\ 3636 \\ 36 \\ \hline 443556 \end{array}$$

Этот оригинальный способ можно применить и для нахождения квадратов четырехзначных, пятизначных,... чисел рассмотренного типа.

Н. Берюлева

Интерференция света

Интерференционные картинки всем нам знакомы с детства. Это радужные пятна от пролитого бензина на лужах, яркие цвета мыльных пузырей. Механизм образования разноцветной интерференционной картинки довольно сложен. Ограничимся рассмотрением интерференции на более простых примерах.

В Физическом энциклопедическом словаре читаем: «Интерференция — это усиление или ослабление амплитуды результирующей волны в зависимости от соотношения между фазами складывающихся в пространстве двух (или нескольких) волн с одинаковыми периодами. Интерференция имеет место для всяких волн независимо от их природы». К этому можно добавить, что интерференционная картинка будет устойчивой, если складывающиеся волны имеют не только одинаковые периоды, но и постоянный (не зависящий от времени) сдвиг фаз. Такие волны называют когерентными.

Вспомним, как объясняется возникновение интерференционной картины при сложении колебаний от двух точечных когерентных источников света. Векторы напряженности $\vec{E}$ электрического поля (так называемые световые векторы) в электромагнитных волнах, излучаемых источниками, могут быть записаны в виде

$$E_1 = A_1 \cos \omega t,$$
$$E_2 = A_2 \cos (\omega t + \varphi_0).$$

Рассмотрим для простоты случай, когда источники света синфазны (сдвиг фаз $\varphi_0 = 0$) и амплитуды колебаний одинаковы ($A_1 = A_2 = A$).

Пусть расстояния от источников S_1 и S_2 до точки наблюдения C в плоскости P равны r_1 и r_2 соответственно (рис. 1). На пути от источников до точки наблюдения волны приобретут разность хода $\Delta r = r_1 - r_2$. В тех точках плоскости P, куда волны приходят в одинаковых фазах (то есть с разностью хода $\Delta r = k\lambda$, где k — любое целое число), они усилят друг друга, и результирующий световой вектор $\vec{E}$ будет колебаться с амплитудой $2A$. В этих точках находятся интерференционные максимумы. Там, куда две волны равной амплитуды придут в противоположных фазах (то есть с разностью хода, равной нечетному числу полуволн: $\Delta r = (2k+1)\lambda/2$), они полностью погасят друг друга. В этих точках находятся интерференционные минимумы, где никаких колебаний нет: $E = 0$ в любой момент времени.

Глаз наблюдателя усредняет картину во времени (при частотах, соответствующих световым колебаниям, глаз «не замечает» колебаний) и реагирует на интенсивность света, пропорциональную среднему значению от квадрата результирующего светового вектора ($\overline{E^2}$).

Что же увидит наблюдатель? Если плоскость наблюдения параллельна линии S_1S_2 (как показано на рисунке 1) и расстояние d между источниками мало по сравнению с расстоянием L до плоскости P,

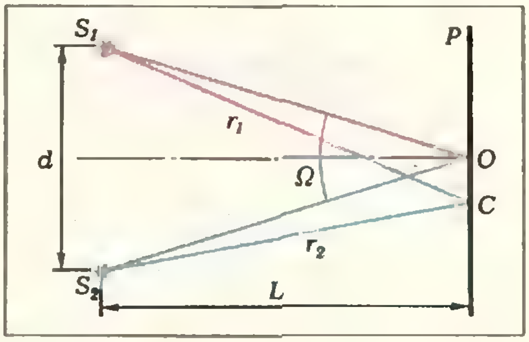


Рис. 1.

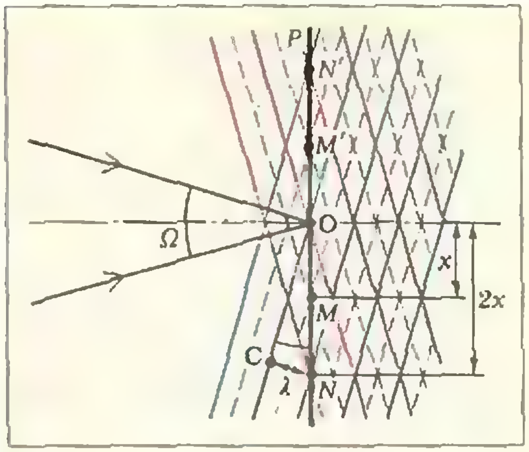


Рис. 2.

интерференционная картина представляет собой систему чередующихся светлых и темных полос. Расположив плоскость наблюдения перпендикулярно к линии S_1S_2, можно увидеть интерференционную картину в виде концентрических колец.

Вернемся к рисунку 1. В точку O волны приходят с разностью хода $\Delta r=0$. Угол $\Omega=d/L$, под которым из точки O (а при $d/L\ll 1$ из любой точки наблюдения) видны источники, называют углом схождения интерферирующих лучей, или углом интерференции. Расстояние между центрами соседних светлых (или темных полос, называют шириной интерференционной полосы. Посмотрим, от чего она зависит.

Задача 1. *Интерферируют две плоские волны. Рассчитайте ширину x интерференционной полосы, если угол схождения волн на экране Ω, а длина волны λ.*

На рисунке 2 изображены положения волновых фронтов в некоторый момент времени. Синие (и красные) сплошные линии соединяют точки, где в этот момент напряженность электрического поля принимает амплитудное значение $E=+A$. Расстояния между соседними сплошными линиями равны λ. Штриховые линии объединяют точки, где напряженность поля $E=-A$.

В точках O, M, N, M', N' и т. д. две волны встречаются в одинаковых фазах. Поскольку фазы колебаний обеих волн одинаково меняются со временем ($\varphi=\omega t+\varphi_0$), в любой момент времени волны будут приходить в эти точки в одинаковых фазах и, следовательно, усиливать друг друга. Точки O, M, N, M', N' соответствуют интерференционным максимумам.

Из рисунка 2 видно, что $\widehat{NOC}=\Omega/2$, $|ON|=2x$ и $|CN|=\lambda$. Из соотношения

$$\frac{\lambda}{2x}=\sin\frac{\Omega}{2}\simeq\frac{\Omega}{2}$$

найдем

$$x=\frac{\lambda}{\Omega}\qquad(\text{для малых }\Omega)$$

— ширина интерференционной полосы зависит от длины волны источников и угла схождения. Этот результат справедлив для любой интерференционной схемы с малым углом схождения лучей (при достаточном удалении от источников волны всегда можно считать плоскими). В частности, для точечных источников (см. рис. 1)

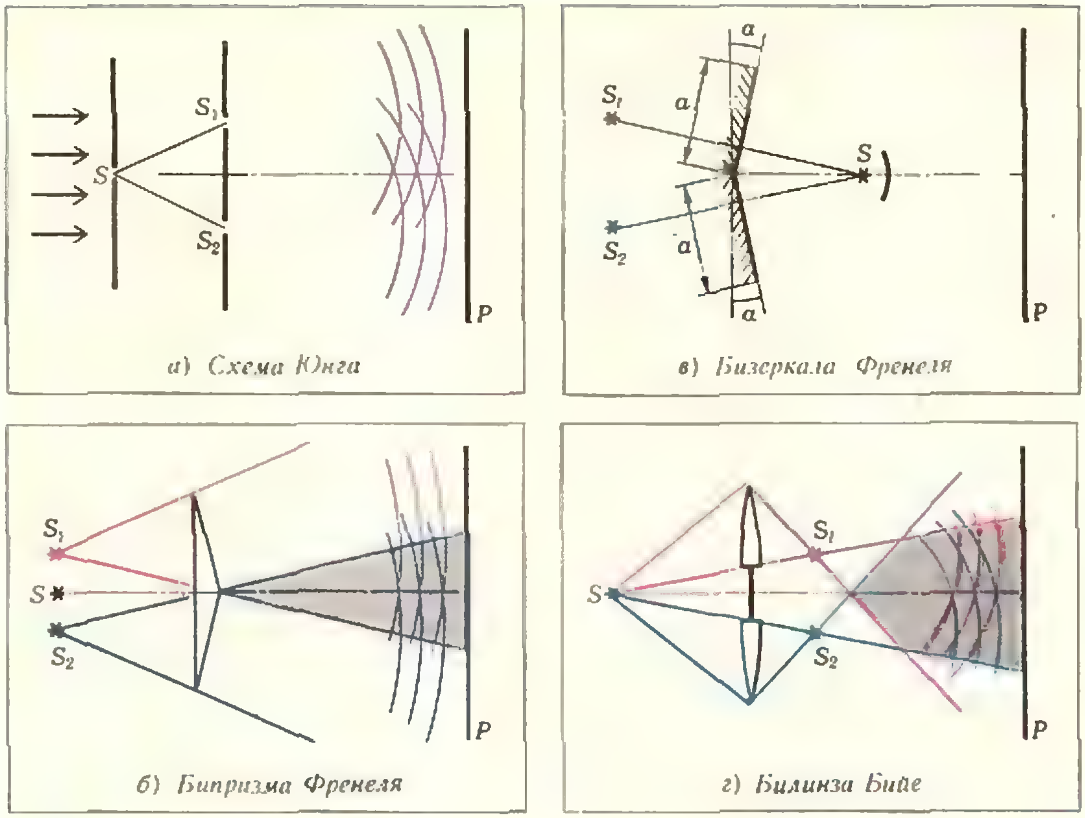
$$\Omega=\frac{d}{L}\text{ и }x=\frac{\lambda}{\Omega}=\frac{\lambda L}{d}.$$

В красном свете ($\lambda\approx7\cdot10^{-7}$ м) полосы шире, чем в зеленом ($\lambda\approx5{,}5\cdot10^{-7}$ м); с удалением экрана от источников полосы расширяются ($x\sim L$); сближение источников также ведет к уширению полос ($x\sim1/d$).

Заметим, что два обычных независимых источника не являются когерентными, потому что разность фаз приходящих от них волн не постоянна. Для получения четкой интерференционной картины свет от одного источника делят на два пучка. Это можно сделать, например, с помощью одной из схем, представленных на рисунке 3. Расположив экран там, где пересекаются световые пучки, исходящие из двух источников (или их изображений) S_1 и S_2, можно наблюдать интерференционные полосы.

Вот еще один пример.

Задача 2. *Из собирающей линзы с фокусным расстоянием $F=50$ см и диаметром $D=5$ см вырезана полоса шириной $a=5$ мм, а оставшиеся части сдвинуты вплотную (рис. 4). На расстоянии $d=75$ см от линзы расположен точечный источник света S. Каково*



а) Схема Юнга

в) Бизеркала Френеля

б) Бипризма Френеля

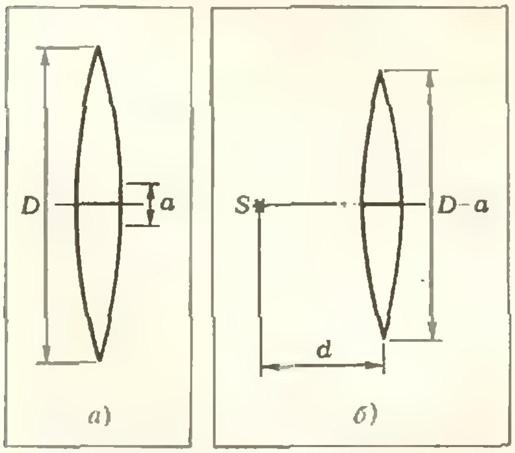
г) Билинза Бийе

Рис. 3.

максимальное число полос в интерференционной картине для длины волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м?

Построим изображение источника S в верхней половине срезанной линзы (рис. 5). Луч SO, параллельный оптической оси, после преломления в верхней части линзы пойдет через ее фокус F_1. Луч SA, преломившись в линзе, должен встретиться с параллельным ему лучом KO_1 в точке M фокальной плоскости линзы (луч KO_1 проходит через оптический центр O_1 верхней половины линзы, не преломляясь).

Пересечение продолжений лучей AM и OF_1 дает положение изображения S_1 источника на расстоянии f от линзы.



а)

б)

Рис. 4.

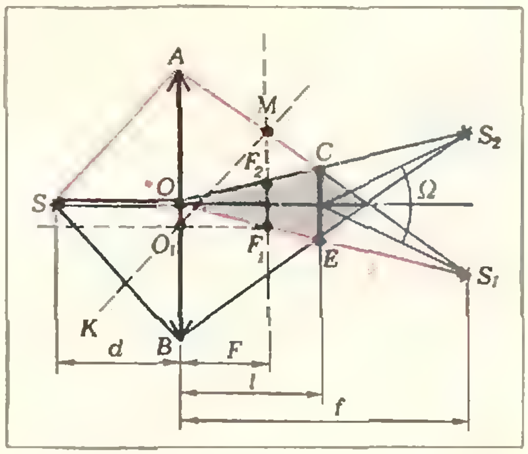


Рис. 5.

Изображение S_2 источника в нижней половине линзы расположено симметрично относительно оси системы.

Из рисунка 5 видно, что в данном случае область перекрытия пучков ограничена и лежит между линзой и точкой пересечения лучей AS_1 и BS_2. На расстоянии l от линзы размер $|CE|$ области перекрытия максимален. Здесь можно наблюдать $N=\frac{|CE|}{x}$ полос, где $x=\frac{\lambda}{\Omega}$ — ширина полосы. Угол схождения $\Omega=\frac{|S_1S_2|}{f-l}$, поэтому

$$N=\frac{|CE|}{\lambda}\,\frac{|S_1S_2|}{f-l}$$

Из подобия треугольников F_2F_1O и CEO найдем

$$|CE|=|F_2F_1|\frac{l}{F}=\frac{al}{F},$$

а из подобия треугольников AOC и S_1S_2C —

$$|S_2S_1|=|AO|\frac{f-l}{l}=\frac{D-a}{2}\,\frac{f-l}{l}.$$

Тогда окончательно

$$N=\frac{|CE|}{\lambda}\,\frac{|S_1S_2|}{f-l}=\frac{a(D-a)}{2F\lambda}=450 \text{ полос.}$$

С удалением плоскости наблюдения от линзы полосы становятся уже (растет Ω). Ширина области перекрытия до плоскости CE растет, а затем уменьшается и притом быстрее, чем ширина полосы. Поэтому максимальное число полос наблюдается в плоскости CE — самом широком сечении области перекрытия.

* * *

В заключение рассмотрим несколько задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах в Московский физико-технический институт.

З а д а ч а 3 (1980). *От точечного монохроматического источника A отодвигают точечный монохроматический источник B (источники когерентны и синфазны) до тех пор, пока в точке O, где наблюдается интерференция, не наступает потемнение (рис. 6). (Расстояние между A и B при этом равно d = 2мм.) Расстояние между источником A и экраном L = 9 м. На сколько нужно передвинуть экран к источнику A, чтобы в точке O_1 возникло потемнение?*

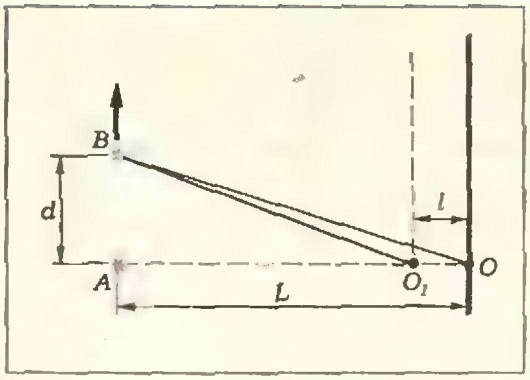


Рис. 6.

При удалении источника B первое потемнение в точке O возникнет при условии, что разность хода волн от B и A равна 1/2 длины волны:

$$\Delta r=|BO|-|AO|=\frac{\lambda}{2},$$

или

$$\sqrt{L^2+d^2}-L=\frac{\lambda}{2}. \qquad (1)$$

Если экран приблизить к источникам на расстояние l, минимум в точке O_1 будет соответствовать разности хода 3/2 длины волны:

$$\Delta r_1=|BO_1|-|AO_1|=\frac{3\lambda}{2},$$

или

$$\sqrt{(L-l)^2+d^2}-(L-l)=\frac{3\lambda}{2}. \qquad (2)$$

Преобразуем выражения (1) и (2) и воспользуемся приближенной формулой $(1+x)^{1/2}=1+\frac{x}{2}$ для $x\ll 1$:

$$\sqrt{1+\left(\frac{d}{L}\right)^2}-1=\frac{\lambda}{2L},$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{d}{L-l}\right)^2}-1=\frac{3\lambda}{2(L-l)},$$

или

$$d^2=\lambda L,$$
$$d^2=3\lambda(L-l).$$

Отсюда

$$l=\frac{2}{3}L=6 \text{ м.}$$

З а д а ч а 4 (1974). *В интерференционной схеме с зеркалом Ллойда точечный источник S расположен*

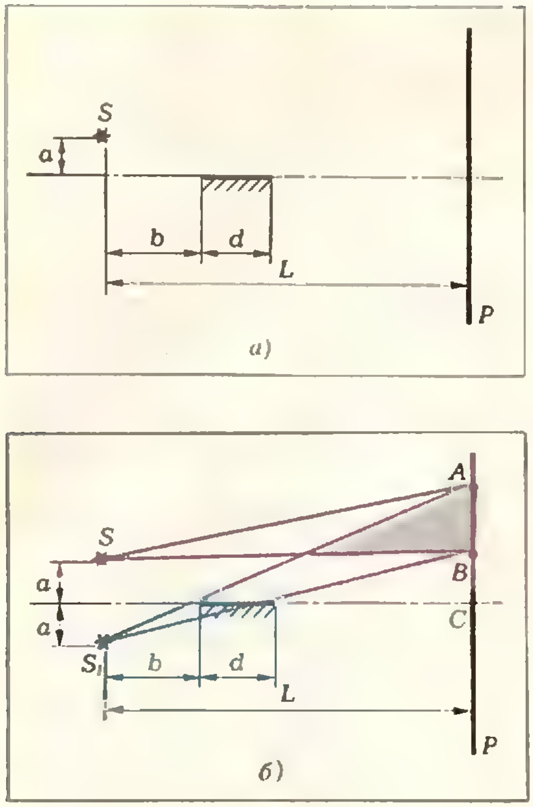


Рис. 7.

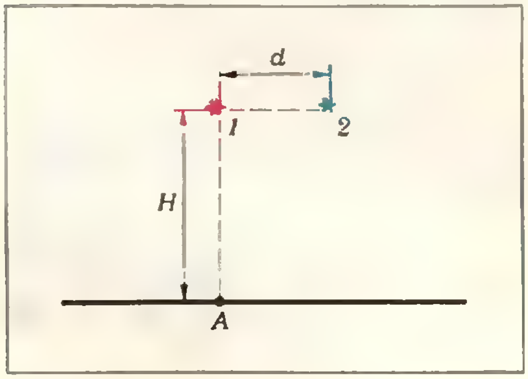


Рис. 8

на расстоянии $b=20$ см по горизонтали от плоского зеркала, на высоте $a=10$ см над плоскостью зеркала (рис. 7, а). Длина зеркала $d=10$ см. На расстоянии $L=1$ м от источника расположен экран P. Определите вертикальный размер интерференционной картины на экране.

Построим изображение S_1 источника S в плоском зеркале (рис. 7, б). Лучи от источника S освещают практически весь экран. Лучи от изображения S_1 (лучи, отраженные от зеркала) перекрываются с лучами от S только в области AB. Введем обозначения: $|AB|=h$, $|AC|=z$; тогда из подобия треугольников найдем

$$\frac{b+d}{a}=\frac{L-b-d}{z-h},$$

$$\frac{b}{a}=\frac{L-b}{z}.$$

Отсюда

$$h=\frac{La/b}{1+b/d}\approx 16{,}7 \text{ см}.$$

Упражнения

1. Два точечных синфазных монохроматических источника расположены на расстоянии d друг от друга (рис. 8). Прямо под источником 1 на расстоянии $H=8$ м наблюдается интерференция. Первый раз потемнение в точке A наблюдается при $d_1=2$ мм. В следующий раз потемнение наступает при расстоянии d_2. Найдите это расстояние.

2. Собирающую линзу с фокусным расстоянием $F=50$ см и диаметром $D=5$ см разрезали по диаметру пополам и половинки раздвинули на расстояние $a=5$ мм (см. рис. 3, г). Точечный источник света S расположен на расстоянии $d=1$ м от линзы. На каком минимальном расстоянии l от линзы можно наблюдать интерференционную картину? Щель между половинками линзы закрыта.

3. В схеме с бизеркалами Френеля (см. рис. 3, в) два одинаковых плоских зеркала образуют угол $2\alpha=0{,}1$ рад. Точечный источник S находится на биссектрисе угла на расстоянии $d=20$ см от линии пересечения зеркал. При каком минимальном размере зеркал a на удаленном экране P могут наблюдаться интерференционные полосы? Прямые лучи от источника на экран не попадают.

Воронежский государственный университет им. Ленинского комсомола

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(математический факультет и факультет прикладной математики и механики)

1. Найти уравнение касательной к кривой $y=\frac{x+1}{x}$, если известно, что касательная проходит через точку $M(a, b)$. Сколько существует решений в зависимости от выбора точки $M(a, b)$? Найти эти решения.

2. Каждая из двух троек чисел $\lg a$, $\lg b$, $\lg c$ и $\lg a-\lg 2b$, $\lg 2b-\lg 3c$, $\lg 3c-\lg a$ является арифметической прогрессией. Могут ли числа a, b, c служить длинами сторон треугольника? Если да, то какой это будет треугольник? Найти углы этого треугольника, если он существует.

3. Решить уравнение

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{\sqrt{x}}=(2{,}25)^{\sqrt{x}-4}.$$

4. Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, где ABC и $A_1B_1C_1$ — правильные треугольники со стороной b, являющиеся соответственно нижним и верхним основаниями этой призмы. На стороне $[BC]$ взята точка K так, что угол $\widehat{KAC}=\alpha$, $\alpha<\frac{\pi}{3}$. Зная, что площадь поверхности призмы равна $\frac{3}{2}a^2$, найти площадь треугольника AKC_1.

Вариант 2

(физический факультет)

1. Из города A в город B, расстояние между которыми 120 км, на мопеде отправился курьер. Через один час после этого из A на мотоцикле выехал второй курьер, который, нагнав первого и передав ему поручение, немедленно с той же скоростью двинулся обратно и возвратился в A в тот момент, в который первый достиг B. Какова скорость первого курьера, если скорость второго равна 50 км/ч?

2. На окружности радиуса 10 см дана точка A. На каком расстоянии от точки A нужно провести хорду $[BC]$ параллельно касательной в точке A, так, чтобы площадь треугольника ABC была наибольшей?

3. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}(3x+4)>\log_{\frac{1}{3}}(x^2+2).$$

4. Доказать тождество

$$\frac{1}{2}(\cos t+\sqrt{3}\sin t)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-t\right).$$

Вариант 3

(геологический факультет и отделение гидрологии географического факультета)

1. В прямоугольном треугольнике ABC, где $\widehat{C}=30^\circ$, из вершины прямого угла B проведена медиана $[BK]$. Найти площадь треугольника BCK, если длина катета $[AB]$ равна 4 см.

2. Определить коэффициенты квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ так, чтобы его корни были равны p и q.

3. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Определить синусы и косинусы углов AOD, DOC, COB, если косинус угла AOB равен 7/25.

4. Решить неравенство

$$\frac{2x+3}{\varphi'(x)}>0,$$

где $\varphi(x)=\ln(x^2+3x-10)$.

Задачи устного экзамена

Математический факультет и факультет прикладной математики и механики

1. Упростить выражение

$$S=\log_2 3+\log_2 3^3+\log_2 3^5+\ldots+\log_2 3^{801}.$$

2. Через какую точку A на кривой $y=-x^2+2x$ должна проходить касательная к этой кривой, чтобы трапеция, образованная касательной и прямыми $x=0$, $y=0$, $x=1$, имела наименьшую площадь?

3. Пусть $f(x)$ определена при всех $x\neq 0$ и $f(x)+3f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2$. Найти $f(2)$.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}|x+y|=1,\\ |x|+|y|=1.\end{cases}$$

5. Решить неравенство

$$\sqrt{1-x}+\sqrt{2x-3}<5.$$

Физический факультет

6. К графику функции $y=\ln x^2$ построить касательную, параллельную прямой $y=-x$.

7. Найти первый член и разность арифметической прогрессии, у которой

$$\begin{cases}a_2+a_5-a_3=10,\\ a_1+a_6=17.\end{cases}$$

8. Через точку A под углом в 30° проведены два луча. На одном из них на расстоянии a от точки A взята точка B. Из нее опущен перпендикуляр на другой луч, из его основания опущен перпендикуляр на $[AB]$ и т. д. Найти длину полученной бесконечной ломаной.

9. Решить неравенство

$$\log_{x-3}(x-4)<2.$$

Геологический и географический факультеты

10. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+4)<2.$$

11. Найти уравнение касательной к кривой $y=x^3$ в точке $x=2$.

12. Определить длины сторон треугольника, если они выражаются целыми числами, образующими арифметическую прогрессию, а периметр треугольника равен 15.

13. Определить знак выражения $\log_3 4-\log_4 3$.

Химический и биолого-почвенный факультеты

14. Решить уравнение

$$x|x|+2x+1=0.$$

15. Упростить выражение

$$(\log_3 4+\log_2 9)^2-(\log_3 4-\log_2 9)^2.$$

16. Найти знак числа $\lg a$, если $a^{100}>a^{90}$.

17. Построить график функции

$$y=(x+1)^3-(x-1)^3.$$

Экономический факультет

18. Найти угол при вершине равнобедренного треугольника наибольшей площади, вписанного в окружность радиуса R.

19. Найти область определения функции

$$y=\lg(\sqrt{x^2-5x-24}-x-2).$$

20. Найти параллельный перенос, отображающий параболу $y=x^2$ на $y=x^2-6x+11$.

21. Построить график функции

$$y=x|x-3|.$$

О. Ускова

Азербайджанский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Математика

Письменный экзамен

Математический факультет

Вариант 1

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ построить сечение, проходящее через точки C, M и N, если $M\in[BB_1]$, $|MB|=\frac{1}{3}|BB_1|$, $N\in[AD]$, $|ND|=\frac{1}{3}|AD|$.

2. Решить уравнение

$$\cos 7x-\sin 5x=\sqrt{3}(\cos 5x-\sin 7x).$$

3. Решить неравенство

$$5^{\log_x\frac{8-12x}{x-6}}>25.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-3x+4$ и $y=x+1$.

5. Вычислить предел

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}.$$

Вариант 2

1. В правильной четырехугольной пирамиде центры вписанного и описанного шаров совпадают. Определить двугранный угол при ребре основания пирамиды.

2. Найти множество решений системы

$$\begin{cases}(x+y)\cdot 3^{y-x}=\frac{5}{27},\\ 3\log_5(x+y)=x-y.\end{cases}$$

3. Доказать, что если α, β, γ — углы треугольника, то имеет место равенство

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=1.$$

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=\frac{4}{3}x^3-4x$ на отрезке $[0;2]$.

5. Доказать, что скалярное произведение двух векторов — сторон параллелограмма с общей вершиной — равно четверти разности квадратов диагоналей.

Физический факультет

Вариант 3

1. В конус вписан шар. Поверхность шара относится к площади основания конуса как 4:3. Найти угол при вершине конуса.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}x+2y-z=7,\\ 2x-y+z=2,\\ 3x-5y+2z=-7\end{cases}$$

методом Гаусса.

3. Доказать тождество

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta+(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\cdot\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=1.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{5}{x}$ и $y=6-x$.

5. Три силы, приложенные к одной точке, образуют попарно углы, равные φ. Найти величину равнодействующей, если величина каждой из данных сил равна F.

Вариант 4

1. Основанием пирамиды служит квадрат; две боковые грани пирамиды перпендикулярны к ее основанию, две другие образуют с основанием угол α. В эту пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины лежат на боковых ребрах пирамиды, а четыре другие — на основании пирамиды. Зная, что ребро куба равно a, найти боковую поверхность пирамиды.

2. Числа $5x-y$, $2x+3y$ и $x+2y$ составляют арифметическую прогрессию, а числа $(y+1)^2$, $xy+1$ и $(x-1)^2$ составляют геометрическую прогрессию. Найти x и y.

3. Решить неравенство

$$x-3\sqrt{x-3}-1>0.$$

4. Найти область определения функции

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+x-6}}{x^2-4}.$$

5. Вычислить предел

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-x-3}{2x^2+5x+3}.$$

В. Попов,
С. Садыхов

Киевский государственный педагогический институт им. А. М. Горького

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(специальность «математика» физико-математического факультета)

1. В правильную треугольную пирамиду вписан конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом α. Найти объем этой пирамиды, если боковое ребро равно b.

2. Решить неравенство

$$\lg(x-1)+\lg(x-2)<\lg 6.$$

3. Решить уравнение

$$\cos 2x+\cos x+1=0.$$

4. Найти наибольшее значение функции

$$y=(2-x)(x+2).$$

Вариант 2

(специальность «физика и астрономия» физико-математического факультета)

1. В усеченном конусе диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны, а образующая образует с плоскостью большего основания угол α и равна l. Определить площадь поверхности и объем усеченного конуса.

2. Определить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=3x-x^3$, $y=0$.

3. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2>0.$$

4. Решить уравнение

$$2\cos^2 x+\sin^2 2x=1+\cos^2 2x.$$

Вариант 3

(факультет общетехнических дисциплин)

1. В правильной треугольной усеченной пирамиде ребра нижнего и верхнего оснований соответственно равны a и b $(a>b)$, двугранный угол у ребра нижнего основания равен α. Определить объем усеченной пирамиды и площадь ее поверхности.

2. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg} x=\cos x.$$

3. Решить неравенство

$$\frac{2x^2-3x-459}{x^2+1}>1.$$

4. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-3)(n+5)}{2n^2+3n-2}.$$

Задачи устного экзамена

1. Решить уравнение

а) $\dfrac{\log_5(2x+3)}{1-\log_5(2x+3)}+\dfrac{3}{5-\log_5(2x+3)}=0;$

б) $\sin x\cdot\cos x\cdot\cos 2x=-\dfrac{1}{8}.$

2. Решить неравенство

а) $\log_{x^2}(2+x)<1;$

б) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)<\dfrac{1}{2};$

в) $2x^2-5|x|+3>0.$

3. Найти предел

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+\ldots+\frac{n}{2}}{\frac{n^2}{4}+n+3};$

б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{8}}\dfrac{\cos 4x}{\sin 2x-\cos 2x}.$

4. Исследовать функцию

а) $y=\dfrac{3}{2}\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)+1;$

б) $y=\dfrac{x^2}{x^2+3}$

и построить ее график.

5. Найти область определения функции

$$y=\log_2\sin x.$$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=x^2+1$ и касательными, проведенными к этому графику в точках с абсциссами $x=0$ и $x=2$.

7. Написать уравнения касательных к графику функции $y=2x^2-4x$ в точках пересечения этого графика с осью абсцисс.

8. Вычислить $\int\limits_0^{\pi}\sin x\cdot\cos 3x\,dx.$

9. Вычислить $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}.$

10. Что больше $\sin 1980°$ или $\cos 1980°$?

11. Задать формулой функцию, обратную к функции

$$y=\frac{1}{2}(3x-3).$$

12. Какое положительное действительное число a в сумме с обратным к нему числом $\dfrac{1}{a}$ дает наименьшую сумму?

13. Морская вода содержит 5% соли. Сколько килограммов пресной воды необходимо добавить к 80 кг морской, чтобы содержание соли в последней составляло 4%?

14. Сумма первого и пятого членов арифметической прогрессии равна 26, а произведение второго и четвертого ее членов равно 160. Найти сумму шести первых членов прогрессии.

Физика

Билет устного экзамена на естественных факультетах

1. Сила упругости. Закон Гука.

2. Электромагнитные колебания. Колебательный контур. Превращение энергии в коле-

бательном контуре. Зависимость периода колебаний в контуре от индуктивности и емкости (без математического вывода).

3. Задача. Найдите красную границу фотоэффекта для фотоэлемента, катод которого изготовлен из сплава платины и цезия. Работа выхода электрона $A=2{,}24\cdot10^{-19}$ Дж. Постоянная Планка $h=6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж · с.

Е. Коршак, С. Левищенко,
Н. Лященко

Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена

Математика

Письменный экзамен

(математический факультет)

1. Упростить выражение

$$\left(\frac{(\sqrt{a}+1)^2-\dfrac{a-\sqrt{ax}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}}{(\sqrt{a}+1)^3-a\sqrt{a}+2}\right)^{-3}$$

2. Решить неравенство

$$\left|\frac{2x-4}{x+1}\right|>2.$$

3. Решить уравнение

$$(1+\cos 4x)\cdot\sin 2x=\cos^2 2x.$$

4. Исследовать функцию

$$f(x)=\frac{3x}{1+x^2}$$

и построить ее график.

5. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, конгруэнтные стороны которого имеют длину b и составляют угол α. Каждое из боковых ребер пирамиды образует с высотой пирамиды угол φ. Найти объем пирамиды.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Канал шириной $d=10$ м и глубиной $h=5$ м наполнен водой и перегорожен плотиной. Определите силу давления воды на плотину.

2. Какое количество теплоты выделяется при торможении машины массой $m=2$ т, двигавшейся со скоростью $|\vec{v}|=36$ км/ч?

3. Какую работу надо совершить, чтобы сблизить до расстояния $d=10$ см два заряженных тела с зарядами $q_1=q_2=q=2{,}0\times\times10^{-8}$ Кл, находящихся на расстоянии $d_0=80$ см?

Н. Ванюшина,
Л. Компанийц

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(математический факультет)

1. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=-x^2+\frac{7}{2}x+1$, $y=2^{-x}$, $x=2$ $(x<2)$.

2. Решить уравнение

$$\frac{\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin x+\cos x}=1.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{0,3}(x^2+4x-5)>\log_{0,3}(x-1).$$

4. Каждое ребро куба разделено на 3 отрезка равной длины. Доказать, что полученные 24 точки деления принадлежат одной сфере. Вычислить площадь поверхности этой сферы, если длина ребра куба равна a.

5. Известны координаты вершин треугольника ABC: $A(1;1;1)$, $B(2;4;2)$, $C(8;3;3)$. Определить, является ли этот треугольник прямоугольным или тупоугольным.

Вариант 2

(отделение «Физика и астрономия» физического факультета)

1. Найти первый член и знаменатель геометрической прогрессии, сумма первых трех членов которой равна 10,5, а разность первого и четвертого членов равна 31,5.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^3+6x^2+9x$ на отрезке $[-3;\ 0]$ и построить ее график на этом отрезке.

3. Решить уравнение

$$\sin^2 x-3\sin x\cdot\cos x+2\cos^2 x=0.$$

4. Дана правильная треугольная пирамида с боковым ребром l. Через сторону основания и середину противолежащего бокового ребра проведена плоскость, составляющая угол α с плоскостью основания пирамиды. Найти площадь сечения.

Вариант 3

(отделение «Общетехнические дисциплины и труд» физического факультета)

1. Бригада рабочих должна была изготовить 360 деталей. Изготовляя ежедневно на 4 детали больше, чем предполагалось по плану, бригада выполнила задание на 1 день раньше срока. Сколько дней затратила бригада на выполнение задания?

2. Построить график функции $y=x^3-3x^2+\frac{9}{4}x$.

3. Доказать тождество

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+$$
$$+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=1.$$

4. Дана правильная четырехугольная пирамида с боковым ребром l. Плоскость сечения проходит через диагональ основания и середину бокового ребра и составляет с плоскостью основания угол α. Найти площадь сечения.

Вариант 4

(географический факультет)

1. Решить уравнение

$$\sin^2 x-3\cos^2 x=1.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{2-5x}{x+1}>2.$$

3. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=-x^2+6x-3$, $y=-x+7$.

4. Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны и равны [illegible] см. Найти объем пирамиды.

Физика

Задачи устного экзамена

(математический и физический факультеты)

1. Два груза массами $m_1=3$ кг и $m_2=6{,}8$ кг висят на концах нити, перекинутой через блок. Меньший груз находится на $h=2$ м ниже большего. Грузы пришли в движение без начальной скорости. Через какое время они окажутся на одной высоте?

2. Груз массой $m=10$ кг перемещают равномерно по горизонтальной прямой, прикладывая силу, направленную под углом $\alpha=30°$ к горизонту. Определите модуль этой силы, если коэффициент трения $\mu=0{,}2$.

3. Шарик массой $m=100$ г, подвешенный на нити длиной $l=20$ см, отклонен от положения равновесия на угол $\alpha=60°$. Шарику сообщили скорость $|\vec{v}_0|=2$ м/с в направлении, перпендикулярном к нити. Какова должна быть прочность нити, чтобы шарик при движении не оборвал нить?

4. Когда груз неподвижно висел на вертикальной пружине, ее удлинение было $\Delta l=5$ см. Затем груз оттянули и отпустили, вследствие чего он начал колебаться. Каков период этих колебаний?

5. Льдина постоянной толщины плавает в воде, выдаваясь над поверхностью на $h=2$ см. Какова масса льдины, если ее площадь $S=150$ см^2? Плотность льда $\varrho_л=0{,}92$ г/см^3.

6. Цилиндрический сосуд делится на две части подвижным поршнем. Каково будет равновесное положение поршня, если в одну часть сосуда поместить некоторое весовое количество кислорода, в другую — такое же количество водорода? Общая длина сосуда $l=85$ см.

7. Для нагревания некоторой массы воды от $t_0=0°$С до температуры кипения на электрическом нагревателе потребовалось $\tau_1=15$ мин. После этого потребовалось $\tau_2=1$ ч 20 мин для обращения всей этой воды в пар при тех же условиях. Определите по этим данным удельную теплоту парообразования воды.

8. Во сколько раз изменится мощность, выделяемая в проводнике сопротивлением $R_1=6$ Ом, если параллельно ему подключить второй проводник сопротивлением $R_2=9$ Ом? Внутреннее сопротивление источника $r=4$ Ом.

9. Найдите внутреннее сопротивление генератора, если известно, что мощность, выделяемая во внешней цепи, одинакова при двух значениях сопротивления внешней цепи: $R_1=5$ Ом и $R_2=0{,}2$ Ом.

10. Линза дает трехкратное увеличение предмета, находящегося на расстоянии $d=10$ см от ее плоскости. Найдите фокусное расстояние линзы.

Е. Веретенникова,
О. Овчинников

Одесский государственный педагогический институт им. К. Д. Ушинского

(физико-математический факультет)

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Найти боковую поверхность правильной треугольной призмы высоты h, если прямая, соединяющая центр верхнего основания с серединой стороны нижнего основания, наклонена к плоскости основания под углом 60°.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=\sqrt{x(10-x)}$ на области ее определения.

3. Доказать, что выражение

$$\frac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$$

не принимает отрицательных значений.

4. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2-x)>\log_{\frac{1}{2}}(2x-2).$$

Вариант 2

1. В шар вписан конус, образующая которого конгруэнтна диаметру основания. Найти отношение полной поверхности этого конуса к поверхности шара.

2. Найти промежутки монотонности функции

$$y=\frac{x-1}{x^2}.$$

3. Найти значение выражения

$$\frac{1-2\cos^2(\alpha-2\pi)}{\sin(\pi-\alpha)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}-$$
$$-\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin\frac{3\pi}{2}.$$

4. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7n^2-3}{\sqrt{n^4+5}}.$$

Физика

Задачи устного экзамена

1. Как изменится период колебаний маятника при перенесении его с Земли на Марс, если масса Марса в 9,3 раза меньше массы Земли, а радиус Марса в 1,9 раза меньше радиуса Земли?

2. Высота льдины над уровнем океана составляет $h=2$ м. Определите толщину всей льдины, если плотность льда равна $\varrho_1=900$ кг/м^3, а океанской воды — $\varrho_2=1050$ кг/м^3.

3. Два сосуда объемом $V_1=60$ л и $V_2=30$ л соответственно содержат газ при одной и той же температуре, но при разных давлениях. После соединения сосудов в них установилось давление $p=1000$ кПа. Каким было начальное давление в большом сосуде, если в меньшем оно составляло $p_2=800$ кПа? Температура не менялась.

4. Виток, охватывающий площадку площадью $S=2$ см^2, расположен перпендикулярно к линиям однородного магнитного поля. Какая ЭДС индуцируется в витке, если магнитная индукция равномерно убывает от $|\vec{B}_1|=0{,}5$ Тл до $|\vec{B}_2|=0{,}1$ Тл за время $\Delta t=0{,}05$ с?

5. Какова наибольшая длина волны света, при которой еще наблюдается фотоэффект, если работа выхода электрона из металла $A=3{,}3\cdot10^{-19}$ Дж?

А. Квитко

Волгоградский политехнический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. В шар вписана правильная треугольная пирамида, стороны основания которой равны a, боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом φ. Найти поверхность шара.

2. Решить неравенство $f'(x)+g'(x)<0$, где $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-3}$, $g(x)=\dfrac{1}{x-3}$.

3. Упростить выражение

$$\frac{4\sin\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}^2\left(2\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)-\operatorname{tg}^2\left(2\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}$$

4. Решить уравнение

$$\log_2(9^{x-1}+7)=2+\log_2(3^{x-1}+1).$$

5. Треугольник ABC, у которого $\hat{B}=60^\circ$, вписан в окружность с центром O и радиусом 2. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC}$.

Вариант 2

1. В усеченном конусе диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны, а образующая равна l и составляет с плоскостью основания острый угол α. Найти боковую поверхность усеченного конуса.

2. Исследовать на экстремум функцию

$$y=x\cdot e^{x+1}.$$

3. Решить уравнение

$$\sin^2 2x+\sin^2 3x=1.$$

4. Решить неравенство

$$\log_{0,3}\log_6\frac{x^2+x}{x+4}>0.$$

5. Тело падает по закону $h(t)=4+8t-5t^2$, где h — высота падения в метрах, t — время в секундах. Найти скорость тела в момент соприкосновения с землей.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Шофер автомобиля резко затормозил при скорости $|\vec{v}|=72$ км/ч. Через какое время τ автомобиль остановится, если коэффициент трения $\mu=0{,}6$? Каким будет тормозной путь l автомобиля?

2. Два тела брошены вертикально вверх с различными начальными скоростями. Первое тело достигло вчетверо большей высоты, чем второе. Во сколько раз его начальная скорость $|\vec{v}_1|$ была больше начальной скорости $|\vec{v}_2|$ второго тела?

3. Определите массу M Солнца, зная, что средняя линейная скорость Земли на орбите $V=30$ км/с, а радиус орбиты Земли $R=1{,}5\cdot10^8$ км. Гравитационная постоянная $G=6{,}7\cdot10^{-11}$ Н $\cdot$ м^2/кг^2.

4. Бревно длиной $l=3{,}5$ м и диаметром $d=0{,}3$ м плавает в воде. Какова масса M человека, который может стоять на бревне, не замочив ног? Плотность дерева $\varrho=0{,}7\times10^3$ кг/м^3.

5. В идеальной тепловой машине газ отдал холодильнику 67% теплоты, полученной от нагревателя. Определите температуру T_2 холодильника, если температура нагревателя $T_1=430$ К.

6. Какой силы ток течет в цепи электрического кипятильника, если объем $V=5$ л воды закипает в течение $\tau=30$ мин? Начальная температура воды $t_1=20^\circ$C, напряжение в сети $U=220$ В, КПД кипятильника $\eta=80\%$, удельная теплоемкость воды $c=4{,}2\times10^3$ Дж/(кг $\cdot$ К).

7. Электрический чайник имеет две обмотки. При включении одной из них вода в чайнике закипает за $\tau_1=10$ мин, при включении другой — за $\tau_2=20$ мин. Через какое время закипит вода в чайнике, если включить обе обмотки: а) последовательно, б) параллельно?

8. Самолет летит горизонтально со скоростью $|\vec{v}|=900$ км/ч. Определите ЭДС индукции $\mathcal{E}$, возникающую на концах крыльев самолета, если их размах $l=24$ м, а модуль вертикальной составляющей индукции магнитного поля Земли $B_в=5\cdot10^{-5}$ Тл.

9. Как изменится период колебаний маятника при перенесении его с Земли на Луну? Масса Луны в 81 раз меньше массы Земли, а радиус Земли в 3,7 раза больше радиуса Луны.

10. Точечный источник света находится в воде на глубине $h=1$ м. Показатель преломления воды $n=4/3$. Какого радиуса R непрозрачный круг должен плавать над источником на поверхности воды, чтобы источник света сверху был невидим?

Л. Передунова,
В. Пугачев

Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(радиофизический факультет и факультет автоматизации управления)

1. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg} x - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \operatorname{tg} x}.$$

2. Решить уравнение

$$\sqrt{3(\log_2 x)^2 - 9(\log_2 x)^{-1} - 1} = 5.$$

3. Найти площадь фигуры, которая ограничена кривыми $y = 1 - \frac{1}{x^2}$ и $y = \frac{1}{16}(x^2 - 1)$ и лежит в правой полуплоскости.

4. Из вершины A равностороннего треугольника ABC проведен луч, пересекающий сторону BC, и на нем выбрана некоторая точка M. Известно, что $\widehat{AMB} = 20°$ и $\widehat{AMC} = 30°$. Найти $\widehat{MAB}$. Показать, что этот угол содержит целое число градусов.

Вариант 2

(физико-механический факультет)

1. Решить уравнение

$$\lg \frac{x-1}{7x+15} = \lg \frac{3}{16} + \lg \frac{x-4}{x-1}.$$

2. Решить неравенство

$$25^{\sqrt{x} - \frac{1}{2}} + 5^{\sqrt{x}+1} > 250.$$

3. Углы α_1, α_2, α_3 лежат в первой четверти и образуют арифметическую прогрессию с разностью $\frac{\pi}{12}$, а их тангенсы $\operatorname{tg} \alpha_1$, $\operatorname{tg} \alpha_2$, $\operatorname{tg} \alpha_3$ образуют геометрическую прогрессию. Найти эти углы.

4. Две касательные к графику функции $y = \sqrt{17(x^2+1)}$ пересекаются под прямым углом в некоторой точке на оси Oy. Написать их уравнения.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Невесомая упругая нить AB длиной $l = 1$ м закреплена верхним концом в точке A (рис. 1). Из точки A без начальной скорости падает небольшая муфта массой $m = 50$ г. Дойдя до упора B, муфта начала растягивать нить. Найдите коэффициент упругости нити k, если к моменту остановки муфты нить удлинилась на $\Delta l = 0{,}2$ м. Трением пренебрегаем.

2. К потолку лифта, поднимающегося с ускорением $|\vec{a}| = 1{,}2$ м/с², приклеплен динамометр. К динамометру подвешен блок, свободно вращающийся вокруг горизонтальной оси. Через блок перекинута нить, к концам которой прикреплены грузы массами $m_1 = 200$ г и $m_2 = 300$ г. Определите показание динамометра. Массой блока можно пренебречь.

3. Одноатомный газ, находящийся при постоянном давлении $p = 2 \cdot 10^6$ Па в цилиндре под поршнем сечением $S = 160$ см², нагревается так, что поршень перемещается на расстояние $\Delta h = 15$ см. Найдите количество теплоты Q, сообщенное газу в этом процессе.

4. Одноатомный идеальный газ при давлении $p_1 = 3 \cdot 10^5$ Па и температуре $t_1 = 0°$С занимает объем $V_1 = 2$ м³. Газ сжимают без теплообмена с окружающей средой, совершая при этом работу $A = 35$ кДж. Найдите конечную температуру газа T_2.

5. Электрон пролетает между пластинами плоского конденсатора. Длина пластин $l = 10$ см, напряженность электрического поля в конденсаторе $|\vec{E}| = 4 \cdot 10^4$ В/м. Какова первоначальная энергия W_0 электрона, если он влетел и вылетел из конденсатора под одним и тем же (по модулю) углом $\alpha = 30°$ относительно плоскости симметрии? Заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

6. Плоский конденсатор, пространство между пластинами которого заполнено керосином ($\varepsilon = 2$), расположен вертикально, заряжен и отключен от источника напряжения. Напряженность электрического поля при этом в керосине $|\vec{E}| = 20$ кВ/см. Из-за дефекта в изоляции керосин начинает вытекать, а его место занимает воздух. Предельная напряженность электрического поля в воздухе, при которой наступает электрический пробой (разряд), $|\vec{E}_{\text{пр}}| = 30$ кВ/см. Какая доля керосина δ вытечет из конденсатора к моменту пробоя конденсатора?

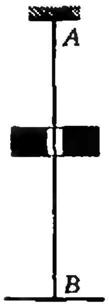


Рис. 1

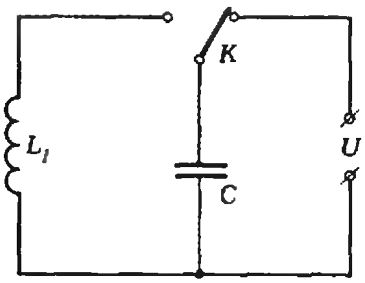


Рис. 2.

7. Электрон, обладающий энергией $W = 10^3$ эВ, влетает в однородное электрическое поле напряженностью $|\vec{E}| = 800$ В/см под углом $\alpha = \pi/2$ к силовым линиям поля. Каковы должны быть направление и величина индукции магнитного поля, чтобы электрон не испытывал отклонения от прямолинейного движения? Масса электрона $m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}$ кг.

8. После зарядки конденсатора емкостью C от источника постоянного напряжения U, ключ K переключают на катушку индуктивностью L_1 (рис. 2). В контуре возникают гармонические колебания с амплитудой тока $I_{м1}$. Опыт повторяют по прежней схеме, заменив катушку на другую, индуктивностью $L_2 = 2L_1$. Найдите амплитуду тока $I_{м2}$ для второго случая.

9. Точечный источник света помещен на оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием $F_1 = 30$ см на расстоянии $d_1 = 120$ см от нее. По другую сторону линзы в ее фокальной плоскости помещена рассеивающая линза. Чему равно фокусное расстояние F_2 рассеивающий линзы, если лучи после прохождения второй линзы кажутся исходящими из самого источника?

10. Одна из пластин плоского конденсатора с расстоянием между пластинами $d = 10$ мм освещается рентгеновскими лучами, вырывающими из нее фотоэлектроны. Полагаем, что скорости этих электронов одинаковы по абсолютной величине и равны $|\vec{v}| = 10^6$ м/с. Электроны собираются на второй пластине. С каждого квадратного сантиметра (S_1) облучаемой пластины в одну секунду вырывается $n = 10^{13}$ электронов. Через какое время t прекратится фототок? Заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}$ Ф/м.

А. Бакаев,
С. Преображенский

Московский архитектурный институт

Математика

Задачи устного экзамена

1. Числа a^2, b^2, c^3 образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что числа $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ также образуют арифметическую прогрессию.

2. Построить график функции

$$y = |x-1| + |x-2| + x.$$

3. Решить уравнение

$$5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5}.$$

4. Решить систему

$$\begin{cases} (3x+y)^{x-y} = 9, \\ \sqrt[x-y]{324} = 18x^2 + 12xy + 2y^2. \end{cases}$$

5. Решить неравенство

$$\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2 4x > 1.$$

6. Доказать тождество

$$\sin^4 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \frac{1}{16} - \frac{1}{32}\cos 2\alpha - \frac{1}{16}\cos 4\alpha + \frac{1}{32}\cos 6\alpha.$$

7. Найти предел

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{x - \frac{\pi}{2}}.$$

8. Через начало координат провести прямую, делящую криволинейный треугольник с вершиной в начале координат, ограниченный линиями $y = 2x - x^2$, $y = 0$, $x = 1$, на две равновеликие части.

9. Полная поверхность правильной четырехугольной пирамиды равна S, а плоский угол боковой грани при вершине равен α. Найти высоту пирамиды.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Небольшое тело соскальзывает с вершины сферы радиусом R. На какой высоте от вершины тело оторвется от поверхности сферы? Трением пренебречь.

2. Люстра массой $m = 100$ кг подвешена к потолку на металлической цепи длиной $l = 5$ м. Определите высоту, на которую можно отклонить люстру, чтобы при последующих качаниях цепь не оборвалась. Известно, что разрыв цепи наступает при натяжении $T = 1960$ Н.

3. Полусферическая чашка радиусом R вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω (рис. 1). В чашке находится шарик массой m, вращающийся вместе с нею. Найдите угол φ, определяющий равновесное положение шарика в чашке.

4. Падающим с высоты $h = 1{,}2$ м грузом забивают сваю, которая от удара уходит в землю на $s = 2$ см. Определите среднюю силу удара и его продолжительность, если масса груза $M = 5 \cdot 10^2$ кг, а масса сваи много меньше массы груза.

5. Стержень AB опирается на шероховатый пол и гладкий выступ C (рис. 2). Расстояние $|AC| = 0{,}75|AB|$. При каком коэффициенте трения стержень будет составлять угол $\alpha = 45°$ с полом в положении равновесия?

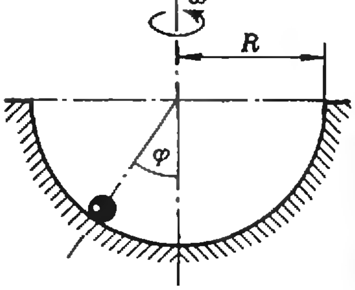


Рис. 1.

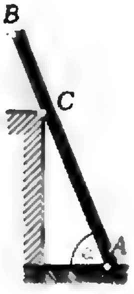


Рис. 2.

6. Какие силы надо приложить к концам стального стержня с площадью поперечного сечения $S = 10$ см^2, чтобы не дать ему расшириться при нагревании от $t_1 = 0°C$ до $t_2 = 30°C$? Модуль упругости стали $E = 21 \cdot 10^{10}$ Н/м^2; температурный коэффициент линейного расширения стали $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ К$^{-1}$.

7. В каждой вершине квадрата находится заряд $+q$. Какой величины отрицательный заряд следует поместить в центре квадрата, чтобы система зарядов находилась в равновесии?

Ю. Мещеряков,
В. Смирнов

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 41)

(Архангельск) 55, 57; *А. Коган* (Одесса) 35—37, 39—43, 46, 50—52, 54, 55, 60; *В. Козий* (Винница) 46, 50—52; *С. Козлов* (Москва) 33, 35, 36, 38—41, 43—46, 50—54, 57; *Ю. Кокшаров* (Мытищи) 39, 40; *А. Колчин* (Алма-Ата) 39, 45; *В. Комов* (Александров) 33, 35, 38—44, 51—55, 60, 62; *И. Компанейцев* (Алма-Ата) 33, 35, 36, 39—43, 50—52, 55, 62; *В. Коробов* (Кировград) 39, 41; *А. Костюковский* (Харьков) 35, 36, 52, 57; *А. Крушельницкий* (Казань) 46; *Д. Кубанов* (Москва) 39, 40, 42; *А. Кубышкин* (Киев) 33, 39, 44, 53, 55, 57, 59, 60; *Л. Кудрявцев* (Нефтекамск) 40, 45, 51; *С. Кудрявцев* (Магадан) 35, 40, 41, 46, 50—55, 62; *А. Кулыгин* (Москва) 52; *Л. Кучук* (Минск) 46, 52; *И. Лисовский* (Минск) 39, 51, 52, 60, 62; *Ю. Логвин* (Лида) 36, 50—52; *И. Лукьянчук* (Киев) 39, 40, 46, 50—52, 54, 60; *А. Ляпин* (Москва) 35, 36, 39—46, 50—53, 55; *Е. Маенкова* (Буденновск) 35; *И. Мандриченко* (Киев) 39, 40, 45, 46, 60; *Д. Мансуров* (Акстафа) 57; *А. Мильман* (Одесса) 38—41, 43—46, 52; *Л. Мильман* (Минск) 50—52; *А. Митько* (Гомель) 35; *С. Михайловский* (с. Концесорье Архангельской обл.) 35, 43, 44, 46, 52, 54, 55; *С. Мокроусов* (Ленинград) 52; *Д. Мункин* (с. Кижинга Бур. АССР) 40; *А. Мушинский* (Минск) 54; *В. Мытинский* (Чудово) 35, 39; *А. Найден* (Берлин, ГДР) 35, 39—41; *М. Найговзин* (Баку) 51—55, 57; *С. Нестеренко* (Красноярск) 50—52, 57; *С. Обогуев* (Ленинград) 52, 54, 57; *С. Одинцова* (Киев) 35, 39, 52; *А. Осипов* (Сосновый Бор) 33, 36—39, 41, 43—46, 50—52, 54, 57; *И. Осовяк* (с. В. Дедеркалы Тернопольской обл.) 41; *Ю. Остапчук* (Здолбунов) 40, 52, 57; *А. Охапкин* (Львов) 52; *Ю. Павлов* (Ленинград) 46, 50—52; *А. Павлычев* (Рига) 33, 35, 38, 39, 42, 52; *С. Пащенко* (Киев) 46, 51—52; *А. Пелех* (Казатин) 35, 38, 40, 46, 51, 52; *В. Пентегов* (Киев) 35—37, 50, 60, 62; *И. Полюбин* (Иваново) 62; *Е. Поляков* (Калининград Московской обл.) 50—52; *В. Поникаров* (Куйбышев) 57; *А. Пономаренко* (Киев) 40; *В. Прилипко* (Киев) 35, 37, 50—52; *К. Прозоров* (Дмитров) 35, 40; *Л. Прядко* (п/п 42655) 50, 51, 53, 55, 57; *Е. Розман* (Киев) 35, 36, 46, 52; *В. Рублев* (Киев) 36; *С. Рулев* (Краматорск) 46, 50—55, 57, 60, 62; *А. Салтанов* (Новополоцк) 51, 52, 57, 60; *А. Санжур* (Киев) 33, 35, 40, 43, 46, 50—54, 57, 60; *А. Сафонов* (Барнаул) 52; *А. Середа* (Донецк) 33, 52, 57; *А. Сидоренков* (Смоленск) 38, 39, 52; *В. Сидорин* (Реутов) 40, 52; *А. Смирнов* (Курган) 37, 39, 41, 50—53, 55, 60, 62; *И. Смоляренко* (Минск) 36; *А. Сокол* (п. Черноголовка Московской обл.) 35, 43, 45, 50—52, 54, 55, 57, 59, 60, 62; *И. Соловей* (Донецк) 36; *А. Сохет* (Харьков) 52; *Д. Степанов* (Арзамас) 35; *С. Стрелецкий* (Львов) 59, 60; *Л. Стрешинский* (Донецк) 50—52; *К. Табуллин* (Москва) 53—55, 57; *Ю. Талденко* (Сумы) 33, 38—41, 43, 45, 50, 52, 54, 55, 57, 59, 60, 62; *А. Теленков* (Брянск) 52; *А. Тимченко* (Одесса) 43, 46, 50, 52, 53, 55; *А. Тищенко* (Днепропетровск) 50—54, 60, 62; *Г. Трунов* (Москва) 60; *В. Усачев* (Ромны) 40, 50, 57; *Н. Федин* (Омск) 35, 36, 38—46, 50, 52, 54, 55, 57, 60, 62; *В. Федюкович* (Киев) 45, 46; *Н. Фесун* (Золотоношский р-н Черкасской обл.) 36, 57; *О. Фонарев* (Сумгаит) 35, 50, 52, 53, 57; *К. Франкевич* (Могилев) 39; *М. Фридман* (Львов) 39, 41, 42, 52, 57, 59, 60; *А. Фролов* (Тула) 35, 39—42, 45, 46, 50, 51, 53, 54, 59, 60, 62; *С. Фролов* (Москва) 35—37, 39, 46, 51, 52, 54, 57, 62; *С. Хабарова* (с. Городковка Винницкой обл.) 52; *А. Цехинский* (п. Запрудня Московской обл.) 33, 35, 37—40, 42—46, 50—52, 54, 55, 59, 60, 62; *Ю. Цыганков* (Дрожжановский р-н Тат. АССР) 33, 35, 36, 39, 40, 42, 43, 45; *А. Чернявский* (п/о Людвиново Минской обл.) 52; *О. Чумаченко* (Одесса) 52; *И. Чуприн* (Долгопрудный) 46; *А. Шакун* (Олайне) 40—42; *Я. Шапиро* (Ворошиловград) 38, 39; *В. Шаповал* (Винница) 41, 51, 52; *А. Шапоренко* (Орск) 39; *А. Шевченко* (Артемовск Донецкой обл.) 33, 40, 41, 51, 52; *М. Шевченко* (Артемовск Донецкой обл.) 33, 40, 41, 51, 52; *О. Шевченко* (Мелитополь) 39, 40; *В. Шелудько* (Днепропетровск) 52, 54, 55, 60; *И. Шкрадюк* (Ногинск) 44, 45, 51, 52; *С. Шмаков* (Саратов) 35, 39—43, 50—52; *И. Шугин* (с. Степногорск Целиноградской обл.) 39, 40, 43; *Д. Щелканов* (Саратов) 60; *В. Яковлев* (Москва) 35, 36, 41, 43—45, 50—52, 54, 55, 57; *К. Яковлев* (Киев) 43, 51, 52, 54, 55; *М. Ярешенко* (Фрязино) 35, 39—41.

Международные математические соревнования школьников

В 1980 году Международная математическая олимпиада школьников не проводилась. Однако были проведены два международных соревнования. Одно из них проходило в г. Мариенхамина (Финляндия), а другое — в г. Мерш (Люксембург). Соревнования проходили почти одновременно: 1 и 2 июля в Финляндии и 10 и 11 июля в Люксембурге. Регламент соревнований был таким же, как и на Международной математической олимпиаде: работа участников проходит два дня по 4 часа, по 3 задачи в день, команда каждой страны состоит из 8 человек. В соревнованиях приняли участие: в Финляндии — Великобритания, Венгрия, Финляндия, Швеция; в Люксембурге — Бельгия, Великобритания (вторая команда), Люксембург, Нидерланды, Югославия. Команды Беольгии и Югославии состояли из 3 и 7 человек соответственно.

Результаты соревнований были невысокими. В Финляндии лучший результат был 28 очков из 40, и лишь 15 участников набрали больше 10 очков (при 32 участниках). В Люксембурге результаты были выше (правда, и задачи там были легче). Лучший результат был у голландского школьника Карельяна Шутенса (37 очков), 19 участников (из 34) набрали больше 20 очков.

Вот задачи этих соревнований:

Финляндия

Первый день

1. В треугольнике ABC срединные перпендикуляры к сторонам AB и AC пересекают прямую BC в точках X и Y соответственно.

Доказать, что для того, чтобы $|BC|=|XY|$, достаточно, чтобы $\operatorname{tg}\bar{B}\cdot\operatorname{tg}\bar{C}=3$. Доказать, что это условие не является необходимым, и найти необходимое и достаточное условие для того, чтобы $|BC|=|XY|$. (6 очков)

2. Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ определена соотношениями $a_0=1/2$, $a_{k+1}=a_k+\frac{1}{n}a_k^2$. Доказать, что $1-\frac{1}{n}<a_n<1$. (7 очков)

3. Рассмотрим уравнение $x^n+1=y^{n+1}$, где n — натуральное число, большее 1. Доказать, что не существует натуральных решений этого уравнения x и y, для которых x и $n+1$ не имеют общих делителей. (7 очков)

Второй день

4. Выпуклый $2n$-угольник вписан в окружность. Известно, что $n-1$ пара противоположных сторон многоугольника параллельна. Для каких значений n оставшиеся две стороны также параллельны? (6 очков)

5. Горизонтальная прямая называется треугольной для кривой, заданной уравнением $y=x^4+px^3+qx^2+rx+s$, если она пересекает ее в четырех различных точках A, B, C и D (в этом порядке) и из отрезков AB, AC и AD можно составить треугольник.

Доказать, что либо все горизонтальные прямые, пересекающие эту кривую в четырех различных точках, являются треугольными для нее, либо ни одна из них не является треугольной. (7 очков)

6. Найти первый десятичный знак перед запятой и первый десятичный знак после запятой в десятичной записи числа $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{1980}$. (7 очков)

Люксембург

Первый день

1. Найти функцию $f:\mathbf{Q}\to\mathbf{Q}$, удовлетворяющую следующим условиям: $f(1)=2$, $f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1$ для всех x, $y\in\mathbf{Q}$ (6 очков)

2. На отрезке AC выбрана точка B. На отрезках AB, BC и AC, как на диаметрах, в одну сторону от прямой AC построены полуокружности. Через точку B проводится общая касательная к первым двум полуокружностям, пересекающая третью полуокружность в точке E, а точки K и P являются точками касания второй общей касательной к этим двум полуокружностям. Выразить величину отношения площадей треугольников EPK и EAC через радиусы этих полуокружностей. (7 очков)

3. Пусть p — простое число, а n — целое положительное число. Докажите, что следующие два утверждения эквивалентны:

а) Ни один из биномиальных коэффициентов $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ не делится на p.

б) Число n может быть представлено в виде $n=p^sq-1$, где s и q — целые числа, $s>0$, $0<q<p$. (7 очков)

Второй день

4. Две окружности касаются в точке P (внешним или внутренним образом). Прямая, касающаяся одной из окружностей в точке A, пересекает другую окружность в точках B и C. Доказать, что прямая PA делит пополам угол между прямыми PB и PC. (6 очков)

5. Десять игроков начинают играть в кости, имея по одинаковому количеству денег. Каждый по очереди бросает пять игральных костей, затем он платит каждому $\frac{1}{n}$ от того количества денег, которое тот имеет в это время, где n — сумма числа очков, выпавших на всех пяти костях. Когда кости бросил десятый игрок, то на них выпало 12 очков и, после раздачи денег, у каждого оказалась та же сумма, с которой он начинал игру.

Определите, если возможно, количество очков при каждом бросании. (7 очков)

6. Найти все пары $(x; y)$ целых чисел, удовлетворяющих уравнению $x^3+x^2y+xy^2+y^3=8(x^2+xy+y^2+1)$. (7 очков)

А. Савин

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку — мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

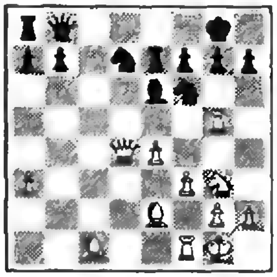
Первый советский чемпион мира

В «Кванте», 1980, № 9 мы информировали вас о четвертьфинальных матчах претендентов на первенство мира. В полуфинале Р. Хюбнер победил Л. Портиша (6,5:4,5), а В. Корчной — Л. Полугаевского (7,5:6,5). Дальнейшие события трудно было предугадать — за час до доигрывания девятой и десятой партий финального матча, проигрывая со счетом всего 3,5:4,5, Хюбнер сдал матч. Повторилась история десятилетней давности, когда в претендентском матче с Т. Петросяном после первого же поражения Хюбнер прекратил сопротивление. С такими нервами трудно бороться за шахматную корону.

Итак, очередной цикл борьбы за мировое первенство подошел к концу. Нам же к началу поединка А. Карпова с В. Корчным нужно успеть закончить рассказ о предыдущих матчах на первенство мира.

В середине сороковых годов Михаил Ботвинник вел переговоры с А. Алехиным о матче за мировую корону. Однако смерть Алехина лишила шахматный мир интереснейшего сражения. Впервые шахматный мир остался без чемпиона, и в 1948 году был проведен матч-турнир пяти сильнейших гроссмейстеров, в котором участвовали М. Ботвинник, П. Керес, С. Решевский, В. Смыслов и М. Эйве. Убедительно, с отрывом в три очка победил М. Ботвинник. Он и стал шестым по счету и первым советским чемпионом мира.

Следующая партия состоялась в десятом туре. В случае победы Керес догонял Ботвинника и делил с ним лидерство. Однако будущий чемпион одержал эффектную победу и отбросил далеко назад одного из основных своих конкурентов.

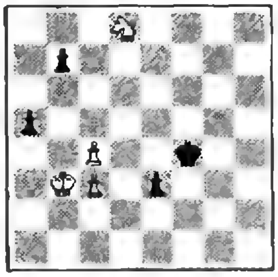


Ботвинник — Керес

21.Л:g7+! Кр:g7 22.Кh5+ Крg6 23.Фe3. Черные сдались (мат неизбежен).

Завоевав титул сильнейшего шахматиста мира, Ботвинник на три года оставил шахматы, целиком посвятив себя науке. За это время он завершил работу над докторской диссертацией в области энергетики и сразу после матча с Бронштейном защитил ее. «Измена» шахматам могла дорого обойтись чемпиону. В первом матче за мировое первенство, проведенном под контролем ФИДЕ (1951 г.), гроссмейстер Д. Бронштейн играл прекрасно, ни в чем не уступал сопернику, и ему не хватило лишь немного счастья, чтобы взойти на трон. Матч закончился вничью (12:12).

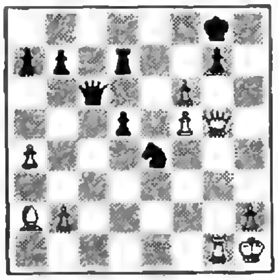
Эпизод из шестой партии матча иллюстрирует необычную геометрию шахматной доски.



Бронштейн — Ботвинник

В этой позиции Бронштейн легко делал ничью путем 57.Ке6+ и 58.Кd4, но на всякий случай он решил подтянуть короля к опасной пешке и сыграл **57.Крc2.** Конечно, гроссмейстер видел возможность появления черного короля на поле f2, но рассматривал лишь его прямолинейный маршрут Крf4—f3—f2, полагая, что и здесь успеет пойти Ке6 и Кd4+ с ничьей. Каково же было его изумление, когда неприятельский король действительно отправился к полю f2, но не по прямому пути! После **57...Крg3!!** белым пришлось сдаться, так как пешку e3 невозможно остановить: на 58.Ке6 следует 58...e2, и белый конь попадает на d4 без шаха (59.Крd2 Крf2!).

Матч Ботвинника со Смысловым (1954 г.) был двадцатым по счету и последним, закончившимся вничью (12:12). Счет в матче менялся по синусоиде: сначала Ботвинник выиграл три партии при одной ничьей, а затем четыре победы при нескольких ничьих одержал Смыслов. 12-я партия игралась при счете 6:5 в его пользу.



Ботвинник — Смыслов

Смыслов был настроен здесь весьма оптимистично. Действительно, при отступлении ферзя 31.Фg2 следует 31...К:f6, и позиция белых трещит по всем швам, поскольку их пешки безнадежно слабы. **31.f7+!** Неприятный геометрический сюрприз. Бить пешку королем нельзя из-за Ф:g7+ (пересечение седьмой горизонтали и линии g). Последовало **31...Л:f7 32.Фd8+ Крh7 33.С:d5** (пересечение вертикали d и диагонали a2—g8!) **33...Кf2+ 34.Крg2 Фf6 35.Ф:f6 Л:f6 36.Кр:f2 Л:f5+ 37.Сf3 Лf4 38.Лg4. Черные сдались.** Счет сравнялся, вторая половина матча, как и первая, закончилась вничью, и чемпион мира вновь сохранил свое звание.

Напоминаем, что в нашем шахматном конкурсе объявляется перерыв на летние каникулы. Новые задания будут предложены вам в «Кванте» № 8.

Интерференция света

1. $d_2=\sqrt{3}\,d_1\approx 3{,}5$ мм.

2. $l=d\dfrac{D/a+1}{D/a-1}\approx 122$ см (рис. 1).

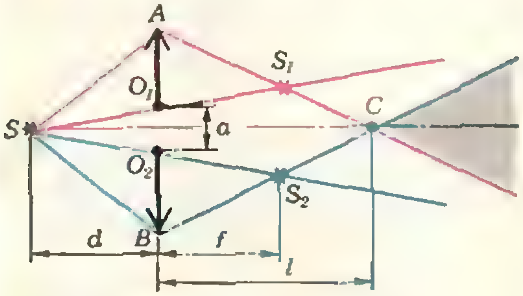


Рис. 1.

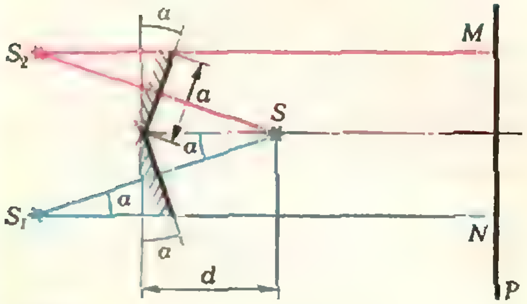


Рис. 2.

3. $a\geqslant 2d\sin\alpha\approx 2d\alpha\approx 2$ см. Указание. Минимальный размер зеркала соответствует параллельному ходу лучей S_1N и S_2M, проходящих через края зеркал (рис. 2).

Воронежский государственный университет им. Ленинского комсомола

Математика

Вариант 1

1. $y=-\dfrac{1}{x_0^2}x+\dfrac{2}{x_0}+1$, где $x_0=\dfrac{2}{b-1}$ при $a=0$, $b\neq 1$; $x_0=\dfrac{a}{2}$ при $a\neq 0$, $b=1$; $x_0=\dfrac{1}{b-1}$ при $a\neq 0$, $b=1+\dfrac{1}{a}$ (в этих случаях — одна касательная); $x_0=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+a(1-b)}}{1-b}$ при $a>0$, $b\neq 1$, $b<1+\dfrac{1}{a}$ и при $a<0$, $b\neq 1$, $b>1+\dfrac{1}{a}$ (в этих случаях — две касательные). В остальных случаях ($a=0$, $b=1$; $a>0$, $b>1+\dfrac{1}{a}$; $a<0$, $b<1+\dfrac{1}{a}$) искомой касательной не существует.

2. Могут, тупоугольный; $\arccos\dfrac{101}{108}$, $\arccos\dfrac{61}{72}$, $\pi-\arccos\dfrac{29}{48}$.

3. $\{4\}$.

4. $$\frac{1}{8\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}\times\sqrt{3a^4-2\sqrt{3}\,a^2b^2+b^4(1+12\sin^2\alpha)}.$$

Вариант 2

1. 30 км/ч.
2. 15 см.
3. $\left]-\dfrac{4}{3};\ \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}\right[\cup\left]\dfrac{3+\sqrt{17}}{2};\ +\infty\right[$.

Вариант 3

1. $4\sqrt{3}$ см^2.
2. $p_1=0$, $q_1=0$; $p_2=1$, $q_2=-2$.
3. $\sin\widehat{AOD}=\sin\widehat{DOC}=\sin\widehat{COB}=\dfrac{24}{25}$, $\cos\widehat{AOD}=\cos\widehat{COB}=-\dfrac{7}{25}$, $\cos\widehat{DOC}=\dfrac{7}{25}$.
4. $]-\infty; -5]\cup[2; +\infty[$

Задачи устного экзамена

1. $401^2\cdot\log_2 3$. 2. $A\left(\dfrac{1}{2};\ \dfrac{3}{4}\right)$. 3. $-\dfrac{13}{32}$. 4. $0<x<1$, $y=-x+1$ и $-1<x<0$, $y=-x-1$. 5. $\varnothing$. 6. $y=-x+\ln 4-2$. 7. $a_1=1$, $d=3$. 8. Длины последовательных звеньев построенной бесконечной ломаной образуют убывающую геометрическую прогрессию. Под «длиной бесконечной ломаной» подразумевается сумма этой прогрессии. Ответ. $a(2+\sqrt{3})$. 9. $[4; +\infty[$. 10. $\left]-\dfrac{15}{4};\ +\infty\right[$. 11. $y=12x-16$. 12. 3, 5, 7 или 4, 5, 6 или 5, 5, 5. 13. +. 14. $\{1-\sqrt{2}\}$. 15. 16. 16. +. 18. $\dfrac{\pi}{3}$. 19. $]-\infty; -3]$. 20. $\vec{a}\,(3; 2)$.

Азербайджанский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Математика

Вариант 1

2. $x_1=\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{\pi}{6}k$, $x_2=\dfrac{\pi}{12}+\pi l$ $(k, l\in Z)$.

3. $\left]\dfrac{2}{3};\ 1\right[\cup\left]2; 6\right[$. 4. $1\dfrac{1}{3}$. 5. $\dfrac{1}{4}$.

Вариант 2

1. $\arccos(\sqrt{2}-1)$. 2. $\{(4; 1)\}$. 4. $\max\limits_{[0;2]} f(x)=f(2)=2\dfrac{2}{3}$, $\min\limits_{[0;2]} f(x)=-2\dfrac{2}{3}$.

Вариант 3

1. $\dfrac{\pi}{3}$. 2. $\{(2; 3; 1)\}$. 4. $12-5\ln 5$. 5. $F\sqrt{3+6\cos\varphi}$.

Вариант 4

1. $a^2\cdot\dfrac{(1+\operatorname{ctg}\alpha)^2\cdot(1+\sin\alpha)}{\cos\alpha}$. 2. $x_1=0$,

$y_1=0$; $x_2=3\frac{1}{3}$, $y_2=1\frac{1}{3}$; $x_3=-\frac{3}{4}$, $y_3=-\frac{3}{10}$.
3. $]3; 4[\ \cup\ ]7; +\infty[$. **4.** $]-\infty; -3[\ \cup\ ]2; +\infty[$. **5.** -5.

Киевский государственный педагогический институт им. А. М. Горького

Математика

Вариант 1

1. $\frac{\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha}{(4+\mathrm{tg}^2\,\alpha)^{3/2}}b^3$. **2.** $]2; 4[$. **3.** $x_1=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x_2=\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi l$ $(k, l\in \mathbf{Z})$. **4.** $\max\limits_{\mathbf{R}} y=4$.

Вариант 2

1. $\frac{1}{2}\pi(1+2\sin\alpha)l^2$, $\frac{1}{12}\pi\sin\alpha(1+2\sin^2\alpha)l^3$. Замечание. Те, кто не знают нужных формул для усеченного конуса, могут достроить его до «полного» конуса и найти искомые величины как разность этих величин для полного конуса и конуса-верхушки. **2.** $\frac{9}{2}$. **3.** $\left]-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right[\ \cup\ \left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[$. **4.** $x_1=\pi k$, $x_2=\pm\frac{\pi}{3}+\pi l$ $(k, l\in\mathbf{Z})$.

Вариант 3

1. $\frac{a^3-b^3}{24}\mathrm{tg}\,\alpha$, $\frac{\sqrt{3}}{2\cos\alpha}\left(a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}-b^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$. Замечание. См. замечание к задаче 1 варианта 2. **2.** $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$. **3.** $]-\infty; -20[\ \cup\ ]23; +\infty[$. **4.** $\frac{1}{2}$.

Задачи устного экзамена

1. а) $\left\{61, -\frac{7}{5}\right\}$; б) $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{4}k$ $(k\in\mathbf{Z})$. **2.** а) $]-2; -1[\ \cup\ ]-1; 0[\ \cup\ ]0; 1[\ \cup\ ]2; +\infty[$; б) $\left]\frac{\pi}{12}+2\pi k; \frac{17}{12}\pi+2\pi k\right[$ $(k\in\mathbf{Z})$; в) $\left]-\infty; -\frac{3}{2}\right]\cup[-1; 1]\cup\left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$. **3.** а) 1; б) $-\sqrt{2}$. **4.** а) Область определения $\mathbf{R}$; периодическая (период π); промежутки возрастания: $\left[\frac{5}{8}\pi+\pi k; \frac{9}{8}\pi+\pi k\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$, промежутки убывания: $\left[\frac{\pi}{8}+\pi k; \frac{5}{8}\pi+\pi k\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$, точки максимума: $x=\frac{\pi}{8}+\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$, точки минимума: $x=\frac{5}{8}\pi+\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$. б) Область определения $\mathbf{R}$; четная: промежуток убывания $]-\infty; 0]$, промежуток возрастания $[0; +\infty[$, $x=0$ — точка минимума. **5.** $]2\pi k; \pi+2\pi k[$ $(k\in\mathbf{Z})$. **6.** $\frac{2}{3}$. **7.** $y=-4x$, $y=4x-8$. **8.** 0. **9.** $-\frac{1}{3}$ или -3. **10.** $\sin 1980°$. **11.** $y=\frac{2}{3}x+1$. **12.** 1. **13.** 20. **14.** 69 или 87.

Физика

3. $\lambda_{\max}=hc/A\approx 8{,}9\cdot 10^{-7}$ м (здесь $c=3\times 10^8$ м/с — скорость света).

Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена

Математика

1. 27. **2.** $]-\infty; -1[\ \cup\ \left]-1; \frac{1}{2}\right[$. **3.** $x_1=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$, $x_2=(-1)^l\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}l$ $(k, l\in\mathbf{Z})$. **4.** Определена на $\mathbf{R}$; нечетная; возрастает на $[-1; 1]$, убывает на $]-\infty; -1]$ и на $[1; +\infty[$, $x=-1$ — точка минимума, $x=1$ — точка максимума. **5.** $\frac{1}{6}b^3\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\mathrm{ctg}\,\varphi$.

Физика

1. $|\vec{F}|=p_{\text{ср}}S=\varrho g d h^2/2\approx 1{,}25\cdot 10^6$ Н. Замечание. Не все абитуриенты учитывали, что следует брать среднее значение давления воды на плотину, равное среднему арифметическому значению давления в нижней и верхней точках.

2. $Q=m|\vec{v}|^2/2\approx 10^5$ Дж. Замечание. Многие, не решившие эту задачу, не сообразили воспользоваться законом сохранения энергии.

3. $A=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{d_0}\right)\approx 31{,}5\cdot 10^{-\text{[illegible]}}$ Дж. Замечание. Самая характерная ошибка — использование формулы $A=|\vec{F}||\vec{s}|\cos\alpha$ без учета изменения силы взаимодействия зарядов по мере их сближения.

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Математика

Вариант 1

1. $6\frac{1}{3}-\frac{3}{4\ln 2}$. **2.** $x=\pm\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+2\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$. **3.** $\varnothing$. **4.** $\frac{19\pi}{9}a^2$. **5.** Тупоугольный. Указание. Одно из скалярных произведений $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$, $\vec{BA}\cdot\vec{BC}$, $\vec{CA}\cdot\vec{CB}$ отрицательно.

Вариант 2

1. 3,5 и -2. **2.** $\max\limits_{[-3; 0]} y=y(-3)=y(0)=0$, $\min\limits_{[-3; 0]} y=y(-1)=-4$. **3.** $x_1=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x_2=\mathrm{arctg}\,2+\pi l$ $(k, l\in\mathbf{Z})$. **4.** $\frac{\sqrt{3}}{2(4\,\mathrm{tg}^2\,\alpha+1)\cos\alpha}l^2$.
Указание. При помощи теоремы о площади ортогональной проекции многоугольника («Геометрия 9—10», §50) выразите искомую площадь через сторону основания. Из соответствующего треугольника выразите сторону основания через l.

Вариант 3

1. 9. **4.** $\frac{1}{2}l^2\cos\alpha$. Указание. См. указание к задаче 4 варианта 2.

Вариант 4

1. $x=\frac{\pi}{2}+\pi k\ (k\in\mathbb{Z})$. 2. $]-1; 0[$. 3. $4\frac{1}{2}$.
4. $\frac{a^3}{6}$.

Физика

1. $t=\sqrt{\frac{h}{g}\,\frac{m_1+m_2}{m_2-m_1}}\approx 0{,}72$ с.

2. $|\vec{F}|=\frac{\mu mg}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}\approx 20$ Н.

3. $|\vec{T}|=mg\left(\frac{|\vec{v}_0|^2}{gl}+3-2\cos\alpha\right)=4$ Н.

4. $T=2\pi\sqrt{\frac{\Delta l}{g}}\approx 0{,}44$ с.

5. $m=\frac{\varrho_в\varrho_л Sh}{\varrho_в-\varrho_л}\approx 3{,}5$ кг.

6. Длина части сосуда, занимаемой кислородом,

$l_1=l\frac{\mu_{H_2}}{\mu_{H_2}+\mu_{O_2}}=5$ см.

7. $\lambda=c(t_к-t_0)\tau_2/\tau_1=2{,}24\cdot 10^6$ Дж/кг.

8. $\frac{P_1}{P_2}=\frac{(R_1R_2+r(R_1+R_2))^2}{(R_1+r)^2R_2^2}=1{,}6$.

9. $r=\sqrt{R_1R_2}=1$ Ом.

10. Возможны два случая: а) $F=\frac{3}{4}d=7{,}5$ см, при этом изображение предмета действительное; б) $F=\frac{3}{2}d=15$ см, при этом изображение предмета мнимое.

Одесский государственный педагогический институт им. К. Д. Ушинского (физико-математический факультет)

Математика

Вариант 1

1. $6h^2$. 2.* $\max\limits_{[0,\,10]} y=y(5)=5$, $\min\limits_{[0;\,10]} y=y(0)=y(10)=0$.

3. $\frac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{\sin^2\alpha(1+\cos\alpha)}{\cos^2\alpha(1+\sin\alpha)}$. 4. $]1; 2[$.

Вариант 2

1. $\frac{9}{16}$. 2. На промежутках $]-\infty; 0[$ и $[2; +\infty[$ функция убывает, на промежутке $]0; 2]$ возрастает. 3. $\operatorname{tg}\alpha$. 4. 7.

Физика

1. Период колебаний маятника увеличится в

$\sqrt{\frac{M_З}{M_М}\left(\frac{R_М}{R_З}\right)^2}\approx 1{,}6$ раза.

2. $H=h\frac{\varrho_2}{\varrho_2-\varrho_1}=14$ м.

3. $p_1=\frac{p(V_1+V_2)-p_2V_2}{V_1}=1100$ кПа.

4. $\mathcal{E}=\frac{|\vec{B}_1|-|\vec{B}_2|}{\Delta t}S=1{,}6\cdot 10^{-3}$ В.

5. $\lambda_{\max}=\frac{hc}{A}\approx 6\cdot 10^{-7}$ м $=600$ нм (здесь $h=6{,}62\cdot 10^{-34}$ Дж · с — постоянная Планка, $c=3\cdot 10^8$ м/с — скорость света).

Волгоградский политехнический институт

Математика

Вариант 1

1. $\frac{4\pi}{3\sin^2 2\varphi}a^2$. 2. $]0; 3[\ \cup\ ]3; 6[$. 3. $\sin^2 4\alpha$.
4. $\{1, 2\}$. 5. -2.

Вариант 2

1. $\pi l^2\sin\alpha$. 2. Единственная точка экстремума $x=-1$ (точка минимума). 3. $x_1=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{5}l\ (k, l\in\mathbb{Z})$. 4. $]-3; -2[\ \cup\ ]2; 8[$.
5. $|v|=12$ м/с.

Физика

1. $\tau=\frac{|\vec{v}|}{\mu g}\approx 3{,}4$ с; $l=\frac{|\vec{v}|^2}{2\mu g}\approx 34$ м.
2. $|\vec{v}_1|=2|\vec{v}_2|$.
3. $M=RV^2/G\approx 2\cdot 10^{30}$ кг.
4. $M=l\pi d^2(\varrho_в-\varrho)/4\approx 74$ кг (здесь $\varrho_в=10^3$ кг/м^3 — плотность воды).
5. $T_2=0{,}67T_1\approx 288$ К.
6. $I=\frac{c\varrho V(t_2-t_1)}{\eta U\tau}100\%\approx 5{,}3$ А (здесь $\varrho=10^3$ кг/м^3 — плотность воды, $t_2=100$°C — температура кипения воды).
7. $\tau_{посл}=\tau_1+\tau_2=30$ мин; $\tau_{пар}=\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1+\tau_2}\approx 6{,}7$ мин.
8. $\mathcal{E}=B_в l|\vec{v}|=0{,}3$ В.
9. $T_Л/T_З\approx 2{,}4$.
10. $R=\frac{h}{\sqrt{n^2-1}}\approx 1{,}1$ м.

Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина

Математика

Вариант 1

1. $x=\frac{\pi}{4}+\pi k\ (k\in\mathbb{Z})$. 2. $\left\{8, \frac{1}{8}\right\}$. 3. $1\frac{1}{8}$. 4. 20°.
Указание. Примените теорему синусов к треугольникам ABM и ACM или воспользуйтесь тем, что если сторона AC видна из точки M под углом 30°, а из точки B — под углом 60°, то $\angle AMC$ — вписанный в Окр$(B, |AB|)$.

Вариант 2

1. $\left\{7, -5\frac{3}{5}\right\}$. 2. $]4; +\infty[$. 3. $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$.
4. $y=x+4$ и $y=-x+4$. Указание. Поскольку данная функция — четная, искомые касательные к ее графику симметричны относительно оси ординат.

Физика

1. $k = \frac{2mg(l+\Delta l)}{\Delta^2} = 30$ Н/м.

2. $|\vec F_д| = \frac{4m_1m_2}{m_1+m_2}(g+|\vec a|) \approx 5{,}3$ Н.

3. $Q = 5/2\,pS\Delta h = 12$ кДж.

4. $T_2 = T_1\left(1+\frac{2A}{3p_1V_1}\right) \approx 284$ К.

5. $W_0 = \frac{e|\vec E|l}{2\sin 2\alpha} \approx 3{,}7\cdot 10^{-16}$ Дж.

6. $\delta = \frac{\varepsilon(1-|\vec E|/|\vec E_{пр}|)}{\varepsilon-1} = \frac{2}{3}$.

7. $|\vec B| = \frac{|\vec E|}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{m_e}{2W}} \approx 4{,}3$ мТл; индукция магнитного поля перпендикулярна к плоскости, в которой лежат векторы скорости электрона и напряженности электрического поля.

8. $I_{м2} = I_{м1}\sqrt{L_1/L_2} = I_{м1}/\sqrt{2}$.

9. $F_2 = (d_1+F_1)F_1^2/d_1^2 \approx 9{,}4$ см.

10. $t = \frac{m_e|\vec v|^2\varepsilon_0S_1}{2e^2dn} \approx 0{,}16$ мкс.

Московский архитектурный институт

Математика

3. $\{100\}$. 4. $\left\{\left(\frac{5}{4};-\frac{3}{4}\right),\left(-\frac{1}{4};-\frac{9}{4}\right)\right\}$.

5. $\left]\frac{1}{2^{\sqrt2}};\ \frac{1}{2}\right[\quad]1;\ 2^{\sqrt2}[$. 7. 0. 8. $y = \frac{2}{3}x$.

9. $\frac{\sqrt S}{2}\cdot\sqrt{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-1}$.

Физика

1. $h = R/3$.

2. $h < l\left(\frac{T}{2mg}-\frac{1}{2}\right) = 2{,}5$ м.

3. Возможны два случая: 1) $\varphi = 0$, при этом равновесие шарика будет устойчивым при любой угловой скорости ω; 2) $\varphi = \arccos\frac{g}{\omega^2R}$, при этом равновесие будет устойчивым, если $\omega < \sqrt{g/R}$.

4. $|\vec F_{ср}| = Mg(1+h/s) \approx 3\cdot 10^5$ Н;

$$t = \frac{2s}{\sqrt{2gh}} \approx 8\cdot 10^{-3}\ \text{с}.$$

5. $\mu = \frac{\sin 2\alpha}{1+2\sin^2\alpha} = 0{,}5$.

6. $|\vec F| = ES\alpha\Delta t = 7{,}56\cdot 10^4$ Н.

7. $|Q| = \frac{1+2\sqrt2}{4}q$.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 4)

1.
$$\begin{array}{ccccc} 288 & + & 72 & = & 360 \\ | & & + & & | \\ 144 & - & 24 & = & 120 \\ \| & & \| & & \| \\ 144 & + & 96 & = & 240 \end{array}$$

2. По формуле n^3-n^2 $(n=1, 2, 3, \ldots)$. Пропущено число $5^3-5^2=100$.

3. См. рисунок 3.

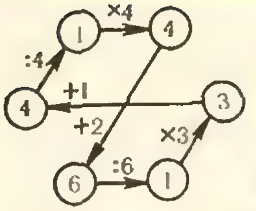


Рис. 3.

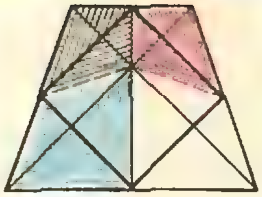


Рис. 4.

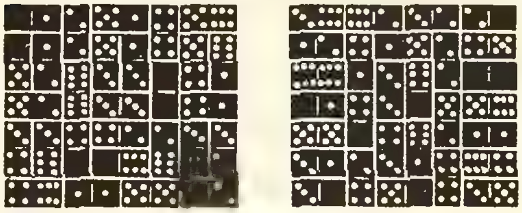


Рис. 5.

4. Соединив середины сторон трапеции, получим квадрат (рис. 4), площадь которого равна $h^2/2$, где h — длина высоты трапеции. С другой стороны, площадь этого квадрата в два раза меньше площади трапеции (треугольники одинакового цвета конгруэнтны).

5. Поскольку сумма цифр числа M делится на 3 (она равна $1980+2\cdot 1983=5946$), само число M также делится на 3. Если $M=n^3$, то и n делится на 3, откуда M делится на 27, а потому и на 9. Но это не так, поскольку сумма цифр числа M на 9 не делится. Значит, M не может быть точным кубом.

6. См. рисунок 5.

Номер подготовили:
А. Виленкин, А. Егоров, Н. Клумова, Т. Петрова
А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили
М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров, И. Смирнова,
Л. Черниевская

Зав. редакцией Л. Чернова

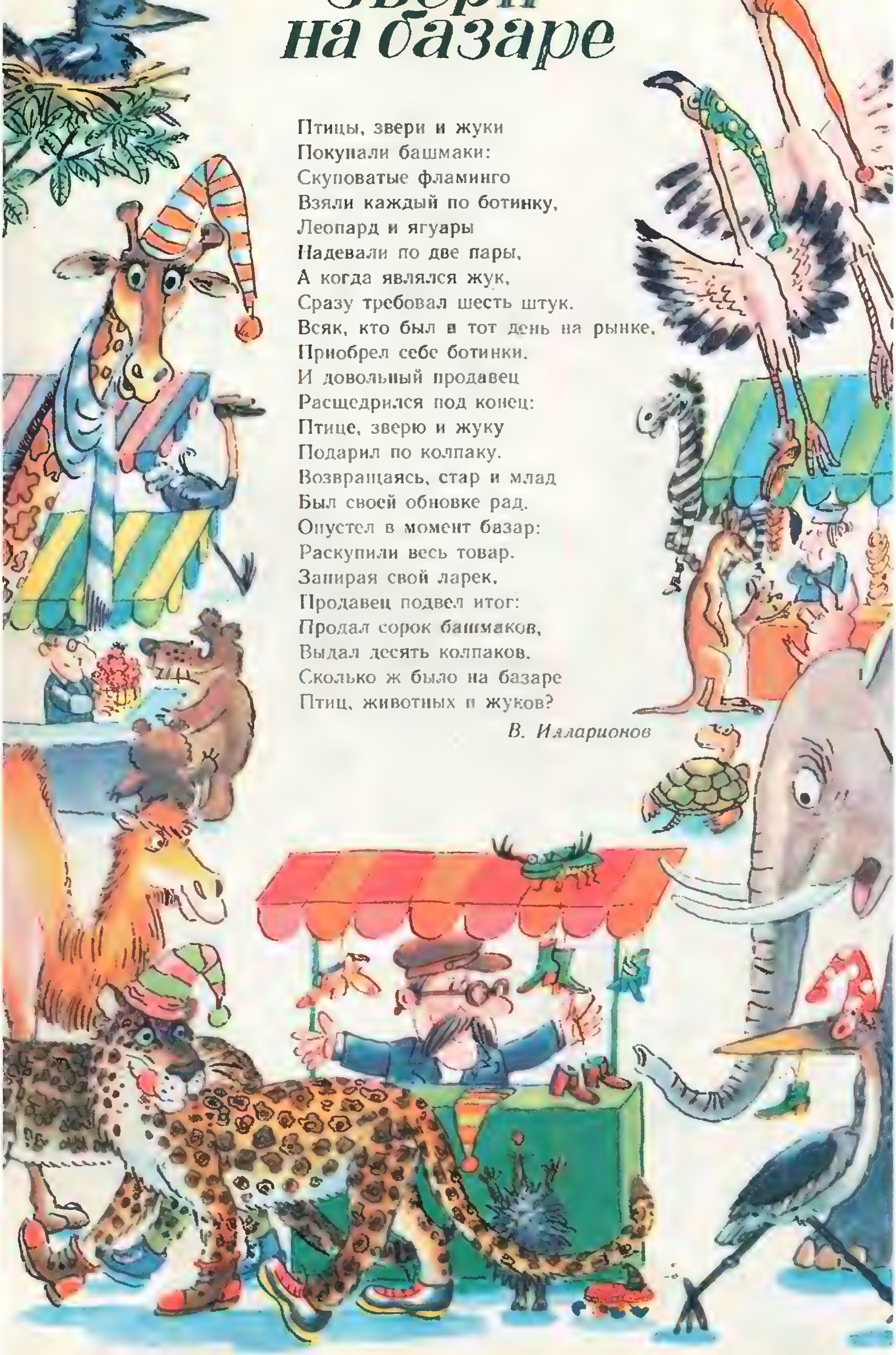
Художественный редактор Т. Макарова

Корректор М. Медведская

113035, Москва М-35, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 18.4.81
Подписано к печати 27.5.81
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16 Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 6,88 Т-20059
Цена 30 коп. Заказ 912
Тираж 237 593 экз.

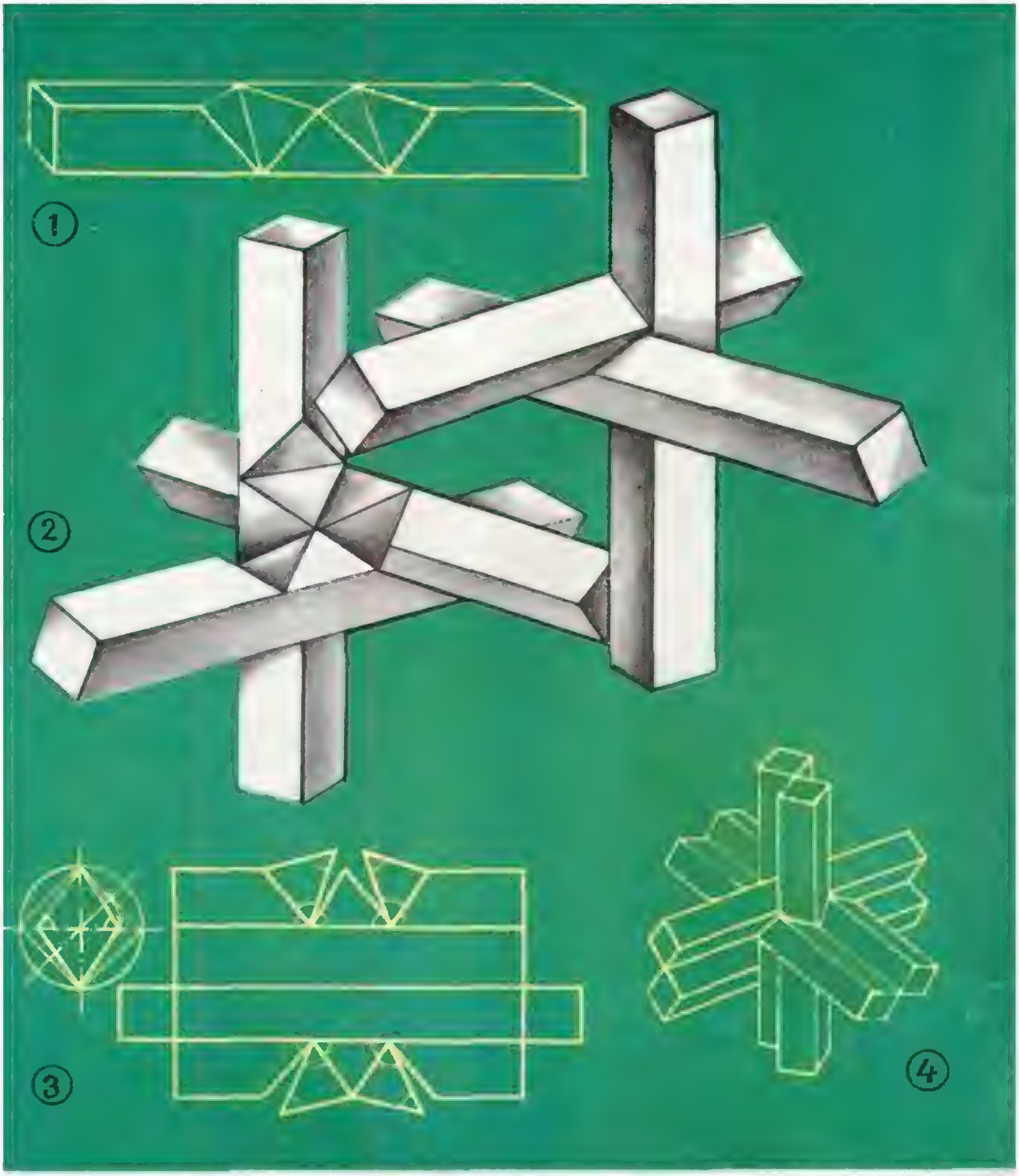
Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Звери на базаре



Птицы, звери и жуки
Покупали башмаки:
Скуповатые фламинго
Взяли каждый по ботинку,
Леопард и ягуары
Надевали по две пары,
А когда являлся жук,
Сразу требовал шесть штук.
Всяк, кто был в тот день на рынке,
Приобрел себе ботинки.
И довольный продавец
Расщедрился под конец:
Птице, зверю и жуку
Подарил по колпаку.
Возвращаясь, стар и млад
Был своей обновке рад.
Опустел в момент базар:
Раскупили весь товар.
Запирая свой ларек,
Продавец подвел итог:
Продал сорок башмаков,
Выдал десять колпаков.
Сколько ж было на базаре
Птиц, животных и жуков?

В. Илларионов



В центре этого рисунка показана русская народная головоломка «шесть брусков» в полуразобранном виде ② . В собранном виде ④ эта конструкция кажется совсем жесткой, хотя бруски не склеены, не сбиты и не привинчены друг к другу. Нелегко угадать, за какие бруски и в какую сторону нужно тянуть, чтобы ее разобрать.

Головоломка составлена из шести одинаковых брусков с квадратным сечением и двумя поперечными врезами ① . По развертке ③ можно найти точные размеры врезов и либо склеить бруски из тонкого картона, либо изготовить их из дерева.

Другой вариант этой головоломки — с круглыми брусками — показан на первой странице обложки.

В. Гамаюнов, А. Холманских

Цена 30 коп.

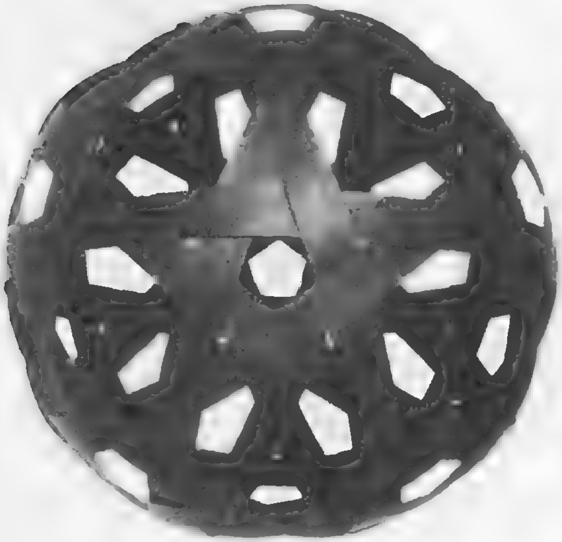
Индекс 70465

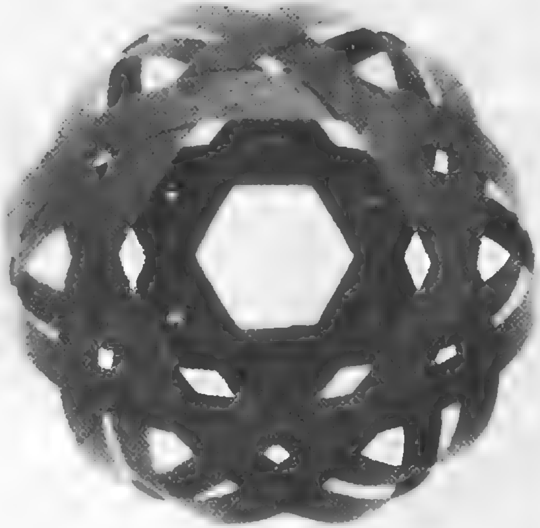
Эти «сферические купола» построены из переплетенных (но не склеенных) между собой бумажных колец.

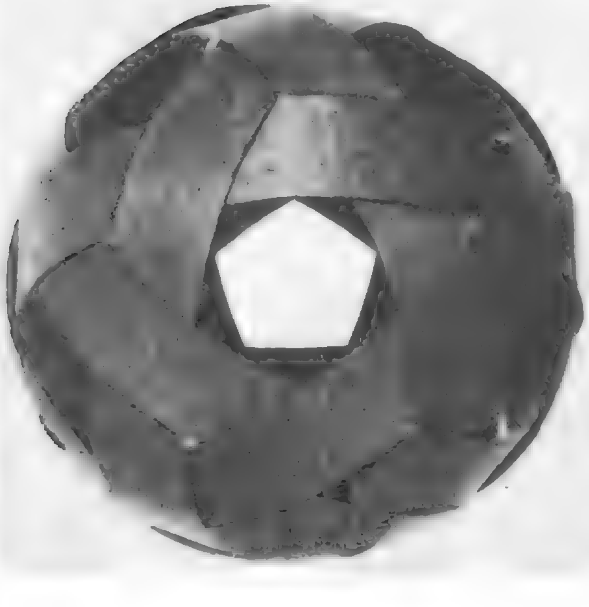
В нижнем ряду — фотографии одного и того же купола, снятого из двух разных точек. Этот купол составлен из шести колец. Читатель, знакомый с полуправильными многогранниками («Квант», 1978, № 1, с. [illegible] и 1980, № 12, с. 9), узнает в его облике икосододекаэдр (его гранями являются 20 правильных треугольников и 12 правильных пятиугольников).

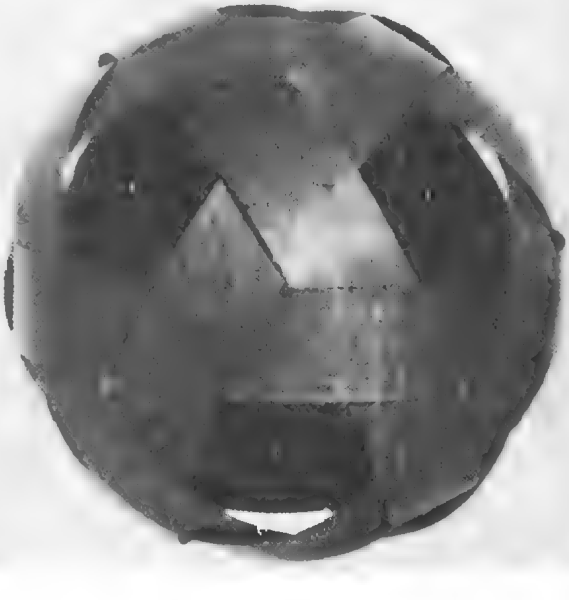
В верхнем ряду слева показан еще один купол из шести колец, а справа — из десяти. Все эти фигуры обладают богатой *группой симметрий* (то есть самосовмещаются многими разными способами; в частности, любое кольцо можно перевести в любое другое). Прочувствовать это можно, изготовив подобные модели самостоятельно, а лучше понять — прочитав указанные выше статьи и статью в «Кванте», 1980, № 7, с. 9.

О. Боднар









НОМЕР
7

Квант

7
1981

Основан в 1970 году

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
ОРГКОМИТЕТ МОСКОВСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

В НОМЕРЕ:

Ученые обращаются к молодежи

2 *Л. Седов.* Будьте готовы к новым условиям жизни людей

* * *

4 *П. Капица.* Научная деятельность Бенджамина Франклина
11 *В. Болтянский.* Плоские графы
17 *Л. Боровинский.* Почему не лежится Ваньке-Встаньке?

Задачник «Кванта»

19 Задачи М691—М695; Ф703—Ф707
21 Решения задач М645—М655; Ф663—Ф667
32 *С. Кротов.* Математический маятник в неинерциальной системе отсчета

«Квант» для младших школьников

35 Задачи
36 *М. Гервер.* Как сделать из мухи слона?

Практикум абитуриента

39 *В. Данилин.* Электроизмерительные приборы
44 *Б. Кордемский.* Семнадцать задач на смекалку

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1980 году

45 Московский автомеханический институт
46 Московский гидромелиоративный институт
47 Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии
47 Московский институт стали и сплавов
49 Московский институт электронного машиностроения
49 Московский энергетический институт

Искусство программирования

51 *А. Салтовский.* ЕС ЭВМ — семейство универсальных вычислительных машин

Информация

54 *В. Гороховик, О. Рабинович, Т. Фисенко.* 10-летие летней ФМШ в Белоруссии
56 *Л. Курляндчик.* Математические соревнования в ФМШ при ЛГУ
57 Вечерняя физическая школа
58 **Спрашивайте — отвечаем**
59 **Ответы, указания, решения**
Уголок коллекционера (*10, 3 с. обложки*)
Смесь (*18, 34*)

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд

На первой странице обложки воспроизведен рисунок художника Л. Константинова. Автор назвал эту свою работу «Плоскость и объем»

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1981

Л. Седов

Будьте готовы к новым условиям жизни людей

XX век ознаменовался многими событиями, в корне изменившими экономические и социальные условия жизни большей части населения земного шара. Жизнь и деятельность молодого поколения нашего времени перейдут в XXI век. Уже теперь можно предвидеть, что именно тем, кто сейчас молод, придется решать новые сложные проблемы глобального характера, особенно в области энергетики и охраны окружающей среды, поскольку запасы топлива и полезных ископаемых, так же как и ресурсы морей и рек, далеко не беспредельны, а загрязнение окружающей среды принимает угрожающие для жизни и здоровья людей размеры.

Передовые умы нашего времени верят в силу здравого смысла и в эффективность доброй воли народов мира и исключают возможность термоядерной войны. Когда такая уверенность станет всеобщей, безумие атомной войны будет действительно исключено. И здесь особенно важна активная позиция молодежи.

Вторая половина XX века характеризуется фундаментальными достижениями в различных областях науки и ее приложений.

Произошло огромное расширение фронта научных исследований и числа ученых, многие из которых совсем молоды. Теперь все острее и острее становится задача повышения качества образования в школах и вузах и эффективности научных работ, что требует высокой квалификации и продуктивности исследований.

В настоящее время накопилась огромная информация в различных областях науки и техники. Теперь даже в самой узкой специальности человек не может познать все известные факты. Поэтому возникает проблема: чему учиться? на что обращать внимание? что самое главное и что излишне?

Академик Леонид Иванович Седов — Герой Социалистического Труда, председатель Научного совета АН СССР по механике жидкостей и газов, президент Международной астронавтической федерации

Статья с небольшими сокращениями перепечатывается из сборника «Ленин. Наука. Молодежь», выпущенного в 1980 году издательством «Наука».

Вместе с тем следует сказать, что фундаментальные основы всякой отрасли науки немногочисленны и, вообще говоря, очень просты. Просты — это верно, но для понимания этих простых основ (что должно являться главным результатом образования) необходимо овладеть смыслом применяемых понятий, сущностью характеристических величин, правильным определением различных объектов и научиться операциям при теоретических и экспериментальных действиях, с помощью которых такого рода простые гипотезы и законы формулируются. Овладение современными методами и умением в теории, в эксперименте, на практике обязательно для успехов в науке и технике.

Таким образом, в образовании и в творческой работе главное — это накопление знаний, методических навыков и понимания. Следует подчеркнуть, что понимание невозможно без знаний, но одни знания разных факторов и даже рецептурных методов действий с ними не обязательно связаны с пониманием сути дела. Можно встретить людей, которые много знают и мало понимают. Серьезные успехи связаны с действительным пониманием, поэтому необходимо добиваться в жизни, в науке и на практике понимания, и особенно важны только те знания, которые совершенно необходимы для понимания. Следовательно, успехи в образовании и в творческой работе требуют максимума понимания при использовании минимума (зачастую очень большого теперь) необходимой информации. При обучении учитель должен отбирать из огромного накопленного запаса информации именно ту, которая обеспечит требуемое понимание. Тогда молодые ученые легко смогут ориентироваться в данной отрасли знания и найти нужную дополнительную информацию по ходу своей конкретной деятельности.

Во многих науках, так же как и в искусстве, требуется систематическое и правильное обучение смолоду. Неправильное или только рецептурное усвоение знаний смолоду чревато вредными последствиями, так как потом переучиваться трудно, а иногда и невозможно.

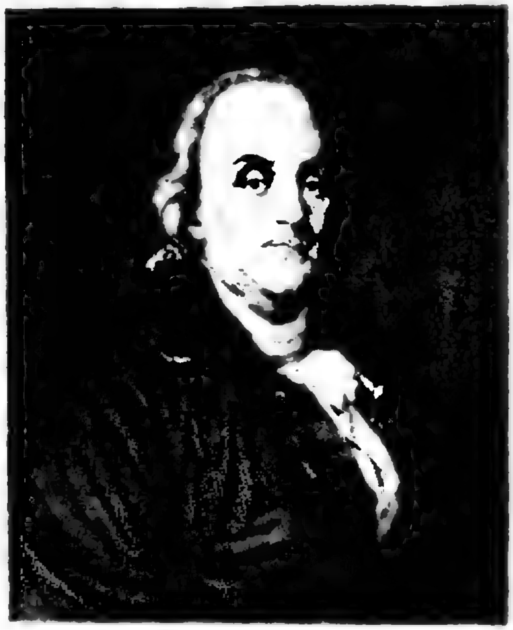
Нужно всемерно развивать энтузиазм, интерес к получению знаний, который возникает и процветает именно в коллективе — в школе и в вузе. В обучении и в практической деятельности необходимо прививать молодежи самостоятельное, критическое восприятие фактов при освоении научных знаний и самокритичное отношение к собственным поступкам.

Самоотверженность, одержимость, глубокая внутренняя заинтересованность и бескорыстный при взаимной помощи стиль в коллективных стремлениях познать сущность явлений природы и научных достижений безусловно способствуют и общему прогрессу, и формированию высоких индивидуальных качеств членов коллектива.

Каждый из вас есть член коллектива, коллектива соратников, товарищей старшего и более молодого поколений. Без общения и работы в коллективе, без тесного взаимодействия с коллективом теперь вообще невозможно добиться каких-либо значительных результатов.

Фундаментальные знания приобретаются в молодости — в школе и в вузе, но процесс совершенствования и дальнейшего обучения продолжается в течение всей творческой деятельности человека. Однако нужно помнить, что именно в молодости вы получаете основные знания и методические навыки, и это наложит свой отпечаток на всю вашу дальнейшую деятельность.

Дорогие друзья! Перед вами открыты широкие двери для творческой деятельности на благо и во славу нашей Родины, на пользу всему человечеству. Не упустите смолоду такой возможности, это обязательно послужит для вас источником глубокого внутреннего удовлетворения, больших радостей и счастья, которые вы найдете в своей трудовой деятельности.



В январе этого года исполнилось 275 лет со дня рождения выдающегося американского естествоиспытателя Бенджамина Франклина. В связи с этим юбилеем мы публикуем статью академика Петра Леонидовича Капицы, посвященную ученому. Статья с некоторыми сокращениями перепечатывается из брошюры «Жизнь для науки», выпущенной издательством «Знание» в 1965 году.

П. Капица

Научная деятельность Бенджамина Франклина

Франклин родился в Америке, в городе Бостоне, в 1706 году. Он умер, когда ему было 84 года. Его деятельность охватывает весь XVIII век и тесно связана с происходившим тогда быстрым развитием естественных и общественных наук. Это эпоха просветителей, эпоха, предшествующая периоду коренных общественных переворотов в Европе.

Имя Франклина вошло в историю мировой культуры не только как имя крупнейшего ученого, одного из основателей учения об электричестве, но и как имя крупнейшего прогрессивного государственного и общественного деятеля Америки, принимавшего живейшее участие в борьбе за ее освобождение от колониального положения.

Современники единодушно описывают Франклина как исключительно обаятельного человека, всесторонне образованного, с гуманными и широкими взглядами, интересного и остроумного собеседника. Франклин часто путешествовал и много лет прожил за границей, главным образом в Англии и Франции. Здесь он общался с передовыми людьми своего времени и к концу жизни стал популярнейшим лицом в Европе. На своей родине, в Америке, Франклин и по сей день является одним из наиболее почитаемых людей за все время истории США.

Основные научные открытия Франклина в области электричества были им сделаны в 50-е годы XVIII века, до работ Гальвани и Вольта, то есть до эпохи гальванического тока, и относятся к начальному периоду завоевания наукой этой могучей силы природы. За 200 с лишним лет, прошедших со времени работ Франклина, учение об электричестве настолько продвинулось вперед, что сейчас работы Франклина изучают в средней школе, в тех классах, где только начинают знакомиться с физикой. Всем нам с юности известны основы учения о статическом электричестве, хотя, возможно, некоторые из нас могли позабыть, что собственно здесь было сделано Франклином. Например, все ли из нас помнят, что наименование положительного и отрицательного полюсов было впервые введено в науку Франклином?

Подробное описание научных работ Франклина вряд ли сейчас интересно, но сама история развития работ Франклина в области электричества, мне думается, не только интересна, но и полезна для современного ученого. Следует это из того, что путь развития науки, то есть путь познания природы, по которому идет человечество, — единый. В своих исканиях научных истин мы нередко сбиваемся с правильного пути и тогда теряется время. Поэтому, чем меньше мы будем отклоняться от правильного пути, тем скорее и экономичнее будут развиваться наши познания и завоевания сил природы. Изучая историю науки, мы находим те факторы, которые способствуют быстрому развитию науки. С этой точки зрения история научных работ Франклина представляет исключительный интерес.

Работы Франклина по электричеству были им сделаны за короткий период времени, всего за 7 лет, с 1747 по 1753 год. За этот короткий срок Франклин был признан ведущим ученым своего времени. Большинство крупных научных обществ или академий отметили научные заслуги Франклина, избрав его своим членом, и ряд университетов присвоил ему почетное звание доктора.

Естественно возникает вопрос: как могло случиться, что Франклин, раньше никогда не занимавшийся физикой, в небольшом городе Америки, вдали от центров мировой науки, будучи уже человеком зрелого возраста, смог за несколько лет работы возглавить развитие целой научной дисциплины?

И это произошло в середине XVIII века, когда наука велась людьми на уровне знаний таких ученых, как Ньютон, Гюйгенс, Эйлер? О дилетантизме здесь говорить не приходится. Как же мог Франклин достичь таких результатов, которые остались недоступны профессиональным ученым?

Мне думается, что надо искать объяснение в том, что Франклин первый правильно понял существо электрических явлений и поэтому открыл правильный путь для дальнейших исследований в этой области.

До работ Франклина было уже накоплено большое количество опытного материала, но факты были разрознены, и выдвинутая им гипотеза не только объединяла эти факты в стройную картину, но и указывала правильный путь для дальнейших исследований.

Свою основную гипотезу Франклин изложил в письме к Питеру Коллинзону в 1749 году. Она дает ясную картину процессов, происходящих при электризации тел. Эта картина до сих пор в основном остается правильной. Вот выдержка из этого письма: «Электрическая материя состоит из частиц крайне малых, так как они могут пронизывать обычные вещества такие плотные, как металл, с такой легкостью и свободой, что не испытывают заметного сопротивления». В наши дни мы называем эти «крайне малые частицы» электронами. Далее Франклин рассматривал любое тело как губку, насыщенную этими частицами электричества. Электризация тел состоит в том, что тело, имеющее избыток электрических частиц, положительно заряжено; если тело имеет недостаток этих частиц, оно заряжено отрицательно.

Конечно, Франклин тогда не имел возможности на опыте воспринимать материальный характер электричества и поэтому не имел возможности определить, кто на самом деле получает электрическую материю и, следовательно, заряжен положительно, и кто ее теряет, то есть заряжен отрицательно. Поэтому он принял наугад, что наэлектризованное стекло заряжено положительно, может быть, думая, что шерстяная материя при трении о стекло втирает в него электричество. Только в конце прошлого века, после открытия частиц электричества —

электронов, стало известно, что не положительный электрод, как думал Франклин, накапливает электрические частицы, но отрицательный. Чтобы не менять привычных обозначений положительной и отрицательной полярности, электрону приписали отрицательный заряд.

Свойство взаимного отталкивания одноименно заряженных тел Франклин распространил на заряды, находящиеся на металлических проводниках. Он считал, что заряды, отталкиваясь друг от друга, будут стремиться на наружную часть наэлектризованного металлического тела. Он доказал справедливость своего предположения следующим опытом.

Металлический чайник ставился на изолятор и электризовался. Требовалось найти опыт, который доказал бы, что заряд распределяется по наружной поверхности чайника. Для этого внутрь чайника помещалась цепь, которую посредством изолированной ручки можно было постепенно извлекать из чайника. Степень электризации чайника определялась по отталкиванию двух шариков, подвешенных к нему на ниточках. Опыт заключался в том, чтобы за изолированную ручку подымать цепь из чайника и наблюдать, как по мере ее вытягивания степень электризации чайника уменьшается.

Франклин рассуждал так: пока цепь находится внутри чайника, ее поверхность увеличивает внутреннюю поверхность чайника; когда цепь вытягивают наружу, то она увеличивает наружную поверхность чайника [цепь «на выходе» касается чайника — *прим. ред.*]. Франклин заключает: если заряд распространяется только по наружной поверхности наэлектризованного проводника, то только при ее увеличении наэлектризованность будет уменьшаться. Это и наблюдается на самом деле, когда производится опыт.

Описание всех своих работ Франклин дает в письмах своему другу Коллинзону в Англии. В этих письмах описывается большое количество различных опытов, которые теперь стали классическими: получение электрического ветра, свойства стекания зарядов с острия и др. В этих же письмах Франклин с точки зрения своей гипотезы дает правильное объяснение ряда уже известных электрических явлений, например картины накопления электрических зарядов в Лейденской банке, и на этом основании он делает плоский конденсатор. Коллинзон докладывал о работах Франклина в Королевском обществе ([английская Академия наук — *прим. ред.*]. Потом он издал их отдельной книгой, которая и стала основным научным трудом Франклина. Эта книга выдержала ряд изданий и была переведена на многие языки.

Ясность и правильность понимания Франклином явлений электризации дали ему возможность найти опыт, который впервые убедительно доказывал электрическую природу грозовых разрядов. Идея опыта Франклина заключалась в следующем.

Положим, между грозовой тучей и землей поставлен длинный вертикальный изолированный от земли металлический стержень. Если грозовая туча имеет электрический заряд, то заряд потивоположного знака находится в верхней части стержня. Если на этом верхнем конце стержня сделать острие, то наведенный заряд стечет и стержень зарядится электричеством того же знака, что и туча.

Франклин считал, что присутствие этого заряда можно будет обнаружить по искре, которая возникает, если прикоснуться к проводнику свободным концом заземленной проволоки. Франклин предполагал, как потом выяснилось, ошибочно, что для успеха этого опыта стержень надо поставить на возвышенность, чтобы он был ближе к облаку.

Так как вблизи его дома такой возвышенности не было, он думал, что ему не удастся сделать этот опыт. Он подробно описал, как его надо делать, и предлагал это выполнить другим. Сам же он решил проделать аналогичный опыт, но несколько другим путем, который не требовал возвышенности.

Для этого опыта вместо металлического стержня он решил использовать бечевку, поднимая ее вверх змеем. Поскольку во время грозы всегда бывает ветер, змей можно запустить, а так как еще идет и дождь, то веревка, намокая, станет проводящей и может заменить металлический стержень. Чтобы бечевка легче заряжалась, была предусмотрена возможность на верхнем конце бечевки дать стекать наведенным зарядам. Для этого по углам рамки змея Франклин поместил острия. Для того чтобы изолировать бечевку от земли, внизу к ней была привязана шелковая лента, которая была защищена от дождя. К концу бечевки у земли был подвешен металлический ключ, из которого Франклин во время грозы и извлекал искру. Таким путем в присутствии своих друзей и знакомых он доказал электрическую природу грозового разряда. Опыт со змеем был сделан Франклином 12 апреля 1753 года, тогда же он впервые нашел, что грозовые облака, как правило, бывают заряжены отрицательно

Кроме чисто научных работ, у Франклина есть еще одно общепризнанное достижение: это его изобретение — громоотвод. В истории внедрения в жизнь этого изобретения есть тоже много поучительного. Это длинная история, ей посвящены многие исследовательские работы. Поэтому я могу только совсем кратко рассказать, как Франклин изобрел и внедрил громоотвод.

После того как была раскрыта сущность грозового разряда, естественно, встал вопрос, как можно рационально бороться с разрушениями и пожарами, причиняемыми молнией. Стало ясно, что когда молния ударяет в здание, корабль или любой другой возвышающийся объект, то вред причиняется тем, что мощный электрический ток, проходя по плохо проводящей среде, производит разрушения и воспламенения. Поэтому, если при ударе молнии в здание дать возможность электрическому разряду пройти в такой хорошо проводящей среде, как металл, разрушений не будет.

Несомненно, Франклин с его острым практическим умом раньше других увидел возможность найти защиту от молнии путем отвода тока. Но гораздо труднее для него было найти наиболее рациональную форму громоотвода и заставить общественное мнение признать его как действенное средство борьбы с разрушениями, вызываемыми грозой. С этой задачей Франклин блестяще справился, и его деятельность в этом направлении до сих пор может служить примером, как нужно проводить новые технические идеи в жизнь.

Франклин не только не брал патента на свой громоотвод, но дал возможность пользоваться им безвозмездно всякому, кто этого хотел. Кроме этого, он повел большую и искусную пропагандистскую работу для внедрения его в жизнь. За неимением времени нельзя рассказать полностью историю внедрения громоотвода, поэтому я остановлюсь на наиболее ярких моментах.

Вполне возможно, что ни одно изобретение не вызвало такой бури разнообразных возражений, какую вызвал 200 лет назад тот небольшой металлический стержень, который в наши дни венчает почти каждое сооружение и является стандартным элементом его конструкции.

Против громоотвода возникли как научные возражения, так и политические. Когда Франклин давал описание действия громоотвода, кроме его очевидной функции — дать беспрепятственный путь электрическому току по металлическому стержню в землю, он еще указал на возможность существования и другого процесса.

Франклин считал, что если над сооружением находится грозовая туча и если громоотвод снабжен острием, то с него может происходить медленное стекание электрического заряда. Это явление мы теперь называем тихим разрядом. Оно и будет нейтрализовать заряд облака и его разряжать. Поэтому Франклин допускал, что громоотвод не только защищает здание, но вообще может предотвратить грозовые разряды. Научные противники

Франклина считали, со своей стороны, что стекание заряда с острия не только не будет нейтрализовать заряд тучи, но будет создавать более благоприятные условия для возникновения молний. Поэтому громоотвод скорее вреден, так как дает возможность возникновения грозовых разрядов, которых без него вообще не было бы.

Ученые, стоявшие на этой точке зрения, считали в особенности вредным и опасным для здания его соседство с другим, снабженным громоотводом.

Интерес общественного мнения к этим вопросам был очень велик, и это хорошо иллюстрируется известным случаем: когда в Сент-Омере, во Франции, господин де Виссери поставил громоотвод на своем доме, его соседи были этим так испуганы и возмущены, что подали на него в суд. Процесс произвел много шума и длился несколько лет в период между 1780 и 1784 годами. Интересно, что на стороне защиты громоотвода выступал молодой адвокат Максимильян Робеспьер, и это громкое дело положило начало его известности. Любопытно также, что одним из экспертов со стороны истца выступал Марат, который считал громоотвод опасной затеей и был против его установки. После долгой борьбы и апелляций де Виссери выиграл процесс.

Франклин проводит эксперименты с электричеством (французская статуэтка).

Интересна тактика Франклина во всей этой борьбе за громоотвод. Он обычно не выступал публично, но путем бесед и путем своей громадной переписки он непрерывно воздействовал на ведущих ученых и общественных деятелей. Такой пропагандой он создавал себе мощную армию из передовых людей того времени, которая боролась за проведение в жизнь его детища — громоотвода.

В Англии борьба против громоотвода приобрела резко политический характер. Английский ученый Вильсон пытался доказать, что избежать вредного действия громоотвода можно, если его конец сделать тупым и этим помешать стеканию заряда. Так как время этого спора совпало с эпохой освобождения Америки от колониального положения и Франклин стал крупной политической фигурой молодой Америки и одним из активнейших борцов за свободу, то всякий гражданин Англии, снабжавший свой громоотвод острием, а не тупым концом, считался политически неблагонадежным.

Король Англии Георг III требовал от Королевского общества, чтобы оно отказалось от своего решения в пользу острия на Франклиновском громоотводе. На это требование короля президент Королевского общества сэр Джон Прингль, лейб-медик короля и личный друг Франклина, дал следующий известный ответ: «И по своему долгу и по своим склонностям, он по мере сил всегда будет исполнять желания его величества, но он не в состоянии ни изменить законов природы, ни изменить действия их сил». За эти слова его уволили с должности королевского врача и сняли с президентства Королевского общества.

G. COPLEY BART DIGNISSIMO
SOCIETAS REG LONDINI

Медаль Коплея, присужденная Франклину за открытия в области электричества.

В процессе борьбы по вопросу о громоотводе были использованы все методы, клевета, инсинуации и лично против Франклина, и против его друзей. Франклин сохранял большое спокойствие, не обращая внимания на личные выпады, и неизменно говорил, что в вопросах науки правда выявляется только опытом. Действительно, опыт и решил этот спор, но много десятков лет спустя, когда учение о грозовых разрядах и об электрическом поле достигло современного уровня. Теперь мы видим, что весь этот спор не имел никакого основания, так как для обычного громоотвода не имеет значения, чем он завершается, острием или тупым концом. На небольшом расстоянии от земли геометрическая форма конца громоотвода не может заметно влиять на распределение электрического поля над землей.

Но один из ведущих специалистов по грозовым разрядам доктор Шонланд указывает, что все же процесс нейтрализации заряда облака путем тихого разряда, предсказанный Франклином, возможно осуществить, но только тогда, когда острие громоотвода находится на таком большом расстоянии от земли, что оно сравнимо с высотой тучи. Это имеет место для громоотводов, помещенных на самых высоких американских небоскребах, тогда действительно удается наблюдать с острия стержня тихий разряд, не переходящий в молнию. Шонланд добавляет, что это, несомненно, дало бы Франклину чувство справедливого удовлетворения, если бы он мог это знать.

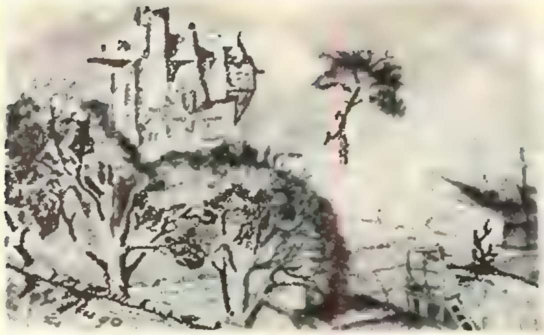
Только кратко скажу о деятельности Франклина в других областях науки, так как, кроме описанных знаменитых достижений, у него есть еще достижения и в других областях.

Франклин занимался геофизикой, дал карту течения Гольфстрима, изобрел музыкальный инструмент с трущимися стеклянными шарами, экономическую печку, до сих пор распространенную в Америке и Франции, уличные фонари, двойные очки для старческой дальнозоркости и многое другое. Кроме этого, благодаря своему общительному характеру и живому уму Франклин много консультировал и способствовал развитию науки. Конечно, сведения о большинстве этих консультаций канули в вечность, но некоторые дошли до нас.

Так, например, Людовик XVI просил Франклина быть членом комиссии по вопросу о ценности способа лечения, предложенного доктором Месмером, который использовал так называемый «животный магнетизм». Интересно, что в той же комиссии участвовал небезызвестный доктор Гильотен, изобретатель гильотины. Франклин отрицал существование животного магнетизма, но считал, что это не вредный способ лечения, так как он развлекает состоятельных людей, не принося им вреда, что не всегда можно сказать о других необоснованных лекарственных методах лечения.

Очень одобрительно Франклин отнесся к полетам братьев Монгольфье.

Франклин считал, что научные достижения есть достояние всего человечества и забота о развитии мировой науки должна стоять вне политических и военных противоре-



Дом Франклина в Пасси. Рисунок Виктора Гюго.

чий между народами. Так, во время войны с Англией, когда знаменитый исследователь капитан Кук возвращался из своего плавания, Франклин дал указания всем американским кораблям и корсарам отнестись с уважением к капитану Куку, где бы они его ни встретили во время его путешествия. Для наших дней также представляет интерес, что Франклин, заседая в конгрессе, убедил не распространять на научное оборудование эмбарго, наложенное на все товары английского происхождения.

Изучая биографию Франклина, все больше и больше понимаешь, почему существует всеобщее уважение и преклонение перед этим большим человеком, которого народ Америки дал человечеству.

В эпоху быстрого роста естественных наук каждая страна дала своего великого родоначальника науки — у нас это был Ломоносов, в Англии — Ньютон, в Италии — Галилей, в Голландии — Гюйгенс, во Франции — Декарт, в Германии — Лейбниц, в Америке — Франклин. Достижения этих больших ученых являются гордостью всего человечества. И мы, советские люди, благодарны американскому народу, давшему и воспитавшему для человечества великого Франклина.

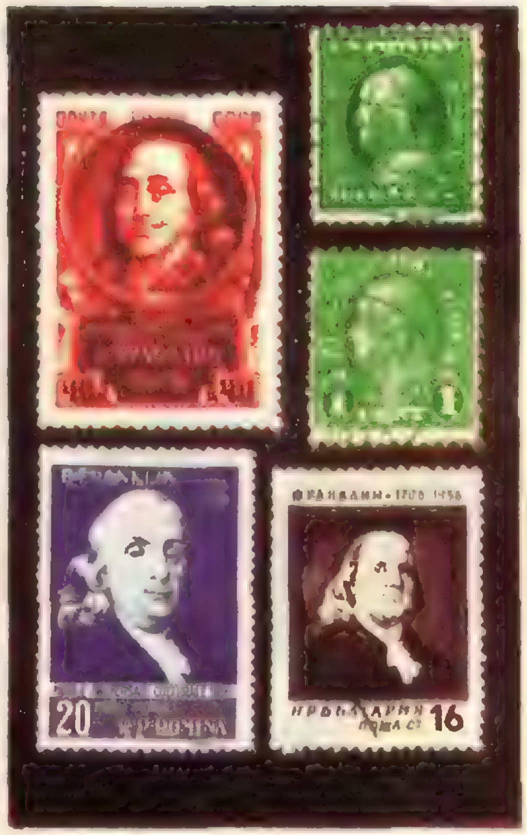
Уголок коллекционера

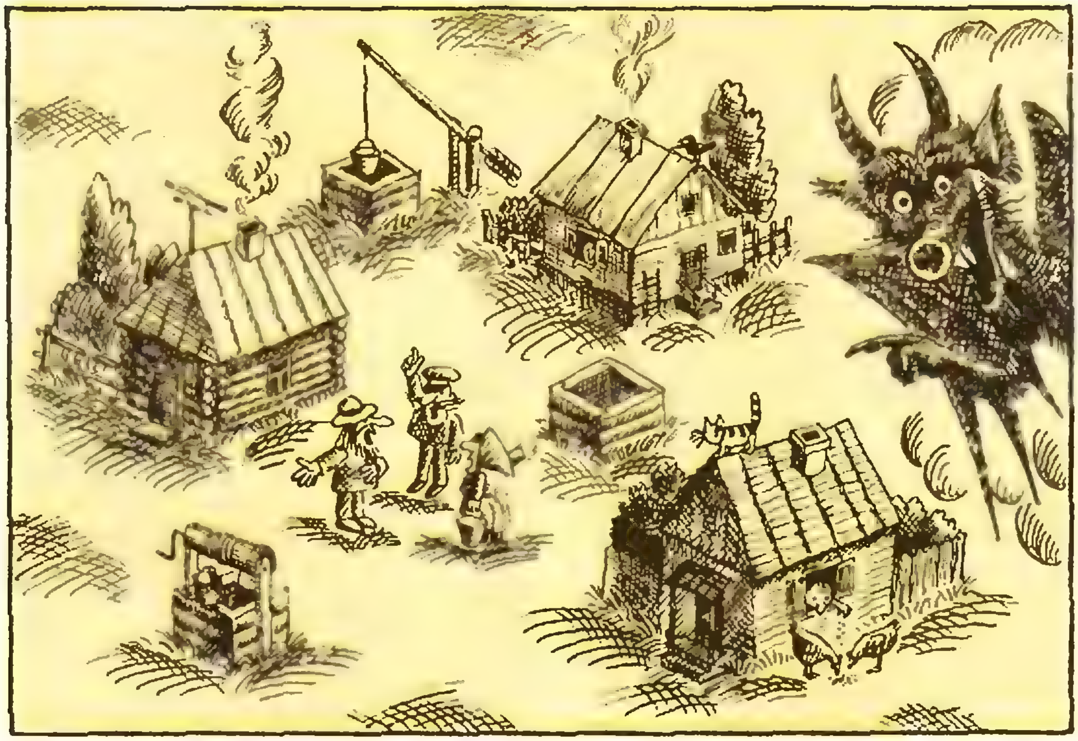
НА МАРКАХ — ФРАНКЛИН

Выдающийся американский естествоиспытатель и общественный деятель Бенджамин Франклин, 275-летие со дня рождения которого отмечается в этом номере «Кванта», оставил заметный след в мировой филателии. Ему посвящено несколько десятков почтовых марок. Больше всего их, естественно, выпущено в США. Первая американская марка с портретом Франклина вышла в 1847 году. Вместе с маркой, изображающей Джорджа Вашингтона, она образовала первую серию марок, имевших хождение на всей территории США. Впоследствии к ней добавилось еще 28 американских марок, посвященных Франклину. Две из них, выпущенные в 1908 и 1922 годах, приведены в нашей подборке. Марки с изображением Франклина по традиции открывали новые почтовые серии в США.

В 1956 году ряд стран торжественно отметил 250-летие со дня рождения Франклина. В нашей стране этому событию было посвящено торжественное заседание Академии наук. Юбилей Франклина был ознаменован выпуском специальных почтовых марок. Мы воспроизводим здесь марки СССР, Румынии и Болгарии, посвященные этому событию.

В. Лешковцев





В. Болтянский

Плоские графы

В этой статье мы продолжаем изучение топологических свойств графов, начатое в предыдущем номере журнала. На этот раз речь пойдет о некоторых глубоких свойствах плоских графов. Их изучение потребует вмешательства «дьявола абстрактной алгебры» и одного из его прислужников — инварианта по имени *индекс пересечения*.

Три домика и три колодца

Граф A называется *вложимым в плоскость*, если существует на плоскости граф A', гомеоморфный A. Так, граф, составленный из ребер тетраэдра, и граф, составленный из ребер куба, вложимы в плоскость (рис. 1). Приведем два примера графов, не вложимых в плоскость.

Пример 1 («домики и колодцы»). На плоскости даны шесть точек: $Д_1$, $Д_2$, $Д_3$ (домики) и K_1, K_2, K_3 (колодцы); можно ли на плоскости провести тропинки от каждого домика к каждому колодцу так, чтобы никакие две тропинки не пересекались?

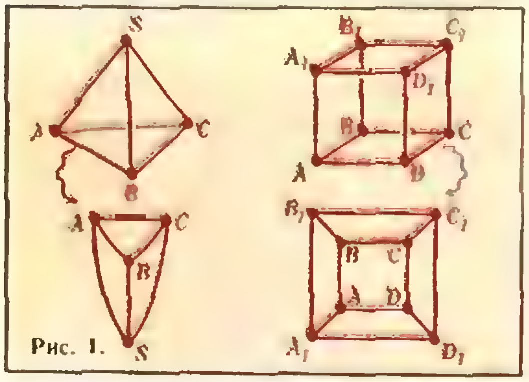


Рис. 1.

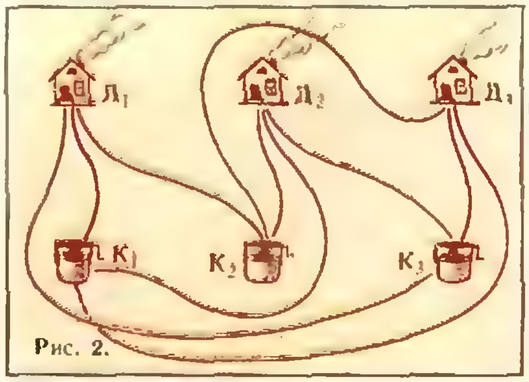


Рис. 2.

Если мы проведем все тропинки, кроме одной, то для последней тропинки уже «не будет места» на плоскости. Таким образом видно, что граф P_1, изображенный на рисунке 2, не вложим в плоскость.

Пример 2. Обозначим через P_2 *полный граф* с пятью вершинами M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, то есть граф без петель, любая пара вершин которого соединена ребром. На рисунке 3 проведены девять ребер этого графа, а десятое прервано: для него «нет места» на плоскости. Снова видно, что граф P_2 не вложим в плоскость.

Оказывается, графы P_1, P_2 действительно не вложимы в плоскость. Разумеется, рассуждения, приведенные в примерах 1 и 2 («нет места» на плоскости), не являются доказательствами. К доказательству мы еще вернемся, а пока, считая невложимость графов P_1 и P_2 в плоскость известной, посмотрим на рисунок 4. На нем показан граф A с выделенным «синим» подграфом. Этот подграф гомеоморфен P_1, значит, граф A не вложим в плоскость (поясните!). Вообще, *если некоторый граф G содержит подграф, гомеоморфный P_1 или P_2, то граф G не вложим в плоскость.* Польский математик Куратовский доказал обратную теорему: *если граф не вложим в плоскость, то он содержит подграф, гомеоморфный P_1 или P_2.*

Мы не будем доказывать теорему Куратовского, а ограничимся доказательством невложимости в плоскость графов P_1 и P_2. Для этого нам потребуется

Индекс пересечения

Пусть a, b — два отрезка на плоскости, ни один из которых не содержит концов другого отрезка. Если эти отрезки пересекаются, то будем писать $I(a, b)=1$, а если нет, то $I(a, b)=0$. Число $I(a, b)$ назовем *индексом пересечения отрезков a и b*. Если один из отрезков a, b содержит конец другого отрезка, то число $I(a, b)$ не определено.

Пусть $x=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ и $y=\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ — два множества отрезков на плоскости, причем для любых i, j определен индекс $I(a_i, b_j)$.

Если сумма $\sum_{i,j} I(a_i, b_j)$ (то есть сумма индексов пересечения каждого из отрезков $a_1, \ldots, a_m$ с каждым из отрезков $b_1, \ldots, b_n$) четна, положим $I(x, y)=0$, а если эта сумма нечетна, положим $I(x, y)=1$. Число $I(x, y)$ назовем *индексом пересечения множеств x и y*. Это число будет играть основную роль в этой статье.

Будем рассматривать графы, ребра которых являются отрезками. Если в каждой вершине такого графа сходится четное число ребер, мы будем называть его *циклом*. Докажем, что для любых циклов x, y на плоскости, индекс пересечения которых определен,

Индекс пересечения равен нулю

По определению в каждой вершине цикла сходится не меньше двух ребер. Из результата задачи 7 предыдущей статьи следует, что цикл содержит ломаную, гомеоморфную окружности. Если из цикла выбросить эту ломаную и хоть один отрезок останется, оставшийся граф по-прежнему будет циклом. В оставшемся цикле можно снова выделить ломаную, гомеоморфную окружности, и т. д. Это рассуждение показывает,

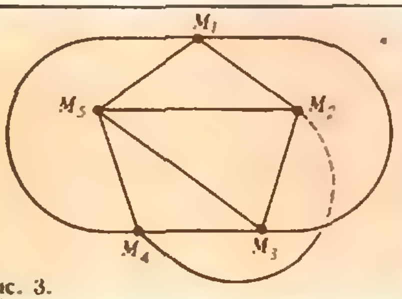


Рис. 3.

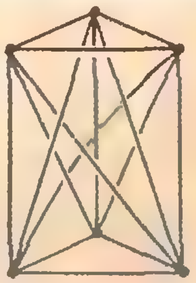


Рис. 4.

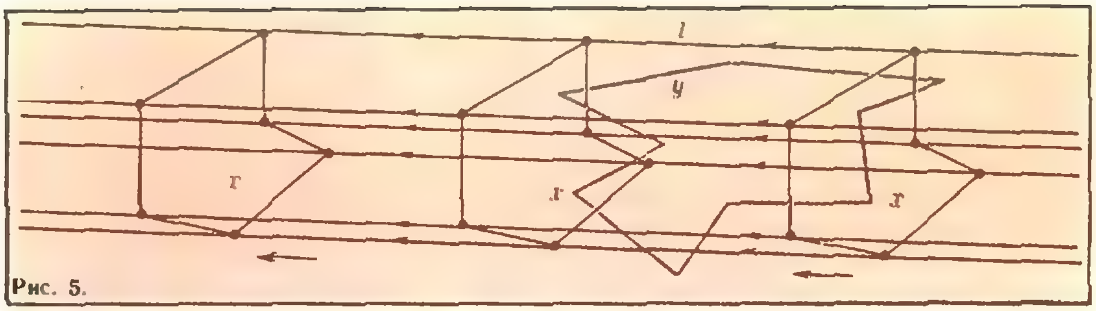


Рис. 5.

что *каждый цикл является объединением конечного числа ломаных, каждая из которых гомеоморфна окружности* (причем эти ломаные попарно не имеют общих звеньев).

Поэтому достаточно установить справедливость доказываемого утверждения в случае, когда каждый из циклов x, y состоит из одной ломаной, гомеоморфной окружности. Сдвинув чуть-чуть вершины циклов x и y, мы можем добиться того, чтобы индекс $I(x, y)$ не изменился и никакой отрезок, входящий в цикл x, не был параллелен никакому отрезку, входящему в y. Выберем теперь прямую l, не параллельную ни одной прямой, соединяющей какую-либо вершину цикла x с какой-либо вершиной цикла y, и будем непрерывно перемещать цикл x (как твердое целое) параллельно прямой l (рис. 5). Индекс пересечения $I(x, y)$ мог бы изменяться лишь в те моменты, когда вершины движущегося цикла x проходят через ребра неподвижного цикла y или когда ребра цикла x проходят через вершины цикла y (вершины цикла x не могут попасть в вершины цикла y в силу выбора прямой l). Однако, как показывает рисунок 6, в момент, когда некоторое ребро a цикла x проходит через вершину q цикла y, число точек пересечения не меняет своей четности, а потому индекс пересечения $I(x, y)$ не меняется. То же происходит и при прохождении вершин цикла x через ребра цикла y.

Итак, в течение всего движения индекс пересечения не меняется, является инвариантом. Но в конце концов цикл x попадает в положение, в котором он совсем не имеет общих точек с y (см. рис. 5), так что индекс пересечения становится равным нулю. Следовательно, и первоначально было $I(x, y) = 0$.

Невложимость полного пятивершинного графа

Теперь мы в состоянии доказать, что граф P_2, рассмотренный в примере 2, не вложим в плоскость. Соединим ломаными попарно 5 точек на плоскости, не обращая пока внимания на пересечения. Ребра-ломаные, не имеющие общих концов, условимся называть *несмежными*. Обозначим через I сумму индексов пересечения по всем парам несмежных ребер. Конечно, число I зависит от того, каким образом нарисованы на плоскости ребра. Если бы их удалось нарисовать без пересечений, число I оказалось бы равным нулю. Однако мы докажем, что *при любом*

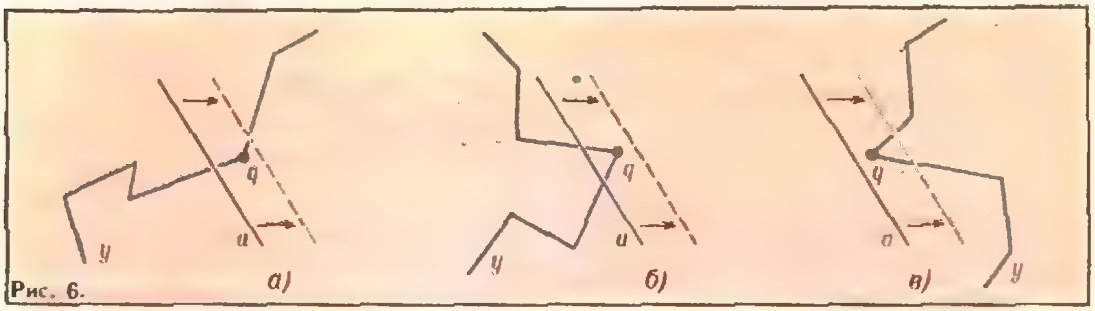


Рис. 6.

способе проведения ребер число J оказывается нечетным. Тем самым будет доказано, что граф P_2 не вложим в плоскость.

Предположим, что мы меняем положение одного ребра, скажем M_1M_2. Первоначальное положение этого ребра обозначим через x, а его новое положение через x'. Несмежными с ребром M_1M_2 являются три ребра (M_3M_4, M_4M_5, M_5M_3). Замкнутая ломаная $M_3M_4M_5$ (возможно, пересекающая себя) является циклом; обозначим его через y (рис. 7). Ломаные x и x', вместе взятые, также образуют цикл. Поскольку индекс пересечения любых двух циклов равен нулю:

$$I(x \cup x', y) = 0,$$

число точек пересечения ребра x с циклом y (то есть со всеми несмежными ему ребрами) имеет ту же четность, что и число точек пересечения ребра x' с циклом y.

Таким образом, при замене ребра x ребром x' число J не меняет своей четности.

Из доказанного следует, что *при любых расположениях ребер на плоскости число J всегда имеет одну и ту же четность.* Действительно, если заданы два различных расположения ребер, то, последовательно заменяя сначала одно ребро первого расположения соответствующим ребром второго расположения, затем еще одно, еще одно и т. д., мы постепенно заменим первое расположение вторым, а четность числа J, в силу доказанного, меняться не будет.

Итак, либо для всех расположений ребер число J четно, либо оно для всех расположений нечетно. На рисунке 3 имеется только одна точка пересечения (разумеется, кривые ребра на этом рисунке можно заменить ломаными). Таким образом, на рисунке 3 число J равно единице, а потому для любого расположения ребер оно нечетно и, значит, *P_2 не вложим в плоскость.*

Задачи

1. Докажите, что граф P_1 из примера 1 не вложим в плоскость.

2. Ребрами графа служат стороны и наименьшие диагонали правильного n-угольника ($n>3$)*). Докажите, что при четном n этот граф может быть вложен в плоскость, а при нечетном — нет.

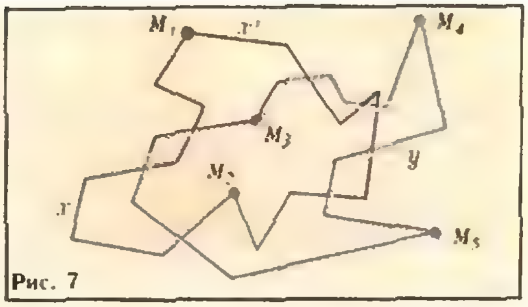


Рис. 7

3. Ребрами графа служат стороны и наибольшие диагонали*) правильного $2n$-угольника. Докажите, что при $n \geqslant 3$ этот граф не вложим в плоскость.

4. Ребрами графа служат стороны и наибольшие диагонали*) (их $2n+1$) правильного $(2n+1)$-угольника. Докажите, что этот граф не вложим в плоскость.

Нельзя ли проще?

Выше (см. рисунки 5, 6) мы доказали, что индекс пересечения любых двух циклов на плоскости равен нулю. Возможно, читатель предложит следующее более простое доказательство: будем двигаться по замкнутой ломаной x; в каждой точке ее пересечения с замкнутой ломаной y мы будем либо входить во внутреннюю область ломаной y, либо выходить из нее во внешнюю область; так как точки входа и точки выхода чередуются, к моменту прихода в исходную точку число точек входа будет равно числу точек выхода; значит, общее число точек пересечения ломаных x и y четно.

Однако это доказательство можно признать корректным лишь в том случае, если уже выяснен смысл понятия «внутренняя область», а это понятие вовсе не является таким простым, как кажется на первый взгляд. Выяснению смысла этого понятия посвящена

Теорема Жордана

Замкнутая линия, гомеоморфная окружности, называется *простой замк-*

---

*) Притом «диагонали» чуточку приподняты в пространство и поэтому попарно не пересекаются.

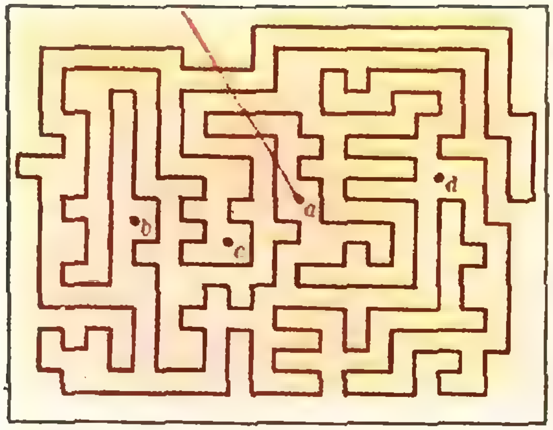


Рис. 8.

нутой линией. Теорема Жордана состоит в том, что *всякая простая замкнутая линия, расположенная на плоскости, разбивает эту плоскость на две области* (внутреннюю и внешнюю). Поясним смысл этой теоремы. Пусть l — простая замкнутая линия на плоскости. Возьмем точки p, q, не лежащие на линии l. Если p и q можно соединить ломаной, не пересекающейся с l, то считают, что точки p и q лежат в одной и той же области относительно линии l. Если же любая ломаная, соединяющая точки p и q, обязательно пересекает l, то считают, что p и q лежат в разных областях. Теорема Жордана утверждает, что линия l определяет на плоскости ровно две области.

Не следует думать, что теорема Жордана утверждает нечто совершенно очевидное. Кажущаяся ее «очевидность» объясняется лишь тем, что на ум обычно приходят очень простые линии (окружность, контур выпуклого многоугольника и т. п.). В общем же случае утверждение теоремы Жордана не так уж очевидно. На рисунке 8 изображена простая замкнутая ломаная (это можно проверить, обведя линию карандашом). Однако вовсе не очевидно, что плоскость разрезана этой линией на две области; например, далеко не сразу можно понять, в какой области (внутренней или внешней) лежат точки a, b, c, d.

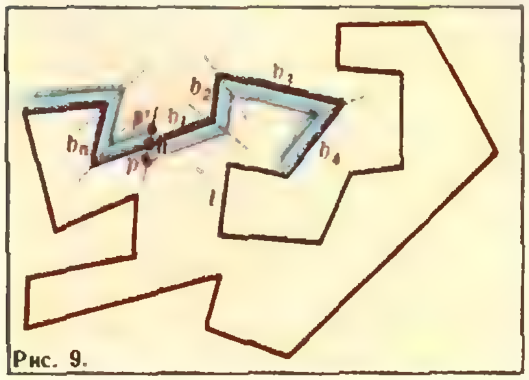


Рис. 9.

Мы приведем доказательство теоремы Жордана, основанное на применении индекса пересечения. При этом ограничимся случаем, когда l — не произвольная простая замкнутая линия на плоскости, а простая замкнутая ломаная.

Пусть b_1, b_2, ..., b_n — последовательные звенья ломаной l. Проведем отрезок, пересекающий звено b_1 в точке a, и возьмем на этом отрезке две точки p, p', расположенные по разные стороны звена b_1 на одном и том же расстоянии от него. Через точку p проведем отрезок, параллельный звену b_1, до точки его пересечения с биссектрисой угла между звеньями b_1 и b_2 (рис. 9). Из этой точки пересечения проведем отрезок, параллельный b_2, до пересечения с биссектрисой угла между звеньями b_2 и b_3 и т. д. В результате мы получим ломаную x, звенья которой находятся на одном и том же расстоянии от соответствующих звеньев ломаной l. Если при этом точка p была взята достаточно близко к a, то построенная линия x не пересекает l и, пройдя вдоль линии l, должна вернуться либо в точку p, либо в p'. Легко понять, однако, что в точку p' ломаная x прийти не может: если бы ломаная x соединяла точки p и p', то, присоединив к x отрезок pp', мы получили бы цикл, который с циклом l пересекается в единственной точке a, то есть индекс пересечения этих двух циклов был бы равен 1, что невозможно. Итак, x представляет собой замкнутую ломаную, выходящую из точки p, один раз проходящую вдоль ломаной l и возвращающуюся в точку p. Аналогично получается замкнутая ломаная x', выходящая из p', один раз проходящая вдоль ломаной l и возвращающаяся в точку p'.

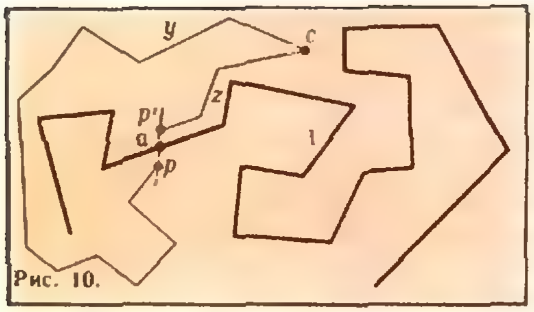


Рис. 10.

Пусть теперь c — произвольная точка, не лежащая на линии l. Тогда ее можно соединить, не пересекая l, либо с точкой p, либо с точкой p': достаточно провести из точки c луч, пересекающий линии x, x', и от точки c пройти до первой точки пересечения этого луча с какой-либо из линий x, x', а затем по этой линии дойти до точки p или p'.

Нетрудно понять, что если из точки c проведены две различные ломаные y, z, не пересекающие l и оканчивающиеся в одной из точек p, p', то обе они оканчиваются в одной и той же точке. В самом деле, если бы ломаная y соединяла точку c с p, а ломаная z соединяла точку c с p' (рис. 10), то ломаная $y \cup z$ вместе с отрезком pp' составляла бы цикл, индекс пересечения которого с циклом l равнялся 1, что невозможно.

Теперь уже нетрудно доказать теорему Жордана. Обозначим через U множество всех точек плоскости, которые можно, не пересекая l, соединить с точкой p, а через V — множество точек, которые можно, не пересекая l, соединить с точкой p'. Тогда U и V и будут теми двумя областями, на которые линия l разбивает плоскость. В самом деле, если точки c_1, c_2 принадлежат одной области (скажем, U), то существуют ломаные y_1, y_2, не пересекающие l, которые соединяют c_1 и c_2 с точкой p. Объединение их представляет собой ломаную, соединяющую c_1 и c_2 и не пересекающую l. Итак, две точки, принадлежащие одной области, можно соединить ломаной, не пересекающей l. Если же точки c_1, c_2 принадлежат различным областям ($c_1 \in U$, $c_2 \in V$), то их нельзя соединить ломаной, не пересекающей l (иначе, как и выше, мы получили бы цикл, имеющий с l индекс пересечения 1). Тем самым теорема Жордана (для случая простой замкнутой ломаной) доказана.

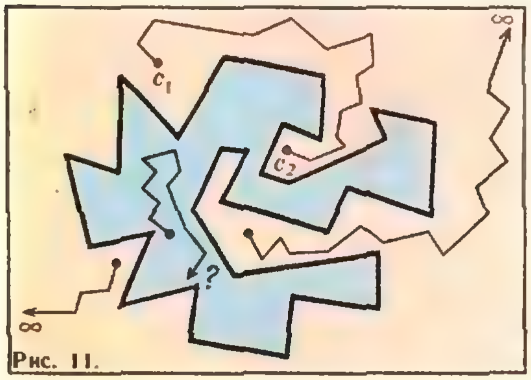


Рис. 11.

Замечание. Все «далекие» точки плоскости расположены в одной и той же области относительно линии l (рис. 11). Поэтому одна из двух областей, определяемых линией l, — неограниченная, а другая — ограниченная. Неограниченную область называют *внешней*, а ограниченную — *внутренней*. Точки внешней области характеризуются тем, что из этих точек можно провести ломаные, не пересекающиеся с l и уходящие как угодно далеко от l; точки внутренней области этим свойством не обладают.

Задачи

5. Если ломаная l — очень сложная, то определить «на глаз», в какой области (внутренней или внешней) лежит точка a, трудно: для этого нужно выяснить, можно ли, отправляясь из точки a, выйти из «лабиринта», образованного линией l (см. рис. 8). Докажите, что если луч, исходящий из точки a и не проходящий через вершины ломаной l, пересекает l в четном числе точек, то точка a лежит во внешней области (то есть выбраться из «лабиринта» можно), а если в нечетном, то точка a лежит во внутренней области.

6. На плоскости проведены k ломаных линий, каждая из которых соединяет две заданные точки p и q. Докажите, что если других общих точек ломаные попарно не имеют, то плоскость разбита на k областей.

Л. Боровинский

Почему не лежится Ваньке-Встаньке?

Наверное, многие из вас помнят с раннего детства или читали недавно своим младшим братишкам и сестренкам веселые стихи Самуила Яковлевича Маршака о кукле-неваляшке — Ваньке-Встаньке:

Уснули телята, уснули цыплята,
Не слышно веселых скворчат из гнезда.
Один только мальчик — по имени Ванька,
По прозвищу Встанька — не спит никогда.

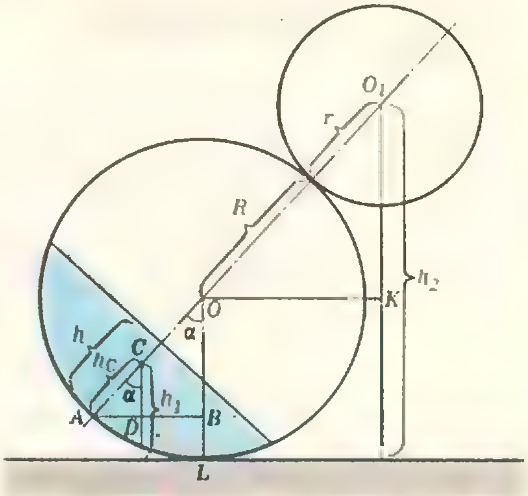
У Ваньки, у Встаньки — несчастные няньки:
Начнут они Ваньку укладывать спать,
А Ванька не хочет — приляжет и вскочит,
Уляжется снова и встанет опять.

Укроют его одеялом на вате —
Во сне одеяло отбросит он прочь
И снова, как прежде, стоит на кровати,
Стоит на кровати ребенок всю ночь.

Лечил его доктор из детской больницы.
Больному сказал он такие слова:
— Тебе, дорогой, потому не лежится,
Что слишком легка у тебя голова!

Итак, «доктор из детской больницы», по словам поэта, нашел причину странного поведения Ваньки-Встаньки. Мы же попробуем не только объяснить такое поведение с помощью законов физики, но и выяснить, при каких условиях Ванька-Встанька принимает вертикальное положение, как только прекращается действие силы, удерживающей его в любом другом положении.

Как устроена кукла-неваляшка? Представьте себе две соприкасающиеся между собой сферы (см. рисунок) с радиусами R и r ($R>r$). Бóльшая сфера — это «туловище», а меньшая — «голова». (Иногда «голове» придают форму цилиндра с горизонтальной осью, но для наших рассуждений форма



«головы» не играет никакой роли.) В нижней части «туловища» находится массивное тело в форме сферического сегмента высотой h. Сегмент ограничен частью поверхности «туловища» и плоскостью, перпендикулярной оси, проходящей через центры сфер и точку их соприкосновения.

Если попытаться положить куклу на горизонтальную поверхность и предоставить ее самой себе, она немедленно встанет. Почему? Очевидно, что вертикальное положение Ваньки-Встаньки является положением устойчивого равновесия. В механике есть правило: в состоянии устойчивого равновесия центр тяжести тела должен находиться в самом низком из возможных для него положений. Это означает, что значение потенциальной энергии, вызванной силой тяжести, должно быть наименьшим из всех возможных.

Выясним, при каких условиях потенциальная энергия Ваньки-Встаньки будет минимальной, когда он занимает вертикальное положение. Выведем куклу из положения равновесия, отклонив ее ось на угол α от вертикали. Пусть h_c — высота центра тяжести массивного тела при вертикальном положении оси, M — его масса и m — масса «головы». Масса оболочки туловища не имеет значения, так как высота центра тяжести оболочки, а значит, и ее потенциальная энергия при наклоне Ваньки-Встаньки не изменяются.

Как видно из рисунка, высота центра тяжести массивного тела при наклоне оси равна

$$h_1 = |CD| + |BL| = h_c \cos\alpha + R - R\cos\alpha,$$

а высота центра тяжести головы —

$$h_2 = |LO| + |KO_1| = R + (R+r)\cos\alpha.$$

Общая потенциальная энергия массивного тела и «головы» равна

$$E_{\text{п}} = Mgh_1 + mgh_2 = (M+m)gR + (m(R+r) - M(R-h_c))g\cos\alpha.$$

Отсюда следует, что потенциальная энергия Ваньки-Встаньки при вертикальном положении оси, то есть при $\alpha = 0$, будет минимальной, если выражение, на которое умножается $g\cos\alpha$, отрицательно:

$$m(R+r) - M(R-h_c) < 0,$$

или

$$m < M\frac{R-h_c}{R+r}.$$

Осталась, правда, неизвестной величина h_c, но ее можно выразить через известные величины R и h (примем это без доказательства):

$$h_c = h\frac{8R-3h}{12R-4h}.$$

Таким образом, мы нашли точное математическое условие, показывающее, в какой мере должна быть «легка голова» у Ваньки-Встаньки, чтобы он принимал вертикальное положение, как только будет предоставлен самому себе.

Кросснамбер

Заполните белые клетки цифрами 1, 2, ..., 9 так, чтобы

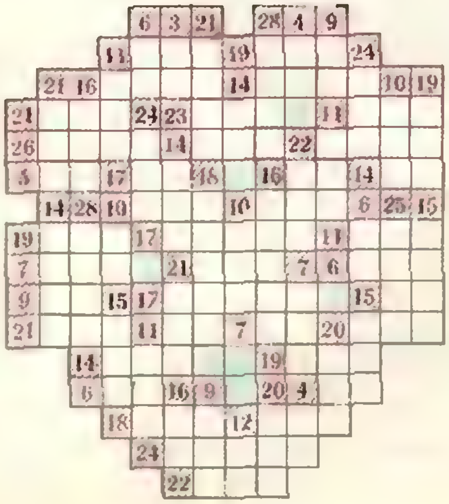
для каждого числа, получающегося по горизонтали, в розовой клетке слева от него была записана сумма его цифр;

для каждого числа, получающегося по вертикали, в розовой клетке над ним также была записана сумма его цифр;

цифры в каждом из этих чисел были различны.

Голубые клетки остаются пустыми.

Э. Рекстин



задачник кванта

Задачи

М691—М695; Ф703—Ф707

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Задачи этого номера предлагались на заключительном туре Всесоюзной олимпиады школьников. Число в скобках обозначает класс, в котором предлагалась задача. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 сентября 1981 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 7 — 81» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М691, М692» или «Ф703». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи.

М691. Будем говорить, что число обладает свойством (K), если оно разлагается в произведение K последовательных натуральных чисел, больших 1.
а) Найдите K такое, для которого некоторое число N обладает одновременно свойствами (K) и ($K+2$).
б) Докажите, что чисел, обладающих одновременно свойствами (2) и (4), не существует. (8)

В. Федотов

М692. Точки C_1, A_1, B_1 взяты на сторонах, соответственно, AB, BC, CA треугольника ABC так, что

$$|AC_1|:|C_1B| = |BA_1|:|A_1C| = |CB_1|:|B_1A| = 1:3.$$

Докажите, что периметр P треугольника ABC и периметр P_1 треугольника $A_1B_1C_1$ связаны неравенствами а) $P_1 < \frac{3}{4}P$; б) $P_1 > \frac{1}{2}P$. (8)

В. Турчанинов

М693. В некотором поселке 1000 жителей. Ежедневно каждый из них делится узнанными вчера новостями со всеми своими знакомыми. Известно, что любая новость становится известной всем жителям поселка. Докажите, что можно выбрать 90 жителей так, что если одновременно всем им сообщить какую-то новость, то через 10 дней она станет известной всем жителям поселка. (9)

Н. Карташов, А. Савин

М694. В каждой вершине куба записано число. За один шаг к двум числам, размещенным на одном (любом) ребре, прибавляется по единице. Можно ли за несколько таких шагов сделать все восемь чисел равными между собой, если вначале были поставлены числа, как на рисунке 1? Как на рисунке 2? Как на рисунке 3? (9)

М695*. Можно ли все клетки какой-нибудь прямоугольной таблицы окрасить в белый и черный цвета так, чтобы белых и черных клеток было по-

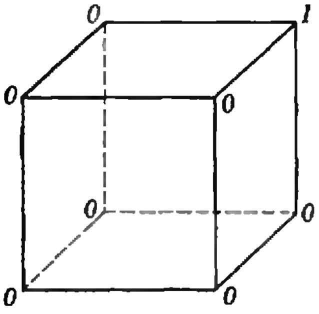


Рис. 1.

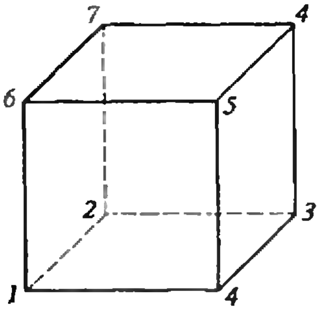


Рис. 2.

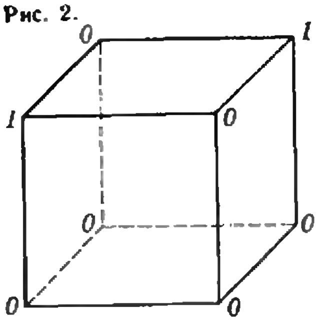


Рис. 3.

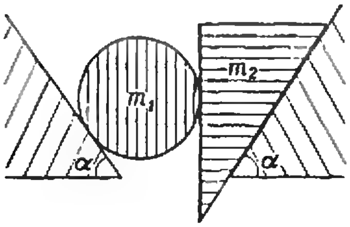


Рис. 4.

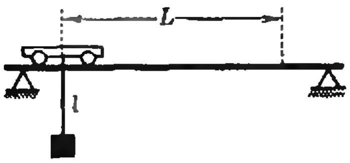


Рис. 5.

ровну, а в каждой строке и в каждом столбце было более 3/4 клеток одного цвета? (10)

С. Конягин

Ф703. Ракета запущена с поверхности Земли вертикально вверх с первой космической скоростью и возвращается на Землю недалеко от места старта. Сколько времени она находилась в полете? Радиус Земли $R_З=6400$ км.

Примечание. Площадь эллипса с полуосями a и b равна $S=\pi ab$. (10)

Е. Сурков

Ф704. По двум гладким наклонным плоскостям, образующим одинаковые углы α с горизонтом, движутся, касаясь друг друга, цилиндр и клин (рис. 4). Найти, с какой силой клин давит на цилиндр. Масса цилиндра m_1, масса клина m_2. Трением между цилиндром и клином пренебречь. (8)

С. Кротов

Ф705. Горизонтально расположенный цилиндрический теплоизолированный сосуд объема $V_0=100$ л, заполненный гелием, разделен на две части теплонепроницаемым поршнем, который может перемещаться без трения. Газу, находящемуся в левой части сосуда, сообщают количество тепла $\Delta Q=100$ Дж. Найти изменение давления в сосуде к тому моменту, когда поршень перестанет двигаться. (9, 10)

А. Зильберман

Ф706. Для горизонтального перемещения грузов на расстояние $L=20$ м используется самоходная тележка, перемещающаяся по горизонтальным рельсам. На тросе длины $l=5$ м к тележке подвешивают перемещаемый груз (рис. 5). Тележка половину времени движется равноускоренно, а половину — равнозамедленно. Определить возможные значения ускорения тележки, при которых груз после остановки тележки в конце пути будет неподвижным. (10)

В. Можаев

Ф707. Объектив телескопа Гейла имеет диаметр $D=250$ см и фокусное расстояние $F=160$ м. Телескоп используется для фотографирования искусственного спутника Земли, имеющего диаметр $d=200$ см и находящегося на расстоянии $L=320$ км.

1) На каком расстоянии от фокуса должна быть расположена фотопластинка?

2) Каким будет размер изображения искусственного спутника?

3) Каков будет диаметр размытых (несфокусированных) изображений звезд на фотографии? (10)

С. Козел

Решения задач

М645—М655; Ф663—Ф667

М645. *В подвале три коридора (рисунок 1; $|OA| = |OB| = |OC| = l$), все выходы из которых закрыты. В нем находятся инспектор Варнике и преступник. Варнике замечает преступника, если расстояние между ними не превосходит r. Он знает, что максимальная скорость преступника в два раза меньше его собственной максимальной скорости. В начальный момент инспектор находится в точке O и не видит преступника. Как должен действовать Варнике, чтобы наверняка поймать преступника, если а) $r = l/3$, б) $r = l/4$, в)* $r > l/5$, г) $r > l/7$. Шириной коридоров и размерами людей пренебречь. (Варнике должен придумать такой план действий, чтобы, даже если преступник о нем заранее знает, он все равно не смог ускользнуть.)*

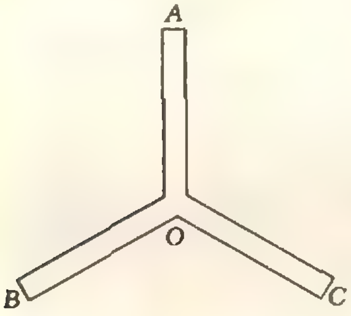


Рис. 1.

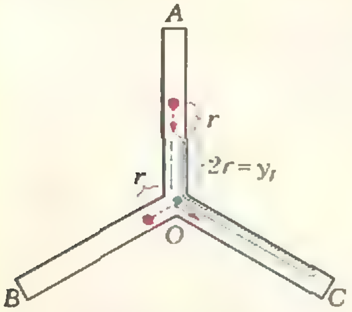


Рис. 2.

1. Решение задачи при $r > l/5$ (в частности, при $r = l/3$ и $r = l/4$).

Сначала Варнике «прочесывает» коридор OC. Убедившись, что преступника там нет, Варнике удаляется в коридор OA на расстояние $2r$ и затем возвращается в точку O, двигаясь с максимальной скоростью (в дальнейшем будет подразумеваться, что инспектор всегда движется с максимальной скоростью). Предположим, что, вернувшись в точку O, инспектор не увидел преступника; что ему в таком случае известно о возможном местонахождении преступника?

1) Преступник не может находиться в коридоре OC: легко проверить, что если бы он за время отсутствия инспектора в точке O попытался перебежать из коридора OB в коридор OC, то к моменту возвращения инспектора в точку O расстояние от преступника до O было бы не больше, чем r.

2) Если преступник находится в коридоре OA, то на расстоянии от O, большем $2r$: действительно, когда инспектор был в коридоре OA на расстоянии $2r$ от O, то преступник (если он находился в OA) был на расстоянии от O, большем $3r$, и к моменту возвращения инспектора в точку O расстояние от преступника до O могло уменьшиться не более чем на r (рис. 2).

Если же $r \geqslant l/3$, то преступник вообще не может находиться в OA и тем самым задача а) решена: чтобы поймать преступника, инспектору достаточно исследовать до конца коридор OB.

Если $r < l/3$, то смысл дальнейших действий инспектора заключается в том, чтобы углубляться то в коридор OB, то в коридор OA на все большие расстояния, но так, чтобы преступник не смог перебежать в коридор OC. Каждое такое «углубление» вместе с последующим возвратом в точку O будем называть *циклом*. Первый цикл уже описан. Во втором цикле инспектор отправляется в коридор OB на расстояние $3r$. Вернувшись в точку O и не увидев преступника, инспектор знает, что

1) в коридоре OC преступника нет (если преступник находится в коридоре OA, то — на расстоянии от O, большем $2r$, и потому до возвращения Варнике в точку O, при удалении его на расстояние $3r$ в коридор OB, преступник не сможет перебежать в коридор OC так, чтобы при этом оказаться на расстоянии от O, большем r);

2) если преступник находится в коридоре OB, то расстояние от него до O больше $5r/2$ (больше $(3r + r) - 3r/2$).

Если же $r \geqslant l/4$, то преступник вообще не может находиться в коридоре OB (поскольку тогда его длина больше $3r + r = 4r \geqslant l$ — противоречие); тем самым решена задача б).

Пусть после цикла с номером n инспектор знает, что в коридоре OC преступника нет, и в коридоре OX (где $X = A$ при n нечетном и $X = B$ при n четном) преступник не может находиться на расстоянии от O, меньшем или равном y_n. Тогда в следующем цикле инспектор отправляется в другой коридор на расстояние $y_n + r$ (рис. 3). Вернувшись в точку O, инспектор знает, что

1) в коридоре OC преступника нет;

2) в только что исследованном коридоре преступник не может находиться на расстоянии от O, меньшем или равном $y_{n+1} = \frac{y_n + 3r}{2} = \left(\frac{y_n + r}{2} + r\right)$; если же $y_n + r \geqslant l - r$, то в исследованном коридоре преступника вообще нет.

Найдем формулу для y_n. Так как $y_{n+1} = \frac{y_n + 3r}{2}$, $3r - y_{n+1} = \frac{3r - y_n}{2}$, откуда $3r - y_n = \frac{3r - y_1}{2^{n-1}} = \frac{r}{2^{n-1}}$, то есть

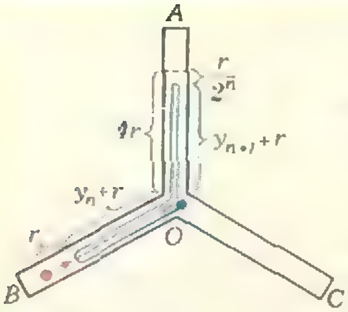


Рис. 3.

$y_n=3r-\frac{r}{2^{n-1}}$. Преступник ловится, если $y_n+r\geqslant l-r$ при каком-нибудь n, то есть $\frac{r}{2^{n-1}}\leqslant 5r-l$. Отсюда видно, что если $5r>l$, то после достаточно большого числа циклов преступник ловится.

2. Решение задачи при $l/7<r\leqslant l/5$ использует следующую новую идею: после достаточно большого числа циклов, описанных в разделе 1, инспектор должен углубиться в очередной коридор на расстояние не y_n+r, а $l-r$ (то есть «прочесать» его до конца), не обращая внимания на то, что преступник может перебежать в коридор OC.

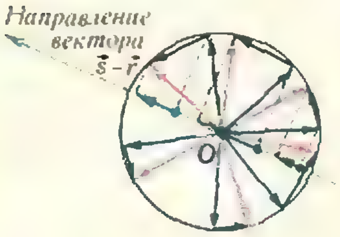
Положим $\varepsilon=\frac{7r-l}{2}$. Инспектор должен действовать так, как описано в разделе 1, до тех пор, пока не будет выполняться неравенство $y_n\geqslant 3r-\varepsilon$. После этого инспектор углубляется в очередной коридор (скажем, OA) на расстояние $l-r$. Вернувшись в точку O и не увидев преступника, инспектор знает, что в коридоре OA преступника нет, а в коридоре OC преступник не может находиться на расстоянии от O, большем $(l-r)-(3r-\varepsilon)=3r-\varepsilon$. Затем инспектор углубляется в коридор OC на расстояние $4r-2\varepsilon$. Вернувшись в точку O и не увидев преступника, инспектор знает, что в коридоре OC преступника нет (поскольку в противном случае преступник был бы пойман, оказавшись в коридоре OC от вершины на расстоянии, меньшем $(3r-\varepsilon)+(4r-2\varepsilon)/2-(4r-2\varepsilon)=r$), а в коридоре OA преступник не может находиться на расстоянии от O, большем $3r-2\varepsilon\,(=(4r-2\varepsilon)-r)$. Затем инспектор идет в коридор OA на расстояние $4r-4\varepsilon$, затем в коридор OC на расстояние $4r-8\varepsilon$, снова в коридор OA на расстояние $4r-16\varepsilon$ и т. д. Когда инспектор увидит, что ему надо идти на отрицательное расстояние, он должен сделать вывод, что преступник находится в коридоре OB.

Замечание. Удалось доказать, что при $r\leqslant l/7$ не существует способа наверняка поймать преступника. Доказательства этого факта, принадлежащие И. Голубчику и В. Прасолову, сложные и поэтому здесь не приводятся.

В. Дринфельд,
В. Соколов

◆

М646. *От точки O на плоскости отложены $2n$ векторов длины 1. Они раскрашены попеременно в красный и синий цвета. Пусть $\vec{s}$ — сумма n красных векторов, $\vec{r}$ — сумма n синих векторов. Докажите, что $|\vec{s}-\vec{r}|\leqslant 2$.*



Представим вектор $\vec{s}-\vec{r}$ в виде суммы n черных векторов (см. рисунок), каждый из которых является разностью красного вектора и ближайшего к нему (по часовой стрелке) синего вектора. Черные векторы опираются на попарно непересекающиеся дуги окружности радиуса 1 с центром в точке O.

Предположим теперь, что вектор $\vec{s}-\vec{r}$ ненулевой (иначе все доказано). Спроектируем полученные черные векторы на направление вектора $\vec{s}-\vec{r}$. Легко заметить, что проекции, направление которых совпадает с направлением вектора $\vec{s}-\vec{r}$, не пересекаются и умещаются на диаметре окружности. Следовательно, сумма их длин не превосходит 2. С другой стороны, длина вектора $\vec{s}-\vec{r}$ не превосходит этой суммы. Поэтому $|\vec{s}-\vec{r}|\leqslant 2$.

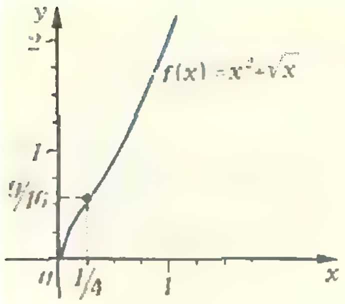
Е. Шустин

◆

М647. *Докажите, что при любых $a\geqslant\frac{1}{2}$, $b\geqslant\frac{1}{2}$ справедливо неравенство*

$$\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2\geqslant\sqrt{\frac{a^2-b^2}{2}}-\frac{a+b}{2}.$$

Первое решение. Рассмотрим функцию $f(x)=x^2+\sqrt{x}$. Вычислив ее вторую производную $f''(x)=2-\frac{1}{4}x^{-3/2}$, видим, что $f''(x)\geqslant 0$ при $x\in\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$. Отсюда следует, что на промежутке $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$ функция f выпукла вниз (для интер-



вала см. «Алгебра и начала анализа 10», п. 79), на рисунке изображен ее график. Поэтому («Квант», 1980, № 3, с. 21) для любых точек x, y этого промежутка

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} \geqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

Применив последнее неравенство к точкам a^2, b^2, получим утверждение задачи.

Второе решение. Снова заменим a^2 на x и b^2 на y. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x, y) = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 - \sqrt{\frac{x+y}{2}} + \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}.$$

Будем считать, что $x \geqslant y \geqslant 1/4$, и исследуем функцию $\varphi(x, y)$ на «монотонность по x», считая переменную y параметром.

$$\varphi'_x(x, y) = \frac{x-y}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2(x+y)}} + \frac{1}{4\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x-y - \frac{\sqrt{2(x+y)} - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{2(x+y)}}\right) =$$

$$= \frac{x-y}{2}\cdot\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{2(x+y)}\cdot(\sqrt{2(x+y)}+2\sqrt{x})}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{x-y}{2}\cdot\left(1 - \frac{1}{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2}\right) = 0,$$

то есть функция $\varphi(x, y)$ — неубывающая функция по x.

Поскольку при $x = y = \frac{1}{4}$ функция φ обращается в нуль, $\varphi(x, y) \geqslant 0$ при $x \geqslant y \geqslant \frac{1}{4}$, что дает нам требуемое неравенство.

И. Клумова

◆

М648. *Докажите, что если диагонали вписанного четырехугольника перпендикулярны, то середины его сторон и основания перпендикуляров, опущенных из точки пересечения его диагоналей на стороны, лежат на одной окружности.*

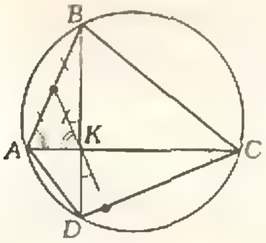


Рис. 1.

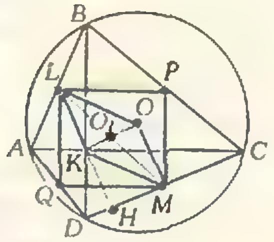


Рис. 2.

Прежде всего заметим, что если $ABCD$ — вписанный четырехугольник с перпендикулярными диагоналями (рис. 1), то подобные треугольники AKB и CKD (K — точка пересечения диагоналей) расположены таким образом, что продолжение высоты, опущенной на гипотенузу одного из них, является медианой другого. (Этот факт, немедленно вытекающий из равенства отмеченных на рисунке 1 углов, по существу уже использовался в решениях задач **М546** и **М592** — см. «Квант», 1980, №№ 1, 8.)

Далее: середины L, P, M, Q сторон четырехугольника $ABCD$, являясь вершинами прямоугольника (рис. 2), лежат на одной окружности. Покажем, что центр O_1 этой окружности делит пополам отрезок OK (O — центр окружности, в которую вписан наш четырехугольник).

Для этого достаточно, например, показать, что четырехугольник $LKMO$ — параллелограмм. Поскольку LK — медиана треугольника AKB, ее продолжение является высотой треугольника CKD, то есть $(LK) \perp (DC)$. Но и $(OM) \perp (DC)$ (диаметр, проходящий через середину хорды); поэтому отрезки LK и OM параллельны. Аналогично доказывается параллельность отрезков LO и KM.

Теперь для окончания решения задачи нам достаточно установить, например, что $|O_1M| = |O_1H|$, где H — основание перпендикуляра, опущенного из точки K на сторону CD. Но это следует из того, что O_1 — середина гипотенузы LM прямоугольного треугольника LMH (рис. 3).

Итак, все восемь точек, упомянутых в условии задачи, лежат на одной окружности. Интересно, что радиус этой «окружности восьми точек» целиком определяется радиусом R данной окружности и величиной $|OK| = a$. В самом деле, искомый радиус равен половине длины $[LM]$, а

$$|LM|^2 = |LP|^2 + |PM|^2 = \frac{1}{4}\,(|AC|^2 + |BD|^2) =$$

$$= \frac{1}{4}\,((|AK| + |KC|)^2 + (|BK| + |KD|)^2) =$$

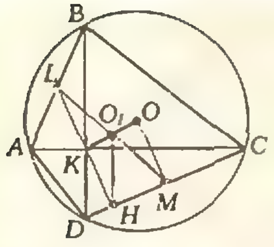


Рис. 3.

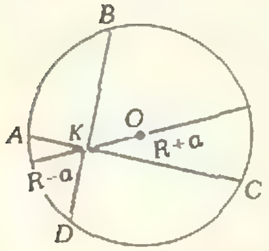


Рис. 4.

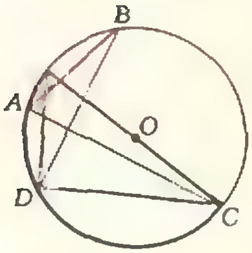


Рис. 5.

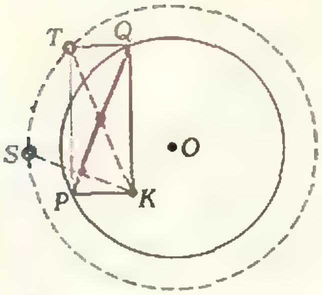


Рис. 6.

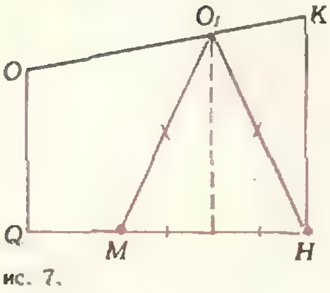


Рис. 7.

$$=\frac{1}{4}\left(|AB|^2+|CD|^2+2(|AK|\cdot|KC|+|BK|\cdot|KD|)\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(|AB|^2+|CD|^2+4(R^2-a^2)\right)=\frac{1}{4}\left(4R^2+4(R^2-a^2)\right)=$$

$$=2R^2-a^2.$$

[В этой выкладке мы вначале воспользовались тем, что произведение длин отрезков хорд, пересекающихся в одной и той же точке, постоянно:

$$|AK|\cdot|KC|=|BK|\cdot|KD|=(R-a)(R+a)$$

(рис. 4), а затем, сообразив, что

$$90^\circ=\widehat{BCA}+\widehat{DBC}=\frac{\smile{AB}+\smile{CD}}{2},$$

и дополнив $\overset{\smile}{CD}$ до полуокружности дугой, конгруэнтной $\overset{\smile}{AB}$, получили равенство

$$|AB|^2+|CD|^2=(2R)^2=4R^2,$$

см. рисунок 5.]

Наметим другое решение. Сделаем гомотетию наших восьми точек с центром в точке K и коэффициентом 2. Тогда утверждение задачи **M648** превращается в такую теорему: *Пусть два взаимно перпендикулярных луча с началом в точке K внутри данной окружности, вращаясь вокруг K, пересекают окружность в переменных точках P и Q. Тогда четвертая вершина T прямоугольника $PKQT$* (точка, симметричная точке K относительно середины $[PQ]$), *а также точка S, симметричная точке K относительно прямой PQ, двигаются по окружности, концентричной с данной* (рис. 6). Второй факт (про S) следует из первого, так как S симметрична точке T относительно серединного перпендикуляра к $[PQ]$, а первый (про T) установлен в решении задачи **M539** («Квант», 1979, № 11).

Эта «теорема о восьми точках» допускает следующее стереометрическое обобщение:

Если три взаимно перпендикулярных луча с началом в фиксированной точке K внутри данной сферы, вращаясь вокруг K, пересекают сферу в переменных точках A, B и C, то точка пересечения медиан треугольника ABC и основание перпендикуляра, опущенного из K на плоскость ABC, двигаются по сфере, центр которой находится в точке O_1 отрезка OK (O — центр данной сферы) *такой, что* $|O_1K|=\frac{1}{3}|OK|$, *а радиус равен* $\frac{1}{3}\sqrt{3R^2-2a^2}$, *где* $a=|OK|$, R — *радиус данной сферы.*

Доказать это можно, например, следующим образом.

Пусть D — вершина параллелепипеда, определенного отрезками KA, KB и KC, диагонально противоположная к K. Все такие точки D лежат на сфере с центром в той же точке O, что у исходной сферы, и радиусом $\sqrt{3R^2-2a^2}$ (см. решение задачи **M639** — «Квант», 1979, № 11). При гомотетии с центром K и коэффициентом $\frac{1}{3}$ точка D будет все время переходить в точку пересечения медиан треугольника ABC (докажите!), а точка O перейдет в точку O_1. Таким образом, точка пересечения медиан треугольника ABC все время лежит на указанной сфере.

Осталось показать, что проекция точки K на плоскость треугольника ABC также все время лежит на этой сфере. Поскольку отрезки KA, KB и KC взаимно перпендикулярны, проекция точки K совпадает с точкой H пересечения высот треугольника ABC. Утверждение будет доказано, если мы, например, получим равенство $|O_1H|=|O_1M|$, где M — точка пересечения медиан треугольника ABC. Для этого заметим, что центр сферы O проектируется в центр Q описанной вокруг треугольника ABC окружности, и воспользуемся таким известным фактом: *точки Q, M и H лежат на одной прямой* (прямой Эйлера), *точка M — между точками Q и H, причем* $2|QM|=|MH|$. (Если этот факт вам неизвестен, докажите его.) Остальное легко следует из рисунка 7: поскольку

$|O_1K| = \frac{1}{3}|OK|$, и $|QM| = \frac{1}{3}|QH|$, точка O_1 проектируется в середину отрезка MH, то есть O_1 равноудалена от M и H.

И. Шарыгин

◆

M649. *Докажите равенство*

$$\frac{1}{2}c_n^2+(c_n-c_1)^2+(c_n-c_2)^2+\ldots+(c_n-c_{n-1})^2=\frac{n}{2},$$

где $c_1=1$, $c_2=1+\frac{1}{3}$, $c_3=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}, \ldots$

$\ldots, c_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}$.

Докажем, что

$$c_n^2+2(c_n-c_1)^2+2(c_n-c_2)^2+\ldots+2(c_n-c_{n-1})^2=n.$$

Для этого подставим в левую часть значения c_i $(i=1, \ldots, n)$:

$$\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)^2+2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)^2+$$

$$+2\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)^2+\ldots+2\cdot\left(\frac{1}{2n-1}\right)^2=$$

$$=1\cdot\left(\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)^2-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)^2\right)+$$

$$+3\cdot\left(\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)^2-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)^2\right)+$$

$$+5\cdot\left(\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)^2\right)+\ldots$$

$$\ldots+(2n-1)\cdot\left(\frac{1}{2n-1}\right)^2=$$

$$=1\cdot\left(1+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\ldots+\frac{2}{2n-1}\right)+$$

$$+3\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}+\ldots+\frac{2}{2n-1}\right)+$$

$$+5\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{7}+\frac{2}{9}+\ldots+\frac{2}{2n-1}\right)+\ldots+\frac{1}{2n-1}=$$

$$=1+\frac{3}{3}+\frac{5}{5}+\frac{7}{7}+\ldots+\frac{2n-1}{2n-1}=1+1+1+\ldots+1=n.$$

С. Манукян

◆

M650. *Существует ли последовательность*

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

а) натуральных чисел такая, что любое натуральное число единственным образом записывается в виде суммы нескольких ее членов:

$$a_{i_1}+\ldots+a_{i_k} \quad (i_1<\ldots<i_k,\ k\geq 1); \quad (*)$$

б) натуральных чисел такая, что 1 не представляется в виде (*), и любое натуральное число, большее 1, представляется в виде (*) единственным образом;

в) целых чисел такая, что 0 не представляется в виде (*), а любое целое число, отличное от 0, представляется в виде (*) единственным образом;

г) целых чисел такая, что 0 и 1 не представляются в виде (*), и любое целое число, отличное от 0 и 1, представляется в виде (*) единственным образом?

а) $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots\}$.

б) $\{2, 3, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots\}$. Из подпоследовательности $\{4, 8, 16, \ldots\}$ можно получить числа вида $4k$, а из $\{2, 3\}$ — числа 2, 3 и 5.

в) $\{-1, 2, -4, 8, -16, 32, -64, \ldots\}$.

Доказательство. Покажем по индукции, что из набора $(-1, 2, -4, \ldots, \pm 2^n)$ можно единственным образом получить в виде (*) все целые числа (кроме нуля) из промежутка от $-1-4-16-\ldots-$ (последний отрицательный член набора) до $2+8+32+\ldots+$ (последний положительный член набора).

Базис индукции $(n=1)$ очевиден.

Индукционный шаг. Предположим, для определенности, что при 2^n — знак «плюс» (то есть n — нечетное) и что из набора $(-1, 2, -4, \ldots, 2^n)$ можно единственным образом получить все целые числа (кроме нуля) от $-1-4-16-\ldots-2^{n-1}$ до $2+8+32+\ldots+2^n$.

Добавив к набору $(-1, 2, -4, \ldots, 2^n)$ член -2^{n+1}, мы получим серию новых целых чисел, представляемых в виде (*) единственным образом (содержащих член -2^{n+1} в качестве слагаемого): от $-1-4-16-\ldots-2^{n-1}-2^{n+1}$ до $2+8+32+\ldots+2^n-2^{n+1}$. Объединяя их со «старыми» числами, мы получим все целые числа от $-1-4-16-\ldots-2^{n-1}-2^{n+1}$ до $2+8+32+\ldots+2^n$: поскольку $(2+8+32+\ldots+2^n-2^{n+1})+1=-1-4-16-\ldots-2^{n-1}$, числа «состыковываются» (напоминаем, что мы взяли n нечетным).

Утверждение доказано.

г) Такой последовательности не существует.

Доказательство от противного. Пусть такая последовательность существует и пусть a_1 — ее член, отличный от -1. Тогда числа $1+a_1$ и $1-a_1$ представляются в виде (*)

единственным образом, поскольку $a_1 \neq 0$ и $a_1 \neq 1$. Если a_n — член последовательности, отличный от -1 и a_1, не входящий в представления чисел $1+a_1$ и $1-a_1$, то числа $1+a_1+a_n$ и $1-a_1+a_n$ допускают разложения (*), в которых участвует a_n. С другой стороны, в представлении (*) числа $1+a_n$ не участвует a_n (иначе, выкинув a_n, мы получили бы представление единицы). Если в этом представлении встречается член a_1, то выкинем его, а если не встречается, то добавим. В любом случае мы получим разложение (*) для одного из чисел $1+a_1+a_n$, $1-a_1+a_n$, в которое не входит член a_n. Получили противоречие с единственностью представления в виде (*).

А. Разборов

◆

М651. *Дама сдавала в багаж диван, чемодан, саквояж, корзину, картину, картонку и маленькую собачонку. Диван весил столько же, сколько чемодан и саквояж, вместе взятые, и столько же, сколько картина, корзина и картонка, вместе взятые. Картина, корзина и картонка весили поровну и каждая из них — больше, чем собачонка. Когда выгружали багаж, дама заявила, что собака не той породы. При проверке оказалось, что собака перевешивает диван, если к ней на весы добавить саквояж или чемодан. Докажите, что претензия дамы была справедлива.*

Пусть диван, чемодан, саквояж и маленькая собачонка весят соответственно $Д$, $Ч$, $С$ и $М$ килограммов, а картина, корзина и картонка — по $К$ килограммов (по условию они весят одинаково). Запишем данные задачи в этих обозначениях: (1) $Д = Ч + С$; (2) $Д = 3К$; (3) $К > М$; (4) $М + С > Д$; (5) $М + Ч > Д$. Из (1) — (3) получаем

$$(6)\quad Ч + С > 3М.$$

Складывая затем неравенства (4) — (6), учитывая (1), приходим к неравенству $М < 0$, что невозможно, так что претензия дамы справедлива.

Заметим, что задача **М651** не очень реалистична. По условию получается, что картонка всего в три раза легче дивана. (Приходится предположить, что в картонке лежат не шляпы, а что-то более увесистое.) Кроме того, в решении мы считаем, что собачонка до и после путешествия весит одинаково (чтобы условия не противоречили друг другу, собачонка за время пути должна была подрасти, по крайней мере, в полтора раза, что, конечно, маловероятно).

В. Гутенмахер

◆

М652. *Женя разрезал выпуклый картонный многогранник на грани (по ребрам) и послал этот набор граней по почте Вите. Витя склеил из всех этих граней выпуклый многогранник. Может ли случиться так, что многогранники Жени и Вити не конгруэнтны?*

Да, так может случиться. Один пример такого набора восьми граней, из которого можно склеить два разных по форме выпуклых многогранника, приведен на рисунке 1. Соответствующие многогранники представляют из себя одинаковые неправильные четырехугольные пирамиды, склеенные по-разному общим основанием — прямоугольником размерами 2×5: один из этих многогранников симметричен относительно плоскости этого прямоугольника, а другой — относительно его центра (рис. 2).

Подумайте, из какого наименьшего числа граней может состоять набор, допускающий неконгруэнтные многогранники. Обязательно ли многогранники Жени и Вити имеют равные объемы?

Заметим, что если бы все ребра многогранника имели разную длину или просто были обозначены различными помет-

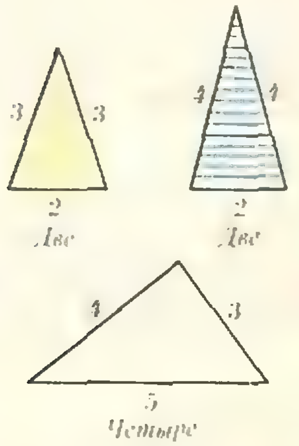


Рис. 1.

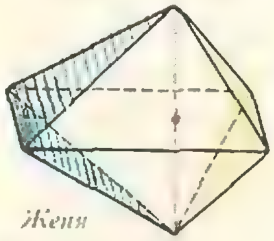


Рис. 2.

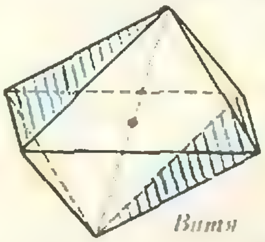


Рис. 3.

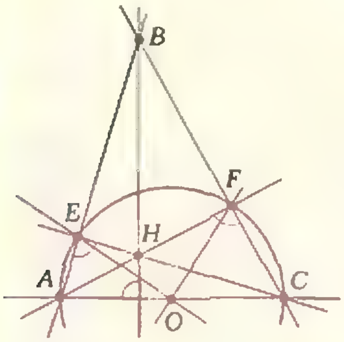
Задачи **М651 – М655** взяты из книги «Заочные математические олимпиады» (М., «Наука», 1981).

ками на гранях, — чтобы было точно известно, какое ребро с каким склеивать, — то многогранники Жени и Вити обязательно получились бы конгруэнтными. Это далеко не простая *теорема Коши о выпуклых многогранниках*; ее доказательство можно прочесть в книге Л. А. Люстерника «Выпуклые фигуры и многогранники» (второе издание этой книги должно выйти в этом году в Библиотечке «Квант»).

Н. Васильев

◆

М653. *Имеется линейка с двумя делениями. С помощью линейки можно проводить произвольные прямые и отрезки определенной длины. Постройте с ее помощью*
а) какой-нибудь прямой угол;
б) прямую, перпендикулярную данной прямой.



Будем считать длину данного отрезка между отметками равной 1.

а) Проведем две пересекающиеся прямые и отложим на них от точки их пересечения O отрезки OA, OB, OC, OD длины 1. Тогда все углы четырехугольника $ABCD$ будут прямыми (каждый из них опирается на диаметр AC или BD окружности радиуса 1 с центром O).

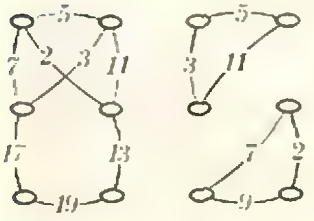
б) Отложим на данной прямой от точки O отрезки OA и OC длины 1. Затем на каких-нибудь прямых, проходящих через O, отложим в одной полуплоскости отрезки OE и OF длины 1 (см. рисунок). Проведем теперь прямые AE и CF, пересекающиеся в некоторой точке B, и прямые AF и CE, пересекающиеся в некоторой точке H. Тогда прямая BH будет перпендикулярна данной прямой, поскольку три высоты треугольника всегда пересекаются в одной точке (точки E и F служат вершинами прямых углов, опирающихся на диаметр AC окружности радиуса 1 с центром O).

Теория геометрических построений линейкой и эталоном длины подробно обсуждается в знаменитой книге Д. Гильберта «Основания геометрии» (М., Гостехиздат, 1948) в связи с анализом системы аксиом. Этими инструментами решаются многие задачи на построение (в частности, через данную точку можно провести прямую, параллельную данной; от данной прямой можно отложить угол, конгруэнтный данному), но, оказывается, не все те задачи, которые разрешимы с помощью циркуля и линейки.

В. Гутенмахер

◆

М654. *Верно ли такое утверждение: из любых шести натуральных чисел можно выбрать три числа, каждые два из которых не имеют общих делителей, больших 1, или три числа, имеющие общий делитель, больший 1?*



а) б)

Это утверждение неверно. Вот пример шестерки чисел, среди которых никакие три не имеют общего делителя (большего 1) и нет трех попарно взаимно простых: 70, 165, 247, 286, 323, 357; еще один пример, с меньшими числами: 14, 15, 18, 33, 55, 63. Покажем, как строить подобные примеры.

Изобразим наши числа шестью точками; те, у которых есть общий множитель, соединим «ребром» (дугой) и напишем на ребре этот общий множитель. При этом нужно, чтобы все написанные множители были взаимно просты — скажем, это могут быть различные простые числа (иначе три из наших чисел будут иметь общий множитель) — и, кроме того, чтобы из каждых трех точек по крайней мере две были соединены ребром (иначе найдутся три попарно взаимно простых числа). Построить такой граф — соединить шесть точек ребрами так, чтобы выполнялось последнее условие — нетрудно; для этого вовсе не обязательно проводить все 15 ребер между шестью точками — можно обойтись восемью или даже шестью ребрами (рисунки *а*), *б*) соответствуют двум приведенным выше примерам), остается перемножить числа на всех ребрах, подходящих к каждой из шести вершин, — и пример готов.

Некоторые читатели ошиблись в решении этой задачи, сославшись на такой факт (мы приводим его в формулировке, предлагавшейся на одной из старых венгерских олимпиад и с тех пор ставшей классической): из шести людей можно выбрать трех попарно знакомых или трех попарно незнакомых. Этот факт верен, но дело в том, что три целых числа, попарно имеющих общий множитель, не обязаны иметь общий для всех множитель (больший 1).

Н. Васильев

М655. *На столе у чиновника Министерства околичностей лежит n томов Британской энциклопедии, сложенных в несколько стопок. Каждый день, придя на работу, чиновник берет из каждой стопки по одному тому и складывает взятые тома в новую стопку, затем располагает стопки по количеству томов (в невозрастающем порядке) и заполняет ведомость, в которой указывает количество томов в каждой стопке. Кроме сказанного выше, чиновник никогда ничего не делает.*

а) Какая запись будет сделана в ведомости через месяц, если общее количество томов $n=3$, $n=6$, $n=10$ (начальное расположение произвольно)?

б) Докажите, что если общее число томов $n=k(k+1)/2$, где k — натуральное, то, начиная с некоторого дня, ведомость будет заполняться одинаковыми записями.

в) Исследуйте, что будет через много дней работы при других значениях n.

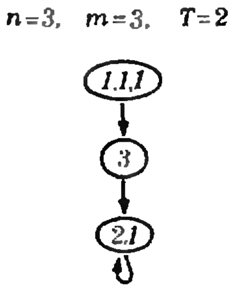

$n=3$, $m=3$, $T=2$

Рис. 1.

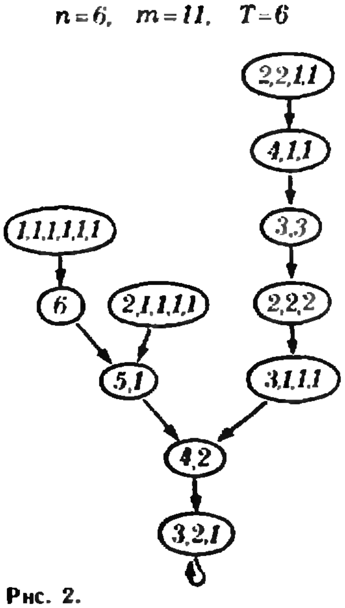

$n=6$, $m=11$, $T=6$

Рис. 2.

При $n=3$ возможны всего три расположения:

(1,1,1) — три стопки по одному тому;

(3) — одна стопка из трех томов;

(2,1) — одна стопка из двух и одна из одного тома.

Стрелки на рисунке 1 показывают, во что каждое расположение переходит на следующий день. Из рисунка видно, что, с чего бы мы ни начали, не позже, чем через два дня (что записано как $T=2$), возникнет расположение (2,1), и затем оно будет повторяться. На рисунке 2 показан аналогичный граф для $n=6$. Число m возможных расположений (вершин графа) здесь равно 11. Не позже, чем через $T=6$ дней после начала работы возникнет расположение (3,2,1), и затем оно будет повторяться. Аналогичный граф для $n=10$ имеет $m=42$ вершины (для экономии места он не нарисован); в этом случае не позже, чем через $T=12$ дней после начала, возникнет расположение (4,3,2,1), и затем оно будет повторяться.

Разумеется, далеко не каждый ориентированный граф, из каждой вершины которого выходит одна стрелка, обладает единственной «конечной» вершиной, то есть не всегда, идя по его стрелкам, мы придем в одну и ту же вершину и там останемся (рис. 3). Граф может распадаться на отдельные части, не связанные между собой ни одной стрелкой, может содержать циклы. Поэтому тот факт, что при $n=\dfrac{k(k+1)}{2}$, начиная с некоторого дня, получается одно и то же расположение $(k, k-1, \ldots, 3, 2, 1)$ совсем не очевиден, и мы сейчас его докажем, тем самым решив пункт *б)* условия задачи. Рассмотрим сразу произвольное значение n.

Вообразим четверть бесконечного листа клетчатой бумаги (рис. 4), клетки которого пронумерованы парами натуральных чисел слева направо и снизу вверх: клетка с номером (x, y) стоит в столбце с номером x и в строке с номером y. Изготовим n фишек и разместим их в клетках нашей бумаги следующим образом: в первом столбце столько фишек, сколько томов в первой стопке, во втором столбце столько фишек, сколько томов во второй стопке, и т. д. Размещение фишек на рисунке 4 означает, что в стопках соответственно 8, 3, 3, 1, 1, 1 томов. Преобразование, которое каждый день делает на своём столе чиновник, можно представить на нашем листе в виде следующих трех операций:

1. Уберем фишки, находящиеся в самой нижней строке (на рисунке 4 они помечены римскими цифрами).
2. Передвинем оставшиеся фишки (они помечены латинскими буквами) на одну клетку вниз и на одну клетку вправо.
3. Теперь выложим на бумагу убранные фишки, но не на нижнюю строку, откуда они были взяты, а на самый левый (освободившийся) столбец в том порядке снизу вверх, в каком они лежали в строке слева направо.

В результате этих операций рисунок 4 перейдет в рисунок 5. Правда, результат действия наших трех операций отличается от того, что делает чиновник, тем, что стопки могут получиться расположенными не в том порядке, какой нужен: на рисунке 5 в самой левой стопке 6 томов, а в следующей за ней — 7 томов. Это легко исправить, передвинув фишку M на одну клетку влево (что показано стрелкой на рисунке 5), но мы таких передвижений пока делать не будем, а ограничимся преобразованием, состоящим из трех описанных операций. При этом преобразовании фишка, бывшая в клетке (x, y), переходит в клетку $(1, x)$, если $y=1$, или $(x+1, y-1)$, если $y>1$.

Назовем *i-й диагональю* совокупность тех клеток (x, y), для которых $x+y=i+1$. Под действием нашего преобразования фишки, находящиеся на i-й диагонали, не сойдут с нее, а будут перемещаться по ней по правилу:

$$\begin{tikzcd}(1, i) \arrow[r] & (2, i-1) \arrow[r] & (3, i-2) \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & (i, 1) \arrow[llll, bend left]\end{tikzcd}$$

Теперь дополним наше преобразование:

4. В каждой строке, где это возможно, сдвинем все фишки на одно место влево.

Дополненное преобразование уже точно соответствует тому, что делает чиновник. Теперь для некоторых фишек

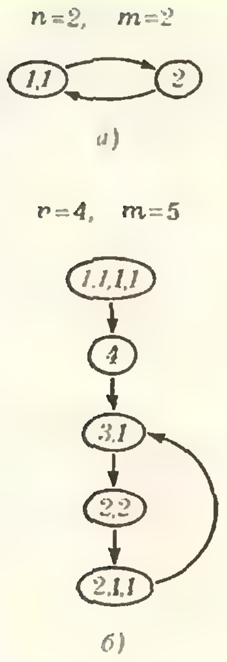


Рис. 3.

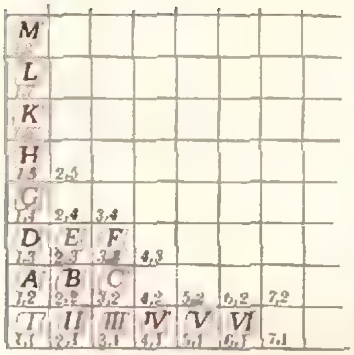


Рис. 4.

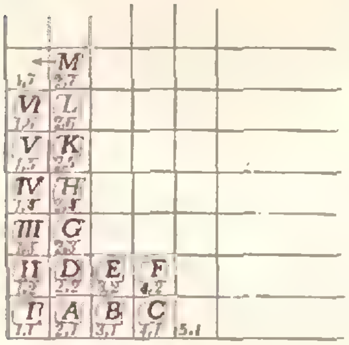


Рис. 5.

величина $x+y$ может уменьшаться, но она по-прежнему не может увеличиваться. Но величина $x+y$ — натуральное число. Поэтому она не может уменьшаться бесконечно много раз. Когда-нибудь для всех фишек величина $x+y$ уже не будет больше уменьшаться. Докажем, что тогда для всякого i будет выполняться следующее условие: если i-я диагональ не полностью заполнена фишками, то в $(i+1)$-й диагонали нет ни одной фишки.

Докажем это от противного: пусть в i-й диагонали есть пустая клетка, и в $(i+1)$-й диагонали есть фишка. Фишки на i-й диагонали (если они есть) передвигаются, попадая через каждые i шагов на прежние места. Фишка на $(i+1)$-й диагонали передвигается, попадая через каждые $(i+1)$ шагов на прежнее место. Посмотрим, что делается в моменты 0 (начало отсчета), $(i+1)$, $2(i+1)$, $3(i+1)$, ..., $i(i+1)$. Фишка на $(i+1)$-й диагонали в эти моменты оказывается там же, где была в нулевой момент. Пустое место на i-й диагонали как бы двигается вместе с фишками, и в перечисленные выше моменты времени оно побывает на всех клетках i-й диагонали, в том числе окажется слева от клетки, где находится фишка. Но тогда эта фишка передвинется влево, а мы предположили, что все такие передвижения уже закончились. Утверждение доказано.

Что же это за расположение фишек, при котором за неполной диагональю может идти только пустая? Если $n=\dfrac{k(k+1)}{2}$, то такое расположение только одно: все диагонали от 1-й до k-й заполнены фишками, а все следующие диагонали пусты. Это доказывает утверждение б).

Пусть теперь $n \neq \dfrac{k(k+1)}{2}$. Тогда существует такое k, что

$$\frac{k(k+1)}{2}<n<\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Положим $r=n-\dfrac{k(k+1)}{2}$. В этом случае расположение фишек, при котором за неполной диагональю следуют пустые, таково: все диагонали от 1-й до k-й заполнены фишками, на $(k+1)$-й диагонали находится r фишек, а следующие диагонали пусты. Фишки, находящиеся на $(k+1)$-й диагонали, перемещаются по ней, попадая через каждые $(k+1)$ шагов на свои прежние места. Это ответ на вопрос в).

Если число фишек на $(k+1)$-й диагонали определяется только общим числом фишек, то их расположение зависит от начального расположения фишек, поэтому при $n \neq \dfrac{k(k+1)}{2}$ в зависимости от начального расположения томов могут получиться различные наборы периодически повторяющихся записей чиновника (в том числе при одном и том же n может получиться разная длина периода).

Интересно выяснить вдобавок, каково время, достаточное, чтобы из любого начального состояния с n фишками прийти к описанному. Для простоты ограничимся случаем $n=\dfrac{k(k+1)}{2}$ и обозначим через $T(k)$ наименьшее время, за которое из любого начального расположения томов получается расположение $(k, k-1, ..., 3, 2, 1)$.

Докажем, что $T(k) \geqslant k(k-1)$. Для этого приведем для каждого k конкретное распределение $\dfrac{k(k+1)}{2}$ томов в стопках, превращающееся в окончательное лишь за $k(k-1)$ шагов: $(k-1, k-1, k-2, k-3, k-4, ..., 3, 2, 1, 1)$. Его изображение на нашей клетчатой бумаге отличается от изображения окончательного распределения лишь тем, что одна фишка находится не там, где надо: в клетке $(k+1, 1)$ вместо клетки $(1, k)$. Под действием нашего преобразования и лишняя фишка на $(k+1)$-й диагонали и «дырка» (то есть «отсутствие фишки») на k-й диагонали начнут передвигаться каждая по своей диагонали. Поскольку k-я диагональ короче $(k+1)$-й на единицу, дырка будет опережать фишку и догонит ее ровно через $k(k-1)$ шагов.

Подсчет для случаев $k=1, 2, 3, 4$ дает значения $T(k)=k(k-1)$, но неясно, как ведет себя $T(k)$ при больших значениях k. Можно доказать, что $T(k)\leqslant C_0\cdot k^5$, где C_0 — конкретное число, которое не хочется выписывать, так как, вероятнее, что $T(k)$ ведет себя как степень k, меньшая пяти. Интересно было бы доказать или опровергнуть, что $T(k)\leqslant C\cdot k^2$.

А. Тоом

◆

Ф664.*) *При фотографировании удаленного точечного источника на фотографии из-за невысокого качества объектива и применяемого фотоматериала получается светлый кружок диаметром $d=0{,}1$ мм. С какого максимального расстояния можно сфотографировать в тех же условиях два точечных источника, расположенных на расстоянии $l=1$ см друг от друга, так, чтобы на фотографии их изображения не перекрывались? Фокусное расстояние объектива $F=5$ см.*

Расстояние между центрами пятен на пленке тем меньше, чем дальше от фотоаппарата расположены источники. Наименьшее расстояние между центрами пятен

$$\Delta l=d=0{,}1 \text{ мм}$$

(при этом пятна касаются друг друга, не перекрываясь) во много раз меньше, чем расстояние l между источниками; следовательно, источники расположены далеко от фотоаппарата, и можно считать, что изображения лежат в фокальной плоскости объектива. Тогда искомое расстояние L можно определить из соотношения

$$\frac{L}{F}=\frac{l}{\Delta l}=\frac{l}{d} \Rightarrow L=\frac{Fl}{d}=500 \text{ см}.$$

При меньших расстояниях пятна на пленке будут частично перекрываться.

А. Зильберман

◆

Ф665. *В теплоизолированном сосуде имеются две жидкости с удельными теплоемкостями c_1 и c_2, разделенные нетеплопроводящей перегородкой. Температуры жидкостей различны. Перегородку убирают, и после установления теплового равновесия разность между начальной температурой одной из жидкостей и установившейся в сосуде температурой оказывается в два раза меньше разности начальных температур жидкостей. Найти отношение масс m_1 и m_2 первой и второй жидкостей.*

Пусть в результате смешивания жидкостей, начальные температуры которых были t_1 и t_2, температура смеси в сосуде стала равной t. Так как сосуд теплоизолирован ($\Delta Q=0$),

$$c_1m_1(t-t_1)+c_2m_2(t-t_2)=0;$$

отсюда

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{c_2}{c_1}\,\frac{t-t_2}{t_1-t}.$$

Согласно условию задачи

$$2(t_1-t)=t_1-t_2 \Rightarrow t-t_2=t_1-t \Rightarrow \frac{t-t_2}{t_1-t}=1.$$

Таким образом,

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{c_2}{c_1}$$

— отношение масс жидкостей равно обратному отношению теплоемкостей.

А. Буздин

◆

Ф666. *Радиус внутренней обоймы шарикоподшипника равен r, а внешней — R (см. рисунок). Сколько оборотов сделает шарик между этими обоймами, если внешняя обойма сделает n_1, а внутренняя — n_2 оборотов вокруг оси?*

Условимся считать число оборотов, сделанных каждой обоймой против часовой стрелки, положительным, по часовой стрелке — отрицательным.

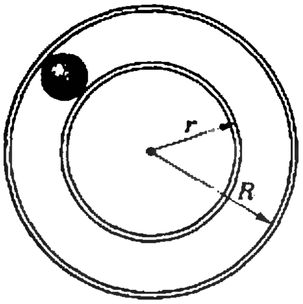
В соответствии с принципом независимости движений окончательное положение шарика будет одним и тем же при любой последовательности поворотов каждой из обойм. Важно только, чтобы суммарный угол поворота внешней обоймы был равен $\varphi_1=2\pi n_1$, а внутренней — $\varphi_2=2\pi n_2$. Поэтому представим каждый из углов в виде суммы двух слагаемых

$$\varphi_1=\alpha+\beta,\ \varphi_2=\alpha+\gamma.$$

Поворот обеих обойм на один и тот же угол $\alpha=2\pi n_0$ соответствует перемещению $\alpha\frac{R+r}{2}$ центра шарика по дуге

---

*) Решение задачи **Ф663** вы найдете в заметке С. Кротова «Математический маятник в неинерциальной системе отсчета» (с. 32).



окружности радиуса $(R+r)/2$. При этом точка, в которой шарик соприкасается с обоймой, не перемещается по ней. Иными словами, качение шарика по поверхностям обойм отсутствует, а относительно неподвижной системы отсчета шарик поворачивается вместе с обоймами на тот же угол α.

Углы $\beta=2\pi n_3$ и $\gamma=2\pi n_4$ выберем таким образом, чтобы при $\alpha=0$ последовательные повороты внешней обоймы на угол β, а внутренней — на угол γ возвращали центр шарика в исходную точку. В этом случае шарик будет катиться по поверхностям обеих обойм.

Задача допускает однозначное решение лишь при условии отсутствия проскальзывания. Это означает, что длины дуг, представляющих собой следы точек касания на шарике и на обоймах, должны быть одинаковыми, то есть

$$|\beta|R=|\gamma|r=|\Theta|\frac{R-r}{2} \text{ и } \beta R+\gamma r=0.$$

Здесь Θ — угол поворота шарика относительно неподвижной системы отсчета при $\alpha=0$, а $\frac{R-r}{2}$ — радиус шарика. Из написанных уравнений следует:

$$n_1=n_0+n_3,\ n_2=n_0+n_4,\ n_3R+n_4r=0.$$

Отсюда найдем число оборотов центра шарика вокруг общей оси обойм:

$$n_0=\frac{n_1R+n_2r}{R+r}.$$

За тот же промежуток времени шарик повернется относительно неподвижной системы отсчета на угол $\varphi=\alpha-\Theta$, где $\Theta=\beta\frac{2R}{R-r}$, $\varphi=2\pi n$.

Следовательно, если внешняя обойма сделает n_1, а внутренняя — n_2 оборотов, шарик, не проскальзывающий по обоймам, совершит

$$n=\frac{n_1R-n_2r}{R-r}$$

оборотов относительно неподвижного наблюдателя.

Б. Буховцев

◆

Ф667. *Электрон находится внутри соленоида на расстоянии r от его оси. За малое время Δt индукция поля внутри соленоида увеличилась от B до $2B$. Как при этом изменилась скорость электрона? Насколько мала должна быть величина Δt, чтобы решение было верным?*

При изменении магнитного поля возникает вихревое электрическое поле. Напряженность E этого поля в точках, находящихся на расстоянии r от оси соленоида, можно найти, зная ЭДС индукции в контуре, представляющем окружность радиуса r:

$$|\mathcal{E}_и|=\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|=2\pi rE \Rightarrow E=\frac{B\pi r^2}{2\pi r\cdot\Delta t}=\frac{Br}{2\Delta t}$$

(E — абсолютное значение напряженности $\vec{E}$). Сила, действующая на электрон со стороны этого поля, сообщает электрону ускорение, направленное по касательной к окружности радиуса r и равное по абсолютной величине $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{eE}{m}$. Таким образом, за малое время Δt скорость электрона изменяется на величину

$$\Delta v=\frac{eE\cdot\Delta t}{m}=\frac{eBr}{2m}.$$

(Эта формула справедлива для скоростей, существенно меньших скорости света c, то есть $\frac{eBr}{2m}\ll c$.)

При решении задачи мы не учли действия магнитного поля на движущийся электрон. Сила, действующая со стороны магнитного поля, сообщает электрону ускорение, направленное вдоль радиуса соленоида. Чтобы приведенное выше решение было верным, необходимо выполнение следующего условия: за время Δt изменение Δv_r скорости вдоль радиуса должно быть много меньше изменения Δv скорости вдоль касательной, то есть

$$\Delta v_r \approx a_r \Delta t = \left(\frac{ev_{\text{ср}}B}{m}\right)\Delta t = \frac{e \cdot \Delta v \cdot B \cdot \Delta t}{2m} \ll \Delta v.$$

Отсюда находим ограничение для Δt:

$$\Delta t \ll \frac{2m}{eB}.$$

Так, для $B = 10^{-4}$ Тл

$$\Delta t \ll \frac{2 \cdot 9 \cdot 10^{-31}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-4}} \approx 10^{-7}\ \text{с}.$$

При $r = 10^{-2}$ м

$$\Delta v = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 9 \cdot 10^{-31}} \approx 10^5\ \text{м/с} \ll c.$$

А. Зильберман

Математический маятник в неинерциальной системе отсчета

В чем состоит задача описания движения математического маятника — небольшого груза на невесомой нити? Мы должны, зная начальное положение и начальную скорость груза, суметь определить его положение в любой последующий момент времени. Иначе говоря, мы должны определить явный вид зависимостей $x = x(t)$ и $y = y(t)$, где x и y — координаты, определяющие положение грузика в плоскости его движения.

Рассмотрим уравнения, описывающие движение математического маятника длины l, когда точка его подвеса неподвижна относительно земли. Выберем оси координат OX и OY так, как указано на рисунке 1. Пусть в некоторый момент времени в процессе движения маятника нить составляет с вертикалью угол φ (угол φ отсчитывается от оси OY против часовой стрелки). Уравнение движения груза — уравнение II закона Ньютона

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} \tag{1}$$

($\vec{T}$ — сила натяжения нити) в проекциях на оси OX и OY имеет вид

$$ma_x = -T \sin \varphi, \tag{2}$$
$$ma_y = mg - T \cos \varphi. \tag{3}$$

Поскольку при движении маятника длина нити неизменна, между координатами x и y выполняется соотношение (кинематическая связь)

$$x^2 + y^2 = l^2,$$

и для описания движения маятника достаточно знать зависимость от времени какой-нибудь одной координаты.

Более естественной координатой, описывающей движение маятника, является угол φ. Найдя зависимость $\varphi(t)$, мы тем самым определим и зависимость от времени координат x и y:

$$x(t) = l \sin(\varphi(t)),$$
$$y(t) = l \cos(\varphi(t)).$$

Перепишем уравнения (2) и (3), подставив в них значения

$$a_x = v_x' = x'' = -l(\varphi')^2 \sin\varphi + l\varphi'' \cos\varphi,$$
$$a_y = v_y' = y'' = -l(\varphi')^2 \cos\varphi - l\varphi'' \sin\varphi$$

и умножив (2) на $\cos\varphi$, а (3) — на $\sin\varphi$. Получим

$$l\varphi''\cos^2\varphi - l(\varphi')^2 \sin\varphi \cos\varphi + \frac{T}{m}\sin\varphi\cos\varphi = 0, \tag{2}$$

$$-l\varphi''\sin^2\varphi - l(\varphi')^2\sin\varphi\cos\varphi + \frac{T}{m}\sin\varphi\cos\varphi - g\sin\varphi = 0. \tag{3'}$$

Вычтя (3′) из (2′), получим дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $\varphi(t)$:

$$\varphi'' + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0. \tag{4}$$

В случае малых отклонений нити маятника от вертикали $\sin\varphi \approx \varphi$, и уравнение (4) переходит в уравнение

$$\varphi'' + \frac{g}{l}\varphi = 0,$$

которое представляет собой уравнение гармонических колебаний с частотой $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Общее решение такого уравнения имеет вид

$$\varphi = \varphi_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \Phi\right),$$

где φ_0 — амплитуда колебаний, Φ — начальная фаза. Величины φ_0 и α_0 определяются однозначно начальными условиями.

Пусть теперь точка подвеса математического маятника движется с ускорением $\vec{b}$ относительно неподвижной — инерциальной системы отсчета (рис. 2). Ускорение $\vec{a}$ грузика (точки A) относительно этой системы можно представить в виде векторной суммы

$$\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{b},$$

где $\vec{a}\,'$ — ускорение точки A относительно неинерциальной системы отсчета, которая движется с ускорением $\vec{b}$ относительно неподвижной системы отсчета. Уравнение (1) теперь запишется так:

$$m\vec{a}\,' + m\vec{b} = m\vec{g} + \vec{T}.$$

Отсюда

$$m\vec{a}\,' = m\vec{g} + \vec{T} - m\vec{b} = m(\vec{g} - \vec{b}) + \vec{T}. \quad (5)$$

Уравнение (5) по форме отличается от уравнения (1) наличием постоянного вектора $m(-\vec{b})$, имеющего размерность силы. Таким образом, если мы хотим пользоваться II законом Ньютона в неинерциальной системе отсчета, движущейся относительно инерциальной системы с постоянным ускорением $\vec{b}$, то к реальным силам, действующим на грузик — силе тяжести $m\vec{g}$ и силе натяжения нити $\vec{T}$, мы должны добавить постоянный вектор $m(-\vec{b})$. Этот вектор называют силой инерции. В уравнении (5) мы объединили вектор $m(-\vec{b})$ с вектором силы тяжести $m\vec{g}$. В такой записи (5) представляет собой уравнение II закона Ньютона для грузика, на который действуют сила натяжения нити $\vec{T}$ и сила $m(\vec{g} - \vec{b})$, играющая роль силы тяжести. Введение такой новой «силы тяжести» $m(\vec{g} - \vec{b})$ задает нам новое направление «вертикали», определяемое вектором $\vec{g} - \vec{b}$; то есть роль вектора $\vec{g}$ переходит к вектору $\vec{g} - \vec{b}$. Соответственно появляется и новое направление «горизонтали» — перпендикулярное новой вертикали.

Преобразования, которые привели нас от уравнения (1) к уравнению (4), применимы и к уравнению (5). Надо только помнить, что положение равновесия маятника в неинерциальной системе отсчета задается направлением новой вертикали; от этой вертикали отсчитывается и угол отклонения маятника от положения равновесия; скорость маятника (грузика) — это его скорость относительно движущейся с ускорением $\vec{b}$ системы отсчета.

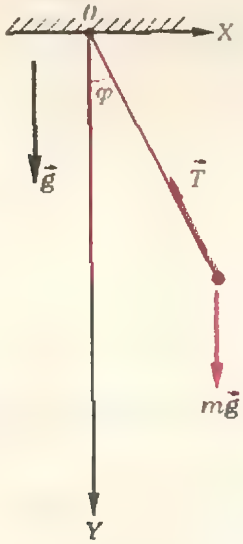


Рис. 1.

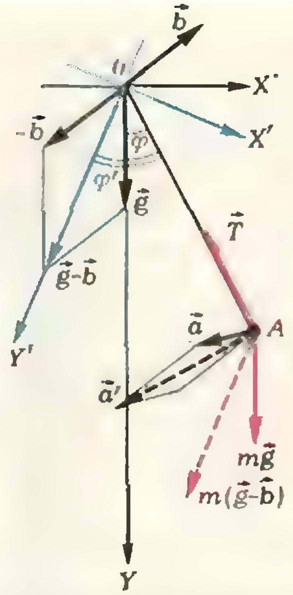


Рис. 2

При использовании энергетических соотношений (закона сохранения механической энергии) в неинерциальной системе отсчета мы можем пользоваться формальной записью

$$mg'h' + \frac{m(v')^2}{2} = \text{const},$$

где $g' = |\vec{g} - \vec{b}|$, h' — высота, отсчитываемая по новой вертикали, v' — скорость тела относительно неинерциальной системы отсчета. Эквипотенциальными поверхностями теперь становятся плоскости, перпендикулярные вектору $\vec{g} - \vec{b}$.

Перейдем теперь к решению задачи **Ф663** из Задачника «Кванта». Напомним ее условие.

Ф663. *Тяжелая тележка движется со скоростью v_0 по горизонтальной плоскости и въезжает на наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом. Переход между плоскостями плавный. На тележке на нити длиной l висит шарик. Какова будет амплитуда колебаний шарика, когда тележка въедет на наклонную плоскость?*

Мы должны, очевидно, рассмотреть движение маятника относительно неинерциальной системы отсчета — тележки, движущейся рав-

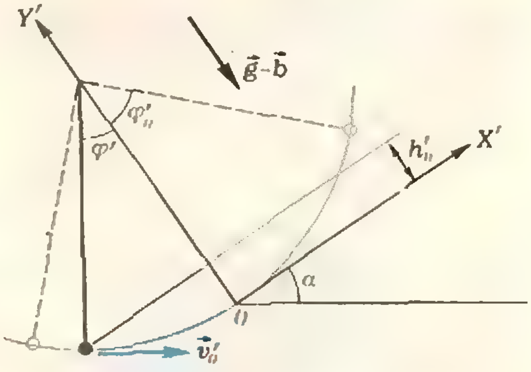


Рис. 3. $v'_0 = v_0(1 - \cos\alpha)$; $h'_0 = l(1 - \cos\alpha)$.

нозамедленно вдоль наклонной плоскости (мы считаем массу маятника много меньше массы тележки). Будем считать, что переход от горизонтальной поверхности к наклонной плоскости очень гладкий и время движения тележки по закруглению много меньше периода колебаний маятника, так что практически мгновенно точка подвеса маятника начинает двигаться вверх по наклонной плоскости с начальной скоростью v_0 и с ускорением, равным по абсолютной величине $b=g\sin\alpha$ и направленным вниз вдоль наклонной плоскости. Относительно тележки маятник имеет в начальный момент скорость $v_0(1-\cos\alpha)$; вектор относительной скорости перпендикулярен нити (считаем, что параллельная составляющая скорости гасится). Новое ускорение свободного падения равно $|\vec{g}-\vec{b}|=g\cos\alpha$. Эквипотенциальные уровни энергии, как нетрудно видеть, параллельны наклонной плоскости.

Максимальный угол φ_0' отклонения маятника относительно нового положения равновесия найдем из закона сохранения энергии, записанного в неинерциальной системе отсчета (рис. 3):

$$\frac{m(v_0(1-\cos\alpha))^2}{2}+mgl\cos\alpha\cdot(1-\cos\alpha)=$$
$$=mg\cos\alpha\cdot l(1-\cos\varphi_0'),$$

откуда

$$\cos\varphi_0'=\cos\alpha-\frac{v_0^2}{2gl\cos\alpha}(1-\cos\alpha)^2=$$
$$=\cos\alpha-\frac{v_0^2\,2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{gl\cos\alpha},$$

$$\varphi_0'=\arccos\left(\cos\alpha-\frac{2v_0^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{gl\cos\alpha}\right).$$

С. Кротов

Несколько лет назад в «Кванте» была опубликована заметка «Чему равен $\sqrt[0,5]{4}$?» (1976, № 11), в которой рассматривались ошибки, связанные с определением корня из числа. В математике это определение вполне однозначно: «Корень уравнения $x^n=a$, где n — натуральное число, называют *корнем n-й степени из a*» («Алгебра 8», 1980, п. 24). О словах «где n — натуральное число» часто забывают абитуриенты. Так, если уравнение содержит $\sqrt[5]{a}$, то в предлагаемых ответах можно встретить такие числа, как 0,5, —3 и т. д.

К сожалению, подобного рода ошибки встречаются не только в ответах абитуриентов. Рассмотрим два примера из книги Л. В. Кованцовой и И. Г. Малышева «Сборник задач по математике» (Киев, «Вища школа», 1980).

На с. 101 приводится следующее «решение» неравенства

$$\sqrt[\lg x]{x}>10x^4. \qquad (1)$$

«Запишем неравенство в виде

$$\frac{1}{x^{\lg x}}>10x^4. \qquad (2)$$

Сейчас хорошо видно, что область допустимых значений $x>0$, $x\neq1$. Прологарифмируем обе части неравенства по основанию 10 (знак неравенства сохранится):

$$\frac{1}{\lg x}\cdot\lg x>1+4\lg x\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\lg x<0\ \Rightarrow\begin{cases}x<1\\x>0\end{cases}\Rightarrow 0<x<1$$

Отв. $X=]0;1[$»

Ответ не верен, так как при $x\in]0;1[$ число $\lg x$ (показатель корня в (1)!) — не натуральное. Где же ошибка? Указанный в книге ответ является правильным ответом для неравенства (2), но неравенства (1) и (2) не равносильны. Правда, на множестве $\{10^n\}$ $(n\in\mathbf{N})$, являющемся областью допустимых значений неравенства (1), они равносильны. Учитывая это, получаем ответ: $\varnothing$.

На стр. 97 ответ к системе уравнений

$$\begin{cases}x^2+xy+y^2=a^2,\\ \log_{\frac{x}{\sqrt{a}}}\sqrt{a}+\log_{\frac{y}{\sqrt{b}}}\sqrt{b}=\frac{a}{\sqrt{3}}\end{cases}$$

записан в виде «При $a>0$, $b>0$, a, $b\neq1$: $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\ \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$», что также, очевидно, неверно.

Аналогичные неточности по существу содержатся в решении примеров № 153 и № 183.

В. Хлобыстов

Поправка

В «Кванте» № 5 в Задачнике «Кванта» имеются неточности. В задаче **М686** в левой части равенства должно быть $\left[\sqrt{[\sqrt{x}]}\right]$. В задаче **М688** сумма $a_1+a_2+\ldots+a_n$ четна. Срок присылки решений этих задач продлевается до 1 октября 1981 года.

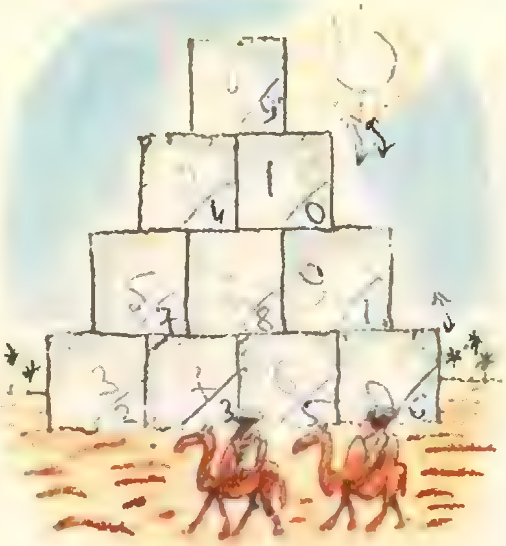
квант для младших школьников

Задачи

1. «Переставляшки». Приходилось ли вам когда-нибудь переставлять буквы в словах, чтобы получались другие осмысленные слова? Например, так: *мать — тьма, река — каре, серп — перс, угар — рагу.* Подберите парное слово к словам: *соха, клеш, соль, фазан, весна, салат, пляск, треск, ремонт, нищета, иголка, кордон, вектор, сектор, телескоп, искра, секта, скала, пират, топор, капор, сокол, лодка, доска.*

Иногда «переставляшки» дают не пару, а тройку, четверку, пятерку или даже шестерку слов:
марш — ? — ?, *спруг* — ? — ?,
рост — ? — ? — ?, *колун* — ? — ? — ?,
автор — ? — ? — ? — ? — ?.
Какие «переставляшки» вы сумеете придумать еще?

2. В клеточки «пирамиды», изображенной на рисунке, впишите все десять цифр (0,1,...,9) так, чтобы по горизонталям получились четыре квадрата натуральных чисел. Сколько решений имеет задача?



3. Из десяти спичек без труда можно сложить два пятиугольника. А вот сложить из того же количества спичек два пятиугольника и пять треугольников не так-то просто. Попробуйте!

4. На листе бумаги расположены 1980 точек, являющихся вершинами правильного 1980-угольника. Двое игроков по очереди соединяют эти точки отрезками. За один ход разрешается соединить любые две точки так, чтобы проведенные отрезки не пересекались. Проигрывает тот, у кого нет хода. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнер?

Эти задачи нам предложили
А. Аббасов, М. Гервер, А. Кравчатый,
Л. Мочалов

М. Гервер

Как сделать из мухи слона?

Цепочки Кэрролла

Гора — горе — море

— вот как можно сделать *море* из *горы*.

Коза — поза — пола — полк — волк

— и из *козы* получился *волк*.

О превращении *льва* в *дога* сочинена даже детская считалочка

Царь зверей — красавец лев,
Желтый цветик — львиный зев,
Громкий зов — удачный лов,
Старый лом — новый дом...
Вместо них — широкий лог,
Там гуляет черный дог.

содержащая такие цепочки:

лев — зев — зов — лов —
— лом — дом — дог.
лог

Автором игры в цепочки является, по-видимому, Льюис Кэрролл. Пользуясь правилами Кэрролла — вы уяснили их из приведенных примеров? — можно превратить *ночь* в *день*, *винт* в *болт* или *курда* в *перса*, можно сделать из *руки ногу* (или из *ноги руку* — как вам больше нравится), изготовить *фунт* из последнего *пенса* (и даже из экзотического *юаня*) или из одного-единственного *судна* (будь то большой, быстроходный *бриг* или маленький *ялик*) получить целый *флот*...

Правда-правда! Проверьте сами.

Можно даже — хотя это и посложней — сделать из *мухи слона*.

Почему посложней? Из-за различного расположения гласных в этих словах. С такими же сложностями вы столкнетесь, если захотите превратить *негра* в *араба* или получить *уран* из *серы*.

Слон, *араб* и *уран* относятся к одной группе слов, *муха*, *негр* и *сера* — к другой: в каждой из этих двух групп слова сравнительно легко переводятся друг в друга, а из одной группы в другую, насколько мне известно, ведет один-единственный переход. К его отысканию и сводятся последние три из предложенных выше задач.

Как только он найден, играть в «цепочки Кэрролла» становится, честно говоря, не особенно интересно.

Новые правила

Чтобы вдохнуть жизнь в старинную игру, введем новые правила преобразования слов. Меняя по-прежнему по одной букве, разрешим, кроме того, на каждом ходу менять порядок букв:

река — мера — море,
(к — м) (а — о)

враг — град — друг.
(в — д) · (а — у)

Сделать из *мухи слона*, используя новые правила, ничего не стоит:

муха — хула — луна —
(м — л) (х — н) (а — ь)
лунь — ноль — слон
(у — о) (ь — с)

так что, на первый взгляд, мы просто испортили хорошую задачу, заменив интересную игру тривиальной.

На самом деле, после введения новых правил сразу возникает несколько новых игр и задач. Однако, прежде чем познакомить вас с ними, я хочу предложить вам следующие задания (чтобы вы привыкли к новым правилам):

а) превратите *осла* в *козу*, *козу* в *енота*, *енота* в *лису*, *лису* в *волка*, *волка* в *ишака*, а *ишака* — снова в *осла*;

б) смастерите *халат* из *парчи*;

в) соедините цепочкой *леди* и *лорда*;

г) вот вам *станок* — сделайте *шпагат*;

д) найдите путь от *старта* к *финишу*.

Кратчайшие цепочки

Интересно, за сколько ходов вы добрались от *старта* до *финиша*? Самая первая цепочка, которой мне удалось соединить их, состояла из пятнадцати слов:

старт — трест — перст —
(а — е) (т — п) (е — о)
спорт — опрос (или просо) —
(т — о) (р — к)
покос — кокос — кокон —
(п — к) (с — н) (о — а)
конка — гонка — книга —
(к — г) (о — н) (г — ф)
финка — финал — филин —
(к — л) (а — и) (л — ш)
финиш.

Потом ее удалось сократить до девяти слов:

старт — сатир — риска — кирка —
факир (фиакр) — финка

и т. д. Вариант: сатир — тираж — жираф — рифма (фирма) — нимфа — финал т. д.

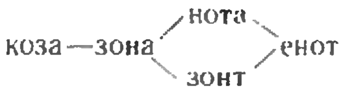
Можно и еще короче. Рекорд — 7 слов. Сумеете повторить или улучшить его? Попробуйте найти 2—3 цепочки минимальной длины.

Чем вообще определяется минимальная длина цепочки? Рассмотрим примеры.

Начнем с превращения *енота* в *лису*. Представим себе, что буквы *е*, *н*, *о*, *т*, *л*, *и*, *с*, *а* написаны на карточках: первые четыре карточки на столе, остальные четыре — у нас в руках. Мы должны сделать четыре замены — следовательно, искомая цепочка содержит не менее пяти слов. Значит, цепочка

енот — лето — село — сало — лиса — кратчайшая.

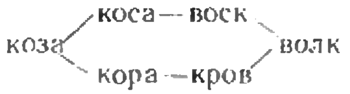
Для превращения *козы* в *енота* нужно сделать лишь три замены (*«о»* — общее), минимальная длина цепочки — 4. Кратчайшие цепочки:



Для превращения *козы* в *волка* необходимы как будто всего две замены: нужно *«з»* и *«а»* заменить на *«в»* и *«л»*. Если бы хоть одна из замен

з — в; з — л; а — в; а — я

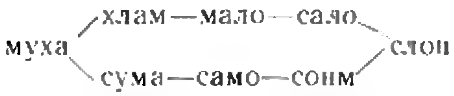
привела к осмысленному слову, то мы, тем самым, получили бы цепочку из трех слов, превращающую *козу* в *волка*. Однако после указанных замен мы приходим соответственно к наборам
к, о, в, а; к, о, з, л; к, о, л, а; к, о, з, в,
ни один из которых — как ни переставляй в нем буквы — не дает осмысленного слова. Поэтому минимальная длина искомой цепочки — больше трех. Тем самым, цепочки



кратчайшие.

Упражнение. Найдите кратчайшие цепочки для всех остальных заданий предыдущего пункта.

Ну, а как обстоит дело с нашим главным превращением — *мухи* в *слона*? Цепочка, соединяющая их, должна содержать минимум 5 слов. Выше мы нашли цепочку, в которой всего на одно слово больше. По пять слов в цепочках



но они, разумеется, должны быть отвергнуты: *мало* — наречие, *само* — местоимение, а мы по неписанной традиции пользуемся лишь существительными (нарицательными) в именительном падеже, в единственном числе[*]!

Как же быть? Ищите и обрящете!

Неожиданная трудность. Слова-изгои

Задачи на составление цепочек, которые вам предлагались, были устроены так: даны два слова — нужно соединить их цепочкой (произвольной или кратчайшей). Слова подбирались специально — так, чтобы их действительно можно было превратить друг в друга.

Наверное, это трудно — подбирать такие пары? Наверное, для большинства пар слова́, входящие в них, невозможно превратить одно в другое (не существует ни одной цепочки, соединяющей их)?

Попробуйте составлять пары сами. Если вы будете брать слова из четырех букв, то с удивлением обнаружите, что, пользуясь новыми правилами, их почти всегда удается превратить друг в друга. Против ожидания трудность — не в том, чтобы подобрать слова, которые можно соединить цепочкой, а наоборот — в том, чтобы найти слова из четырех букв, которые соединить цепочкой нельзя.

Для длинных слов это не так. Среди них обычны «слова-изгои», которые (даже по новым правилам) невозможно соединить цепочкой ни с каким другим словом. Кстати, само слово *изгой* как будто является таким словом-изгоем. Мне, во всяком случае, не удалось превратить его ни в какое пятибуквенное слово (*избой, иглой, визой, изгоя* — не именительный падеж, *розги, мозги* — множественное число, *козий* — не существительное; по нашему соглашению все это — не слова). Попробуйте — может быть, вам удастся? Посмотрите заодно, являются ли словами-изгоями

добро, зебра, егоза, ягода.

Найти слова-изгои среди четырехбуквенных слов несравненно труднее, чем среди длинных — попытайтесь отыскать несколько, а среди слов из трех букв их, видимо, вообще нет! Более того, по-видимому любые два слова из трех букв можно превратить друг в друга.

Что значит «по-видимому»? Нельзя ли это строго доказать? И что вообще значит *доказать* подобное утверждение? Возможно, через некоторое время мы еще вернемся к этим вопросам.

---

[*] Множественное число допускается только при условии, что нет единственного: *сани, ножницы, щи.*

В. Данилин

Электроизмерительные приборы

Во всех электроизмерительных приборах действие электрического тока сводится к перемещению подвижной части измерительного механизма. Обычно подвижная часть и связанная с ней стрелка прибора поворачиваются вокруг своей оси. Момент сил, вызывающий этот поворот, называют вращающим моментом. Для того чтобы стрелка отклонялась не беспредельно, и угол отклонения соответствовал измеряемой величине, необходимо противодействовать вращению стрелки. Момент сил, оказывающий такое действие, называют противодействующим моментом.

Практически всегда противодействующий момент создается силами упругости пружины. А вот вращающий момент может создаваться по-разному. В зависимости от способа возникновения вращающего момента электроизмерительные приборы относят к той или иной системе. Рассмотрим некоторые из них.

Принцип действия приборов *магнитоэлектрической* системы основан на взаимодействии проводника с током и магнитного поля. Поле создается постоянным магнитом *1* (рис. 1), ток проходит через катушку в виде рамки *2*. Рамка является подвижным элементом прибора и находится на одной оси со стрелкой *3*.

Вращающий момент, действующий на рамку, благодаря специально сконструированному магниту не зависит от угла поворота рамки и равен

$$M_{\text{вр}} = |\vec{B}|INS,$$

где $\vec{B}$ — индукция магнитного поля, I — ток, N — число витков в рамке, S — ее площадь. Под действием этого момента рамка начинает поворачиваться. При этом спиральная пружина *4* закручивается и возникает противодействующий момент, пропорциональный углу поворота рамки α:

$$M_{\text{пр}} = k\alpha,$$

где k — коэффициент пропорциональности, зависящий от упругих свойств пружины.

Когда противодействующий момент становится равным вращающему моменту, рамка останавливается. При этом угол поворота рамки, и значит и стрелки, равен

$$\alpha = \frac{|\vec{B}|SN}{k} I,$$

то есть прямо пропорционален току в рамке. Это обеспечивает равномерность шкалы прибора.

Магнитоэлектрические приборы пригодны только для постоянного тока, что, безусловно, является их недостатком. К достоинствам этих приборов относятся малое потребление энергии и высокая чувствительность.

Наиболее чувствительные приборы магнитоэлектрической системы — зеркальные гальванометры. В них на оси вращения вместо стрелки укреплено маленькое плоское зеркало. Узкий пучок света от лампочки

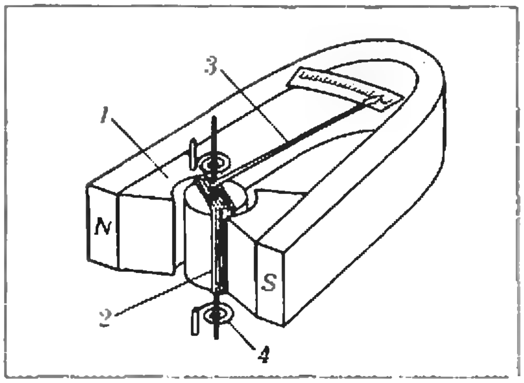


Рис. 1.

падает на зеркало, а отраженный от него зайчик попадает на удаленную шкалу. Чувствительность зеркальных гальванометров может достигать 10^{-12} А/мм.

Задача 1. *Зеркальный гальванометр имеет рамку площадью $S = a \times b = 40 \times 30$ мм², на которую намотано $N = 100$ витков медной проволоки диаметром $d = 0{,}1$ мм. Рамка подвешена на нити, в которой возникает противодействующий момент $M_{0\,\text{пр}} = 10^{-7}$ Н · м при закручивании нити на угол $\alpha_0 = 1°$. Магнитное поле перпендикулярно оси вращения рамки при всех ее возможных положениях; индукция магнитного поля $|\vec{B}| = 10^{-1}$ Тл. На расстоянии $L = 1$ м от гальванометра находится миллиметровая шкала. 1) На какой угол α повернется рамка, если по ее обмотке пропустить ток $I = 0{,}1$ мА? 2) Какой мощности P, потребляемой прибором, соответствует отклонение зайчика по шкале на $l = 1$ мм?*

1) При равновесии рамки вращающий момент $M_{\text{вр}} = |\vec{B}|INS$ уравновешивается противодействующим моментом $M_{\text{пр}} = k\alpha = M_{0\,\text{пр}}\alpha/\alpha_0$:

$$|\vec{B}|INS = \frac{M_{0\,\text{пр}}}{\alpha_0}\alpha.$$

Отсюда

$$\alpha = \frac{|\vec{B}|INS\alpha_0}{M_{0\,\text{пр}}} = 12°.$$

2) Потребляемая гальванометром мощность зависит от тока I, текущего по обмотке рамки, и от ее сопротивления R:

$$P = I^2R.$$

Найдем, какой ток I соответствует отклонению зайчика по шкале на расстояние l. При повороте рамки, а значит, и зеркала, на угол α отраженный луч поворачивается на угол 2α (проверьте это самостоятельно), а зайчик перемещается по шкале на расстояние $l = 2\alpha L$ (мы учли, что $l \ll L$). Таким образом,

$$I = \frac{k\alpha}{|\vec{B}|NS} = \frac{M_{0\,\text{пр}}}{\alpha_0}\,\frac{l}{2L}\,\frac{1}{|\vec{B}|NS} \approx 2{,}4 \cdot 10^{-7}\ \text{А}.$$

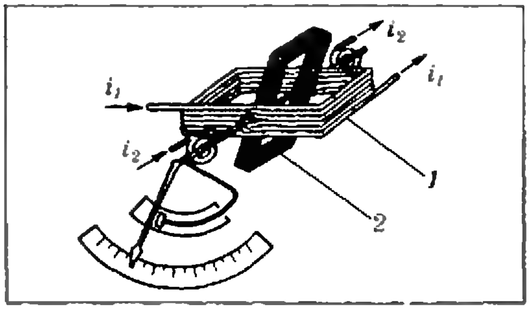


Рис. 2.

Сопротивление обмотки рамки равно

$$R = \varrho\frac{l'}{s} = \varrho\frac{2(a+b)N}{\pi d^2/4} \approx 31\ \text{Ом}.$$

Окончательно

$$P = I^2R \approx 1{,}8 \cdot 10^{-12}\ \text{Вт}.$$

* * *

В приборах *электродинамической* системы вращающий момент возникает при взаимодействии токов i_1 и i_2, протекающих по двум катушкам: неподвижной катушке *1* и подвижной *2* (рис. 2). В общем случае токи — переменные и изменяются по законам $i_1 = I_{1м}\cos\omega t$ и $i_2 = I_{2м}\cos(\omega t - \varphi)$.

Мгновенное значение вращающего момента пропорционально произведению обоих токов: $M_{\text{вр}} \sim i_1 i_2$. Из-за инертности подвижная катушка не успевает следовать за мгновенными изменениями вращающего момента, так что ее отклонение пропорционально среднему за период значению

$$M_{\text{вр ср}} = kI_1I_2\cos\varphi.$$

Здесь k — постоянный коэффициент, I_1 и I_2 — действующие значения токов, φ — сдвиг фаз между ними. Если обе катушки соединить последовательно, показание прибора будет пропорционально квадрату тока. Следовательно, шкала такого прибора — неравномерная.

Очевидно, что приборами электродинамической системы можно измерять мощность в цепях переменного тока ($P_{\text{ср}} = IU\cos\varphi$, где U — действующее значение напряжения). Для этого достаточно одну катушку (неподвижную) включить последовательно с выбранным участком цепи, а вторую катушку (подвижную) — параллельно этому участку. Именно таково принципиальное устройство всех ваттметров.

Задача 2. *Наибольшая мощность, измеряемая ваттметром, равна $P_1=300$ Вт. Определите, какое дополнительное сопротивление $R_д$ нужно включить последовательно с параллельной катушкой ваттметра, чтобы увеличить предел измерения до $P_2=500$ Вт. Сопротивление параллельной катушки $R=10$ кОм; последовательная катушка не изменяется.*

Показание ваттметра пропорционально действующим значениям токов, протекающих по параллельной и последовательной катушкам, и косинусу сдвига фаз между этими токами.

Поскольку речь идет о верхнем пределе измерений ваттметра, угол поворота подвижной (последовательной) катушки и связанной с ней стрелки прибора в обоих случаях должен быть одним и тем же. Это означает, что токи в катушках тоже не должны изменяться.

Действующее значение тока в параллельной катушке равно

$$I=\frac{U}{R},$$

где U — напряжение на нагрузке, в которой измеряется мощность, а R — сопротивление параллельной катушки. При включении дополнительного сопротивления изменяется напряжение, поданное на ваттметр, но ток остается одним и тем же:

$$\frac{U_1}{R}=\frac{U_2}{R+R_д}.$$

С учетом того, что

$$\frac{U_2}{U_1}=\frac{P_2}{P_1},$$

получим

$$\frac{R+R_д}{R}=\frac{P_2}{P_1},$$

или

$$R_д=R\left(\frac{P_2}{P_1}-1\right)=\frac{2}{3}R\approx 6{,}7\ \text{кОм}.$$

* * *

Практически во всех наиболее распространенных электроизмерительных приборах показания приборов связаны с током, протекающим по их катушкам. Поэтому один и тот же прибор, в зависимости от схемы его включения в цепь, можно использовать как для измерения тока (то есть в качестве амперметра), так и для измерения напряжения (то есть в качестве вольтметра).

Задача 3. *В схему, показанную на рисунке 3, включены два одинаковых амперметра и два одинаковых вольтметра. Показание первого амперметра $I_1=200$ мА, а показания вольтметров $U_1=100$ В и $U_2=2$ В соответственно. Найдите показание I_2 второго амперметра. Сопротивлением подводящих проводов можно пренебречь.*

При решении этой задачи нужно ясно понимать, что показания и амперметров, и вольтметров всегда пропорциональны протекающему через них току.

Ток I_1, протекающий через первый вольтметр, дает показание на шкале прибора U_1. Следовательно, внутреннее сопротивление вольтметров равно

$$R_V=\frac{U_1}{I_1}.$$

Показание второго вольтметра соответствует протекающему по нему току

$$I_{V2}=\frac{U_2}{R_V}=\frac{U_2}{U_1}I_1.$$

Ток I_2, протекающий по второму амперметру, равен разности токов I_1 и I_{V2}:

$$I_2=I_1-I_{V2}=I_1\left(1-\frac{U_2}{U_1}\right)=196\ \text{мА}.$$

* * *

Наиболее важными характеристиками прибора являются его внутреннее сопротивление и предельное значение тока, при котором подвижная часть измерительного прибора отклоняется на максимальный угол. Требования, предъявляемые к внутренним сопротивлениям амперметра и вольтметра, противоположны. Ам-

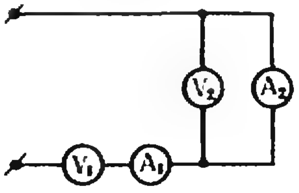


Рис. 3.

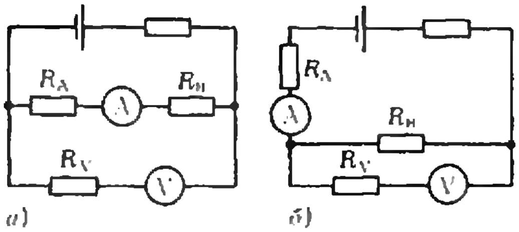


Рис. 4.

перметр включается в цепь последовательно, и через него проходит весь измеряемый ток. Поэтому, чтобы не вносить дополнительного сопротивления в цепь, сопротивление амперметра должно быть как можно меньше. Вольтметр включается параллельно тому участку цепи, на котором следует измерить напряжение. Следовательно, его сопротивление должно быть как можно больше, чтобы не шунтировать исследуемый участок цепи.

Задача 4. *Оцените, какие ошибки возникают при измерениях токов и напряжений с учетом конкретных значений сопротивлений амперметра и вольтметра (рис. 4).*

В схеме на рисунке 4, *а* ток, текущий через амперметр А и нагрузочное сопротивление $R_н$, один и тот же. Следовательно, ошибки в показаниях амперметра нет. А вот напряжение на нагрузке, измеренное вольтметром, отличается от истинного:

$$U_н = IR_н, \quad U_V = I(R_н + R_A).$$

Таким образом, абсолютная ошибка в измерении напряжения на нагрузке равна

$$\Delta U = |U_н - U_V| = IR_A,$$

а относительная ошибка

$$\delta = \frac{\Delta U}{U_н} = \frac{IR_A}{IR_н} = \frac{R_A}{R_н}.$$

В схеме на рисунке 4, *б* показание вольтметра истинно, а амперметр показывает сумму токов, протекающих через нагрузку и через вольтметр:

$$I_A = I_н + I_V = \frac{U_н}{R_н} + \frac{U_н}{R_V}.$$

Абсолютная и относительная ошибки в измерении тока равны соответственно

$$\Delta I = |I_н - I_A| = I_V = \frac{U_н}{R_V}$$

и

$$\delta = \frac{\Delta I}{I_A} = \frac{U_н}{R_V} : \frac{U_н}{R_н} = \frac{R_н}{R_V}.$$

Задача 5. *Вольтметр с неизвестным внутренним сопротивлением подключают сначала к резистору сопротивлением R_1, затем к резистору сопротивлением R_2 и, наконец, к резистору сопротивлением R (рис. 5). При этом показания вольтметра $U_1 = 4$ В, $U_2 = 6$ В и $U = 12$ В соответственно. Пренебрегая внутренним сопротивлением источника, определите напряжения U_{01} и U_{02} на первом и втором резисторах в отсутствие вольтметра.*

При подключении к резистору сопротивлением R показание вольтметра равно ЭДС источника (так как внутренним сопротивлением источника можно пренебречь).

Когда вольтметр подключен к первому резистору, сопротивление этого участка R_1' таково, что

$$\frac{1}{R_1'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_V},$$

где R_V — внутреннее сопротивление вольтметра. Напряжение на этом участке равно показанию вольтметра $U_1 = 4$ В, а напряжение на втором резисторе равно $U - U_1 = 8$ В $= 2U_1$. Так как через оба участка цепи течет один и тот же ток, имеем $R_2 = 2R_1'$, или

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_V} = \frac{2}{R_2}.$$

Если вольтметр подключен ко второму резистору, то, проведя аналогичные рассуждения, получаем

$$\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_V} = \frac{1}{R_1}.$$

Вычитая из последнего уравнения предыдущее, найдем

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{U_{01}}{U_{02}} = \frac{2}{3}.$$

Кроме того,

$$U_{01} + U_{02} = U.$$

Следовательно,

$$U_{01} = \frac{2}{5}U = 4{,}8 \text{ В}, \quad U_{02} = \frac{3}{5}U = 7{,}2 \text{ В}.$$

* * *

На практике часто используются приборы с несколькими пределами измерения токов и напряжений. Для этого при измерении напряжений последовательно с прибором включаются дополнительные сопротивления, а при измерении токов к прибору подключаются параллельные сопротивления — шунты. В некоторых случаях возможно одновременное подключение дополнительных сопротивлений и шунтов. (Заметим, что подключение добавочных сопротивлений и шунтов не только позволяет сделать приборы многошкальными, но также уменьшает ошибки измерений, соответственно увеличивая или уменьшая внутренние сопротивления приборов.)

Задача 6. *Гальванометр с внутренним сопротивлением $R_Г = 50$ Ом имеет цену деления измерительной шкалы $C = 50$ мкА. Шкала разбита на $N = 100$ делений. Как из этого прибора сделать вольтметр для измерения напряжений до $U = 200$ В или амперметр для измерения токов до $I = 800$ мА?*

При отклонении стрелки на всю шкалу через гальванометр течет предельный допустимый ток

$$I_{пр} = CN = 5 \text{ мА},$$

при этом напряжение на гальванометре равно

$$U_{пр} = I_{пр} R_Г = 250 \text{ мВ}.$$

Чтобы с помощью этого гальванометра можно было измерять напряжения до значения U, последовательно с гальванометром надо включить дополнительное сопротивление $R_д$. Напряжение $U_д$ на нем равно разности напряжений в цепи и на гальванометре, а ток, текущий через гальванометр и дополнительное сопротивление, один и тот же. Поэтому

$$\frac{U_д}{U_Г} = \frac{R_д}{R_Г},$$

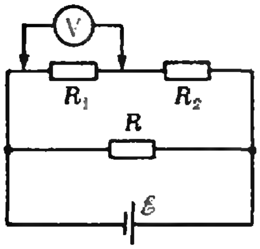


Рис. 5.

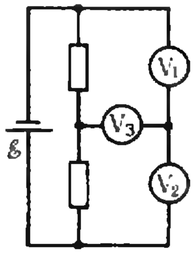


Рис. 6.

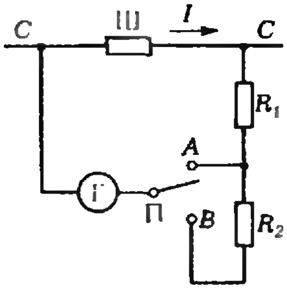


Рис. 7.

откуда

$$R_д = R_Г \frac{U_д}{U_Г} = R_Г \left(\frac{U}{U_Г} - 1 \right) \approx 40 \text{ кОм}.$$

Для работы гальванометра в качестве амперметра параллельно гальванометру надо подключить шунт сопротивлением $R_ш$. Ток I, текущий в цепи, равен сумме токов $I_Г$ в гальванометре и $I_ш$ в шунте, а напряжения на гальванометре и на шунте одинаковы. Следовательно,

$$I_Г R_Г = I_ш R_ш,$$

откуда

$$R_ш = R_Г \frac{I_Г}{I_ш} = R_Г \frac{I_Г}{I - I_Г} =$$

$$= \frac{R_Г}{\frac{I}{I_Г} - 1} \approx 0{,}31 \text{ Ом}.$$

Упражнения

1. В схеме, показанной на рисунке 6, все вольтметры одинаковые. ЭДС батареи $\mathscr{E} = 5$ В, ее внутреннее сопротивление мало. Первый вольтметр показывает $U_1 = 2$ В. Что показывают остальные вольтметры?

2. Для измерения больших токов в цепи CC используют шунт Ш, параллельно которому подключается измерительный прибор Г через сопротивления $R_1 = 2$ Ом и $R_2 = 90$ Ом (рис. 7). В положении A переключателя П вся шкала прибора соответствует току в цепи $I_1 = 10$ А, в положении B — току $I_2 = 100$ А. Найдите внутреннее сопротивление r прибора Г. Сопротивление шунта много меньше R_1 и R_2.

3. При включении шунта сопротивлением $R_{ш1} = 100$ Ом параллельно измерительному прибору стрелка отклоняется на всю шкалу при токе во внешней цепи $I_1 = 3$ А. При включении добавочного сопротивления $R_д = 300$ Ом к незашунтированному гальванометру шкала прибора становится в четыре раза грубее, чем без добавочного сопротивления и шунта. Какой шунт надо взять для того, чтобы стрелка отклонилась на всю шкалу при токе во внешней цепи $I_2 = 7{,}5$ А?

4. Гальванометр с внутренним сопротивлением $r_Г$, шунтированный сопротивлением $R_ш$ и соединенный последовательно с добавочным сопротивлением $R_{д1}$, используется в качестве вольтметра. При напряжении $U_1 = 1$ В стрелка гальванометра отклоняется на одно деление. Какое нужно взять добавочное сопротивление, чтобы стрелка гальванометра отклонилась на одно деление при напряжении $U_2 = 10$ В?

Б. Кордемский

Семнадцать задач на смекалку

Среди задач, предлагаемых пособиями для поступающих в вузы, встречаются и такие, при решении которых можно проявить находчивость и остроумие.

Разумеется, как правило, эти задачи можно решать и стандартными методами, однако решения, использующие нестандартные, остроумные соображения, часто оказываются более короткими и красивыми, чем традиционные.

Несколько таких задач мы предлагаем нашим читателям.

Задача 1. Пройдя $3/8$ длины моста AB, человек услышал за спиной гудок автомобиля, приближающегося к мосту с постоянной скоростью 60 км/ч. Если этот человек побежит обратно, то встретится с автомобилем в A; если побежит вперед, то автомобиль нагонит его в B. С какой скоростью бегает этот человек?

Задача 2. Из пункта A реки одновременно поплыли мяч по течению и спортсмен против течения. Через 10 минут пловец повернул назад и догнал мяч под мостом, находящимся в 1 км от A. Известно, что пловец не изменял своих усилий на протяжении всего времени движения. Найдите скорость течения этой реки.

Задача 3. В колбе имеется раствор соли. Из колбы отливают $1/n$ часть раствора в пробирку и выпаривают до тех пор, пока процентное содержание соли в пробирке не повысится вдвое. После этого получившийся раствор возвращают в колбу и смешивают с тем раствором, который там оставался. В результате содержание соли в растворе повысилось на $p\%$. Определите процентное содержание соли в первоначальном растворе.

Задача 4. 27 одинаковых механизмов могут выполнить определенное задание за 35 часов непрерывной работы. Но через 11 часов к выполнению этого задания подключили еще несколько таких же механизмов, и работа была закончена на 6 часов раньше. Сколько механизмов было подключено дополнительно?

Задача 5. От двух кусков сплава одинаковой массы, но с различным процентным содержанием меди отрезали по куску равной массы. Каждый из отрезанных кусков сплавили с остатком другого куска, после чего процентное содержание меди в обоих кусках стало одинаковым. Во сколько раз отрезанный кусок меньше целого куска?

Задача 6. Имеются два сплава серебра и золота: в одном количества этих металлов находятся в отношении 2:3, в другом — в отношении 3:7. Сколько нужно взять каждого сплава, чтобы получить 8 кг нового сплава, в котором серебро и золото были бы в отношении 5:11?

Задача 7. На стороне BC квадрата $ABCD$ взята произвольная точка E. Биссектриса угла DAE пересекает сторону CD в точке F, $|AE|=a$. Найдите $|BE|+|DF|$.

Задача 8. Дан $\triangle ABC$. а) Докажите, что существует треугольник $A_1B_1C_1$, длины сторон которого равны длинам медиан треугольника ABC.

б) Докажите, что треугольник $A_2B_2C_2$, длины сторон которого равны длинам медиан треугольника $A_1B_1C_1$, подобен треугольнику ABC.

в) Найдите площадь треугольника $A_2B_2C_2$, если площадь треугольника ABC равна S.

Задача 9. Пусть точка K — середина медианы AM треугольника ABC, L — точка пересечения прямой (BK) со стороной AC. Найдите площадь четырехугольника $LKMC$, если $S_{ABC}=1$.

Задача **10.** В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла проведена высота CD. Периметры треугольников ACD и CBD равны P_1 и P_2 соответственно. Найдите периметр треугольника ABC.

Задача **11.** Докажите неравенство

$$\underbrace{\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6}}}}}_{n}+$$

$$+\underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots\sqrt{6+\sqrt{6}}}}}_{m}<5.$$

Задача **12.** Докажите, что для всякого треугольника ABC

а) $\cos\widehat{A}+\cos\widehat{B}+\cos\widehat{C}\leqslant\frac{3}{2}$;

б) $\cos 2\widehat{A}+\cos 2\widehat{B}+\cos 2\widehat{C}\geqslant-\frac{3}{2}$.

Задача **13.** Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$.

Задача **14.** Упростите выражение

$$\frac{(x-a)\,(x-b)}{(c-a)\,(c-b)}+\frac{(x-a)\,(x-c)}{(b-a)\,(b-c)}+$$
$$+\frac{(x-b)\,(x-c)}{(a-b)\,(a-c)},$$

где $a\neq b$, $b\neq c$, $c\neq a$.

Задача **15.** Упростите выражения

а) $\sin^3\alpha\cos 3\alpha+\cos^3\alpha\sin 3\alpha$;

б) $\sin^2 x+\sin^2\alpha+\sin^2(x+\alpha)+$
$+2\cos\alpha\cos x\cos(\alpha+x)$.

Задача **16.** Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\ln x$, $y=0$, $x=2$.

Задача **17.** Решите уравнение

$$x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}.$$

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1980 году

Московский автомеханический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Найти площадь фигуры, множество точек $(x; y)$ которой удовлетворяет системе неравенств

$$\begin{cases} x^2+y^2<r^2\ (r>0)\\ x-y<0\\ y>0.\end{cases}$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4^x=\left(\frac{1}{3}\right)^x\cdot 1728\\ \log_4 x=\frac{1}{2}-\log_4 y+\log_4^3\end{cases}$$

3. Написать уравнение параболы, симметричной параболе $y=\frac{x^2}{2}-2$ относительно прямой $x=4$.

4. Найти область определения функции

$$f(x)=\frac{\sqrt{2x-4}}{\sqrt[3]{x-1}-2}.$$

5. Упростить выражение

$$\frac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}+1-\cos\alpha$$

и найти возможные значения α.

Вариант 2

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x=1$, $x=2$, $y=0$, $\log_2 x+\log_2 y=0$.

2. Найти уравнение образа параболы $y=x^2+2x+2$ при параллельном переносе $\vec{p}=\vec{i}-\vec{j}$.

3. В арифметической прогрессии (a_n) известны $a_8=11{,}2$ и $a_{15}=19{,}6$. Каково число членов этой прогрессии, меньших 30?

4. Найти область определения функции

$$y(x)=\sqrt{\frac{3^x-4^x}{2x^2-x+5}}.$$

5. Упростить выражение

$$\frac{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}{2\cos\alpha+\sin 2\alpha}\cdot\frac{1-\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$$

и найти возможные значения α.

Задачи устного экзамена

1. Указать множество целых x, удовлетворяющих неравенству

$$\frac{1}{16}<\left(\frac{1}{2}\right)^x<1.$$

2. Указать множество точек $(x; y)$ плоскости, для которых

$$\log_{\frac{1}{16}}(x^2+y^2)=-\frac{1}{2}.$$

3. Между какими целыми числами расположено число $\lg 283$?

4. Последовательность (x_n) задана с помощью рекуррентного соотношения $x_1=2$, $x_{n+1}=x_n+3$. Задайте последовательность формулой n-го члена.

5. Написать уравнение горизонтальной касательной к параболе $y=x^2-3x+2$.

6. Найти первообразную функции

$$\varphi(x)=\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2.$$

7. Зная, что $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ и $\sqrt[3]{3} \approx 1{,}44$, вычислить $\sqrt[6]{72}$.

8. При каких a график функции $y = ax^2 - 6x + 7$ не имеет общих точек с осью Ox?

Физика

Задачи устного экзамена

1. Два однородных шара массой $m_1 = 3$ кг и $m_2 = 5$ кг с радиусами $R_1 = R_2 = R = 5$ см соединены однородным стержнем массой $m_3 = 2$ кг и длиной $l = 30$ см. Найдите центр тяжести системы.

2. Куб массой $m = 2$ кг и объемом $V = 10^3$ см^3 находится в озере на глубине $H = 5$ м. Считая плотность воды равной $\rho = 10^3$ кг/м^3, определите, какая работа совершается при подъеме куба на высоту $h = 5$ м над уровнем озера. Поверхностными явлениями можно пренебречь.

3. Холодильник за время $\tau_1 = 20$ мин работы охлаждает $V = 1{,}5$ л воды, помещенной в морозильную камеру, от $t_1 = 16$°C до $t_2 = 4$°C. Найдите массу льда, образовавшегося в камере, если процесс охлаждения был продолжен еще на $\tau_2 = 60$ мин при том же режиме. Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2 \times 10^3$ Дж/(кг · К). Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}35 \cdot 10^5$ Дж/кг.

4. Автомобиль мощностью $N = 76{,}5$ кВт, имеющий коэффициент полезного действия $\eta = 32\%$, при движении с постоянной скоростью на пути $s = 120$ м расходует $m = 64$ г бензина. Определите скорость движения автомобиля, если теплота сгорания бензина $q = 4{,}6 \cdot 10^7$ Дж/кг.

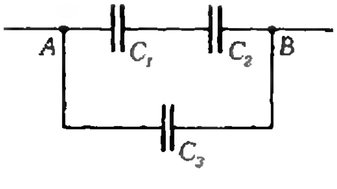
5. Расстояние между зарядами $q_1 = 2 \cdot 10^{-8}$ Кл и $q_2 = 1{,}6 \cdot 10^{-7}$ Кл равно $R = 5$ см. Найдите напряженность поля в точке, удаленной от первого заряда на расстояние $R_1 = 3$ см и от второго — на расстояние $R_2 = 4$ см.

6. В схеме, показанной на рисунке, разность потенциалов между точками A и B равна $U = 250$ В. Электроемкости конденсаторов равны $C_1 = 1{,}5$ мкФ, $C_2 = 3$ мкФ, $C_3 = 4$ мкФ. Определите суммарный заряд на обкладках конденсаторов.

7. На лампочке для карманного фонаря написано: $U = 3{,}5$ В, $I = 0{,}28$ А. Температура накала нити $t = 425$°C, сопротивление нити при нуле градусов Цельсия $R_0 = 4$ Ом. Определите температурный коэффициент сопротивления нити.

8. Какую массу льда, имеющего температуру $t = -10$°C, можно растопить за $\tau = 10$ мин в электрокипятильнике, работающем от сети с напряжением $U = 220$ В и силой тока $I = 3$ А? Коэффициент полезного действия электрокипятильника $\eta = 80\%$. Удельная теплоемкость льда $c = 2{,}1 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К); удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}35 \cdot 10^5$ Дж/кг.

9. Луч света, угол падения которого на границу раздела двух сред равен $\alpha = 30$°, преломляется во второй среде так, что угол между преломленным и отраженным лучами составляет $\gamma = \pi/2$ рад. Определите показатель преломления n_2 второй среды, если показатель преломления первой среды $n_1 = 2{,}4$.



10. Найдите изображение точки, расположенной на расстоянии $d = 2{,}8$ м от сферического вогнутого зеркала на главной оптической оси. Радиус кривизны зеркала $R = 90$ см.

В. Антипенко, М. Бодунов,
А. Рязановский, Б. Яров

Московский гидромелиоративный институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. В декартовой прямоугольной системе координат Oxy на кривой $y = x^2$ заданы две точки A и B такие, что $\overrightarrow{OA} \cdot \vec{i} = 1$ и $\overrightarrow{OB} \cdot \vec{i} = -2$, где $\vec{i}$ — единичный вектор оси Ox. Найти длину вектора $12\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB}$.

2 Найти все решения уравнения $\frac{2x^2 - 5|x| + 2}{x + 2} = 0$, принадлежащие области определения функции $y = \frac{x}{4x^2 - 1}$.

3. В декартовой прямоугольной системе координат Oxy задана фигура F, ограниченная осью Ox, кривой $y = 2x^2$ и касательной к кривой $y = 2x^2$ в точке $A(x_0;\ y_0)$, где $x_0 = 2$. Найти площадь фигуры F.

4. Вычислить $\sin^2\left(\frac{12\pi}{8} + \frac{3}{2}\alpha\right) - \sin^2 3(\pi + 0{,}5\alpha)$ при $\alpha = \frac{7\pi}{12}$.

Вариант 2

1. В декартовой прямоугольной системе координат Oxy на части кривой $y = x^2 - 2x + 3$, лежащей в первой четверти, заданы точка $A(x_1;\ y_1)$ с абсциссой $x_1 = 1$ и точка $B(x_2;\ y_2)$ с ординатой $y_2 = 11$. Найти скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.

2. Решить неравенство

$$\log_2 \log_3 \frac{x-1}{x+1} < \log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{3}} \frac{x+1}{x-1}.$$

3. Найдите все решения уравнения $3^{2x+1} - 4 \cdot 3^x + 1 = 0$, удовлетворяющие условию $\sin \frac{9+x}{x+0{,}5} > 0$.

4. Из всех конусов, вписанных в шар радиуса R, найти тот, у которого площадь боковой поверхности наибольшая.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Тело, брошенное вертикально вверх, вернулось на землю через время $t=3$ с. Какова была начальная скорость тела? На какой максимальной высоте побывало тело? Сопротивление воздуха не учитывать.

2. Тележка с песком катится со скоростью $|\vec{v}_1|=1$ м/с по горизонтальной поверхности без трения. Навстречу тележке летит шар массой $m=2$ кг с горизонтальной скоростью $|\vec{v}_2|=7$ м/с. После встречи с тележкой шар застрял в песке. С какой скоростью и в какую сторону покатится тележка после встречи с шаром? Масса тележки $M=10$ кг.

3. Посередине между двумя точечными положительными зарядами $q_1=q_2=q=2\times10^{-10}$ Кл поместили отрицательный заряд. Какова величина этого заряда, если вся система находится в равновесии?

4. Шарик массой $m=10^{-4}$ кг перемещается из точки A с потенциалом $\varphi_1=600$ В в точку B, потенциал которой $\varphi_2=0$. Определите скорость шарика в точке A, если в точке B его скорость $|\vec{v}|=0{,}2$ м/с. Заряд шарика $q=10^{-8}$ Кл.

А. Назаретов, Г. Ткачев, Г. Шадрин

Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультет оптического приборостроения)

1. Решить уравнение

$$\frac{3(x-2)+4\sqrt{2x^2-3x+1}}{2(x^2-1)}=1.$$

2. Найти область определения функции

$$y=(x+0{,}5)^{\log_{x+0,5}\frac{x^2+2x-3}{4x^2-4x-3}}.$$

3. Доказать, что $\triangle ABC$, вершины которого расположены в точках $A(1;\ 0;\ 1)$, $B(1;\ 1;\ 0)$ и $C(1;\ 1;\ 1)$,— прямоугольный. Найти расстояние от начала системы координат до центра окружности, описанной около этого треугольника.

4. Решить уравнение

$$\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}=(\sin x+\cos x)^2.$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2x^2+1$, $y=x+2$ и $y=1.5$.

Вариант 2

(геодезический факультет)

1. Решить уравнение

$$3\cdot16^x+2\cdot81^x=5\cdot36^x.$$

2. Найти область определения функции

$$y=\log_{0,01}\frac{2\lg x+2}{-x}.$$

3. Даны векторы $\vec{a}(1;\ 1;\ -1)$, $\vec{b}(5;\ -3;\ -3)$ и $\vec{c}(3;\ -1;\ 2)$. Найти векторы, коллинеарные вектору $\vec{c}$, длина которых равна длине вектора $\vec{a}+\vec{b}$.

4. Решить уравнение

$$(\sin x+\cos x)^2+(\sin x-\cos x)^2=1-\cos 2x.$$

5. Исследовать на монотонность функцию

$$y=\frac{x^2-2}{2x+3}.$$

Вариант 3

(аэрофотогеодезический и картографический) факультеты)

1. Решить уравнение

$$-\frac{1}{3}\lg 0{,}001+\lg\sqrt[3]{271}+3^{\sqrt{2x}}=2.$$

2. Решить неравенство

$$x<\sqrt{3-2x}.$$

3. Решить уравнение

$$\frac{1}{\cos x}=\sin x+\cos x.$$

4. При каких x и y вектор $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+2\vec{k}$ ортогонален вектору $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ и скалярное произведение $\vec{a}$ на $\vec{c}=\vec{i}-2\vec{j}$ равно четырем?

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{4}{x}$, $y=0$, $x=2$ и $x=4$.

Н. Болотина,
Н. Журкин

Московский институт стали и сплавов

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(физико-химический факультет)

1. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}\frac{x+1}{2x-5}>0.$$

2. Решить уравнение

$$\sqrt{3y^2+6y+16}+\sqrt{y^2+2y}=2\sqrt{y^2+2y+4}.$$

3. Плоский угол при вершине правильной шестиугольной пирамиды равен углу между боковым ребром и плоскостью основания. Найти этот угол

4. Четыре точки A, B, C и D в указанном порядке лежат на параболе $y=ax^2+bx+c$. Координаты точек A, B и D известны: $A(-2;3)$, $B(-1;1)$, $D(2;7)$. Определить координаты точки C, когда площадь четырехугольника $ABCD$ наибольшая.

5. Найти все значения x и y, удовлетворяющие уравнению

$$12\sin x+5\cos x=2y^2-8y+21.$$

Вариант 2

(факультет полупроводниковых материалов и приборов)

1. Решить уравнение

$$\sqrt{17+x}-\sqrt{17-x}=2.$$

2. Решить неравенство

$$x+\log_2(12-2^x)>5.$$

3. Из города A в город B вышел пассажирский поезд. В то же время из B в A вышел товарный поезд. Скорость каждого из поездов на всем участке движения постоянна. Через 2 часа после того, как поезда встретились, расстояние между ними составило 280 км. Пассажирский поезд прибыл к месту назначения через 9 часов, а товарный — через 16 часов после встречи. Определить, какое время в пути находился каждый поезд.

4. В треугольнике ABC точка H — точка пересечения высот. Известно, что $\overrightarrow{AB}=(6;-2)$, $\overrightarrow{AC}=(3;4)$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AH}$.

5. При каких значениях a функция

$$y(x)=(1+a)x+2\sin\frac{x}{2}-(8a+4)\sin\frac{x}{4}+\frac{a\pi}{2}$$

имеет на интервале $x\in\,]-5\pi;11\pi[$ четыре экстремума?

Вариант 3

(факультет металлургии цветных и редких металлов и сплавов)

1. Упростить выражение

$$\left(\frac{m\sqrt{m}+n\sqrt{n}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}-\sqrt{m\cdot n}\right)\cdot\left(\frac{m-n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}\right)^{-2}.$$

2. Решить уравнение

$$\sqrt{x+7}-x+3=0.$$

3. Решить систему

$$\begin{cases}\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}=1-\sin x\\ \left|\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{2}\right|<\dfrac{3\pi}{4}.\end{cases}$$

4. Решить неравенство

$$\frac{1}{6}\log_2(5^x-4)+\frac{1}{2}\log_{5^x-4}2<\frac{\log_{\sqrt{2}}\sqrt[3]{4}}{\log_9 729}.$$

5. Объем прямой треугольной призмы $ABCA'B'C'$ равен 3. Определить координаты вершины A', если координаты вершин одного из оснований призмы известны: $A(1;0;1)$, $B(2;0;0)$, $C(0;1;0)$.

Вариант 4

(технологический факультет)

1. Решить неравенство

$$(0{,}4)^x-(2{,}5)^{x+1}>1{,}5.$$

2. Решить уравнение

$$\sin^4 x-\cos^4 x=\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right).$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\log_2 x-\log_4 y=\log_4(4-x)\\ \log_3(x+y)=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{y}{x}.\end{cases}$$

4. Парабола $y=x^2+px+q$ пересекает прямую $y=2x-3$ в точке с абсциссой 1. При каких p и q расстояние от вершины параболы до оси Ox минимально? Найти это расстояние.

5. Найти площадь треугольника, если даны двух его сторон соответственно равны 1 см и $\sqrt{15}$ см, а длина медианы третьей стороны равна 2 см.

Вариант 5

(факультет металлургии черных металлов и сплавов)

1. Решить уравнение

$$2\cos^2 2x-\cos 2x-1=0.$$

2. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}(8-3x-2x^2)<-1.$$

3. В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар. Расстояние центра шара от вершины пирамиды равно a, а угол наклона боковой грани к плоскости основания равен α. Определить полную поверхность пирамиды.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченную параболой $y=x^2-2x+2$, касательной к ней в точке $M(3;5)$ и осью ординат. Сделать рисунок.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}2^y\cos x+2^{-y}\sin x=\dfrac{3}{2}\\ 2^y\sin x-2^{-y}\cos x=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Физика

Задачи устного экзамена

1 (факультет металлургии черных металлов и сплавов). Сколько молекул находится в сосуде объемом $V=1$ см^3 при температуре $t=10°$C, если давление в сосуде $p=10^{-11}$ мм рт. ст.?

2 (факультет металлургии цветных и редких металлов и сплавов). Определите стоимость получения $m=12$ кг меди при электролизе $CuSO_4$, если КПД установки $\eta=80\%$, электролиз идет при напряжении $U=10$ В, тариф $B=2$ коп/(кВт · ч), молярная масса меди $M=63{,}5\cdot10^{-3}$ кг/моль.

3 (технологический факультет). Камень брошен с башни со скоростью $|\vec{v}_0|=32{,}6$ м/с в горизонтальном направлении. Найдите радиус кривизны траектории камня в точке, в которой он будет через $\tau=5$ с после начала движения. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

4 (физико-химический факультет). Пучок электронов, ускоренных разностью потенциалов $\Delta\varphi=300$ В, влетает в плоский горизонтально расположенный конденсатор параллельно его пластинам. Найдите разность потенциалов $\Delta\varphi_1$, приложенную к пластинам конденсатора, если пучок смещается на экране на $h=3{,}6$ см. Длина пластин конденсатора $l=4$ см, расстояние от конца конденсатора до экрана $l_1=10$ см, расстояние между пластинами конденсатора $d=1{,}2$ см.

5 (факультет полупроводниковых материалов и приборов). Через медную пластинку сечением $S=ab$ пропускается ток $I=10$ А, направленный перпендикулярно к плоскости пластинки. Пластинка помещена в магнитное поле, перпендикулярное ребру b и направлению тока. Индукция магнитного поля $|\vec{B}|=0{,}6$ Тл, толщина пластинки $a=0{,}1$ мм. Определите возникающую поперечную разность потенциалов, считая при этом, что на каждый атом меди приходится один электрон проводимости. Плотность меди $\rho=8{,}6\cdot10^3$ кг/м³, молярная масса $M=63{,}5\cdot10^{-3}$ кг/моль.

В. Бузанов, Н. Квачева,
О. Малючков, В. Треногин

Московский институт электронного машиностроения

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Найти площадь фигуры, заключенной между графиками функций $y=2x^2-3x+2$ и $y=x+8$.

2. Решить уравнение
$$7^{2x\cdot\lg 2}-10=|2^{x\cdot\lg 7+3}-10|.$$

3. Проверить, удовлетворяет ли условию $y'=\frac{2}{y^2}$ функция $y=\sqrt[3]{6x+1}$, и найти функцию $y=f(x)$, удовлетворяющую этому же условию, график которой проходит через точку M (4; 3).

4. Прямая l проходит через точки (3; 0), (0; 4). Точка A лежит на параболе $y=2x-x^2$. Найти расстояние от точки A до прямой l в случае, когда A совпадает с началом координат, и указать координаты точки A на параболе, при которых расстояние от нее до прямой l будет наименьшим.

5. Найти при $a=1$ все решения уравнения
$$\sin 2(x-\pi)-\sin(3x-\pi)=a\cdot\sin x,$$
расположенные на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, и выяснить, при каких a данное уравнение имеет единственное решение на этом отрезке.

Вариант 2

1. Написать уравнение касательной к графику функции $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+2$ в точке с абсциссой $x_0=\frac{\pi}{2}$.

2. Какие из следующих функций $2x^2-1$, $\cos 2^x$, $2^{\cos x}$, $2x^3+x+2$, $1-5\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $3\sin x-\cos 2x$ являются и какие не являются периодическими? Для периодических функций указать их период.

3. На координатной плоскости даны точки A (−2; 0) и B (0; 4) и прямая $l: y=x$. Найти периметр треугольника AMB, где M — точка с абсциссой 3, лежащая на прямой l. При каком положении точки M на прямой l периметр треугольника AMB наименьший?

4. При $n=1, 2, 3$ сравнить числа $\sin^n 1°+\sin^n 4°$ и $\sin^n 2°+\sin^n 3°$.

5. Обозначим через A_α, где $\alpha\in\mathbf{R}$, множество точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $y=\frac{x-\alpha}{\alpha x-1}$, через B_α — множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $\alpha(1+xy)=x+y$. Изобразить множества A_1 и B_1, а также множество C всех точек, которые не принадлежат ни одному из множеств A_α, но принадлежат хотя бы одному множеству B_α.

В. Тонян

Московский энергетический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростив выражение, найти предел
$$\lim_{x\to a}\left[\frac{(x^3-2ax^2-a^2x+2a^3)(x-2a)^{-1}+2a(x+a)}{x^3-a^2x}-\frac{2}{x-a}\right].$$

2. Найти область определения функции
$$f(x)=\log_3[(3\cdot2^x)^x+3\cdot2^{x^2+1}-2\cdot3^{x+1}-9^x].$$

3. Среди всех прямоугольных треугольников площади S найти тот, для которого площадь описанного круга будет наименьшей.

4. Найти все корни уравнения
$$\cos^4x-3\cos 3x=3\cos x-\cos^3x\cdot\cos 3x,$$
лежащие на отрезке $\left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right]$.

5. Определить объем параллелепипеда, если все его грани — ромбы, длины сторон которых равны a и острые углы равны α.

Вариант 2

1. Упростив выражение для $f(x)$, найти $f'(x)$, если
$$f(x)=\left[\left(\frac{x-4}{x^2-8\sqrt{x}+2\sqrt{x^3}+16}\right)^{-1}+\sqrt{2}^{\,2+\log_2 x}\right]^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{\sqrt{x^3}-4\sqrt{x}}{\sqrt[4]{4x^3}-2\sqrt[4]{4x}}.$$

2. Решить уравнение
$$2(\lg 2-1)+\lg(5^{\sqrt{x}}+\lg 10)=\lg(5^{1-\sqrt{x}}+5).$$

3. Число 26 представить в виде суммы трех положительных слагаемых так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей и чтобы второе слагаемое было втрое больше первого.

4. Найти все корни уравнения

$$(\mathrm{tg}^2 x-1)^{-1}=1+\cos 2x,$$

удовлетворяющие неравенству $2^{x+1}-8>0$.

5. В круг вписана равнобедренная трапеция так, что диаметр круга служит основанием трапеции. Найти отношение площадей круга и трапеции, если тупой угол трапеции равен α.

Задачи устного экзамена

1. Решить неравенство

а) $\frac{x^2(x+2)}{2x+3}<0$;

б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2\sqrt{x}-3}>1$;

в) $\log_{1-x^2}(x^2+x+5)<0$.

2. Решить графически систему неравенств

$$\begin{cases} y-x^2\geq -5 \\ x+y\leq 0 \\ \sqrt{x^2-4}\geq x. \end{cases}$$

3. Построить график функции

а) $y=x^2+5|x|$;

б) $y=\lg|x-2|$;

в) $y=\log_{1-\sin^2 x}\cos x$;

г) $y=3^{x+\frac{x^2}{|x|}}$.

4. Построить прямоугольный треугольник по данному острому углу и противолежащему катету.

5. Упростить выражение

$$\left(\frac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha},$$

если $3\pi<\alpha<4\pi$.

6. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x)=|x^2-|x||$ в точке с абсциссой -2.

7. При каких a справедливо неравенство

$$\int_1^a \frac{dx}{x^2-1}<\ln(a-2)\ ?$$

Физика

В зависимости от избранного факультета абитуриенты сдавали экзамен по физике либо письменно, либо устно. На письменный экзамен отводилось 4 астрономических часа.

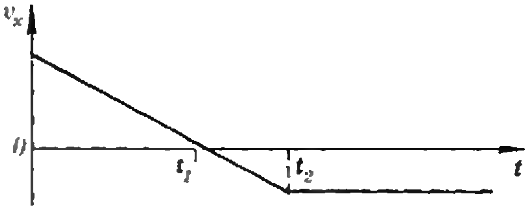
Письменный экзамен

Вариант

1. Законы отражения и преломления света. Показатель преломления, его физический смысл.

2. Материальная точка может перемещаться прямолинейно вдоль оси X. По известному графику зависимости проекции v_x скорости данной точки от времени t (см. рис.) постройте графики зависимости проекции a_x ускорения и координаты x точки от времени. Начальные условия: при $t=0$ $x=0$.

3. Каждая из двух одинаковых сферических капелек воды имеет заряд, равный заряду электрона, причем сила электрического отталкивания капелек уравновешивает силу их взаимного тяготения. Определите радиус r капельки. Заряд электрона $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, гравитационная постоянная $G=6{,}67\times\times10^{-11}$ м^3/(кг · с^2), электрическая постоянная $\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м, плотность воды $\rho=1000$ кг/м^3.



4. Электродуговая печь потребляет ток $I=200$ А от сети, имеющей напряжение $U=220$ В. Последовательно с печью включен ограничивающий резистор сопротивлением $R=0{,}2$ Ом. Определите мощность P, потребляемую печью.

5. На тележку с песком общей массой $M=20$ кг, движущуюся прямолинейно по горизонтальной плоскости со скоростью $|\vec{v}|=5$ м/с, падает вертикально с высоты $H=3$ м камень массой $m=5$ кг и застревает в песке. Определите количество теплоты Q, выделившееся при этом.

Задачи устного экзамена

1. Конькобежец, разогнавшись до скорости $|\vec{v}|=6$ м/с, въезжает накатом на ледяную горку. На какую максимальную высоту h он поднимется, если угол между наклонной плоскостью горки и горизонтом $\alpha=30°$, а коэффициент трения коньков о лед $\mu=0{,}1$?

2. Вертикальный прямой цилиндр закрыт сверху тяжелым поршнем. В цилиндре находится кислород, масса которого $m=2\cdot10^{-3}$ кг. После увеличения температуры на $\Delta T=100$ К поршень, имеющий площадь $S=10^{-2}$ м^2, поднялся на высоту $h=0{,}14$ м. Определите массу M поршня, если внешнее давление во время процесса не изменялось и равнялось $p_0=10^5$ Па. Трение поршня о стенки цилиндра можно не учитывать. Молярная масса кислорода $\mu=32\times\times10^{-3}$ кг/моль. Универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль · К).

3. Рамка, имеющая форму равностороннего треугольника, помещена в однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$ ($|\vec{B}|=0{,}1$ Тл). Перпендикуляр к плоскости рамки составляет с направлением магнитного поля угол $\alpha=30°$. Определите длину a стороны рамки, если при равномерном уменьшении магнитного поля до нуля за время $\tau=0{,}01$ с в рамке индуцируется ЭДС $\mathscr{E}=10^{-3}$ В.

В. Нитусов,
В. Прохоренко,
В. Чудов

А. Салтовский

ЕС ЭВМ-семейство универсальных вычислительных машин

В настоящее время универсальные ЭВМ обычно проектируются и производятся семействами. Каждый представитель семейства имеет единые для всей семьи основные технические характеристики, но отличается от «родственников» производительностью.

В СССР и странах социалистического содружества наибольшее распространение получило семейство универсальных ЭВМ серии ЕС (Единая Система). Более десятка типов ЭВМ этой серии, имеющих различную производительность, совместимы с точки зрения используемых программ и данных. Семейство располагает широким набором периферийных устройств, применяемых практически во всех машинах серии. Все машины имеют единые конструктивно-технологические принципы построения.

Главная цель, которая ставилась при проектировании семейства, — охватить как можно больше областей применения ЭВМ так, чтобы стоимость машин и затраты на их изготовление находились в экономическом соответствии со скоростью решения, важностью и сложностью решаемых задач. Этой же цели служит единое программное обеспечение семейства, стоимость которого в наши дни превосходит стоимость технических средств. Принципиально важным в таких условиях оказывается общий *интерфейс* ввода-вывода — стандартизованная совокупность технических и программных средств связи между каналом и внешними устройствами, которая дает возможность организовать обмен информацией между ними в стандартной форме; это позволяет использовать в одной ЭВМ самые разнообразные по своему назначению внешние устройства.

Состав семейства

С 1969 года, когда между странами СЭВ было достигнуто соглашение о сотрудничестве в области вычислительной техники, за сравнительно небольшой промежуток времени были разработаны модели ЕС ЭВМ первой очереди — Ряд-1, а с 1973 года была начата разработка более совершенных моделей этой серии — Ряд-2.

Сегодня состав семейства выглядит так:

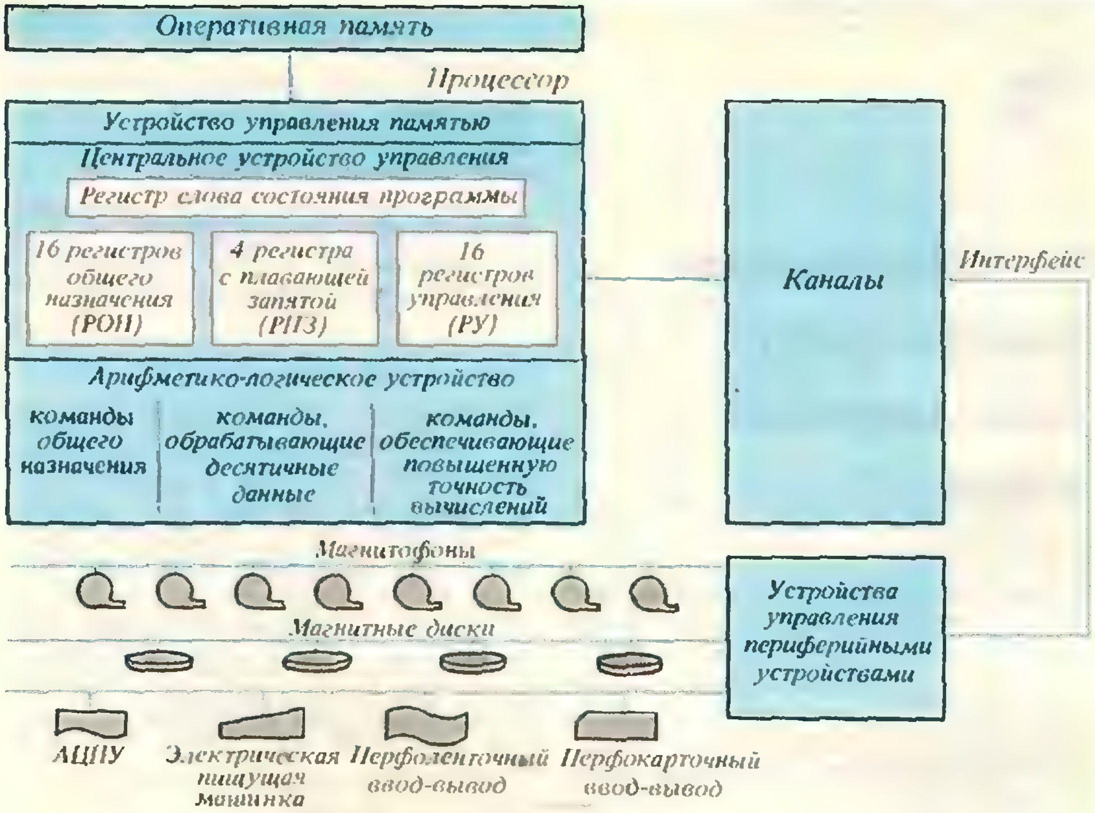
малые ЭВМ:
модели — ЕС-1010, ЕС-1020, ЕС-1021;
быстродействие — 10÷100 тысяч операций в секунду;
объем оперативной памяти — 64÷512 килобайтов;

средние ЭВМ:
модели — ЕС-1022, ЕС-1030, ЕС-1032, ЕС-1033, ЕС-1035, ЕС-1040, ЕС-1045, ЕС-1055;
быстродействие — 80÷500 тысяч операций в секунду;
объем оперативной памяти — 128—2048 килобайтов;

большие ЭВМ:
модели — ЕС-1050, ЕС-1052, ЕС-1060, ЕС-1065;
быстродействие — 500 тысяч÷3 миллиона операций в секунду;
объем оперативной памяти — 512÷8192 килобайта.

Единство внешних устройств

Устройства ввода и вывода информации, применяемые в современных ЭВМ, многочисленны и разнообразны. Это и АЦПУ (алфавитно-циф-


Оперативная память
Процессор
Устройство управления памятью
Центральное устройство управления
Регистр слова состояния программы
16 регистров общего назначения (РОН)
4 регистра с плавающей запятой (РПЗ)
16 регистров управления (РУ)
Арифметико-логическое устройство
команды общего назначения
команды, обрабатывающие десятичные данные
команды, обеспечивающие повышенную точность вычислений
Каналы
Интерфейс
Магнитофоны
Магнитные диски
Устройства управления периферийными устройствами
АЦПУ
Электрическая пишущая машинка
Перфоленточный ввод-вывод
Перфокарточный ввод-вывод

ровые печатающие устройства), и перфокарточные устройства ввода-вывода, и устройства ввода-вывода на перфоленте. В последние годы стали широко использоваться устройства непосредственного, диалогового общения оператора с ЭВМ — электрические пишущие машинки и алфавитно-цифровые дисплеи*). Все эти устройства существуют в семействе ЕС ЭВМ. Устройства ввода-вывода ЕС ЭВМ однотипны: каждое из них может быть с равным успехом подключено к любой из машин семейства. Точно так же соединяются с машинами внешние запоминающие устройства, которые в семействе ЕС ЭВМ представлены магнитными дисками и накопителями на магнитной ленте. Благодаря стандартности интерфейса они могут использоваться в разных моделях независимо от их производительности. Отличие, как правило, чисто количественное: более мощным парком внешних устройств располагают машины большей производительности. Так, например, объем внешней памяти на магнитных дисках составляет 15÷100 мегабайтов для ЕС ЭВМ малой производительности, а для машин большей производительности достигает нескольких сотен мегабайтов.

Единство архитектуры

«Семейная» преемственность различных моделей ЕС ЭВМ хорошо видна на схеме (см. рисунок), где показан ряд обязательных для каждой модели устройств.

В качестве примера рассматривается общая структура моделей ЕС ЭВМ Ряда-2.

Основные элементы архитектуры ЕС ЭВМ Ряда-2 таковы: 1) процессор; 2) оперативная память; 3) канал ввода-вывода; 4) управление внешними устройствами; 5) внешние устройства.

Ядро системы — центральный процессор («Квант», 1980, № 5).

---

*) Более подробно о внешних устройствах рассказано в статье «Организация ввода и вывода в ЭВМ» («Квант», 1980, № 6).

Внутренняя организация процессора может отличаться от одной модели к другой. Это связано с тем, что производительность модели отражает стоимость затрат на ее изготовление. По аналогии, скажем, с кораблестроением, можно сказать, что совсем не обязательно придавать корпусу прогулочного катера ледокольную прочность — у каждого свои функции.

Программная совместимость между машинами разных моделей семейства ЕС ЭВМ обеспечивается тем, что для всех моделей реализована одна и та же система команд и использована одна и та же структура данных (см. статью «Трехадресные, одноадресные и... безадресные машины» в № 4 «Кванта» за этот год). В частности, каждый процессор в машинах ЕС ЭВМ имеет 16 регистров общего назначения и 4 регистра с «плавающей запятой»[1] для обеспечения повышенной точности вычислений, а последние модели ЕС ЭВМ (Ряд-2) располагают в процессорах шестнадцатью регистрами управления; эти регистры недоступны обычным программам, но активно используются управляющей программой для организации вычислительного процесса и управления им.

Обязательной принадлежностью всех процессоров моделей ЕС ЭВМ является *регистр слова состояния программы*. Слово состояния программы, которое хранится в этом 64-разрядном регистре, предназначено для управления последовательностью исполнения команд, извлекаемых из оперативной памяти.

Обмен данными между оперативной памятью и внешними устройствами достигается с помощью канала (специализированного процессора ввода-вывода — см. упомянутую статью в «Кванте», 1980, № 6). Вмешательство процессора в эту процедуру минимально — он запускает операцию и анализирует результат в конце ее исполнения.

Единство программного обеспечения

Система команд ЕС ЭВМ, единая для всего семейства, позволяет осуществлять широкий набор операций над числовыми данными повышенной точности, необходимыми в научных задачах и в учетно-экономических приложениях, и над произвольными символами, характерными для задач обработки текстовой информации.

Та же общая линия на стандартизацию внутри семейства и универсальность применений видна и в системах программирования на языках высокого уровня, которыми оснащаются машины ЕС ЭВМ. С незначительными модификациями на всех машинах семейства можно работать на языках программирования Фортран, Кобол, Алгамс, ПЛ/1. Сейчас многие пользователи машин ЕС получают возможность работать на языке Паскаль. Об этом языке будет подробно идти речь в Заочной школе программирования после летних каникул.

Говоря о программной совместимости машин семейства, важно отметить, что не все программы, написанные для ЕС ЭВМ Ряда-2, будут работать на машинах ЕС ЭВМ Ряда-1, так как старшие модели семейства содержат дополнительную группу команд, реализованную только на этих последних моделях. А вот программы ЕС ЭВМ Ряда-1 без всяких изменений могут обрабатываться на машинах ЕС ЭВМ Ряда-2. В этом случае говорят о программной преемственности «снизу — вверх».

В настоящее время ЕС ЭВМ представляет собой развитую систему вычислительных машин социалистических стран, систему, которая нашла широкое применение во всех отраслях народного хозяйства. Разработка новых поколений семейства продолжается. Основные устремления конструкторов сейчас направлены как на повышение производительности, так и на снижение себестоимости. Это связано прежде всего с переходом на новую конструктивно-технологическую базу — большие интегральные схемы.

---

[1] Это значит, что запятую, стоящую перед дробной частью числа, можно расположить в разных местах регистра.

10-летие летней ФМШ в Белоруссии

«Если ты попал в «Зубренок»,
То талантлив был с пеленок.
Почитай статьи из «Кванта»
И проявятся таланты».

Так поется в шуточном гимне Республиканской летней физико-математической школы. Создана эта ФМШ в 1971 году по инициативе молодых ученых Академии наук БССР и Белорусского государственного университета, поддержанной ЦК ЛКСМ Белоруссии и Министерством просвещения республики. Начиная с того времени, каждый август юных математиков и физиков гостеприимно встречают хозяева пионерского лагеря ЦК ЛКСМ Белоруссии «Зубренок».

Пожалуй, нет в республике более подходящего места для летней ФМШ. Лагерь расположен в сосновом лесу на берегу живописнейшего озера Нарочь. Для занятий ФМШ предоставляются прекрасно оборудованные классные комнаты и кабинеты. «Зубренок» позволяет удачно сочетать отдых и творчество школьников.

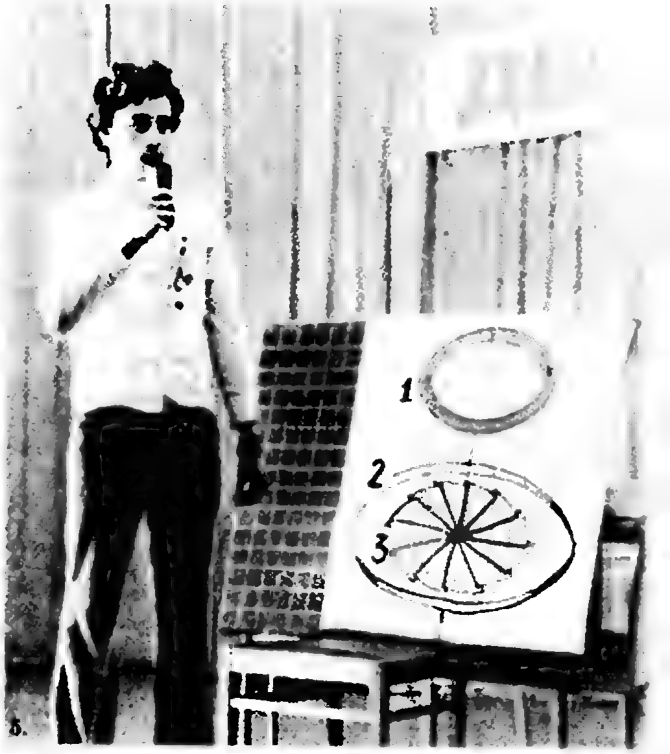
В летнюю ФМШ приглашаются победители областных олимпиад школьников и лучшие учащиеся Республиканской заочной физико-математической школы. Преподаватели ФМШ — научные сотрудники институтов математики, тепло- и массообмена, физики Академии наук БССР. Они проявляют много выдумки и изобретательности в организации работы школы, постоянно ищут новые формы преподавания, но вместе с тем бережно сохраняют традиции школы.

Учебная программа школы состоит из двух общих курсов (читаются утром поочередно, один по математике и один по физике) и нескольких специальных курсов (читаются вечером). Общие курсы близки к школьной программе, но не являются ее повторением. Открывать в известном неизвестное, учить видеть вещи и явления с разных сторон, прививать навыки исследования, учить думать — вот те задачи, которые решаются при изложении общего курса.

Специальные курсы, как правило, выходят за рамки школьной программы. Основное требование к ним — доступность и увлекательность. Они должны раскрывать красоту предмета, развивать у ребят стремление к расширению своих знаний, побуждать мыслить. Спецкурсы читаются как преподавателями общих курсов, так и специально приглашенными учеными АН БССР, Московского и Белорусского государственных университетов. Вот темы спецкурсов последних лет: «Введение в механику микромира», «Что такое гидро-аэродинамика», «Мир необычных жидкостей», «Элементы физики плазмы», «Специальная теория относительности», «Основы астрофизики», «Кварки и глюоны», «Начала топологии», «Неевклидовы геометрии», «Теория графов», «Элементы теории групп», «О раскраске карт», «Элементы теории Галуа» и др. Одновременно читается несколько спецкурсов (не меньше числа учебных отрядов), причем через две недели цикл спецкурсов полностью обновляется. Чтению спецкурсов предшествует их представление — «реклама». Ребята выбирают спецкурс по вкусу и интересам. За смену каждый учащийся может прослушать два специальных курса.

Кроме учебных занятий для ребят демонстрируются научно-популярные фильмы, организуются встречи с ведущими учеными республики. Так, в последние годы в гостях у летней ФМШ побывали вице-президент АН БССР академик АН БССР В. А. Белый, академик-секретарь физико-математического отделения АН БССР Герой Социалистического Труда, академик АН БССР Ф. И. Федоров, директор Института математики АН БССР, лауреат Ленинской премии, академик АН БССР В. П. Платонов, директор Института физики АН БССР, Герой Социалистического Труда, академик АН БССР Б. И. Степанов, лауреат Ленинской премии, академик АН БССР А. К. Красин и др. Приезжают и ребята в гости к белорусским ученым, для них организуются экскурсии в НИИ АН БССР. Обязательным для летней ФМШ является проведение физико-математической олимпиады.

Заканчивает свою работу летняя ФМШ традиционным праздником — Днем науки. Начинается он торжественной линейкой, на которой подводятся итоги школы, награждаются победители олимпиад. «Архимед» принимает у учащихся полушуточную-полусерьезную клятву на верность науке и обещание «всегда докапываться до истины, как бы глубоко она ни была зарыта». Нелегко при-



5.

3.

4.

1. **Академик АН БССР Ф. И. Федоров поздравляет победителей олимпиады.**
2. **Пионерский салют «Архимеду».**
3. **Награды «Архимеда» — лучшим!**
4. **Конкурс отрядных гимнов.**
5. **«Защита» проекта вечного двигателя.**

Фото О. Багинского и О. Рабиновича

ходится преподавателям на «уроке-наоборот» — своеобразной пресс-конференции — когда учащимся разрешается задавать своим преподавателям самые невероятные и каверзные вопросы. Конкурсы отрядных гимнов, «околонаучных» миниатюр, научных проектов, захватывающие эстафеты, острейшие физматбои, непременно сопровождаемые шутками и весельем, превращают День науки в неповторимый и надолго запоминающийся праздник.

Разъезжаются ребята домой, увозя новые знания, адреса друзей, веру в собственные силы, желание служить науке, добрую память о «Зубренке» и летней ФМШ.

За десять лет работы в летней ФМШ побывало около 1500 школьников республики. Сегодня многие из них уже работают в научно-исследовательских институтах республики, являются студентами различных вузов страны. Немало бывших учеников летней ФМШ и среди нынешних ее преподавателей.

Можно с уверенностью сказать, что летняя ФМШ в «Зубренке» оказывает значительное влияние на повышение интереса к физико-математическим наукам и развитие творческих способностей школьников Белоруссии, и накануне вступления в новое десятилетие пожелать ее ученикам и преподавателям дальнейших успехов.

В. Гороховик, О. Рабинович,
Т. Фисенко

Математические соревнования в ФМШ при ЛГУ

Школьные олимпиады

В физико-математической школе-интернате № 45 при Ленинградском университете ежегодно, начиная с 1965 года проводятся школьные математические олимпиады.

На первом туре такой олимпиады предлагается восемь задач, пять из которых близки к задачам, решаемым на уроках. На решение задач первого тура отводится 5 часов.

Второй тур, в отличие от «письменного» первого тура, — «устный». Разумеется, никого не заставляют решать задачи устно, однако окончательное, «чистовое» решение задачи не записывается участником, а рассказывается двум членам жюри. Когда участник олимпиады начинает рассказывать решение какой-либо задачи, против его фамилии ставится знак «—», который на жаргоне жюри именуется «подход». Если задача решена правильно, то «—» перечеркивается вертикальной линией. Если же в решении обнаружена ошибка, то участник, возвратившись на место, может постараться исправить свое решение. В зависимости от того, решена задача с первого, второго или третьего подхода, участник получает оценку «+», «ǂ» или «$\not\equiv$». Как правило, более трех подходов по одной задаче не допускается.

Эта форма проведения олимпиады имеет определенные преимущества. Ведь часто случается, что школьнику кажется, будто он решил задачу, и, записав неверное решение, он больше к задаче не возвращается. На устной олимпиаде участник имеет возможность исправить неверное решение, так что в итоге оказывается больше правильно решенных задач. Кроме того, устная олимпиада компактна: ее итоги подводятся через час-полтора после завершения тура.

Приведем несколько задач из школьных олимпиад разных лет (в скобках указывается номер олимпиады и номер тура).

1. Найдите множество центров окружностей радиуса 5, пересекающих данную полуокружность радиуса 2 в двух разных точках. (I, I).

2. Докажите, что $\sqrt{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}}=\frac{1}{3}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{20}-\sqrt[3]{25})$. (II, 1)

3. Из точки A, не лежащей на прямой l, проведено 9 отрезков, концы которых лежат на l. Докажите, что, передвигая эти отрезки параллельно самим себе, нельзя составить из них девятиугольника. (III, 1)

4. Четыре деревни расположены в вершинах квадрата со стороной 10 км. Жители хотят соединить деревни системой дорог, но имеющихся в их распоряжении материалов достаточно для сооружения лишь 28 км дорог. Как они должны поступить? (IV, 2)

5. Сколько раз в сутки нельзя определить время по часам, если неизвестно, какая из стрелок — часовая, а какая — минутная? (V, 2)

6. Сколько цифр имеет наименьшее натуральное число, кратное 225, сумма цифр которого равна 225? (VI, 1)

7. Расстоянием от точки до фигуры называется расстояние от этой точки до ближайшей к ней точки фигуры. Найдите множество точек плоскости, равноудаленных от контура данного квадрата и отрезка, соединяющего середины двух противоположных сторон этого квадрата. (VII, 1)

8. Имеются двое песочных часов. На одних песок пересыпается за 7 минут, на других — за 11 минут. Отмерьте 17 минут, начиная с заданного момента времени. (VIII, 1)

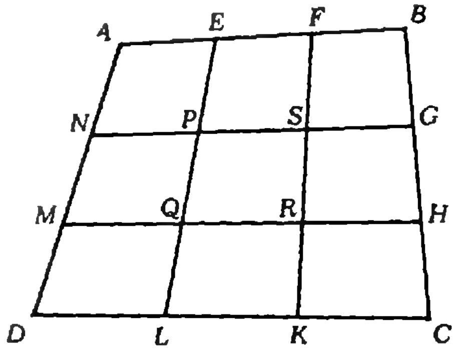
9. Существует ли такая функция f, что $D(f)=\mathbf{R}$ и для любого числа a уравнение $f(x)=a$ имеет ровно два корня? (IX, 1)

10. Существует ли такая функция f, что $D(f)=\mathbf{R}$ и для любого числа x $f(f(x))=x^2+2$? (X, 2)

11. Прямая разбита на отрезки, каждый из которых окрашен в красный или синий цвет (концы отрезков окрашены в оба цвета). Докажите, что хотя бы один из цветов таков, что среди расстояний между точками этого цвета встречаются все положительные расстояния. (XI, 1)

12. a и b — натуральные числа. Докажите, что существует такое натуральное число n, что у чисел na и nb одинаковая сумма цифр. (XII, 2)

13. Каждая сторона выпуклого четырехугольника поделена на три равные части и точки деления соединены, как показано на рисунке. Докажите, что $(PR)\parallel(AC)$ и $(QS)\parallel(BD)$. (XIII, 2)



14. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа. Докажите, что
$$a_1^{na_1}a_2^{na_2}\cdot\ldots\cdot a_n^{na_n}\geqslant(a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n)^{a_1+a_2+\ldots+a_n}.$$
(XIV, 1)

15. Докажите, равенство
$$\frac{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\left(5^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(11^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\left(6^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(12^4+\frac{1}{4}\right)}=\frac{1}{313}.$$
(XV, 2)

16. В выпуклом шестиугольнике $ABCEHK$ углы A, C и H равны. Кроме того, $|AB|=|BC|$, $|CE|=|EH|$, $|HK|=|KA|$. Докажите, что в этот шестиугольник можно вписать окружность. (XVI, 2)

Математические бои

О правилах проведения математического боя «Квант» уже писал (1972, № 10). У нас в школе в бое обычно участвуют команды двух классов. Основное отличие математического боя от олимпиады состоит в том, что задачи здесь решаются коллективно. С утра обе команды получают один и тот же комплект задач и в двух разных помещениях начинают их решать. После четырех-пяти часов, отводимых на решение задач, начинается вторая часть математического боя, в которой команды защищают свои решения и ищут ошибки в решениях соперников.

Приведем несколько задач одного из математических боев.

1. Докажите, что уравнение $x^3+y^3+z^3=2$ имеет бесконечно много решений в целых числах.

2. Правильный треугольник площади 1 лежит внутри выпуклого семиугольника площади 1,0000001. Докажите, что хотя бы один из углов семиугольника больше 139°.

3. Все десятизначные числа выписаны в порядке возрастания без пропусков на бумажной ленте. При каком наименьшем n по любому куску ленты, на котором написано n цифр, можно определить, откуда этот кусок вырван?

4. m, n — натуральные числа. Докажите, что если m нечетно, то числа 2^m-1 и 2^n+1 взаимно просты.

Заочные конкурсы

В течение всего учебного года в школе проводится заочный конкурс по решению задач. Каждую неделю участники конкурса получают очередное задание из пяти задач. Решения этих задач представляются через неделю в письменном виде. Вместе с формулировкой очередного задания объявляются баллы и проводится разбор задач, предложенных две недели назад. Решение каждой задачи оценивается по пятибалльной системе.

Вот пример одного из заданий 1979/80 учебного года:

1. Дана окружность, точка C на ней и точки A и B, не лежащие на этой окружности. Построить на окружности такую точку S, что прямая SC делит пополам угол ASB.

2. Натуральное число n не является степенью простого числа. Докажите, что число $\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ единиц}}$ имеет по крайней мере 8 различных натуральных делителей.

3. Докажите, что прямоугольник с иррациональным отношением сторон нельзя разрезать на квадраты.

4. При каких натуральных m и n в десятичной записи каждого из чисел m^n и n^m ровно $\frac{m+n}{2}+1$ цифр?

5. Требуется огородить забором длины a прямоугольный участок и затем к построенному забору пристроить еще один забор длины b так, чтобы его стороны шли параллельно сторонам первого забора и чтобы общая площадь, огороженная двумя заборами, была наибольшей.

Л. Курляндчик

Вечерняя физическая школа

Вечерняя физическая школа (ВФШ) при физическом факультете МГУ объявляет набор учащихся в 8—10 классы на 1981/82 учебный год.

Основная цель ВФШ — помочь учащимся глубже изучить физику в объеме школьной программы. Занятия проводятся в форме лекций и семинаров. Кроме того, на лекциях ведущих ученых факультета учащиеся ВФШ ознакомятся с основными направлениями современной физики, смогут посетить научные лаборатории.

Успешно закончившие обучение получают справку об окончании ВФШ.

Прием в ВФШ производится по результатам собеседования, которое будет проводиться с 23 сентября. Для поступления в школу необходимо лично заполнить заявление в комитете ВЛКСМ физфака МГУ и сдать две фотокарточки размером 3×4 см. Заявления будут приниматься с 3 по 21 сентября ежедневно (кроме воскресенья) с 16.00 до 18.00.

Адрес ВФШ: 117234, Москва, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ВФШ.
Телефон для справок: 139-26-56.

Спрашивайте — отвечаем

Много делает «Квант» для совершенствования математических знаний учащихся, оказывает большое содействие учителям в обучении школьников. Но вопросы письменного оформления решений задач, доказательств теорем, особенно с использованием современной символики, еще ждут своего рассмотрения на страницах журнала.

...В этом отношении журнал мог бы серьезно помочь и ученикам и учителям. Например, параллельно с изложением теоретического материала и публикацией заданий экзаменационных вариантов, стоило бы давать образцы письменных решений задач и доказательств теорем, показать, как абитуриентам следует оформлять свои работы на вступительных экзаменах в вузы.

В. П. Данищук,
учитель математики ПТУ
(п. Отыня
Ивано-Франковской обл.)

Письма многих читателей в «Квант» в той или иной форме содержат тот же вопрос: как нужно оформлять письменную работу на вступительном экзамене в вуз по математике? Школьники, абитуриенты, учителя просят редакцию опубликовать «образцы экзаменационных решений», объяснить, как требуют решать конкурсные задачи экзаменационные комиссии вузов.

Ответ на этот вопрос очень короток и прост: экзаменационные комиссии требуют решать задачи правильно. Экзаменаторов интересует уровень знаний поступающего в пределах, предусмотренных программой вступительных экзаменов по математике, его умение верно решать задачи и проводить доказательства, математически грамотно излагать свои рассуждения. Нет, да и быть не может каких-то особых канонов, регламентирующих формальный порядок записи решений, рассуждений или вычислений в экзаменационной работе, требующих обязательного использования специальной «современной символики» и т. п.

Конечно, это не значит, что в экзаменационной работе допустимо писать как попало. Следует придерживаться естественных общечеловеческих норм — оформлять работу аккуратно, чтобы ее легко было читать. Слишком часто приходится видеть небрежно выполненные работы, в которых формулы записаны беспорядочно, без объяснений, текст написан настолько неразборчиво, что поступающий потом с трудом расшифровывает его сам! Все это свидетельствует о несерьезном отношении абитуриента к делу, о его неумении работать, о неуважении прежде всего к собственному труду. И результат такого «труда» обычно бывает печальным, поскольку мало кому удается точно ориентироваться в подобном хаосе собственных записей и не допустить ошибки.

Читатели часто спрашивают, насколько подробно надо излагать решение. Детальные рекомендации здесь дать трудно, но ясно одно: следует стремиться исчерпывающе и логически правильно объяснить все этапы необходимых рассуждений. Так, в алгебраическом примере полезно пояснить, что из чего и каким образом получается при преобразовании, указать возникающие ограничения на значения переменных; в геометрической задаче целесообразно назвать применяемые по ходу дела теоремы, доказать используемые промежуточные геометрические факты, при необходимости сделать вспомогательные чертежи и т. д.

Иногда школьников приучают к неким формальным «схемам записи решений», отступать от которых не дозволяется. Вот только один (довольно распространенный) пример такого формализма: перед решением уравнения обязательно выписывать область допустимых значений переменной, независимо от того, понадобится это в ходе решения или нет. Понятно, что подобные рекомендации не диктуются ни соображениями здравого смысла (иногда исчерпывающее решение уравнения бывает много проще, чем отыскание его ОДЗ), ни требованиями математической строгости.

И последний, интересующий многих, вопрос: если задача допускает несколько разных решений, то какое из них предпочтительнее? Например, девятиклассница Е. Серебрянник (Москва) прислала в редакцию четыре решения одной геометрической задачи и спрашивает: «Хотелось бы знать,... какой способ наиболее подходящий в девятом классе, а какой — в десятом?» И в девятом, и в десятом классе и на вступительных экзаменах хорош любой способ решения, лишь бы он был правильным. Подчеркнем, что решение задач приемных экзаменов не требует использования каких-либо сведений, выходящих за рамки школьной программы.

Н. Розов

Электроизмерительные приборы

1. $U_2 = 3$ В; $U_3 = 1$ В.

2. $r = \dfrac{I_1(R_1 + R_2) - I_2 R_1}{I_2 - I_1} = 8$ Ом.

3. $R_{ш2} = \dfrac{I_1 R_{ш1} R_д/3}{I_2(R_{ш1} + R_д/3) - I_1 R_{ш1}} = 25$ Ом.

4. $R_{д2} = \dfrac{U_2}{U_1} R_{д1} + \left(\dfrac{U_2}{U_1} - 1\right) \dfrac{r_г R_ш}{r_г + R_ш} =$
$= 10 R_{д1} + \dfrac{9 r_г R_ш}{r_г + R_ш}$.

Семнадцать задач на смекалку

1. Из условия следует, что $\frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$ длины моста человек пробегает за время, в течение которого автомобиль проезжает всю длину моста. Следовательно, скорость человека равна $\frac{1}{4} \cdot 60 = 15$ (км/ч).

2. Если предположить, что мяч покоится в пункте A, вода неподвижна, а мост подплывает к мячу со скоростью течения реки, то спортсмен плывет десять минут в одну сторону и столько же времени — обратно (вода неподвижна), «догоняя» мяч в пункте A под мостом. Значит, мост «плыл» со скоростью $\frac{1000}{20} = 50 \frac{м}{мин}$. Это и есть скорость течения реки.

3. Пусть первоначально в колбе было $x\%$ соли, то есть $\frac{x}{100} = \frac{X}{V}$, где X — масса соли, а V — масса раствора. После указанных в задаче действий масса раствора станет равной $V - \frac{V}{n} + \frac{V}{2n}$, а так как масса соли X не изменится, мы получим

$$\frac{x+p}{100} = \frac{X}{V - \frac{V}{n} + \frac{V}{2n}} = \frac{X}{V} \cdot \frac{2n}{2n-1} = \frac{x}{100} \cdot \frac{2n}{2n-1},$$

откуда $x = p(2n - 1)$.

4. Пусть прямоугольник $OABC$ (рис. 1) изображает количество заданной работы, $OAED$ — количество работы, выполненной до подключения x добавочных механизмов. Остальную работу, изображенную прямоугольником $CBED$, выполнили $27 + x$ механизмов. Следовательно, второй период работ изобразится прямоугольником $DHGF$ ($|DH| = 27 + x$), равновеликим прямоугольнику $DEBC$, у которого $|DF| = (35 - 11) - 6 = 18$, так как эта часть работы выполнена на 6 часов раньше срока. Далее,

$$S_{FKBC} = S_{EHGK}$$
$$27 \cdot 6 = 18 \cdot x$$
$$x = 9.$$

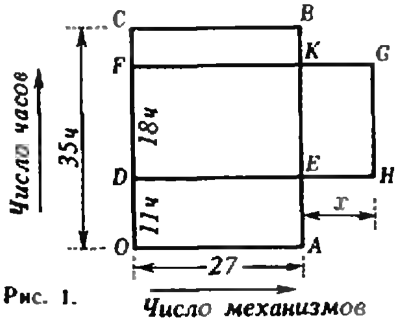


Рис. 1.

5. Если x — масса куска, отрезаемого от каждого из кусков сплава массы m, а p и q — процентные содержания меди в первом и втором кусках соответственно, то, как легко понять,

$$p(m - x) + qx = q(m - x) + px,$$

откуда $x = \frac{m}{2}$.

6. Каждый кусок сплава серебра и золота характеризуется двумя числами: массой серебра x и массой всего куска y, то есть вектором $(x; y)$. Когда мы сплавляем вместе два куска, соответствующие векторы, очевидно, складываются. Если m_1 и m_2 — искомые массы первого и второго сплава, то мы должны получить вектор $\left(8 \cdot \frac{5}{11+5}; 8\right) = \left(\frac{5}{2}; 8\right)$, складывая векторы $\left(m_1 \cdot \frac{2}{5}; m_1\right)$, $\left(m_2 \cdot \frac{3}{10}; m_2\right)$, что приводит к системе

$$\begin{cases} m_1 + m_2 = 8 \\ \dfrac{3m_2}{10} + \dfrac{2m_1}{5} = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

откуда $m_1 = 1$, $m_2 = 7$.

7. Поворотом $R_A^{90^\circ}$ отобразим $\triangle ABE$ на $\triangle ADE_1$ (рис. 2); из $\widehat{AFD} = \widehat{FAB} = \widehat{FAE_1}$ следует $|AE_1| = |E_1F|$. Из свойств поворота $|AE| = |AE_1|$ и $|BE| = |DE_1|$. Значит, $|DF| + |BE| = |DF| + |DE_1| = |E_1F| = |AE_1| = |AE| = a$.

8. а) Пусть AM, BN и CP — медианы данного $\triangle ABC$ (рис. 3), O — точка их пересечения. На продолжении AM за точку M возьмем точку O' такую, что $|MO'| = |MO|$. Длины сторон треугольника BOO' составляют по $\frac{2}{3}$ длин медиан $\triangle ABC$. Легко видеть, что длины медиан треугольника BOO' равны половинам

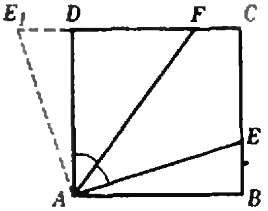


Рис. 2.

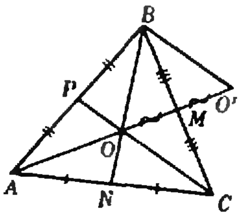


Рис. 3.

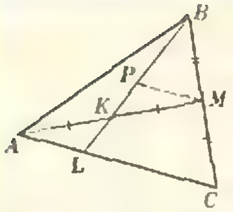


Рис. 4.

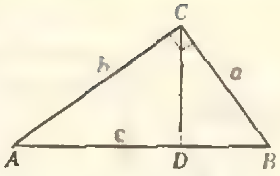


Рис. 5.

длин сторон $\triangle ABC$. Поэтому в треугольнике, полученном из $\triangle BOO'$ подобием с коэффициентом $\frac{3}{2}$, длины сторон будут равны длинам медиан $\triangle ABC$ (значит, это искомый $\triangle A_1B_1C_1$), а длины его медиан — $\frac{3}{4}$ длин сторон $\triangle ABC$.

б) Значит, в треугольнике, полученном из $\triangle ABC$ подобием с коэффициентом $\frac{3}{4}$, длины сторон как раз будут равны длинам медиан $\triangle A_1B_1C_1$, то есть этот треугольник и есть $\triangle A_2B_2C_2$.

в) По построению $S_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{9}{16} S_{\triangle ABC} = \frac{9}{16} S$. Треугольник $A_1B_1C_1$ можно построить также при помощи векторов: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; следовательно, $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = 0$; значит, если от какой-нибудь точки A_1 отложить вектор $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AM}$ и затем от точки B_1 отложить вектор $\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{BN}$, получим $\overrightarrow{C_1A_1} = \overrightarrow{CP}$, причем, ввиду неколлинеарности векторов $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CP}$, точки A_1, B_1, C_1 не лежат на одной прямой; треугольник $A_1B_1C_1$ будет искомым.

9. Ясно, что $S_{AMC} = \frac{1}{2}$ (см. рис. 4). Для нахождения S_{LKMC} достаточно найти площадь треугольника AKL и вычесть ее из $\frac{1}{2}$. Проведем $[MP] \parallel (AC)$; $\triangle AKL$ очевидно, конгруэнтен $\triangle PMK$ и поэтому (PM — средняя линия в $\triangle BLC$) $|AL| = \frac{1}{3}|AC|$. Значит, $S_{AKL} = S_{ALB} - S_{AKB} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$, $S_{KLMC} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$.

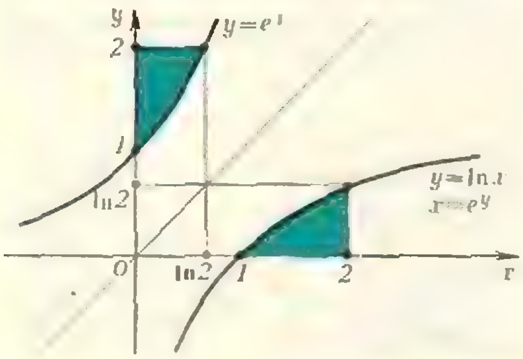


Рис. 6.

10. Пусть P — периметр $\triangle ABC$. Поскольку $\triangle ACD \sim \triangle CBD \sim \triangle ABC$, их периметры относятся как сходственные стороны. Поэтому (см. рис. 5) $\frac{b}{P_1} = \frac{a}{P_2} = \frac{c}{P}$. Отсюда $\frac{P_1}{P} = \frac{b}{c}$, $\frac{P_2}{P} = \frac{a}{c}$. Возведя в квадрат полученные пропорции и складывая их, получим

$$\frac{P_1^2 + P_2^2}{P^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1,$$

$$P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2}$$

11. Заметим, что $\sqrt[3]{6} < 2$, а $\sqrt{6} < 3$. Заменив теперь последний кубический корень в первом слагаемом на 2, а последний из квадратных корней второго слагаемого на 3, сразу получим требуемое.

12. а) Рассмотрим единичные векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, коллинеарные векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$ соответственно. Поскольку $(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)^2 \geqslant 0$, $\vec{e}_1^{\,2} + \vec{e}_2^{\,2} + \vec{e}_3^{\,2} + 2\vec{e}_1\vec{e}_2 + 2\vec{e}_2\vec{e}_3 + 2\vec{e}_1\vec{e}_3 = 3 + 2\cos(\pi - B) + 2\cos(\pi - C) + 2\cos(\pi - A) \geqslant 0$, откуда и следует нужное неравенство.

б) Указание. Воспользуйтесь неравенством $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})^2 \geqslant 0$, где O — центр описанной окружности.

13. При $n \geqslant 3$

$$0 < \frac{2^n}{n!} = \frac{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} \leqslant 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}.$$

Так как $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \to 0$, искомый предел существует и равен нулю.

14. Очевидно, функция, приведенная в условии, — многочлен степени $\leqslant 2$. Поскольку $f(a) = f(b) = f(c) = 1$, $f(x) = 1$ при всех x.

15. а) $F'(\alpha) = 3\sin^2\alpha \cdot \cos 3\alpha \cdot \cos\alpha - 3\sin^3\alpha \sin 3\alpha + 3\cos 3\alpha \cdot \cos^3\alpha - 3\cos^2\alpha \cdot \sin 3\alpha \cdot \sin\alpha = 3\sin^2\alpha(\cos 3\alpha \times \cos\alpha - \sin 3\alpha \cdot \sin\alpha) + 3\cos^2\alpha(\cos 3\alpha \times \cos\alpha - \sin 3\alpha \sin\alpha) = 3\cos 4\alpha$. Поэтому $F(\alpha) = \frac{3}{4}\sin 4\alpha + C$. Для нахождения C заметим, что $F(0) = 0$. Значит, $C = 0$ и $F(\alpha) = \frac{3}{4}\sin 4\alpha$.

б) Решая аналогично предыдущей задаче, получаем $f(x) = 2$.

16. Чтобы найти искомую площадь, надо либо проделать симметрию около прямой $y = x$ (рис. 6), либо рассматривать криволинейную трапецию «над осью ординат» (тогда ее будет ограничивать кривая $x = e^y$). Вычитая из площади прямоугольника $2\ln 2$ площадь криволинейной трапеции:

$\int\limits_0^{\ln 2} e^x dx$ (при первом способе) или $\int\limits_0^{\ln 2} e^y dy$ (при втором способе), получаем ответ

$2\ln 2 - 1$.

17. Запишем уравнение, равносильное исходному:

$$x = \sqrt[3]{2\sqrt[3]{2x-1} - 1}.$$

Пусть $f(x) = \sqrt[3]{2x-1}$. Наше уравнение имеет вид $x = f(f(x))$. Докажем, что оно равносильно уравнению $x = f(x)$. Ясно, что всякий корень второго уравнения удовлетворяет исходному. Если же x_0 — корень уравнения $x=f(f(x))$, но $f(x_0)\neq x_0$, то либо $f(x_0)>x_0$, либо $f(x_0)<x_0$. Поскольку f возрастает, в первом случае получаем $x_0=f(f(x_0))>f(x_0)$, во втором $f(x_0)>f(f(x_0))=x_0$ — противоречие. Решая уравнение $x^3=2x-1$ или $x^3-2x+1=(x-1)(x^2+x-1)=0$, получаем ответ $\left\{1, \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Московский автомеханический институт

Математика

Вариант 1

1. $\frac{3}{8}\pi r^2$. 2. $\{(3; 2)\}$. 3. $y=\frac{(8-x)^2}{2}-2$. Указание. Выразите координаты $(x'; y')$ образа точки $(x; y)$ при симметрии относительной прямой $x=a$. 4. $[2; 9[\ \cup\ ]9; +\infty[$. 5. 2; $\alpha\neq\frac{\pi}{2}k$ $(k\in\mathbf{Z})$.

Вариант 2

1. $\ln 2$. 2. $y=x^2$. Указание. Выразите координаты $(x'; y')$ образа точки $(x; y)$ при параллельном переносе $\vec{p}=a\vec{i}+b\vec{j}$. 3. 23. 4. $]-\infty; 0]$. 5. $\operatorname{tg}^3\alpha$; $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$.

Задачи устного экзамена

1. $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. 2. Окр $(0, 2)$. 3. $2<\lg 283<3$. 4. $x_n=3n-1$. 5. $y=-\frac{1}{4}$. 6. $x-\cos x+C$. 7. $\approx 2{,}03$. 8. $\left]\frac{9}{7}; +\infty\right[$.

Физика

1. Центр тяжести системы находится на расстоянии

$$x=\left(R+\frac{l}{2}\right)\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2+m_3}=4 \text{ см}$$

от середины стержня, ближе к более тяжелому шару.

2. $A=(m-\varrho V)g(H-0{,}5\sqrt[3]{V})+(m-0{,}5\varrho V)g\sqrt[3]{V}+mg(h-0{,}5\sqrt[3]{V})=147$ Дж. Указание. При выходе куба из воды значение силы Архимеда изменяется от ϱVg до 0.

3. $m=\frac{c\varrho V(t_1-t_2)}{\lambda}\frac{\tau_2}{\tau_1}-\frac{c\varrho Vt_2}{\lambda}\approx 0{,}6$ кг.

4. $|\vec{v}|=\frac{Ns}{\eta mq}\approx 9{,}7$ м/с.

5. $|\vec{E}|=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\left(\frac{q_1}{R_1^2}\right)^2+\left(\frac{q_2}{R_2^2}\right)^2}\approx 9{,}2\cdot 10^5$ В/м.

6. $q=\left(\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}+C_3\right)U=1{,}25$ мКл.

7. $\alpha=\frac{U/I-R_0}{R_0t}\approx 0{,}005$ K

8. $m=\frac{\eta UI\tau}{c|t|+\lambda}\approx 0{,}9$ кг.

9. $n_2=n_1\operatorname{tg}\alpha\approx 1{,}4$.

10. $f=\frac{Rd}{2d-R}=54$ см.

Московский гидромелиоративный институт

Математика

Вариант 1

1. 18. 2. $\{2\}$. 3. $\frac{4}{3}$. 4. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Вариант 2

1. 26. 2. $]-\infty; -2[$. 3. $\{-1\}$. 4. Высота конуса равна $\frac{4}{3}R$.

Физика

1. $|\vec{v}_0|=gt/2\approx 15$ м/с; $h_{\max}=gt^2/8\approx 11{,}2$ м.

2. $|\vec{v}|=\frac{|M|\vec{v}_1|-m|\vec{v}_2||}{m+M}\approx 0{,}3$ м/с; тележка покатится в сторону первоначального движения шара.

3. $|Q|=q/4=5\cdot 10^{-11}$ Кл.

4. $|\vec{v}_0|=\sqrt{|\vec{v}|^2-\frac{2q(\varphi_1-\varphi_2)}{m}}\approx 0{,}17$ м/с.

Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии

Математика

Вариант 1

1. $\left\{\frac{3-\sqrt{73}}{4}, 0, \frac{3}{2}, \frac{3+\sqrt{73}}{4}\right\}$. 2. $\left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2}; 1\right[\cup\left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$. 3. $\sqrt{\frac{3}{2}}$. Указание. Центром окружности, описанной около прямоугольного треугольника, является середина его гипотенузы. 4. $x_1=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x_2=\pi l$ $(k, l\in\mathbf{Z})$. 5. $\frac{19}{24}$.

Вариант 2

1. $\left\{0, \frac{1}{2}\right\}$. 2. $\left]0; \frac{1}{100}\right[\cup\left]\frac{1}{100}; \frac{1}{10}\right[$. 3. $(6; -2; 4)$, $(-6, 2, -4)$. 4. $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$. 5. На промежутках $]-\infty; -2]$ и $[-1; +\infty[$ функция возрастает, на промежутках $\left[-2; -\frac{3}{2}\right[$ и $\left]-\frac{3}{2}; -1\right]$ — убывает.

Вариант 3

1. $\{18\}$. 2. $]-\infty; 1[$. 3. $x_1=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x^2=\pi l$ $(k, l\in\mathbf{Z})$. 4. $x=0$, $y=2$. 5. $4\ln 2$.

Московский институт стали и сплавов

Математика

Вариант 1

1. $]-\infty; -1[\ \cup\ ]6; +\infty[$. 2. $\{0, -2\}$. 3. $2\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. 4. $\left(\frac{1}{2}; \frac{7}{4}\right)$. Указание. Касательная к данной параболе в точке C параллельна (BD). 5. $x=\arccos\frac{5}{13}+2\pi k$

$(k\in\mathbf{Z})$, $y=2$. Указание. $a\sin x+b\cos x\leqslant\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$.

Вариант 2

1. $\{8\}$. **2.** $[2;\ 3]$. **3.** Пассажирский — 21 ч, товарный — 28 ч. **4.** $(2;\ 1)$. Указание. $\overline{BH}=\overline{AH}-\overline{AB}$. 5. $]-\infty;\ -1]\cup[1;\ +\infty[$. Указание. Уравнение $\cos\frac{x}{4}=\frac{1}{2}$ имеет на интервале $]-5\pi;\ 11\pi[$ четыре корня; при $a\neq\frac{1}{2}$ они являются точками экстремума, при $a=\frac{1}{2}$ — не являются.

Вариант 3

1. 1. **2.** $\left\{\frac{7+\sqrt{41}}{2}\right\}$. 3. $\left\{\frac{\pi}{2},\ \pi,\ 2\pi,\ \frac{5}{2}\pi\right\}$. **4.** $]\log_5 4;\ 1[\ \cup\ ]\log_5 6;\ \log_5 12[$. 5. $(0;\ -2;\ 0)$ или $(2;\ 2;\ 2)$.

Вариант 4

1. $]-\infty;\ -1[$. **2.** $x_1=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $x_2=(-1)^l\frac{\pi}{6}+\pi l$ $(k,\ l\in\mathbf{Z})$. **3.** $\left\{\left(\frac{4}{3};\ \frac{2}{3}\right)\right\}$. **4.** Минимальное расстояние (при $p=-2$, $q=0$) равно 1. 5. $\frac{\sqrt{15}}{2}$ см^2. Указание. Продолжите медиану — достройте до параллелограмма.

Вариант 5

1. $x_1=\pi k$, $x_2=\pm\frac{\pi}{3}+\pi l$ $(k,\ l\in\mathbf{Z})$. **2.** $\left]-\frac{5}{2};\ 1\right[$. **3.** $8a^2\cos\alpha\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}$. **4.** 9. **5.** $\left\{\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{1}{2}\right),\ \left(\mathrm{arctg}\,7+2\pi l;\ -\frac{1}{2}\right)\right\}$ $(k,\ l\in\mathbf{Z})$. Указание. Обозначив 2^y через u, 2^{-y} — через v, выразите u и v через $\sin x$ и $\cos x$; затем из равенства $u\cdot v=1$ получится уравнение относительно x. Учтите, что годятся только те корни этого уравнения, при которых $u>0$.

Физика

1. $N=N_A\frac{pV}{RT}\approx3{,}7\cdot10^5$ (здесь $N_A=6{,}02\times\times10^{23}$ моль$^{-1}$ — число Авогадро и $R=8{,}31$ Дж/(моль · К) — универсальная газовая постоянная).

2. $C=B\frac{UFnm}{\eta M}\approx2{,}53$ рубля (здесь $F=96\,500$ Кл/моль — постоянная Фарадея).

3. $R=\frac{(|\vec{v}_0|^2+g^2\tau^2)^{3/2}}{g|\vec{v}_0|}\approx638$ м.

4. $\Delta\varphi_1=\Delta\varphi\frac{2hd}{l(l_1+l/2)}=54$ В.

5. $\Delta\varphi=\frac{IM|\vec{B}|}{eN_A\rho a}\approx4{,}6\cdot10^{-6}$ В (здесь $e=1{,}6\times\times10^{-19}$ Кл — заряд электрона, $N_A=6{,}02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$ — число Авогадро).

Московский институт электронного машиностроения

Математика

Вариант 1

1. $21\frac{1}{3}$.

2. $\frac{3}{\lg 7}$. Указание. $7^{\lg 2}=2^{\lg 7}$.

3. 1) Удовлетворяет. 2) $y=\sqrt[3]{6x+3}$. Указание. $(y^3)'=3y^2\cdot y'$.

4. 1) 2,4. 2) $\left(\frac{5}{3};\ \frac{5}{9}\right)$. Указание. Выразите расстояние между искомой точкой $A(x_0;\ 2x_0-x_0^2)$ на параболе и прямой l как расстояние между точкой A и точкой пересечения перпендикуляра, опущенного из нее на прямую l (угловые коэффициенты k_1, k_2 перпендикулярных прямых связаны соотношением $k_1k_2=-1$). Можно также показать, что касательная к данной параболе в точке A параллельна прямой l (приравняв к нулю производную квадрата расстояния, вы получите условие перпендикулярности соответствующих векторов).

5. 1) $\left\{0;\ \frac{\pi}{3}\right\}$. 2) $]-\infty;\ -1[\ \cup\ [5;\ +\infty[$. Указание. Данное уравнение равносильно уравнению $\sin x\,[4\cos^2 x+2\cos x-(a+1)]=0$. Поэтому a удовлетворяет требуемому условию, если трехчлен $f(t)=4t^2+2t-(a+1)$ не имеет корней на промежутке $]0;\ 1[$. Из того, что вершина графика этого трехчлена имеет асбиссу $-\frac{1}{4}$, следует, что должно быть $f(0)\cdot f(1)>0$ (рис. 7, *а—б*) или $f(1)=0$ (рис. 7, *в*).

Вариант 2

1. $y=-\sqrt{3}x+\frac{\pi\sqrt{3}+3}{2}$.

2. Периодические: $2^{\cos x}$, $1-5\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$ и $3\sin x-\cos 2x$, период — 2π, это можно проверить непосредственным расчетом. Непериодичность функций $2x^2-1$ и $2x^3+x+2$ следует из того, что свои значения они принимают не бесконечное число раз. Непериодичность функции $\cos 2^x$ — из того, что $\cos 2^x>0$ при $x<0$ и $\cos 2^x=0$ при $x=\log_2\frac{\pi}{2}$.

3. 1) $\sqrt{10}+2\sqrt{5}+\sqrt{34}$. 2) $(0;\ 0)$. Замечание. Точку можно искать исследованием производной, но можно и геометрически: введем точку $C(0;\ -2)$; $|AM|+|MB|=|CM|+|MB|>|CB|$, если $M\notin(BC)$; если же

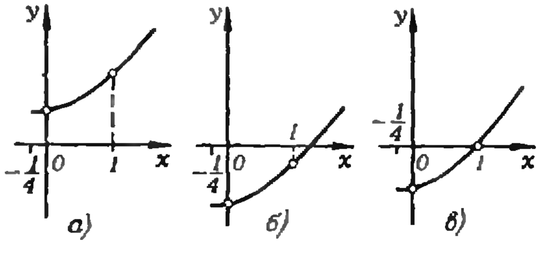


Рис. 7.

$M \in (BC)$, то есть M — начало координат, то $|AM| + |MB| = |CB|$.

4. 1) $\sin 1^\circ + \sin 4^\circ < \sin 2^\circ + \sin 3^\circ$. 2) $\sin^2 1^\circ + \sin^2 4^\circ > \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ$. 3) $\sin^3 1^\circ + \sin^3 4^\circ > \sin^3 2^\circ + \sin^3 3^\circ$. Решение. Чтобы доказать неравенство $\sin^3 1^\circ + \sin^3 4^\circ > \sin^3 2^\circ + \sin^3 3^\circ$, перепишем его в виде $\sin^3 4^\circ - \sin^3 3^\circ > \sin^3 2^\circ - \sin^3 1^\circ$; переведем его «в радианы»: $\sin^3\left(4\frac{\pi}{180}\right) - \sin^3\left(3\frac{\pi}{180}\right) > \sin^3\left(2\frac{\pi}{180}\right) - \sin^3\left(\frac{\pi}{180}\right)$ или $\sin^3(4\alpha) - \sin^3(3\alpha) > \sin^3(2\alpha) - \sin^3\alpha$, где $\alpha = \frac{\pi}{180}$. Введем функцию $f(x) = \sin^3(x+\alpha) - \sin^3 x$. Тогда неравенство, которое мы хотим доказать, примет вид $f(3\alpha) > f(\alpha)$. Значит, нам достаточно доказать, что функция f возрастает на $]0; 4\alpha[$. Поскольку $f'(x) = 3[g(x+\alpha) - g(x)]$, где $g(x) = \sin^2 x \cdot \cos x$, нужно доказать, что g возрастает на $]0; 5\alpha[$, а это вытекает из того, что $g'(x) = \sin x \times (2 - 3\sin^2 x) > 0$ на $]0; 5\alpha[$. $\left(\sin 5\alpha = \sin\frac{\pi}{36} < \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} < \sqrt{\frac{2}{3}}.\right)$

5. 1) A_1 — это прямая $y = 1$ без точки $(1; 1)$. 2) B_1 — объединение прямых $x = 1$ и $y = 1$. 3) C — объединение прямой $x = 1$ без точки $(1; -1)$ и прямой $x = -1$ без точки $(-1; 1)$. Решение. B_a — это множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $(ax - 1)y = x - a$. Значит,

$$(M \in A_a) \Leftrightarrow (M \in B_a \text{ и } ax - 1 \neq 0).$$

Если $M \in C$, то $M \in B_\beta$ и $M \notin A_\beta$ при некотором β. Тогда $\beta x - 1 = 0$, $x = \beta$, $\beta = \pm 1$. Итак, $M \in B_1$, $M \notin A_1$, $M \in B_{-1}$ и $M \notin A_{-1}$. Кроме того, у точки M $x = 1$ или $x = -1$. Если $M \in A_a$ при каком-нибудь a и $x = 1$, то $y = -1$; поскольку $M \in A_a$, $y \neq -1$. Если $M \in A_a$ и $x = -1$, то $y = 1$; поскольку $M \notin A_a$, $y \neq 1$.

Московский энергетический институт

Математика

Вариант 1

1. $-\frac{1}{a}$, если $a \neq 0$; если $a = 0$, нет предела.
2. $]-\infty; 0[\cup]\log_2 3; +\infty[$.
3. Равнобедренный, с катетами длины $\sqrt{2S}$.
4. $\left\{-\frac{3}{4}\pi, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right\}$.
5. $2a^3 \sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{3\alpha}{2}}$

Вариант 2

1. При $x > 0$, $x \neq 4$ $f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{2}\sqrt[4]{x^3}}$.
2. $\{9\}$.
3. $4 + 12 - 10$.
4. $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$ $(k \in \mathbf{N})$.
5. $-\frac{\alpha}{4\sin^3\alpha \cdot \cos\alpha}$.

Задачи устного экзамена

1. а) $\left[-2; -\frac{3}{2}\right[\cup \{0\}$. б) $[0; 9[$. в) $]-1; 0[\cup]0; 1[$. 5. $2\,\mathrm{ctg}\,\alpha$. **6.** $y = -3x - 4$. 7. $]5; +\infty[$.

Физика

Письменный экзамен

Вариант

2. См. рис. 8.

3. $r = \sqrt[6]{\frac{9e^2}{64\pi^3\varepsilon_0 G\rho^2}} \approx 0{,}76 \cdot 10^{-4}$ м.

4. $P = UI - I^2R = 36$ кВт.

5. $Q = \frac{Mm|\vec{v}|^2}{2(M+m)} + mgH = 164{,}7$ Дж.

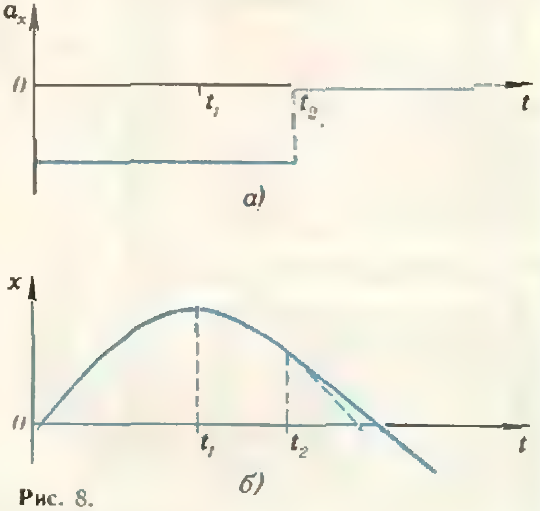


Рис. 8.

Задачи устного экзамена

1. $h = \frac{|\vec{v}|^2}{2g(1+\mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha)} = 1{,}56$ м.

2. $M = \frac{mR\Delta T}{\mu g h} - \frac{p_0 S}{g} = 360$ кг.

3. $a = \sqrt{\frac{2\mathscr{E}\tau}{|\vec{B}|\sin\alpha\cos 60^\circ}} \approx 1{,}63 \cdot 10^{-2}$ м.

Метод размерностей помогает решать задачи (*см. «Квант» № 6*)

1. Минимальный период вращения соответствует максимальной угловой частоте: $\omega_0 = 2\pi/T_0$. Связь между ω_0, M, R и гравитационной постоянной γ находится из соображений размерности однозначно и имеет вид $\omega_0^2 \sim \gamma M/R^3$ (размерность γ легко находится из закона всемирного тяготения). Численные оценки для планеты с параметрами Земли получаются, если учесть, что $\gamma \approx 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ Н $\cdot$ м^2/кг^2, $M \approx 6 \cdot 10^{24}$ кг, $R \approx 6{,}4 \cdot 10^3$ км. Читателю предлагается самому вычислить, во сколько раз медленнее вращается наша Земля, чем могла бы, и обдумать вопрос о том, что случилось бы, если бы мы умудрились закрутить Землю с $\omega > \omega_0$.

2. Кроме геометрического подобия камертонов мы должны учесть, что сделаны они из одного материала, и потому для них одинаковы упругие характеристики и плотность ϱ. Естественной упругой характеристикой является модуль Юнга E. Если L — длина ножки камертона, то из соображений размерности получается однозначная формула для частоты: $\omega \sim \frac{1}{L}\left(\frac{E}{\varrho}\right)^{1/2}$. Отношение частот геометрически подобных камертонов, следовательно, обратно пропорционально отношению их характерных длин и равно 1:3. Можно заметить еще, что отношение E/ϱ есть квадрат скорости звука в твердом теле. Тогда предыдущая формула становится совсем понятной. Период колебаний камертона $T \sim \omega^{-1}$, то есть определяется просто временем прохождения звуковой волны в ножке камертона.

Подумайте теперь, для чего в условии задачи подчеркнуто геометрическое подобие камертонов. Может ли что-либо измениться, если поперечные сечения ножек камертона не будут геометрически подобными?

3. Будем предполагать, что период T определяется давлением p, выделившейся при взрыве энергией E и плотностью воды ϱ. Плотность играет здесь роль массовой характеристики. Записывая $T \sim p^x \varrho^y E^z$ и сравнивая размерности левой и правой частей этой формулы, получим $T \sim p^{-5/6} \varrho^{1/2} E^{1/3}$. Если учесть, что давление воды p связано с глубиной H соотношением $p = \varrho g H$, то получим формулу $T \sim \left(gH\right)^{-5/6}\left(\frac{E}{\varrho}\right)^{1/3}$.

Газовый пузырь, образовавшийся при взрыве, будет расширяться до тех пор, пока внутреннее давление в нем не станет равным давлению окружающей его воды на глубине H. Грубую , но разумную оценку для внутреннего давления мы можем получить опять из соображений размерности, разделив энергию E на объем пузыря: $p_{вн} \sim E/r^3$. Напишем условие равенства (по порядку величин) $p_{вн}$ внешнему давлению $p = \varrho g H$: $(E/r^3) \sim \varrho g H$. Отсюда $r^3 \sim E/\varrho g H$. Размер газового пузыря при заданной величине E пропорционален $H^{-1/3}$. Мы, конечно, пренебрегаем для таких оценок изменением плотности воды ϱ с глубиной.

4. Давление в центре звезды с массой M и радиусом R выражается формулой $p \sim \gamma M^2/R^4$, однозначно получаемой из соображений размерности.

Численные оценки в этой задаче и в задаче 5 мы предлагаем читателям сделать самим.

ШАХМАТНАЯ ФИЛАТЕЛИЯ

В спортивной филателии марки, посвященные шахматам, занимают не столь уже большое место. Однако они выходят регулярно. Только в нашей стране их было выпущено пятнадцать (с беззубцовками и блоком). В большинстве случаев выпуск таких марок приурочен к крупным международным шахматным соревнованиям, но встречаются и другие сюжеты.

В нашей подборке на третьей странице обложки сверху размещена серия кубинских марок, посвященная выдающимся шахматистам — чемпионам мира Капабланке и Ласкеру, а также Филидору, Стейницу и Сегуре. Далее следуют марки и блок арабского княжества Аль-Фуджайра, на которых изображены шахматные фигуры, выполненные из кости или ценных пород дерева и представляющие прекрасные произведения прикладного искусства. Внизу размещены румынские марки, посвященные шахматной олимпиаде, состоявшейся в 1980 году на острове Мальта.

В. Рудов

Номер подготовили:
А. Виленкин, А. Егоров, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Т. Кольченко, Г. Красиков, Э. Назаров, М. Сидоров

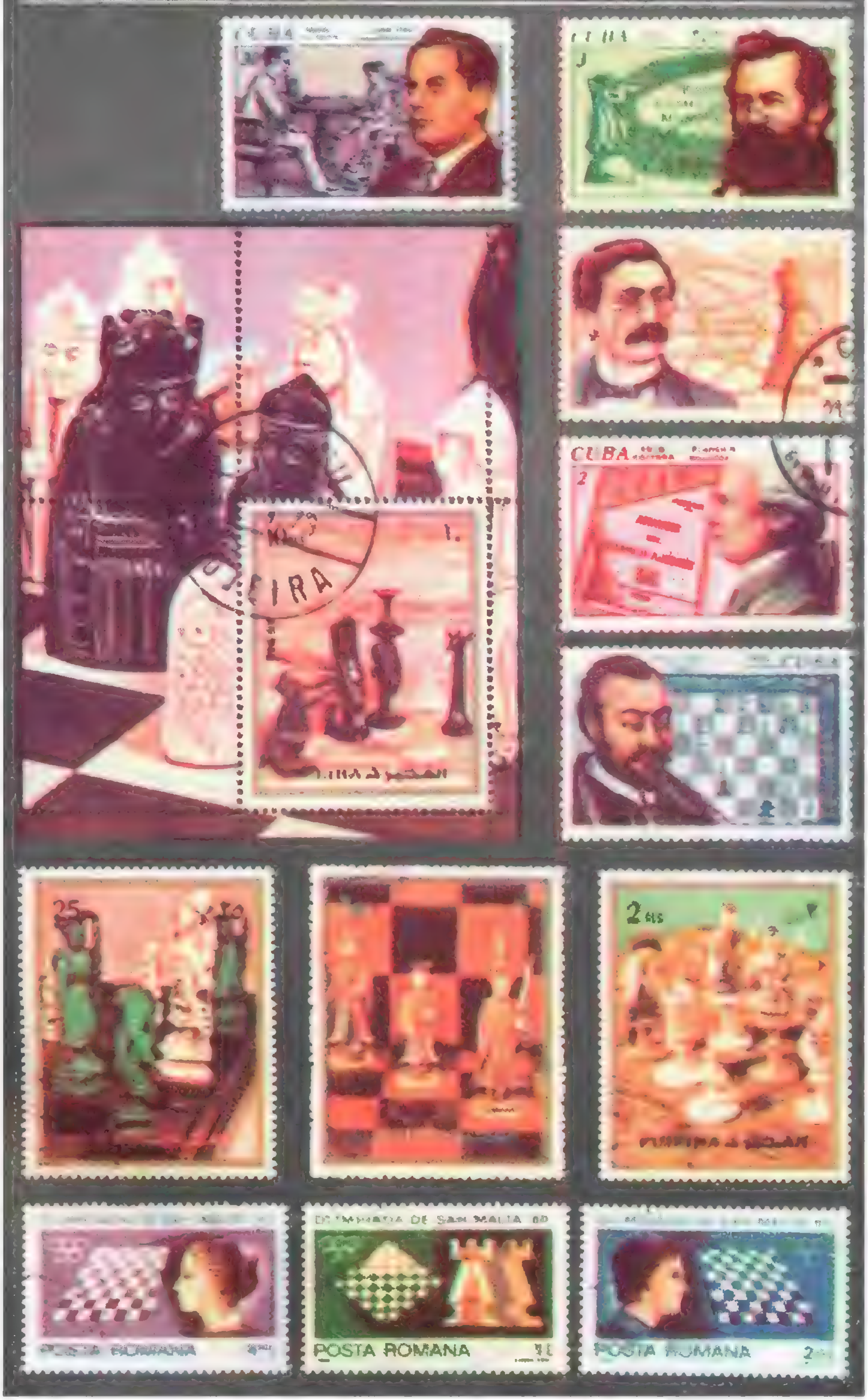
Зав. редакцией Л. Чернова

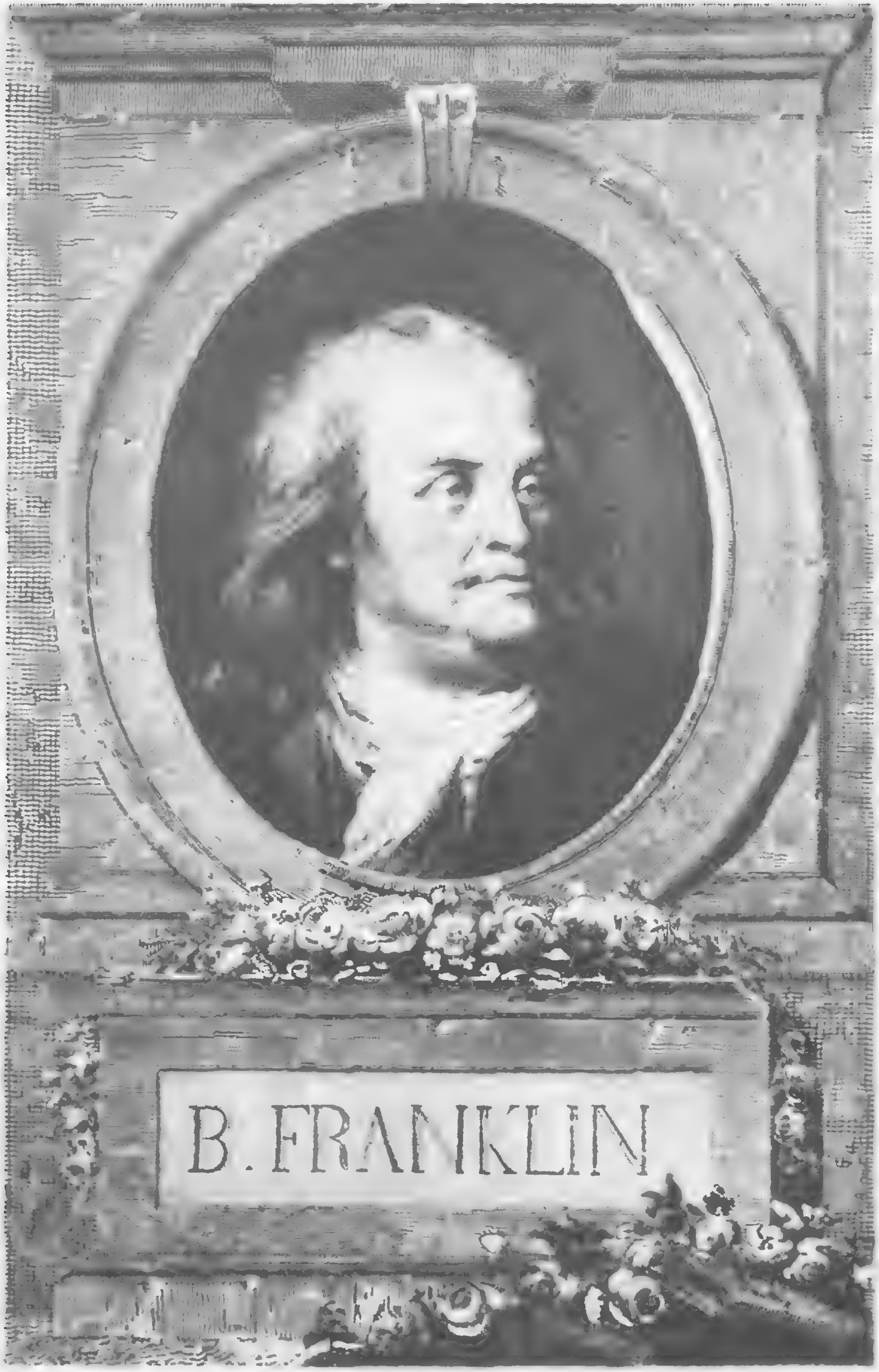
Художественные редакторы Т. Макарова, Семенчинская

Корректор В. Сорокина

113035, Москва, Б. Ордынка 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 20.05.81.
Подписано в печать 24.06.81.
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 7 Т-22034
Цена 30 коп. Заказ 1182
Тираж 232 272 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области


CUBA
CUBA
2
2 fils
OLIMPIADA DE SAH MALTA 80
POSTA ROMANA
POSTA ROMANA
POSTA ROMANA

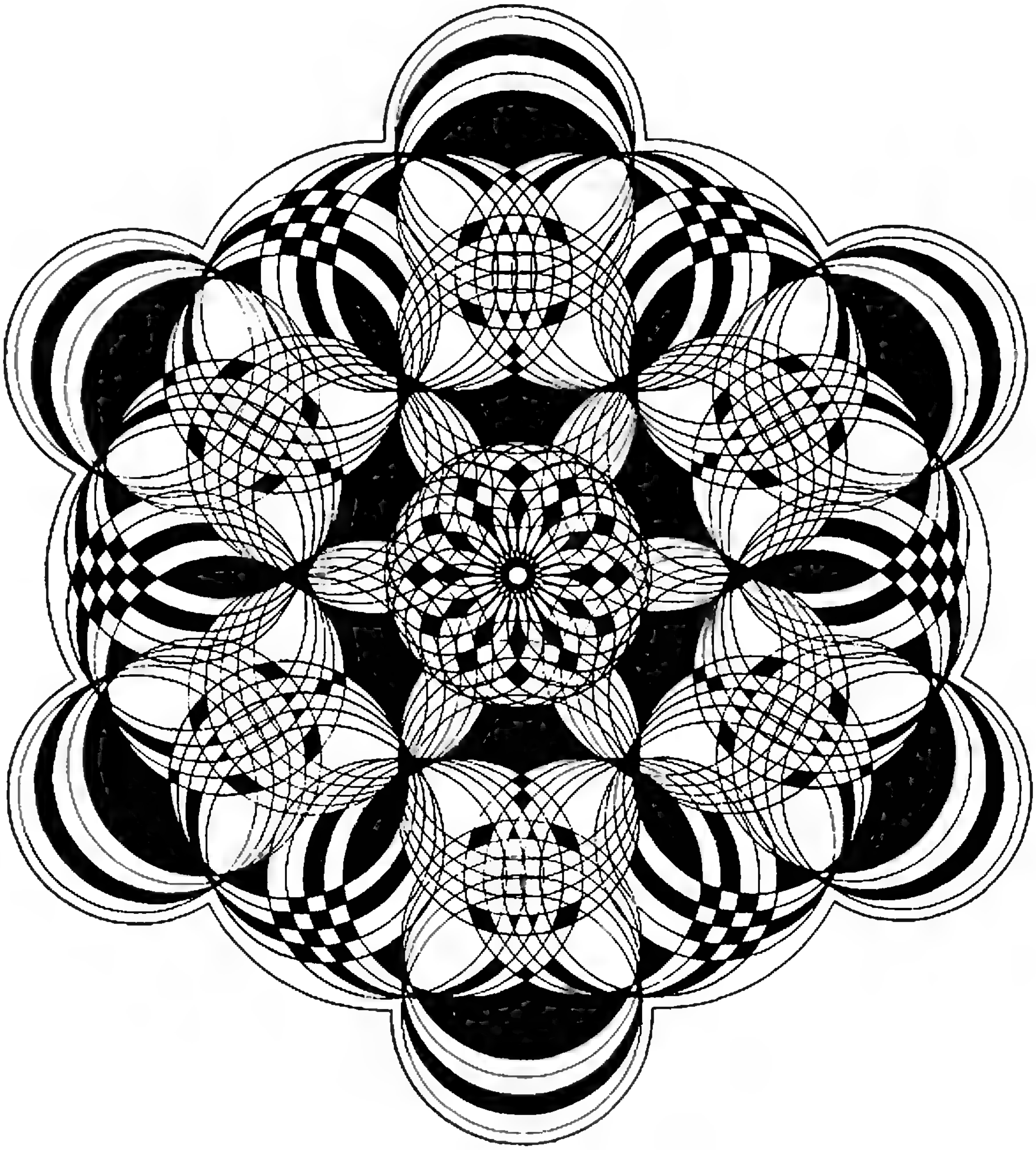


Исполнилось 275 лет со дня рождения выдающегося американского ученого Бенджамина Франклина. В этом номере мы публикуем статью о его жизни и деятельности, написанную академиком П. Л. Капицей.

Цена 30 коп.

Индекс 70465

Наш художник нарисовал этот замысловатый узор, пользуясь только циркулем (и кисточкой для закраски тушью отдельных участков). Правда, часть дуг он потом стер. Изучая узор, вы, возможно, сумеете восстановить порядок построения. Впрочем, эту картинку лучше воспринимать не как условие задачи, а как декоративный орнамент с геометрическими мотивами.



НОМЕР
8

Основан в 1970 году

Квант

8
1981

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд

В НОМЕРЕ:

Ученые обращаются к молодежи

2 *Г. Марчук.* Слово к научной молодежи

* * *

5 *С. Пикин.* Жидкие кристаллы
12 *Д. Фукс.* О раскрытии скобок, об Эйлере, Гауссе, Макдональде и об упущенных возможностях
21 *С. Гиндикин.* Медичейские звезды

Лаборатория «Кванта»

30 *А. Боровой, А. Херувимов.* Колебания и маятники

Математический кружок

34 *И. Шарыгин, А. Ягубьянц.* Окружность девяти точек и прямая Эйлера

Задачник «Кванта»

38 Задачи М696—М700; Ф708—Ф712
40 Решения задач М656—М660; Ф668—Ф672
47 *А. Зильберман.* Модели, которые мы выбираем

«Квант» для младших школьников

50 Задачи

Информация

51 *А. Николаев, В. Тихт.* Турнир имени М. В. Ломоносова

Искусство программирования

54 *Б. Бабаян.* Многопроцессорный вычислительный комплекс «Эльбрус»

Рецензии, библиография

58 *А. Аринштейн.* Мир глазами инженера
59 *Г. Фалин.* Алгебра без чисел
60 **Шахматная страничка**
61 **Ответы, указания, решения**
Смесь *(11, 29, 49)*
Шахматный конкурс *(3-я с. обложки)*

*Кривую
на первой странице
обложки
нарисовал
«электронный художник»
по программе Ю. Котова;
подробнее см. с. 29.*

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1981

Г. Марчук

Слово к научной молодежи

Я хотел бы высказать несколько мыслей, адресованных непосредственно молодежи, идущей в науку.

У молодежи есть колоссальные преимущества, которые она не всегда осознает, а потому не умеет использовать. Ведь молодость — огромное богатство, которое дается каждому человеку, но, к сожалению, только на время. Не растерять его, истратить его с пользой — главное условие для того, чтобы последующая жизнь была продуктивной, осмысленной и радостной.

Молодые годы — это наиболее творческие годы в жизни человека. Именно то, что он успевает сделать в молодости, остается в нем навсегда, составляет фундамент, которым он потом пользуется всю жизнь. Растраченное в молодости время уже невозвратимо. Потратить его исключительно на развлечения, или на чисто формальное учение, или бездумное исполнение служебных обязанностей — значит обокрасть самого себя, погубить в себе еще не развившиеся способности. Поэтому к юным годам надо относиться с особым вниманием, с особой требовательностью.

Некоторые молодые люди наивно полагают, что молодость — это пора, когда нужно брать от жизни все. А что такое «все», толком не знают. А брать от жизни все — значит впитать в себя огромную массу знаний, навыков и умений, совершенствовать и углублять их в продолжение всей творческой сознательной жизни. И, конечно, возвратить это обществу сторицей. Жизненный опыт подсказывает, что чем раньше обретешь свою цель, свое место в жизни, тем плодотворней и содержательней будет вся дальнейшая деятельность. Этому нас учит пример великих русских и советских ученых: Николая Ивановича Лобачевского, Дмитрия

Академик Гурий Иванович Марчук — Герой Социалистического Труда, лауреат Ленинской и Государственной премий, заместитель Председателя Совета Министров СССР, председатель Государственного комитета СССР по науке и технике

Статья перепечатывается с небольшими сокращениями из книги «Молодым о науке», выпущенной в 1980 году издательством «Молодая гвардия».

Ивановича Менделеева, Ивана Петровича Павлова, Пафнутия Львовича Чебышева, Игоря Васильевича Курчатова, Сергея Павловича Королева, Мстислава Всеволодовича Келдыша и многих других.

Молодости свойственно замахиваться на большие дела, решительные перемены, осмысливать глобальные крупные проблемы. Это прекрасно, но любой самый прекрасный замысел останется игрушкой, мыльным пузырем, если он не будет осуществлен. Поэтому надо стараться не только замышлять, придумывать, предлагать, но всегда делать, делать конкретное дело и уметь доводить его до конца. Ведь именно сумма, интеграл всех конкретных дел и создает, в сущности, все наше общественное богатство, весь потенциал в любой области человеческой деятельности.

Молодые люди, которые увлекаются спортом, хорошо знают, что для достижения результата, для сохранения спортивной формы нужен большой труд. Еще в большей степени это относится к творческим способностям. Только если тренировать свой интеллект, нагружать его задачами, поисками решений, только тогда он не ослабеет и будет развиваться и крепнуть.

Не нужно думать, что это относится только к молодежи, которая занимается научными исследованиями. Надо пытаться вырабатывать творческий подход к жизни в любой сфере деятельности. Только такой подход даст возможность глубоко проникать в суть вещей, явлений, процессов и в производстве, и в экономике, и в общественной жизни. Прежде всего нужно проникать в глубину, в самую суть, широта придет уже потом как следствие. Бойтесь поверхностного подхода к познанию — это закроет вам путь к творчеству.

Самое главное в профессии ученого — уметь вскрыть несоответствие накопленных обществом знаний, представлений с обнаружившимися вдруг явлениями или фактами, которые могут показаться, на первый взгляд, ошибками в эксперименте или в ходе рассуждений. Тщательное исследование возникшего противоречия и поиск способа его разрешения, как правило, позволяют не только более глубоко посмотреть на вещи, но и зачастую открыть новые пути в науке.

Мне вспоминается случай, происшедший в одном из волжских городов. Меня пригласили в университет прочитать доклад по проблемам математики, я с удовольствием согласился. После доклада подходит ко мне один из слушателей, назвавшийся доцентом университета, и говорит:

— Хорошо вам в Академгородке, у вас там сколько хочешь проблем, а где их взять у нас?

Я был не только поражен, но и прямо-таки шокирован таким вопросом.

— Позвольте, уважаемый коллега, беритесь за любую тему, работайте и, как только упретесь во что-то непонятное, — вот вам и проблема... Беритесь за нее и решайте.

Специалист двухтысячного года представляется мне широко образованным не в одной области науки, а по крайней мере в двух-трех: законы развития научно-технической революции обязательно предъявят такой «счет».

Употребляя термин «широкий», имею в виду, конечно, основательность, серьезность знаний. И четко вижу путь формирования такого специалиста. После окончания вуза (возьмем для примера университет) главная задача его выпускника — войти серьезно в ту сферу первой самостоятельной работы, которая будет ему поручена. Вероятнее всего, в узкую научную проблему. Исследуя ее, молодой специалист фактически глубоко разрабатывает собственные творческие умения, навыки. На это уходит три — пять лет. За этот срок молодой специалист становится — не может не стать — «профессором» в своей «узкой области».

После этого ему необходимо переключиться в смежную область науки, может быть даже далекую от той узкой проблемы, в которой он специализировался. Войти в новую сферу знаний — то есть овладеть новыми фактами, фундаментальными идеями. Однако на это понадобится уже меньше времени — один—три года, потому что методы, процесс познания оказываются теми же самыми: отработанная сразу после университета система творчества «сработает» и здесь. Именно это и даст возможность быстро войти в новую область науки. На овладение третьей понадобится еще меньше времени, но глубина научного поиска теперь уже остается той же.

Теперь специалист оказывается способным обозревать более широкую сферу науки или техники. Он начинает распознавать тенденции дальнейшего развития науки на стыках смежных областей. А открытия на стыках, как правило, более важны. Так в конце концов и рождается крупный ученый, руководитель, способный обозревать и глубоко разрабатывать основные направления научно-технического прогресса.

Случается, что стремительный рост и первые успехи вызывают у молодых людей чувство превосходства над своими товарищами. В связи с этим я хотел бы обратить особое внимание молодежи на такое понятие, как скромность.

Это вроде бы прописная истина, что надо быть скромным, тут вроде и говорить не о чем. Но это качество, на мой взгляд, становится все более важным в нашу эпоху, когда неуклонно возрастают удельный вес и роль коллективных форм труда и других видов общественной человеческой деятельности. Скромность проявляется именно в общении человека с другими людьми, именно она (или ее отсутствие) определяет часто атмосферу в коллективе, нравственный климат. Скромность — неотъемлемая черта высокой культуры.

Мне очень по душе высказывание на эту тему Гегеля. Правда, оно облечено в несколько тяжеловесную и трудноватую для мгновенного восприятия форму, но зато очень глубоко по содержанию. Вот оно:

«Под словами «культурные люди» можно ближайшим образом понимать таких людей, которые в состоянии сделать все то, что делают другие, и которые не выставляют напоказ своей частности, между тем как у некультурных людей обнаруживается именно последняя.

В своих отношениях с другими людьми некультурный человек может легко их обидеть, так как он дает волю лишь себе и не предается размышлениям о чувствах, которые испытывают другие. Он не хочет оскорблять других, но его поведение не согласуется с его волею. Культурность, следовательно, есть сглаживание особенности, чтобы она вела себя согласно природе предмета. Истинная оригинальность, являющаяся творчеством настоящего предмета, требует культурности, между тем как ложная оригинальность принимает форму тех безвкусных проявлений, которые приходят в голову лишь некультурным людям».

Я выписал это высказывание и держу его под рукой, а при случае показываю своим молодым сотрудникам, чтоб взяли себе на заметку.

Только не следует путать скромность с боязливостью, инертностью — это далеко не одно и то же. Смелость, даже дерзость научных постановок, новых решений — это то, что радует любого учителя в своем ученике.

Талантливая молодежь, как правило, проявляет интерес к новым областям науки и техники, она, часто сама того не сознавая, выражает актуальные потребности общества. Молодые люди, не отягощенные грузом традиций, легче входят в совершенно новые проблемы, работают на стыках наук, в том числе таких, которые ранее казались несоединимыми.

В наше время приходится постоянно обновлять свои знания и вполне сложившимся, зрелым специалистам, иначе они рискуют отстать от жизни. Поэтому призыв Владимира Ильича Ленина, обращенный к молодежи: «Учиться, учиться и еще раз учиться» — не только не стареет, а, наоборот, с каждым годом становится все актуальнее.

Будем же следовать ему.

С. Пикин

Жидкие кристаллы

Удивительный мир жидких кристаллов открылся глазам ученых сравнительно давно, но за последние 15—20 лет произошел огромный скачок в понимании природы жидкокристаллического состояния, физических свойств этих веществ, их роли в современной науке и технике. И сейчас уже нет сомнений в том, что без этих материалов, разнообразных по своим свойствам, высокоэкономичных, сравнительно простых в изготовлении и применении, дальнейший научно-технический прогресс не может обойтись.

А самые первые сведения о таких веществах были сообщены в 1888 году австрийским ботаником Ф. Рейницером, который синтезировал необычные кристаллы. При их нагревании получалась жидкость, которая в зависимости от температуры была то мутной, то прозрачной, то приобретала синеватый цвет. Немецкий физик О. Леман начал систематическое изучение таких веществ и установил, что открыто особое состояние, присущее многим органическим соединениям.

Нематическая жидкость

Жидкости сильно отличаются от газов и твердых кристаллов. Атомы или молекулы, из которых состоит жидкость, не могут разойтись на сколь угодно большое расстояние друг от друга. Это означает, что в жидкости очень важны силы притяжения между атомами или молекулами. То же самое можно сказать и о твердом кристалле, но в кристалле эти силы настолько велики, что атомы вынуждены занимать в нем строго определенные места, образуя трехмерную кристаллическую решетку. В такой решетке всегда имеются выделенные направления, называемые осями кристалла. Вдоль этих направлений атомы располагаются в строго периодическом порядке. В обычной жидкости нет никаких выделенных направлений, она не обладает собственной формой, потому что молекулы жидкости не столь прочно связаны друг с другом и могут перемещаться в пространстве — перескакивать с места на место.

Таким образом, в текучей жидкости молекулы только в среднем находятся на некотором характерном расстоянии друг от друга. Ответ на вопрос, как взаимодействуют между собой молекулы и чему равно среднее расстояние a между ними, дает квантовая механика. Оказывается, что на больших расстояниях между молекулами их взаимодействие определяется силами притяжения, а на очень малых расстояниях — силами отталкивания. Следовательно, молекулы не могут сблизиться на сколь угодно малое расстояние из-за очень больших сил отталкивания — в этом случае говорят, что молекулы не могут проникать друг в друга. На расстоянии a, примерно равном размеру молекул, сила взаимодействия между молекулами становится равной нулю.

Так устроена обычная жидкость, состоящая из относительно простых молекул или атомов. Однако нас поджидает замечательное открытие, если молекулы имеют ярко выраженную анизотропную форму, то есть если у молекул можно четко выделить какие-нибудь характерные оси. Такие молекулы схематически изображены на рисунке 1; в них атомы располагаются не как попало, а выстроены вдоль определенной линии (рис. 1, *а*) или лежат в выделенной плоскости (рис. 1, *б*; на рисунках указаны атомы, образующие

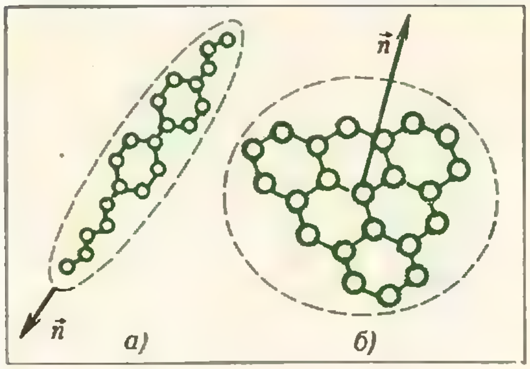


Рис. 1.

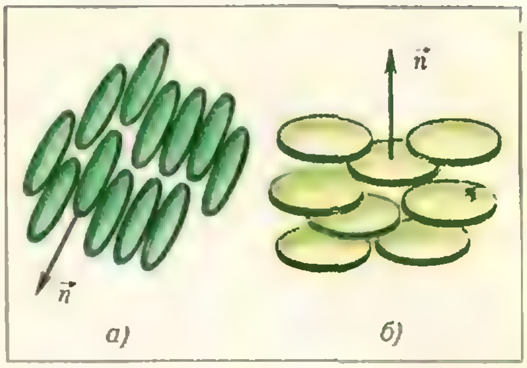


Рис. 2.

остов молекулы). Взаимодействие молекул такой формы приводит к тому, что в жидком состоянии они не только удерживаются на некотором среднем расстоянии друг от друга, но могут сохранять определенный порядок в своем относительном расположении — длинные оси молекул (рис. 2, *а*) или плоскости молекул (рис. 2, *б*) оказываются параллельными друг другу. В такой необычной жидкости появляется особое направление, как в твердом кристалле, вдоль которого ориентируются выделенные оси молекул. Это сходство между кристаллом и описанной удивительной жидкостью и привело к соединению двух понятий в одно новое — «жидкий кристалл». А жидкое состояние, изображенное на рисунке 2, называют нематическим жидким кристаллом*).

Рассмотрим теперь силы, действующие в нематической жидкости. Эти силы — электрического происхождения. Интересно, что сила притяжения возникает между двумя атомами или молекулами, которые сами по себе являются электрически нейтральными. Попытаемся на примере атомов разобраться, как это получается.

Представим себе, что по какой-то случайной причине в атоме произошло смещение отрицательно заряженного электронного облака относительно положительно заряженного ядра. Такой атом можно рассматривать как совокупность двух разноименных точечных зарядов, одинаковых по абсолютной величине, находящихся на некотором расстоянии друг от друга (рис. 3, *а*). Подобную систему зарядов называют электрическим диполем. В окрестности атома-диполя возникает электрическое поле. Напряженность этого поля быстро убывает при удалении от атома, но вблизи атома поле достаточно велико. Если в окрестность атома *I* попадает нейтральный атом *II* (рис. 3, *б*), то электрическое поле атома *I* должно сместить заряды электронов и ядра атома *II* так, как изображено на рисунке 3, *б*. Такое относительное смещение зарядов в атоме *II* должно, в свою очередь, создавать электрическое поле, поддерживающее разделение зарядов в атоме *I*.

Из рисунка 3, *б* видно, что разноименно заряженные части атомов должны притягиваться друг к другу, а значит и атомы целиком должны притягивать друг друга. При сближении атомов между ними начинают действовать силы отталкивания. На расстоянии, примерно равном размеру атомов, силы взаимодействия между атомами равны нулю.

Точно такое же рассуждение мы можем провести и в отношении двух молекул, состоящих из нескольких десятков атомов. Нейтральные молекулы должны притягивать друг друга за счет образования электрических диполей-атомов. Действительно, молекулы должны притягиваться. Но как? Ясно, что по описанным выше причинам большая часть

---

*) Название «нематический» образовано от греческого слова νῆμα — нить. В жидких кристаллах под микроскопом видны тонкие подвижные нити, которые представляют собой дефекты структуры. В идеальном жидком кристалле таких нитей нет.

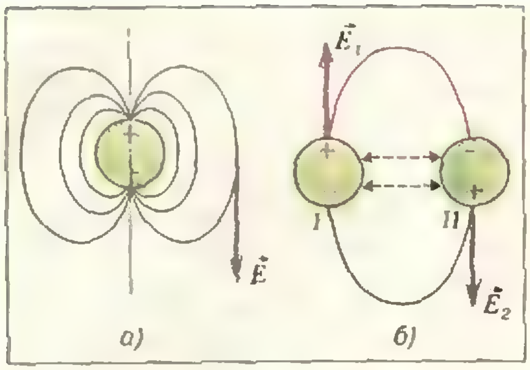


Рис. 3.

атомов одной молекулы стремится оказаться вблизи атомов другой молекулы, так как только в этом случае силы взаимодействия между молекулами обращаются в нуль. Но такая ситуация возможна только тогда, когда длинные оси молекул или плоскости молекул параллельны друг другу. Таким образом возникает определенный порядок в ориентации молекул и появляется выделенное направление. Это направление можно характеризовать единичным вектором $\vec{n}$ (см. рис. 1, 2).

Разумеется, такое параллельное расположение выделенных осей (или плоскостей) молекул возможно только при достаточно низкой температуре, когда тепловые толчки не настолько сильны, чтобы разрушить ориентационный порядок в системе молекул. При повышении температуры обязательно наступает момент, когда хаотическое тепловое движение молекул становится преобладающим и нематический порядок разрушается.

Таким образом, система таких особых молекул может иметь два состояния: обычное (изотропное) жидкое — при высоких температурах и анизотропное жидкое — при низких температурах. Подчеркнем, что нематический жидкий кристалл может быть действительно жидким, как вода, то есть центры масс молекул не образуют в данном случае какую-то правильную решетку, как в кристалле, а располагаются хаотично в пространстве и могут в нем свободно перемещаться. В то же время ориентация молекул в этой жидкости подчиняется строгому порядку. Интересно, что нематическая жидкость, образуемая молекулами вытянутой формы (рис. 2, *а*), известна уже много десятков лет, в то время как нематическая жидкость из дискообразных молекул (рис. 2, *б*) открыта только в последние 1—2 года.

Эффект Фредерикса

Наибольшее впечатление производят оптические свойства жидких кристаллов, сделавшие эти объекты столь популярными. Такие оптические эффекты очень необычны для жидкости и присущи твердому кристаллу, но теперь мы понимаем, в чем тут дело: в нематической жидкости, как и в кристалле, есть особые направления. С наличием этих направлений связаны многие замечательные свойства кристаллов и, в частности, оптические свойства. Поэтому такие особые направления называют оптическими осями. Направление оптических осей в жидком кристалле совпадает с вектором $\vec{n}$. В твердых кристаллах оптические оси жестко закреплены. А в жидких кристаллах направления оптических осей можно изменять с помощью самых разных воздействий, в том числе электрическими или магнитными полями. Эффект изменения направления ориентации молекул в нематической жидкости под действием поля наблюдался еще в предвоенные годы известным советским ученым В. Фредериксом и носит теперь его имя. Пользуясь популярными сейчас электронными часами и калькуляторами на жидких кристаллах, вы наблюдаете именно это явление — эффект Фредерикса.

Прежде чем описать эффект Фредерикса, необходимо напомнить, что такое поляризованный свет. В луче поляризованного света вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$ колеблется вдоль единственного направления. Обычный естественный свет не имеет такой определенной поляризации, так как он состоит из всевозможных волн, каждая из которых имеет произвольное направление колебаний вектора $\vec{E}$, а все вместе они составляют неполяризованный

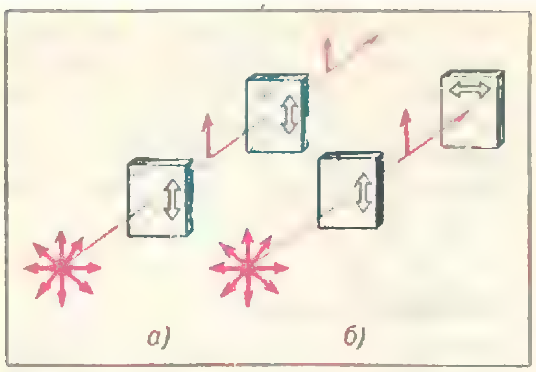


Рис. 4.

световой пучок. Особые кристаллы — поляризаторы — преобразуют неполяризованный свет в линейно поляризованный, поскольку они могут пропускать сквозь себя только волны, в которых вектор $\vec{E}$ ориентирован совершенно определенно по отношению к оптической оси поляризатора. Например, кристалл турмалина пропускает сквозь себя лишь свет, поляризованный вдоль оптической оси этого кристалла, в то время как волны с перпендикулярной поляризацией им сильно поглощаются. Если на пути светового пучка расположить два поляризатора, оси которых параллельны, то свет (поляризованный) пройдет сквозь такую оптическую систему (рис. 4, *а*), а если оси поляризаторов скрещены, то свет сквозь эту систему пройти не сможет (рис. 4, *б*).

Поместим теперь между двумя скрещенными поляризаторами два стекла, а между ними — нематическую жидкость, предварительно слегка пополировав стекла вдоль определенного направления. Такая полировка стекол нужна для того, чтобы сориентировать в заданном направлении оптическую ось жидкого кристалла ($\vec{n}$). Например, при параллельной полировке стекол молекулы, прилипшие к стеклам параллельно микробороздам на стеклянной поверхности, задают благодаря описанным межмолекулярным взаимодействиям такую же ориентацию вектора $\vec{n}$ и

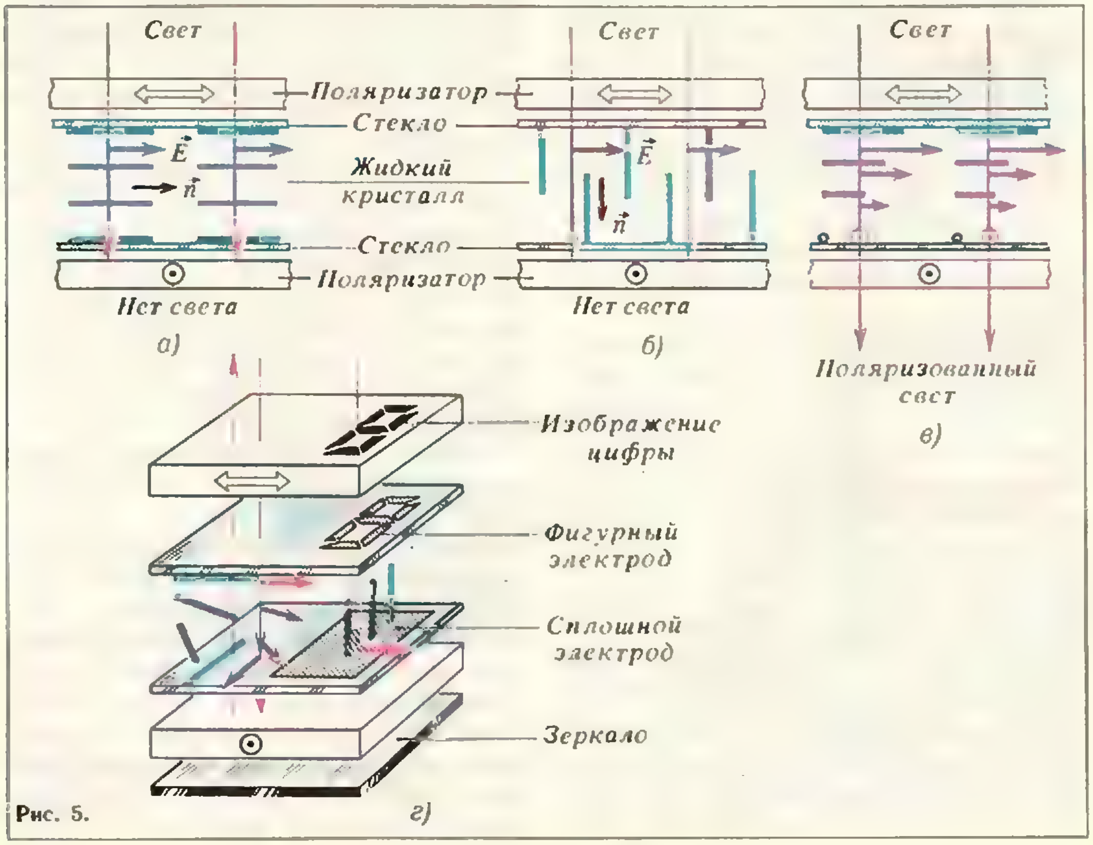

Свет
Свет
Свет
Поляризатор
Стекло
$\vec{E}$
Жидкий кристалл
$\vec{n}$
Стекло
Поляризатор
Нет света
Нет света
а)
б)
Поляризованный свет
в)
Изображение цифры
Фигурный электрод
Сплошной электрод
Зеркало
г)

Рис. 5.

в глубине слоя нематической жидкости (рис. 5, *а*). Если неполированные стекла предварительно обработать специальными химическими веществами, то можно добиться ориентации оси $\vec n$ перпендикулярно стеклянной поверхности (рис. 5, *б*). Наконец, если полированные стекла развернуть перпендикулярно друг другу, то можно получить закрученную по толщине слоя ориентацию вектора $\vec n$ (на рисунке 5, *в* показаны проекции оси $\vec n$ на плоскость рисунка).

Как же проходит поляризованный свет сквозь ориентированный слой нематической жидкости и сквозь изображенные оптические системы вообще? Если поляризация света параллельна оси $\vec n$ (вектор $\vec E$ колеблется вдоль направления $\vec n$), то свет проходит сквозь жидкий кристалл, не изменяя своей поляризации (рис. 5, *а*). То же происходит и в случае, если поляризация света перпендикулярна оптической оси (рис. 5, *б*). В случае закрученной ориентации $\vec n$ поляризация света также поворачивается вслед за осью $\vec n$ (рис. 5, *в*).

Можно понять, почему это происходит. Для этого вспомним основные свойства света и условия его распространения в кристаллах. Во-первых, свет как электромагнитная волна может излучаться при колебаниях электрических зарядов, например при быстром периодическом изменении расстояния между разноименными зарядами в атоме (рис. 3, *а*) или молекуле. При этом вблизи зарядов с тем же периодом изменяется электрическое поле, которое создает периодически меняющееся магнитное поле $\vec B$, а последнее порождает, уже на большем расстоянии от зарядов, переменное электрическое поле $\vec E$ и т. д. (это объясняется хорошо известным явлением электромагнитной индукции Фарадея). Так возникает в пространстве вокруг колеблющихся зарядов периодически изменяющееся электромагнитное поле. В таком электромагнитном поле, как известно, векторы $\vec E$ и $\vec B$ перпендикулярны друг другу и направлению распространения волны (рис. 6). Волны бегут по всем направлениям от источника. Если источником света является диполь, то свет преимущественно излучается в направлении, перпендикулярном оси диполя. Вдоль оси диполя излучения нет, поскольку в этом направлении магнитные поля, порождаемые колебаниями электрического поля по разные стороны от оси, в точности гасят друг друга.

Если электромагнитная волна распространяется в среде, состоящей из атомов и молекул, то колебания вектора $\vec E$ вызывают электрические колебания в атомах и молекулах. В результате возникают диполи, у которых периодически изменяется расстояние между разноименными зарядами. Но такие дипольные колебания, в свою очередь, приводят к излучению световой волны. Это означает, что в среде на самом деле распространяются как первая волна, так и вторичные волны, излучаемые молекулами и атомами под действием поля первой волны. Эти волны интерферируют друг с другом, то есть усиливают или ослабляют друг друга в зависимости от того, приходят ли они в данный момент времени в данную точку пространства в фазе или противофазе. В фазе — это значит, что амплитуды волн просто складываются; в противофазе — амплитуды вычитаются.

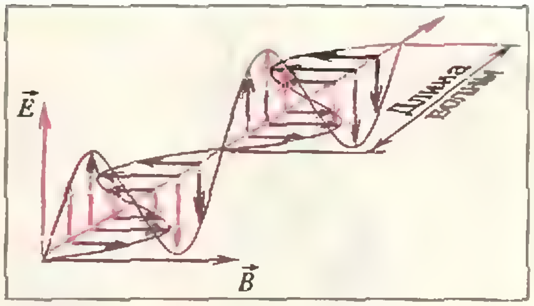


Рис. 6.

Что же происходит в слое жидкого кристалла при прохождении через него света? В жидком кристалле поле проходящей световой волны приводит к разделению зарядов в молекулах и возникновению дипольных колебаний. Предположим, что в молекуле кристалла электроны легко смещаются вдоль длинной оси молекулы, то есть вдоль направления $\vec n$. Тогда в случае, изображенном на рисунке 5,*а*, по толщине слоя распространяются падающая волна и вторичные волны, причем векторы $\vec E$ в волнах совпадают по направлению. В случае, изображенном на рисунке 5,*б*, диполи не образуются и вторичные волны не излучаются; значит, падающая волна проходит, не ослабляясь. Наконец, в случае 5,*в* поляризация света изменяет свое направление в соответствии с поворотом оптической оси $\vec n$ по толщине слоя. Поворот вектора $\vec E$ в такт с осью $\vec n$ обеспечивает излучение вторичных волн, не ослабляемое на любой глубине слоя. (Это интерференционное явление возможно тогда, когда на пути светового луча находятся многочисленные диполи — источники вторичных волн, то есть

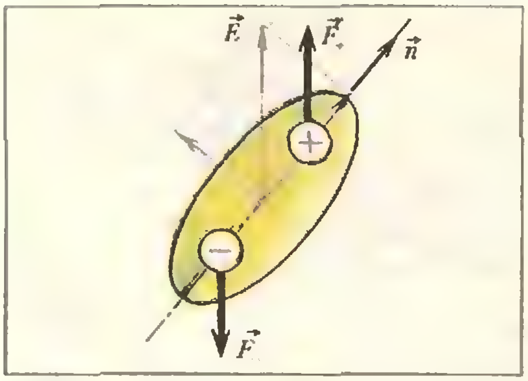


Рис. 7.

когда толщина слоя намного больше длины волны света.)

Так свет проходит сквозь слой нематической жидкости и доходит до второго поляризатора. И здесь возникает уже знакомая нам ситуация. В случаях *а* и *б* (рис. 5) свет сквозь оптическую систему пройти не может, а в случае *в* он проходит беспрепятственно. А теперь представим себе промежуточный случай, когда оси $\vec n$ на стенках скрещены между собой, но в толще слоя, благодаря какому-то воздействию, они повернулись почти перпендикулярно стеклам. В этой ситуации свет практически не проходит сквозь второй поляризатор. Остался еще один шаг до массового применения подобной системы: надо научиться управлять оптической осью нематической жидкости так, чтобы в отсутствие воздействия эта ось ориентировалась, как на рисунке 5,*в*, а при включении воздействия она наклонялась на заметный угол, как на рисунках 5, *б* и *г*. После выключения воздействия молекулы занимают, разумеется, свои прежние позиции вследствие условий на стеклянных поверхностях и взаимодействия между собой.

И оказалось, что именно в нематическом жидком кристалле это очень просто сделать с помощью электрического поля, заключив слой между полированными стеклами, на которые нанесены прозрачные электроды. Подключив к этим электродам слабенькую батарейку и замкнув цепь, мы сделаем нашу оптическую систему светонепроницаемой, а разомкнув цепь — прозрачной, что и осуществил впервые Фредерикс. Осталось обсудить интересный физический вопрос: почему электрическое поле поворачивает молекулы так, как нам нужно, и сколь сильным оно при этом должно быть.

Ответ на первую часть вопроса легко дать с помощью рисунка 7. Пусть молекула, у которой диполь легко образуется вдоль длинной оси, находится в электрическом поле и между векторами $\vec E$ и $\vec n$ имеется некоторый угол. Тогда в образовавшемся диполе на заряды $+Q$ и $-Q$ действуют силы $\vec F_+ = +Q\vec E$ и $\vec F_- = -Q\vec E$; таким образом, возникает пара сил, создающая крутящий момент. Этот момент сил и поворачивает молекулу так, чтобы она своей длинной осью ориентировалась вдоль вектора $\vec E$.

Здесь важно заметить, что на самом деле необходимо повернуть одновременно очень большое число таких молекул, но, к счастью, при этом нет необходимости поворачивать каждую молекулу в отдельности. Поскольку молекулы, взаимодействующие между собой, ориентированы одинаково, то, грубо говоря, достаточно толкнуть одну, чтобы другие, как костяшки домино, дружно повернулись вслед за первой. Поэтому для осуществления описанного эффекта необходимо некоторое конечное значение разности потенциалов на электродах — пороговое напряжение. Это пороговое значение определяется из условия равенства моментов двух сил: силы, действующей со стороны электрического поля, и возвращающей силы взаимодействия между молекулами, которая стремится ориентировать молекулы так, как сориентированы молекулы, прилипшие к стеклу. И оказывается, что независимо от толщины слоя пороговое напряжение может составлять доли вольта, причем толщина слоев, используемых на практике, составляет сотую долю миллиметра! Это во много раз меньше, чем требуется для получения таких же оптических эффектов в твердых кристаллах, что и обусловило громадный практический интерес к жидким кристаллам при создании циферблатов всевозможных типов.

Циферблат в упомянутых электронных часах устроен так, как показано на рисунке 5, *г*, где добавлено отражающее зеркало за вторым поляризатором, а верхний электрод имеет контур необходимой цифры. При падении сверху на этот циферблат свет свободно проходит до зеркала и отражается всюду, кроме участка, соответствующего цифре-электроду (если цепь замкнута). На участке же электрода свет, поглощаясь, не доходит до зеркала, и это место кажется темным — так появляется, скажем, черная цифра или буква на светлом фоне циферблата-индикатора. На подобном принципе работают буквенно-цифровые индикаторы в часах, калькуляторах, электронных переводчиках, в качестве шкал измерительных приборов и настройки, в разнообразных табло и т. п. Добавка красителей в слой жидкого кристалла делает эти индикаторы цветными. Кроме того, жидкокристаллические устройства с большим числом точек-электродов и сложной электронной схемой управления могут служить в качестве телевизионных экранов (плоский телевизор без электроннолучевой трубки), преобразователей изображения (приборы ночного видения), средств модуляции и сканирования светового луча в системах оптической связи, светолокации, оптической обработки информации в быстродействующих ЭВМ.

Нематические жидкости нашли широкое применение и в совсем другом плане. Оказывается, полимерные нити, получаемые из хорошо ориентированного нематического раствора полимерных молекул, приобретают огромную прочность. Это объясняется тем, что в таких нитях практически все молекулы хорошо «подогнаны» друг к другу, то есть их главные оси параллельны между собой, а это многократно усиливает межмолекулярное сцепление. Такие полимерные нити служат прекрасным средством упрочнения самых ответственных узлов в механизмах, машинах и аэрокосмических конструкциях, работающих в экстремальных условиях, то есть при очень высоких температурах и нагрузках. Есть, однако, и другие типы жидкокристаллических структур и материалов, имеющие не меньшее значение, но мы поговорим о них в следующей статье.

Геометрические задачи наших читателей

1. а) Докажите, что для любой точки N окружности, описанной около правильного треугольника ABC, разность между квадратом длины наибольшего из отрезков AN, BN, CN и произведением длин двух других из этих отрезков равна квадрату длины стороны треугольника.

б) Пусть длина стороны треугольника равна a, а длина наибольшего из упомянутых отрезков равна t. Чему равны длины двух других отрезков?

А. Дупло

2. Треугольник ABC разбит медианами AA_1, BB_1, CC_1 на шесть треугольников, в каждый из которых вписана окружность. Пусть r_1, r_2, …, r_6 — радиусы этих окружностей (рис. 1). Докажите, что

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_5}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}+\frac{1}{r_6}.$$

Р. Мазов

3. В треугольнике ABC величина угла C равна 120°. Пусть M — точка на стороне AB. Докажите, что отрезок CM является биссектрисой угла C в том и только в том случае, когда

$$\frac{1}{|CM|}=\frac{1}{|AC|}+\frac{1}{|BC|}.$$

С. Сефибеков

4. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Через середину M боковой стороны CD проведена прямая MO, пересекающая сторону AB в точке N. Пусть K — точка пересечения прямой AM с диагональю BD. Известно, что $(BM) \parallel (NK)$. Найдите отношение $|AD|:|BC|$ (AD и BC — основания трапеции).

Э. Абдулаев

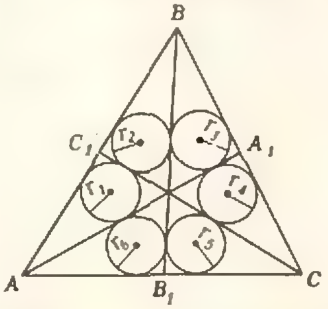


Рис. 1

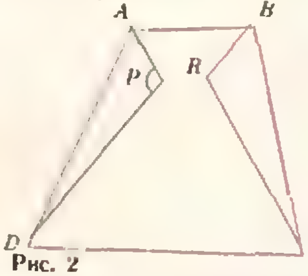
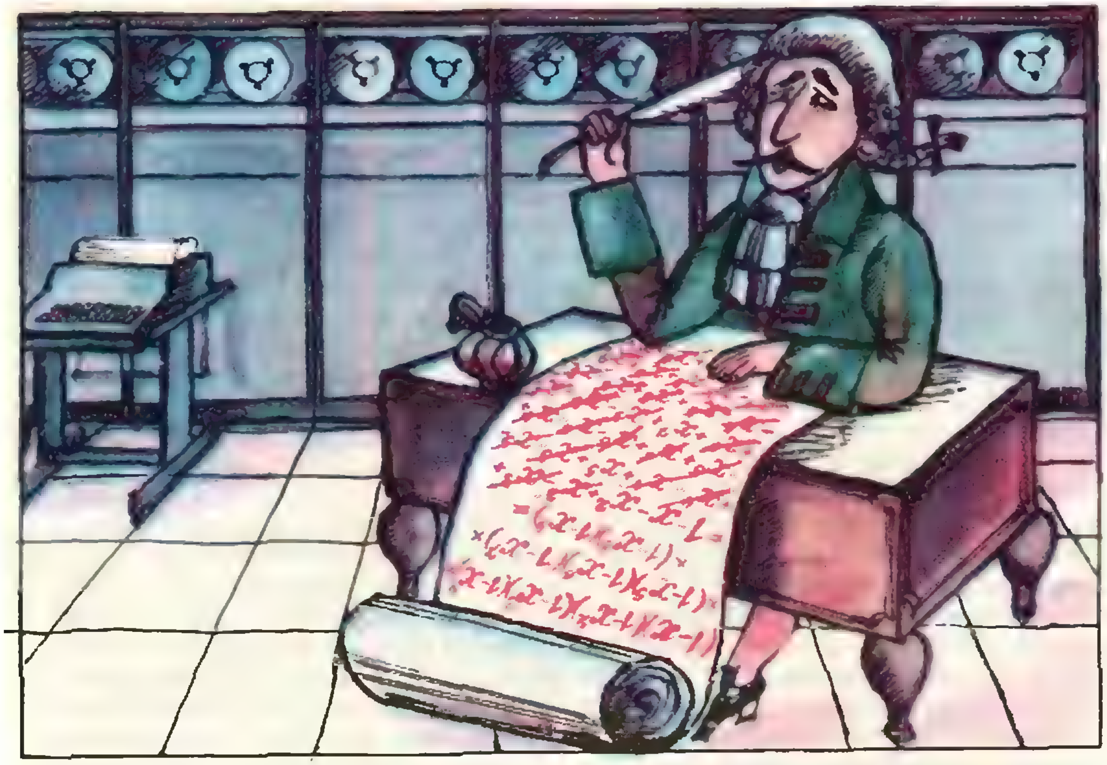


Рис. 2

5. Внутри четырехугольника $ABCD$ взяты точки P и R так, что $(AP) \parallel (CR)$, $(DP) \parallel (BR)$ и $\widehat{APD}=120°$ (рис. 2). Докажите, что если $|RC|-|AP|=|DP|-|RB|=|DC|-|AB|$, то четырехугольник $ABCD$ — трапеция.

Ф. Кабдыкаиров



Д. Фукс

О раскрытии скобок, об Эйлере, Гауссе, Макдональде и об упущенных возможностях

Сколько раз каждому из вас доводилось раскрывать скобки в произведении? Тысячи, а может быть, десятки тысяч? Если и есть в этом занятии что-нибудь привлекательное, так это надежда, что результат умножения, после приведения подобных членов, примет благоприятный вид, как, скажем,

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2,$$
$$(1-a)(1+a+\ldots+a^n)=1-a^{n+1}.$$

Ниже пойдет речь о подобных равенствах, только гораздо менее очевидных и гораздо более глубоких. Они составляют результат более чем двухсотлетней работы крупнейших математиков мира. Своим читателям я посоветую вооружиться ручкой и бумагой и повторять за мной все выкладки: это поможет не только понять содержание статьи, но и оценить степень нетривиальности ее результатов.

1. Тождество Эйлера

В середине XVIII века — дело было в 1748 году или несколькими годами раньше — Леонард Эйлер заинтересовался коэффициентами многочлена

$$\varphi_n(x)=(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^n).$$

Он раскрыл скобки в произведении — и получил поразительный результат. Проделаем эту выкладку и мы:

$$\begin{array}{llllllllll}
\varphi_1(x)=1-x, & & & & & & & & & \\
\varphi_2(x)=1-x-x^2 & +x^3, & & & & & & & & \\
\varphi_3(x)=1-x-x^2 & & +x^4 & +x^5 & -x^6, & & & & & \\
\varphi_4(x)=1-x-x^2 & & & +2x^5 & & & -x^8 & -x^9 & +x^{10}, & \\
\varphi_5(x)=1-x-x^2 & & & +x^5 & +x^6 & +x^7 & -x^8 & -x^9 & -x^{10} & \ldots, \\
\varphi_6(x)=1-x-x^2 & & & +x^5 & & +2x^7 & & -x^9 & -x^{10} & \ldots, \\
\varphi_7(x)=1-x-x^2 & & & +x^5 & & +x^7 & +x^8 & & -x^{10} & \ldots, \\
\varphi_8(x)=1-x-x^2 & & & +x^5 & & +x^7 & & +x^9 & & \ldots, \\
\varphi_9(x)=1-x-x^2 & & & +x^5 & & +x^7 & & & +x^{10} & \ldots, \\
\varphi_{10}(x)=1-x-x^2 & & & +x^5 & & +x^7 & & & & \ldots
\end{array}$$

Многоточия обозначают части многочленов $\varphi_n(x)$, содержащие x в степенях, больших 10 (выписать эти многочлены полностью не позволяет формат журнала: многочлен $\varphi_{10}(x)$, например, имеет степень 55).

Начнем с очевидного, но важного наблюдения: коэффициенты многочлена $\varphi_n(x)$ с ростом n «стабилизируются», то есть каждый из них начиная с некоторого n не меняется. Это легко объяснить: переход от $\varphi_{n-1}(x)$ к $\varphi_n(x)$, состоящий в умножении на $1-x^n$, не оказывает никакого воздействия на коэффициенты при 1, x, ..., x^{n-1}, так что при $n>k$ коэффициент при x^k в многочлене $\varphi_n(x)$ от n не зависит. (Например, вычисленная часть многочлена $\varphi_{10}(x)$ не изменится, если вместо φ_{10} взять φ_{11}, φ_{12} и т. д.) Ввиду этого мы можем говорить о «бесконечном произведении»

$$\varphi(x)=(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots,$$

понимая под этим, конечно, не многочлен, а *степенной ряд*, то есть выражение вида

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots,$$

где a_0, a_1, a_2, a_3, a_4...— числа; в нашем случае a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 — стабилизирующиеся коэффициенты. Наше вычисление показывает, что

$$\begin{aligned}
&a_0=a_5=a_7=1,\\
&a_1=a_2=-1,\\
&a_3=a_4=a_6=a_8=a_9=a_{10}=0.
\end{aligned}$$

$\varphi(x)$ называется *функцией Эйлера*.

Слово «функция» здесь употреблено не случайно: при $-1<x<1$ значения $\varphi(x)$ можно вычислить (подобно тому, как вычисляют сумму бесконечной геометрической прогрессии).

Теперь — главное. После раскрытия наших скобок очень многое уничтожается, можно сказать — почти все. Например, результат раскрытия скобок в произведении $(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^{10})$ содержит до приведения подобных 43 слагаемых с x в степенях, меньших или равных 10, в том числе 24 слагаемых с x в степенях 8, 9, 10. После приведения подобных из этих 43 слагаемых остается всего 5, в том числе ни одного с x в степенях 8, 9, 10. Более точно, как мы видели, среди коэффициентов a_0, a_1, a_2, ..., a_{10} три равны 1, два равны -1 и шесть равны 0. Выскажем осторожную гипотезу: *коэффициенты a_k всегда равны* 0, 1 *или* -1, *причем большинство из них равно* 0. Дальнейшее вычисление, которое читатель при желании сможет провести сам, не только подтверждает эту гипотезу, но и позволяет ее уточнить. Вот, например, часть ряда $\varphi(x)$, содержащая x в степенях, не превосходящих 100:

$$\varphi(x)=1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-$$
$$-x^{35}-x^{40}+x^{51}+x^{57}-x^{70}-x^{77}+x^{92}+x^{100}\ldots$$

Надо полагать, что Эйлер, который не боялся длинных выкладок и отменно считал, примерно столько членов ряда $\varphi(x)$ и вычислил. А потом он просто не мог не заметить, что коэффициенты, отличные от 0, равны 1 или -1, и при этом единицы и минус единицы расположены не как попало, а в строго определенном порядке: две единицы, две минус единицы, две единицы, две минус единицы и т. д.*). В таблице

показатели	1, 2	5, 7	12, 15	22, 26	35, 40	51, 57	70, 77	92, 100
коэффициенты	—1	1	—1	1	—1	1	—1	1

выписаны показатели степеней x, при которых стоят ненулевые коэффициенты.

Легко угадать, что это за показатели: в n-м столбце нашей таблицы в верхней строке стоят числа $\frac{3n^2 \pm n}{2}$, в нижней — число $(-1)^n$. Если это так при всех n, мы приходим к равенству

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots = 1-x-x^2+x^5+x^7-\ldots+(-1)^n x^{\frac{3n^2-n}{2}} + \\ +(-1)^n x^{\frac{3n^2+n}{2}} + \ldots$$

или, пользуясь принятой в математике сокращенной символикой,

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(x^{\frac{3n^2-n}{2}} + x^{\frac{3n^2+n}{2}}\right).$$

Это и есть *тождество Эйлера*. Последующие поколения математиков дали этому тождеству несколько доказательств. Одно из них приводится в п. 3. (Читатель, который больше интересуется фактами, чем доказательствами, без ущерба для понимания дальнейшего может этот параграф пропустить.) А сейчас я расскажу об одном замечательном применении тождества Эйлера, которое украшает все учебники комбинаторики.

2. Тождество Эйлера и число разбиений

Пусть n — натуральное число. Обозначим через $p(n)$ число способов, которыми можно представить n в виде суммы натуральных слагаемых (при этом слагаемые в суммах могут повторяться, и представления, различающиеся лишь порядком слагаемых, считаются одинаковыми). Например:

$p(1)=1;$
$p(2)=2$ $(2=2;\ 2=1+1);$
$p(3)=3$ $(3=3;\ 3=2+1;\ 3=1+1+1);$
$p(4)=5$ $(4;\ 3+1;\ 2+2;\ 2+1+1;\ 1+1+1+1);$
$p(5)=7$ $(5;\ 4+1;\ 3+2;\ 3+1+1;\ 2+2+1;$
$2+1+1+1;\ 1+1+1+1+1).$

Числа $p(n)$ входят во многие математические формулы, и их полезно уметь вычислять. Но как это сделать? Попробуйте, например, найти $p(10)$. Вам придется изрядно повозиться, и, если повезет, вы найдете правильный ответ: 42. А если нужно знать, скажем, $p(50)$? На помощь приходит тождество Эйлера.

---

*) Мемуар Эйлера на эту тему полностью приведен в книге Д. Пойа «Математика и правдоподобные рассуждения» (М., «Наука», 1975, с. 111). Чтение этого мемуара, как и других глав книги Пойа, несомненно, доставит вам большое удовольствие.

Сначала немного «теории». Положим

$$\pi(x)=1+\mathrm{p}(1)x+\mathrm{p}(2)x^2+\mathrm{p}(3)x^3+\ldots=1+x+2x^2+3x^3+5x^4+7x^5+\ldots$$

Как и $\varphi(x)$, $\pi(x)$ — функция, определенная при $-1<x<1$. Но, опять-таки, нас она интересует только как степенной ряд.

Теорема. *Ряды $\varphi(x)$ и $\pi(x)$ взаимно обратны, то есть*

$$\varphi(x)\cdot\pi(x)=1.$$

Вы понимаете, в чем смысл этого равенства? Степенные ряды можно перемножать:

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)(b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots)=a_0b_0+a_0b_1x+a_0b_2x^2+\ldots$$
$$+a_1b_0x+a_1b_1x^2+a_1b_2x^3+\ldots+a_2b_0x^2+a_2b_1x^3+a_2b_2x^4+\ldots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\ldots;$$

наше утверждение означает, что если перемножить таким образом ряды $\varphi(x)$ и $\pi(x)$, то полученное произведение сведется к 1: коэффициенты при x, x^2, x^3,... будут равны нулю.

Доказательство.

$$\frac{1}{\varphi(x)}=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{1-x^k}\cdot\ldots=$$
$$=(1+x+x^2+x^3+\ldots)(1+x^2+x^4+x^6+\ldots)\times\ldots$$
$$\ldots\times(1+x^k+x^{2k}+x^{3k}+\ldots)\ldots$$

При раскрытии скобок в последнем произведении получится сумма всевозможных выражений вида

$$x^{a_1}x^{2a_2}\ldots x^{ka_k},$$

где a_1, ..., a_k — целые неотрицательные числа. Таким образом, x^n войдет в эту сумму столько раз, сколькими способами n можно представить в виде

$$a_1+2a_2+\ldots+ka_k.$$

Но это представление можно переписать так:

$$\underbrace{1+\ldots+1}_{a_1}+\underbrace{2+\ldots+2}_{a_2}+\ldots+\underbrace{k+\ldots+k}_{a_k}.$$

Мы видим, что представлений числа n в виде $a_1+2a_2+\ldots+ka_k$ столько же, сколько есть его представлений в виде суммы натуральных слагаемых, то есть $\mathrm{p}(n)$. Таким образом, коэффициент при x^n в нашем произведении равен $\mathrm{p}(n)$, то есть $\frac{1}{\varphi(x)}=\pi(x)$. Теорема доказана.

Положив для удобства $\mathrm{p}(0)=1$, напишем

$$(1-x-x^2+x^5+x^7-\ldots)(\mathrm{p}(0)+\mathrm{p}(1)x+\mathrm{p}(2)x^2+\ldots)=1$$

(коэффициенты в первом множителе пишутся согласно тождеству Эйлера!). Раскроем скобки и приравняем нулю коэффициенты при x, x^2, x^3, ..., x^n в левой части. Получим:

$$\mathrm{p}(1)-\mathrm{p}(0)=0;$$
$$\mathrm{p}(2)-\mathrm{p}(1)-\mathrm{p}(0)=0;$$
$$\mathrm{p}(3)-\mathrm{p}(2)-\mathrm{p}(1)=0;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathrm{p}(n)-\mathrm{p}(n-1)-\mathrm{p}(n-2)+\mathrm{p}(n-5)+\mathrm{p}(n-7)-\ldots=0$$

(в левой части последней формулы нужно писать слагаемые до тех пор, пока аргумент у p остается неотрицательным). Итак,

$$\mathrm{p}(n)=\mathrm{p}(n-1)+\mathrm{p}(n-2)-\mathrm{p}(n-5)-\mathrm{p}(n-7)+\ldots$$

Эта формула позволяет быстро составить довольно длинную таблицу чисел $\mathrm{p}(n)$. Вот практический совет, как это сделать. Возьмите лист клетчатой бумаги — лучше всего двойной тетрадный лист. Отрежьте вдоль его длинной стороны полоску шириной 3—4 клетки. Положите эту полоску перед собой вертикально и у левого среза в нижней клетке поставьте какой-нибудь знак, скажем звездочку. Затем, двигаясь вверх,

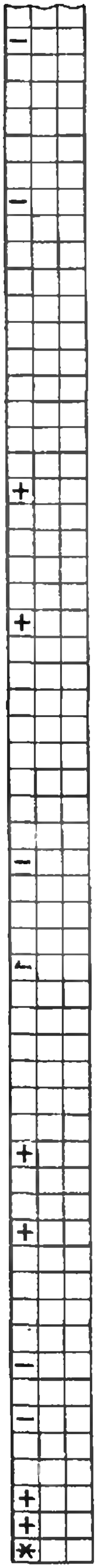


Рис. 1.

поставьте в первой клетке +, во второй +, в пятой −, в седьмой —, в двенадцатой +, в пятнадцатой + и т. д., насколько хватит длины полоски (рис. 1). Оставшуюся часть листа также положите перед собой вертикально и, отступя 10—15 клеток от ее левого среза, проведите на ней вертикальную черту — сверху донизу. В клетки, прилегающие к черте слева, двигаясь сверху вниз, впишите уже известные вам числа $p(n)$, начиная с $p(0)$: 1, 1, 2, 3, 5, 7. Чтобы найти следующее значение, приложите отрезанную полоску справа к вертикальной черте так, чтобы звездочка оказалась против первой пустой клетки. Теперь из суммы чисел, стоящих против плюсов, вычтите сумму чисел, стоящих против минусов. Что получится — впишите в клетку против звездочки: это — следующее значение функции $p(n)$. Опустите полоску на одну клетку вниз и повторите то же самое. И так далее. Через несколько минут вы получите колонку чисел $p(n)$ высотой в ваш лист.

Пользуясь этим рецептом, я нашел числа $p(n)$ для $n \leqslant 50$. На это потребовалось — честно, по часам — 17 минут. (Несколько первых шагов вычисления я привожу на рисунке 2; красные числа — это новые значения $p(n)$.) В частности,

$$p(50) = 204\,226.$$

Представьте себе, сколько потребовалось бы времени для нахождения этого числа кустарным способом!

3. Доказательство тождества Эйлера

Раскроем скобки в нашем произведении

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots$$

Получится сумма (бесконечная), в которой x^n встретится столько раз, сколькими способами n представляется в виде суммы возрастающей последовательности натуральных чисел: $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$, $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$; при этом знак при x^n будет +, если k четно, и —, если k нечетно. Ниже в этом параграфе наборы $(n_1, \ldots, n_k)$ с $n_1 + \ldots + n_k = n$ и $n_1 < \ldots < n_k$ называются просто «разбиениями».

Мы будем различать разбиения трех типов. Обозначим для разбиения $(n_1, \ldots, n_k)$ через s наибольшее число такое, что $n_k - n_{k-s+1} = s - 1$, то есть s чисел $n_{k-s+1}, \ldots, n_k$ идут подряд (очевидно, $s \leqslant k$). Например, для разбиения $12 = 2+4+6$ $s=1$, для разбиения $12 = 1+5+6$ $s=2$, для разбиения $33 = 4+5+7+8+9$ $s=3$. Мы скажем, что разбиение $(n_1, \ldots, n_k)$ принадлежит

первому типу, если $n_1 \leqslant s$, исключая случай $n_1 = s = k$;

второму типу, если $n_1 > s$, исключая случай $n_1 = s+1$, $s = k$;

третьему типу в исключенных случаях, то есть если $s = k$ и n_1 равно s или $s+1$.

Поставим теперь в соответствие разбиению $(n_1, \ldots, n_k)$ первого типа разбиение

$$\begin{cases} (n_2, \ldots, n_{k-n_1}, n_{k-n_1+1}+1, \ldots, n_k+1), & \text{если } k-n_1 \geqslant 2, \\ (n_2+1, \ldots, n_k+1), & \text{если } k-n_1 = 1, \end{cases}$$

которое относится, очевидно, ко второму типу (проверьте!)

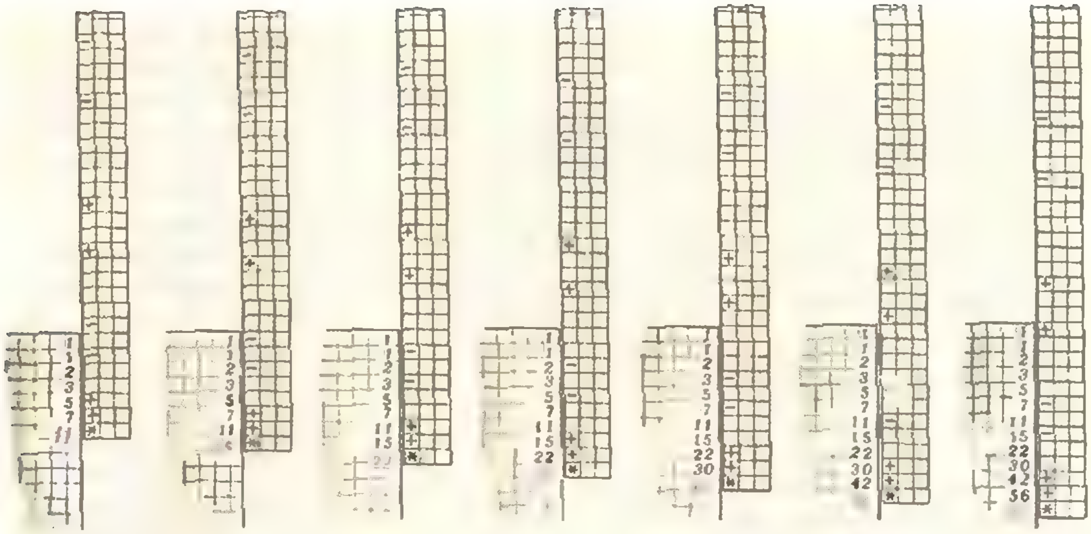


Рис. 2

Более того, таким образом между разбиениями первого и второго типа получается взаимно однозначное соответствие: обратное отображение ставит в соответствие разбиению $(n_1, \ldots, n_k)$ второго типа разбиение

$$\begin{cases} (s, n_1, \ldots, n_{k-s}, n_{k-s+1}-1, \ldots, n_k-1), & \text{если } k-s \geqslant 1, \\ (s, n_1-1, \ldots, n_k-1), & \text{если } k-s=0 \end{cases}$$

(обозначение s сохраняет прежний смысл), относящееся к первому типу (проверьте!). Поскольку наше соответствие связывает разбиения, в которых числа слагаемых различаются на 1, соответствующие этим разбиениям x^n уничтожатся, и в нашей сумме останутся только слагаемые, отвечающие разбиениям третьего типа. А разбиения этого типа, по определению, имеют вид

$$(k, k+1, \ldots, 2k-1),$$
$$(k+1, k+2, \ldots, 2k),$$

и им соответствуют $(-1)^k x^{\frac{3k^2-k}{2}}$, $(-1)^k x^{\frac{3k^2+k}{2}}$ (как вам известно, $k+(k+1)+\ldots+(2k-1)=\frac{3k^2-k}{2}$ и $(k+1)+(k+2)+\ldots+2k=\frac{3k^2+k}{2}$).

Доказательство окончено.

4. Тождество Гаусса

Прошло около 70 лет со времени открытия Эйлера, и другой великий математик, Карл-Фридрих Гаусс, сделал следующий шаг в теории, получившей (по причинам, в которые мы не вникаем) название «теория модулярных форм». Он обнаружил, что, если функцию Эйлера возвести в куб, получится ряд, быть может еще более замечательный, чем ряд Эйлера:

$$\varphi(x)^3=(1-x)^3(1-x^2)^3(1-x^3)^3\ldots=1-3x+5x^3-7x^6+9x^{10}-11x^{15}\ldots$$

(я советую вам не полениться и вычислить столько коэффициентов ряда $\varphi(x)^3$) или

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^3=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Это *тождество Гаусса* тем более удивительно, что квадрат функции Эйлера с виду ничем не примечателен:

$$\varphi(x)^2=1-2x-x^2+2x^3+x^4+2x^5-2x^6-2x^8-2x^9+x^{10}\ldots$$

(не радуют и дальнейшие члены этого ряда: последовательность его коэффициентов не обнаруживает никакой закономерности, в ней появляются тройки, четверки и т. д.). Глубину тождества Гаусса подчеркивает то обстоятельство, что известны его доказательства, относящиеся к совершенно разным областям математики — от геометрии Лобачевского до весьма абстрактной гомологической алгебры. Известно и доказательство, по духу близкое к доказательству тождества Эйлера из п. 3, но оно удручающе громоздко. Доказательства, которое можно было бы предложить читателям «Кванта», я не знаю. Может быть, такое доказательство придумает кто-нибудь из читателей?

5. Степени функции Эйлера

Итак, мы знаем, как устроены ряды $\varphi(x)$ и $\varphi(x)^3$, но не имеем никакой удовлетворительной формулы для $\varphi(x)^2$. А как обстоит дело с рядами $\varphi(x)^4$, $\varphi(x)^5, \ldots$? Иными словами: *при каких n существуют формулы для коэффициентов ряда $\varphi(x)^n$?* Для ответа на этот неформальный (то есть не имеющий точного смысла) вопрос я предлагаю использовать следующий полуформальный признак. Если при некотором n среди коэффициентов ряда $\varphi(x)^n$ часто попадаются нули — это вряд ли случайно: наверное, для $\varphi(x)^n$ есть какое-то тождество типа тождеств Эйлера и Гаусса. Впрочем, если нулей мало или нет вовсе — ничего еще не известно. По моей просьбе Е. И. Коркина вычислила на ЭВМ коэффициенты, с которыми в ряды $\varphi(x)$, $\varphi(x)^2, \ldots, \varphi(x)^{15}$ входят $x, x^2, \ldots, x^{50}$ (те из вас, кто учится в математической школе и проходит практику на ЭВМ, могут попытаться повторить это вычисление). Нет смысла приводить результаты вычисления полностью; я ограничусь таблицей, в которой $c(n)$ обозначает число нулей среди коэффициентов при $x, \ldots, x^{50}$ в ряде $\varphi(x)^n$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$c(n)$	40	17	41	10	0	15	0	19	0	10	0	0	0	13	0

Констатируем: при $n=1,3$ нулей очень много (это мы уже знаем), при $n=2, 4, 6, 8, 10, 14$ их порядочно, при $n=5, 7, 9, 11, 12, 13, 15$ их нет вовсе.

Наличие нулей при $n=2, 4$ и 6 не должно нас удивлять. Дело в том, что ряды $\varphi(x)$ и $\varphi(x)^3$ настолько разрежены, что в произведениях $\varphi(x)\varphi(x)$, $\varphi(x)\varphi(x)^3$ и $\varphi(x)^3\varphi(x)^3$ некоторые члены могут отсутствовать еще до приведения подобных членов. Например, числа 11, 18, 21 (и многие другие) не представляются как суммы двух чисел вида $\frac{3n^2 \pm n}{2}$ и потому члены с x^{11}, x^{18}, x^{21} отсутствуют в $\varphi(x)^2$. По аналогичной причине члены с x^9, x^{14}, x^{19} (и другие) отсутствуют в $\varphi(x)^4$, а члены с x^5, x^8, x^{14} (и другие) отсутствуют в $\varphi(x)^6$.

А вот «подскоки» числа $c(n)$ при $n=8, 10, 14$ так просто не объяснить. Оказывается, для $\varphi(x)^8$, $\varphi(x)^{10}$, $\varphi(x)^{14}$ имеются некоторые формулы, хотя и не столь изящные, как тождества Эйлера и Гаусса. (Такая формула есть и для $\varphi(x)^{15}$, но это не сказывается на нашей таблице.) Для иллюстрации я приведу формулу для $\varphi(x)^8$, по существу принадлежащую Ф. Клейну:

$$\varphi(x)^8=\sum\left[\frac{1}{3}+\frac{3}{2}(3klm-kl-km-lm)\right]x^{-(kl+km+lm)},$$

где суммирование в правой части происходит по всем тройкам k, l, m целых чисел с $k+l+m=1$.

(Хотя эта формула не особенно проста, она позволяет заметить, что если n не представляется в виде $-(kl+km+lm)$, где k, l, m — целые числа с суммой 1, то есть в виде $k^2+l^2+kl-k-l$ с произвольными целыми k, l, то член с x^n отсутствует в ряде $\varphi(x)^8$. Например, в таком виде не представляются числа, имеющие при делении на 4 остаток 3, а также числа 13, 18, 28, 29.)

Из сказанного видно, что среди целых чисел имеются некие «избранные показатели» n, для которых ряд $\varphi(x)^n$ имеет более или менее благоустроенный вид. Загадка «избранных показателей» была (тоже более или менее) разгадана совсем недавно, и главная заслуга в этом принадлежит английскому математику Яну Макдональду. Интересный рассказ об открытии Макдональда содержится в статье Ф. Дж. Дайсона «Упущенные возможности», русский перевод которой опубликован в первом выпуске журнала «Успехи математических наук» за 1980 год.

О Дайсоне и его статье стоит сказать особо. Дайсон — один из крупнейших физиков нашего времени, математик по образованию. Главная цель его статьи — показать на ряде ярких примеров, как значительные математические и физические открытия задерживались, порою на десятки лет, из-за отсутствия должного взаимодействия между специалистами в той и другой науке. Хотя статья не адресована школьникам и многое в ней будет вам непонятно, я уверен, что ее чтение доставит вам удовольствие. А здесь я приведу (с сокращениями) отрывок из этой статьи, непосредственно касающийся нашего предмета.

6. Рассказ Ф. Дж. Дайсона

«Начну с банальной истории, случившейся со мной. Это живая иллюстрация того, какие возможности упускаются по причине узкой специализации. Свою научную деятельность я начинал с теории чисел. В мои студенческие годы в Кэмбридже я учился у Г. Харди, уже тогда бывшего легендарной личностью. Даже первокурсникам в те годы было ясно, что теория чисел в духе Харди и Рамануджана устарела и блестящее будущее ее не ждет. Сам Харди в лекции о τ-функции Рамануджана назвал этот сюжет «одной из тихих заводей математики». Значения τ-функции — это коэффициенты ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) x^{n-1} = \varphi(x)^{24} = \prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n)^{24}. \tag{1}$$

Рамануджан открыл ряд замечательных арифметических свойств $\tau(n)$.

Доказательство и обобщение этих свойств Морделлом, Гекке и другими сыграли важную роль в развитии модулярных форм. Но сами τ-функции по-прежнему оставались тихой заводью, далекой от основного русла математики, где дилетанты могли плескаться в свое удовольствие, не тревожимые конкуренцией с профессионалами. Уже став физиком, много лет спустя, я сохранил сентиментальную привязанность к τ-функциям и отдыхал от такого серьезного дела, как физика, время от времени возвращаясь к работам Рамануджана и размышляя над многими увлекательными проблемами, которые он оставил нерешенными. Четыре года тому назад (статья Дайсона написана в 1972 году — *Д. Ф.*), во время такого отдыха от физики, я нашел новую формулу для τ-функции, столь красивую, что просто поразительно, как сам Рамануджан не додумался до нее. Выглядит она так:

$$\tau(n) = \frac{1}{1!2!3!4!} \sum (a-b)(a-c)(a-d)(a-e) \times$$
$$\times (b-c)(b-d)(b-e)(c-d)(c-e)(d-e). \tag{2}$$

Суммирование ведется по всем пятеркам целых чисел a, b, c, d, e, имеющих при делении на 5, соответственно, остатки 1, 2, 3, 4, 0 и таких, что $a+b+c+d+e=0$, $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=10n$. Пользуясь (1), можно записать эту формулу в виде выражения для $\varphi(x)^{24}$ (сравните с приведенным выше выражением для $\varphi(x)^8$ — *Д. Ф.*).

Я пришел к ней под влиянием письма Винквиста, получившего похожее выражение для $\varphi(x)^{10}$.

Продолжая своим доморощенным способом исследования этих тождеств, я обнаружил существование столь же красивой формулы, как (2), для n-х степеней φ в тех случаях, когда n принадлежит следующей последовательности целых чисел:

$$n=3,\ 8,\ 10,\ 14,\ 15,\ 21,\ 24,\ 26,\ 28,\ 35,\ 36,\ \ldots \qquad (3)$$

(вот они, «избранные показатели»! — *Д. Ф.*). На этом я остановился. Довольно недолго я разглядывал странную последовательность (3). Будучи в то время теоретиком-числовиком, я ничего в ней не увидел. Перегородки в сознании помешали мне заметить, что я неоднократно встречал эти числа в качестве физика. Попадись они мне на глаза в контексте какой-нибудь физической задачи, я бы, наверное, узнал в них размерности простых алгебр Ли, если не считать число 26. Почему сюда попало 26, не знаю до сих пор».

Простите, я забыл, что вы не знаете, что такое простые алгебры Ли. Это неважно. Я постараюсь объяснить вам, что такое числа (3). Вспомните, что вращения плоскости вокруг фиксированной точки зависят от одного параметра — угла поворота. Вращения трехмерного пространства зависят от трех параметров — широты и долготы оси вращения и угла поворота. Вообще, «вращения» n-мерного пространства зависят от $\frac{n(n-1)}{2}$ параметров, а «вращения» n-мерного «комплексного пространства» — от n^2-1 параметров. К числам $\frac{n(n-1)}{2}$ и n^2-1 (то есть 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, ... и 3, 8, 15, 24, 35, ...) нужно присоединить пять «особых размерностей» 14, 52, 78, 133 и 248. Если еще выбросить, как это и делает Дайсон, числа 1 и 6, получится последовательность (3), которую, конечно, твердо помнит любой физик-теоретик.

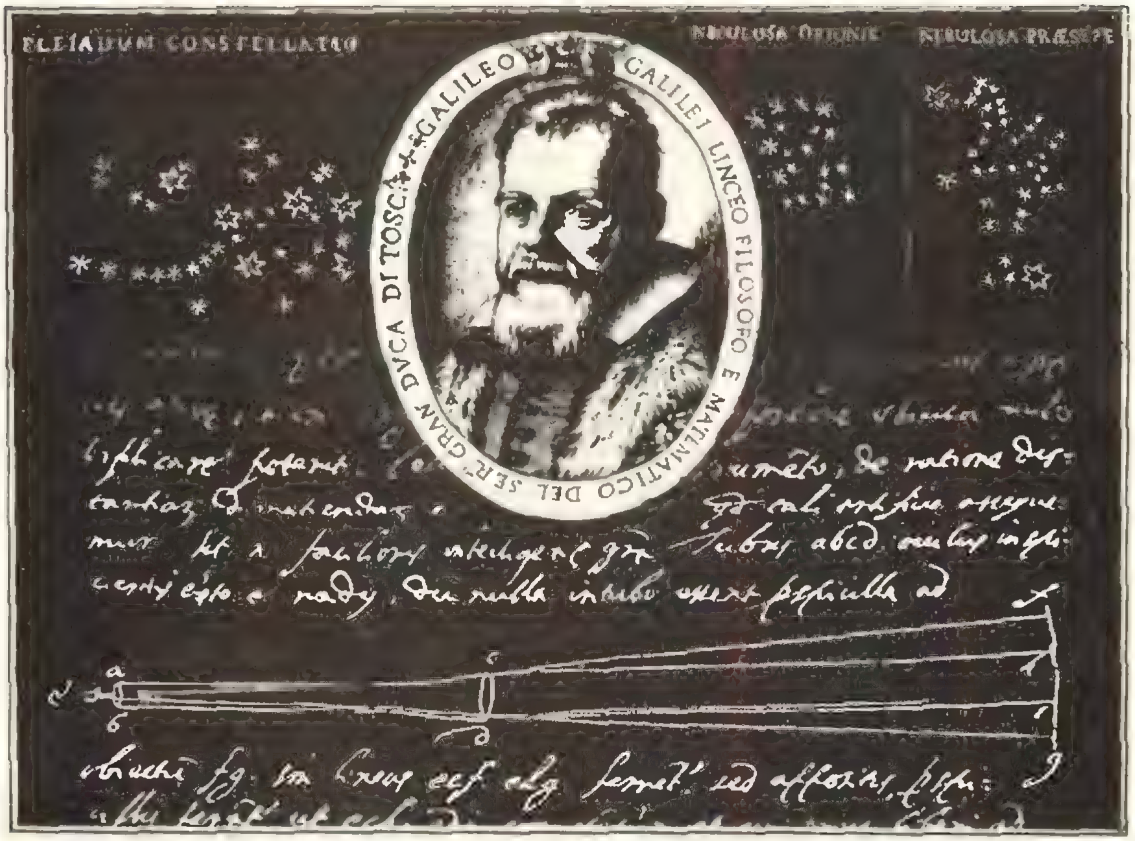
«Так я упустил возможность заметить глубокую связь между модулярными формами и алгебрами Ли только потому, что Дайсон теоретик-числовик не поговорил с Дайсоном физиком. У этой истории счастливый конец. Неизвестный мне в то время английский математик Ян Макдональд получил эти же формулы как частный случай более общей теории. Алгебры Ли входили в его теорию с самого начала, а связь с модулярными формами появилась нежданно-негаданно. Выяснилось также, что Макдональд находился в Институте высших исследований в Принстоне, когда мы оба работали над этой проблемой. Поскольку наши дочери учились в одном классе, мы виделись время от времени в течение всего его годичного пребывания в Принстоне. Но так как он был математиком, а я физиком, мы не говорили о своей работе. То, что мы думали над одним и тем же вопросом, находясь так близко друг от друга, выяснилось лишь по его возвращении в Оксфорд. Вот упущенная возможность, но не столь драматичная, поскольку Макдональд во всем разобрался и без моей помощи».

7. Заключение

Изложенная здесь теория совсем не ограничивается вычислением степеней функции Эйлера: имеется большое количество замечательных формул, в левой части которых стоят бесконечные произведения иного типа. Я надеюсь, что когда-нибудь вы пожелаете познакомиться с этим предметом более серьезно. Напоследок я покажу вам еще два тождества, которые Гаусс доказал одновременно с тождеством из п. 4:

$$(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)^2(1-x^4)(1-x^5)^2(1-x^6)\ldots=$$
$$=1-2x+2x^4-2x^9+2x^{16}-2x^{25}\ldots,$$

$$\frac{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)\ldots}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)\ldots}=1+x+x^3+x^6+x^{10}+x^{15}+x^{21}+\ldots$$


PLEIADUM CONSTELLATIO
NEBULOSA ORIONIS
NEBULOSA PRÆSEPE
GALILEO GALILEI LINCEO FILOSOFO E MATEMATICO DEL SER. GRAN DUCA DI TOSC.
a
b

С. Гиндикин

Медичейские звезды

Молодость Галилея была безраздельно отдана механике. Более двадцати лет он целенаправленно шел к намеченной еще в юности цели: постичь законы естественных движений. Очень рано (по свидетельству Вивиани) он открыл изохронность качаний математического маятника. К 1604 г. Галилей знал закон изменения пути при свободном падении, но еще был озабочен противоречиями с фактами, казавшимися несомненными (письмо к Сарпи). Наконец, к 1609—10 гг. результаты исследований свободного падения и движения брошенных тел были доведены до полной ясности*). Оставалось только записать их; Галилей приступает к работе над всеобъемлющим мемуаром, но постепенно уделяет ему все меньше времени, пока вообще не прерывает работу на...30 лет. Что же произошло?

«Новые очки». Рассказывая о жизни великих людей, нередко приходится обращать внимание на дела житейские. Более высокое жалованье было одной из причин переезда Галилея из Пизы в Падую. Здесь его материальное положение становится более прочным. Первоначальное жалованье в 180 флоринов, хотя и медленно, увеличивалось; дополнительный доход давали молодые аристократы, с которыми Галилей занимался отдельно и которые часто жили в его доме. Однако тяжелым грузом легла на плечи Галилея выплата приданого сестрам; да и его собственная семья росла и требовала все больше средств. В 1609 г. Галилей был озабочен очередными переговорами об увеличении жалованья. Скупую и практичную синьорию Венецианской республики могло раскошелить какое-нибудь изобретение, имеющее несомненное практическое применение.

---

*) О работах Галилея по механике рассказывалось в статье «История о том, как Галилей открыл законы движения» («Квант», 1980, № 1)

...В 1608 г. в Голландии появились зрительные трубы, позволяющие разглядывать отдаленные предметы; их называли иногда «новыми очками». Еще Леонардо да Винчи говорил об очках, позволяющих видеть Луну большой; Роджер Бэкон говорил об очках, делающих человека размером с гору. Честь изобретения оспаривали мастера-оптики Липперсгей и Андриансен.

К середине года трубы появились в Париже. Тогда же какой-то чужестранец пытался продать зрительную трубу Венецианской республике, не вдаваясь в подробности по поводу ее происхождения. Паоло Сарпи, друг Галилея, дал отрицательный отзыв о возможностях использования зрительной трубы «на войне, на суше и на море». Первые трубы были еще очень несовершенны.

Галилей услышал о трубах, когда находился в Венеции. «Узнав об этом, я вернулся в Падую, где тогда проживал, и начал размышлять над задачей. В первую же ночь после моего возвращения я ее решил, а на следующий день изготовил инструмент, о котором и сообщил в Венецию тем же самым друзьям, с которыми предшествующий день я рассуждал об этом предмете. Тотчас же я принялся за изготовление другого, более совершенного инструмента, который шесть дней спустя привез в Венецию». В «Звездном вестнике» Галилей описывал ситуацию еще более торжественным образом: «...не жалея ни труда, ни средств, я достиг того, что изготовил инструмент настолько совершенный, что при взгляде через него предметы казались почти в тысячу раз крупнее и более чем в тридцать раз ближе, чем видимые естественным образом. Совсем излишне было бы перечисление того, насколько удобны такие инструменты как на суше, так и на море».

На самом деле характеристики труб были более скромными. Первая труба Галилея давала трехкратное увеличение, а труба, привезенная в Венецию,— восьмикратное. Галилей решил при помощи своей совершенной трубы снискать расположение членов синьории (быть может, это была идея Сарпи). 21 августа самые уважаемые люди Венеции рассматривали с колокольни собора Св. Марка отдаленные кварталы города, а 24 августа Галилей торжественно передал свою трубу в дар Венеции. Галилей не скупился на рекламу своего подарка. В послании дожу Венеции Леонардо Донато он говорит, что извлек идею прибора «из наиболее сокровенных соображений о перспективе».

Потом много говорили, что Галилей присвоил себе чужое изобретение (об этом идет речь в пьесе Брехта «Жизнь Галилея»). Сам Галилей, по крайней мере в публикациях, всегда признавал, что построил свою трубу, услышав об изобретении голландцев (но не имея подробной информации и не видя «фламандской перспективы»). Позднее он подчеркивал оригинальность своего пути. «Теперь мы достоверно знаем, что голландец — изобретатель телескопа был простым мастером, изготовлявшим обыкновенные очки. Случайно перебирая стекла разных сортов, он взглянул сразу через два стекла, одно выпуклое, другое вогнутое, находившиеся на разных расстояниях от глаза... и таким образом открыл инструмент. Я же, движимый вышеупомянутым известием, нашел инструмент путем рассуждения.»

Можно сказать, что Галилей продемонстрировал превосходство теории над практикой. Многие годы никто не мог создать трубы, сравнимой по возможностям с трубами Галилея (из-за этого, в частности, не получали подтверждения астрономические наблюдения Галилея).

Труба Галилея выполнила свое назначение: ему было назначено пожизненно годовое жалование в тысячу флоринов, невиданное для математика. Галилей должен был изготовить 12 труб для синьории, а никому больше труб не предоставлять.

«Звездный вестник». Вскоре Галилей имел трубу с 20-кратным увеличением, а потом он «оставив дела земные... обратился к небесным». В конце 1609 г. Галилей рассматривает через трубу Луну и обнаруживает, что «поверхность Луны не гладкая и не ровная и не в совершенстве сферическая, как полагал в отношении ее целый легион философов, а, напротив того, неровная, шероховатая, испещренная углублениями и возвышенностями, наподобие поверхности Земли». Кроме того, Галилей обращает внимание на пепельный свет на части Луны, не освещенной Солнцем. Он считает этот свет «отблеском Земли». Позднее оказалось, что в то же время начали наблюдения небесных тел при помощи телескопа англичанин Харриот и его ученик Лоуэр (их наблюдения не были известны современникам). Лоуэр писал в письме учителю, что Луна напомнила ему пирог с вареньем, испеченный его кухаркой на прошлой неделе. О пепельном свете на Луне говорили уже Леонардо да Винчи и Местлин, учитель Кеплера.

Затем перед глазами Галилея Млечный Путь распался на отдельные звезды: «все споры, в течение веков мучившие философов, умолкли сами собой благодаря наглядности и очевидности... Млечный Путь представляет собой не что иное, как скопление бесчисленного множества звезд, как бы расположенных в кучах...»

Наконец, 7 января 1610 г. Галилей направил трубу в сторону Юпитера. Вблизи Юпитера он обнаружил три звезды. Он не сомневался, что видит обычные «неподвижные» звезды, но что-то привлекло его пристальное внимание. На следующую ночь Галилей, «водимый неизвестно какой судьбой», вновь рассматривает Юпитер. Он имел все основания не сожалеть! Он вновь увидел знакомые звезды, но... их положение относительно Юпитера изменилось: вчера они располагались по разные стороны Юпитера, а сегодня — все были по одну сторону. Пока еще можно продолжать считать звезды неподвижными, а изменение их взаимного положения объяснить движением Юпитера. 9 января «небо со всех сторон было обложено тучами». 10 и 11 января Галилей нашел только две из трех звезд. 13 января...появилась четвертая!

Зреет новое решение: эти звезды перемещаются относительно Юпитера, это его спутники — лу́ны, и их исчезновение объясняется их затмением. К концу месяца, «переходя от ощущения загадки к чувству восхищения», Галилей абсолютно уверяется в этом. Он пишет флорентийскому министру Винте: «наибольшим из всех чудес представляется то, что я открыл четыре новые планеты и наблюдал свойственные им их собственные движения и различия в их движениях относительно друг друга и относительно движений других звезд. Эти новые планеты движутся вокруг другой большой звезды таким же образом, как Венера и Меркурий и, возможно, другие известные планеты движутся вокруг Солнца».

До 2 марта Галилей наблюдает за спутниками Юпитера, пользуясь каждой безоблачной ночью, а уже 12 марта выходит его знаменитый «Звездный вестник, возвещающий великие и очень удивительные зрелища и предлагающий на рассмотрение каждому, в особенности же философам и астрономам, то, что Галилео Галилей, флорентийский патриций, Государственный математик Падуанской гимназии, наблюдал с помощью подзорной трубы, недавно им изобретенной, на поверхности Луны, среди бесчисленных неподвижных звезд, в Млечном Пути, туманных звездах и прежде всего на четырех планетах, вращающихся вокруг звезды Юпитера на неодинаковых расстояниях с неравными периодами и с удивительной быстротой».

А дальше... На все сказанное выше наложились дела житейские. Оказалось, что жалование прибавят только через год, а кроме того, Галилея стали очень тяготить преподавательские обязанности. Он начинает думать о переезде во Флоренцию. Только что умер герцог Фердинандо Медичи, и на престол вступил Козимо II Медичи, бывший ученик Галилея. Покровительство герцога может быть незаменимым при решении многих проблем...

А пока Галилей предлагает через Винту назвать спутники Юпитера в честь Козимо Медичи Космейскими или Медичейскими звездами. Был выбран второй вариант. Количество спутников удачно совпадало с тем, что у Козимо было три брата. «Звездный вестник» посвящается Козимо Медичи: «Называя новые звезды, открытые мной, величавым именем рода Медичи, я сознаю, что если прежде возвышение в звездный мир служило для прославления богов и властелинов, то в данном случае, наоборот, величавое имя Медичи обеспечит бессмертное воспоминание об этих звездах.» Потом все четыре спутника получили собственные имена (Ио, Европа, Ганимед, Каллисто), а чтобы отличать их от открытых позднее спутников Юпитера*), их будут называть галилеевыми.

На пасхальные каникулы Галилей отправился во Флоренцию. Он везет с собой трубу, чтобы герцог мог сам увидеть «свои» звезды. Галилей окружен почетом, в его честь должна быть выбита медаль с изображением Медичейских звезд, вчерне договариваются об условиях переезда, лишь уточняется название должности Галилея. Государю приятно увековечить свое имя на небе, никто из царственных особ не может похвастаться этим. 14 мая Галилей получает из Франции письмо от 20 апреля, в котором его просят «открыть возможно скорей какое-либо небесное тело, которому могло бы быть дано имя его величества». Речь идет о Генрихе IV. Уточняется, что звезду следует назвать «именем Генриха без добавления Бурбон». Оказалось, что автор письма не зря торопил Галилея: пока шло письмо, «сопутствуемый счастьем государь» был убит.

А тем временем начали упорно распространяться слухи, что «подаренные» герцогу звезды — плод фантазии Галилея или порождение его трубы. Об этом говорил даже Христофор Клавий, первый математик Римской коллегии. Положение осложнялось тем, что никто из астрономов, кроме самого Галилея, Медичейских звезд не видел. Галилей расплачивался за то, что ни у кого не было столь совершенных труб, как у него.

Герцога одолевают сомнения. Открытие Галилея должны подтвердить три самых знаменитых астронома: Кеплер, Маджини, Клавий. А пока вопрос о переезде во Флоренцию откладывался.

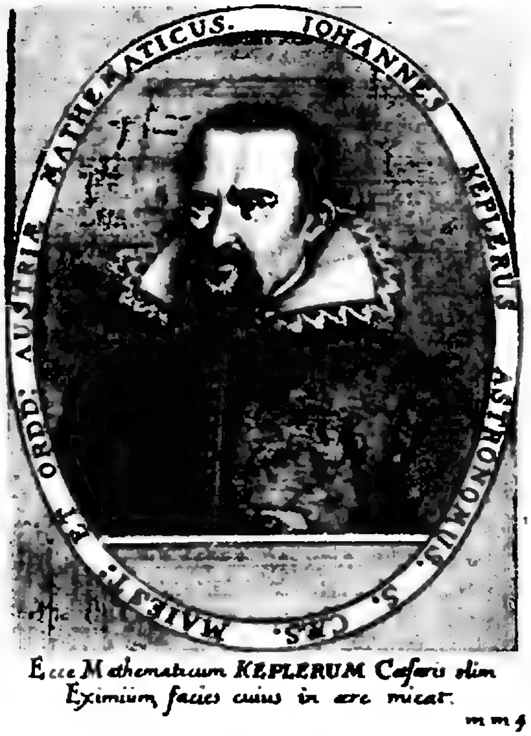
Кеплер, Маджини, Клавий. Казалось, что проще всего обстоит дело с Маджини. Галилей по дороге из Флоренции в Падую остановится в Болонье и покажет ему открытые звезды. Маджини, славившийся в равной мере своими вычислительными способностями и хитростью, подчеркнуто предупредителен, но делает вид, что не может ничего увидеть около Юпитера. Он не спорит, готов объяснить все своим ослабевшим зрением, но это слабое утешение для Галилея.

Кеплер сразу откликнулся на сообщение об открытии Галилея. Уже 19 апреля он пишет восторженное письмо.

Оказывается, известие о новых планетах пришло в Германию еще в середине марта «через скороходов». Первоначальная информация была расплывчата. Кеплер испугался, что Галилей открыл новые (сверх шести) планеты в Солнечной системе, а Кеплер твердо держался мнения, что планет ровно шесть (это следовало из его теории, связывающей орбиты планет с правильными многогранниками). Фантазия Кеплера рождает еще одну возможность: все планеты подобно Земле имеют по одной Луне; их, должно быть, и открыл Галилей: «если Земля, по Копернику, одна из планет, имеет свою движущуюся вокруг нее Луну и выходящую из общего счета, то, конечно, могло случиться, что Галилей действительно мог увидеть еще четыре луны, вращающиеся в очень тесных пределах вокруг малых тел Сатурна,

---

* В настоящее время известно 16 спутников Юпитера (три последних были открыты во время полета американских автоматических станций «Вояджер»).


IOHANNES KEPLERUS ASTRONOMUS S. C. R. S. MAIEST. ET ORDD. AUSTRIAE MATHEMATICUS.
Ecce Mathematicum KEPLERUM Caesaris olim
Eximium, facies cuius in aere micat.
mmg

Иоганн Кеплер

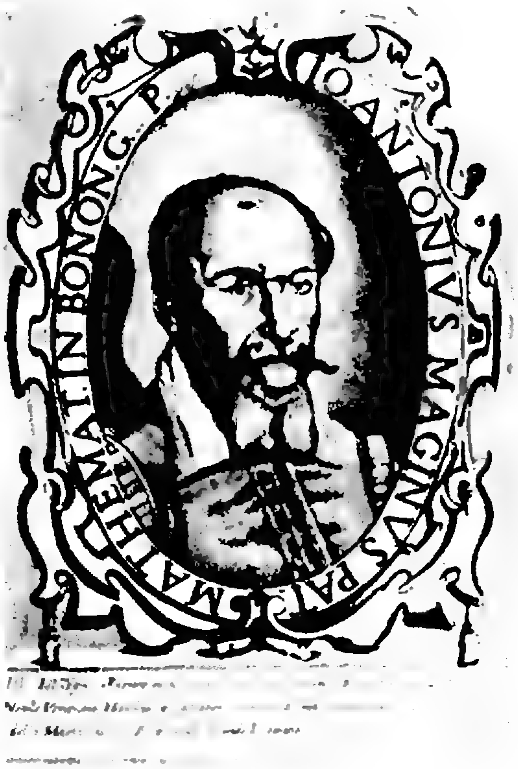
Юпитера, Марса и Венеры; Меркурий же, самый последний из окружения Солнца, настолько погружен в его лучи, что в нем Галилей до сих пор не мог заметить чего-нибудь подобного». Кеплер повсюду ищет числовые закономерности! Затем он думает о том, что речь может идти о планетах, вращающихся около «неподвижных звезд», а не Солнца. Вспоминает бесчисленные миры Джордано Бруно и уже думает «о возможности после этого начала сделать открытия там еще бесчисленного множества новых планет».

Тем временем император Рудольф II (Кеплер был императорским астрономом) получает «Звездный вестник». Кеплер безоговорочно доверяет сообщению Галилея: «Может быть, я покажусь слишком смелым, если так легко поверю твоим утверждениям, не подкрепившись никаким собственным опытом. Но почему же мне не верить ученейшему математику, о правоте которого свидетельствует самый стиль его суждений, который далек от суетности и для стяжания общего признания не будет говорить, что видел то, чего на самом деле не видел, не колеблясь из любви к истине противоречить распространеннейшим мнениям». Кеплер указывает Галилею на ряд предшественников (Местлин говорил о пепельном свете Луны, Порто предсказывал возможность создания зрительной трубы). Кеплер надеется, что Солнце ярче неподвижных звезд, и ему хочется верить в исключительность нашего мира: «наш мир не принадлежит к простому стаду других бесконечных». Нет предела фантазиям Кеплера: «не будет непохожим на истину предположение, что не только на Луне, но и на Юпитере имеются жители... Дай корабли или приспособь паруса к небесному воздуху, и найдутся люди, которые не побоятся и такой обширности».

Самого Кеплера, разумеется, волнуют закономерности в распределении числа спутников у планет: «Лучше я пожелаю, чтобы у меня была готова зрительная труба, с которой я обогнал бы тебя в открытии двух (так, мне кажется, требует пропорция) спутников Марса и шести или восьми Сатурновых, к которым, может быть, прибавится один-другой вокруг Венеры и Меркурия». (Кеплер не знал, остановиться ему на арифметической или геометрической прогрессии!)

Маджини пытается привлечь Кеплера на свою сторону. Кеплер поначалу неумолим: «Мы оба коперниканцы — свой своему радуется». Но Маджини не унимается. У него цель — «этих четырех новых прислужников Юпитера изгнать и уничтожить». Серию памфлетов против Галилея открыл в мае 1610 г. Мартин Горкий, астроном из окружения Маджини. В его «Кратчайшем странствии против «Звездного вестника» спутники Юпитера объявлялись оптическим обманом. Кеплер не постоянен в своем отношении к Горкому. В письме к Галилею это сочинение называется наглым, он «удивляется дерзости этого юнца». Самому Горкому Кеплер пишет: «не удивляюсь и не обвиняю тебя; мнения философствующих должны быть свободными».

Кеплера начало волновать от-


IO. ANTONIVS MAGINVS PAT. MATHEMAT. IN BONON. G. P.

Антоний Маджини

сутствие подтверждений. Он сам все еще не имел подходящей трубы. Из Болоньи пришло заключение университета, что в собственную трубу Галилея звезды не видны (инсценировка Маджини). В августе обеспокоенный Кеплер пишет Галилею: «Я не могу скрыть от тебя, что в Прагу приходят письма многих итальянцев, что при помощи твоей зрительной трубы нельзя видеть эти планеты... Поэтому я прошу тебя, Галилей, чтобы ты возможно скорее привел некоторых свидетелей... На тебе одном лежит все доказательство истинности наблюдения». К счастью, император Рудольф II, известный не только своими причудами, но и любовью к наукам, воспылал страстью к зрительным трубам. Наконец, в Праге появилась достаточно совершенная труба, и в сентябре Кеплер наблюдал спутники Юпитера. Участники наблюдения независимо зарисовали положения звезд и рисунки совпали. «Ты победил, Галилеанин!» — воскликнул Кеплер.

В сентябре спутники Юпитера видел Сантини в Венеции, а в декабре пришло особенно радостное известие: спутники наблюдал Клавий. Правда, он еще не был уверен, планеты это или нет. В сентябре Галилей переехал во Флоренцию. Он вступает в переписку с Клавием (находясь в Венецианской республике, переписываться с иезуитами было нельзя). «Воистину Вы, Ваша милость, заслуживаете великой похвалы, поскольку Вы первый, кто это наблюдал» — пишет Галилею Клавий. Нашел Галилей путь и к сердцу Маджини. Он рекомендовал его работы по зажигательным стеклам герцогу, способствовал получению освободившейся кафедры в Падуе (Маджини претендовал на это место еще когда Галилей переезжал в Падую из Пизы). Осторожный Маджини положительно отзывается в свидетельстве Сантини. На большее рассчитывать не приходилось.

Год великих открытий. 1610 год, начавшийся открытием спутников Юпитера, был необычайно счастливым для Галилея-астронома: почти все свои замечательные астрономические наблюдения он сделал именно в этом году. 25 июля Галилей снова наблюдал «Юпитера утром на Востоке вместе с его свитой». После этого он обнаружил «еще другое необычайное чудо». Он сообщает о своем открытии во Флоренцию, прося держать его в тайне до публикации: «Звезда Сатурна не является одной только, но состоит из трех, которые как бы касаются друг друга, но между собой не движутся и не меняются..., причем средняя из них примерно в три раза больше, чем две боковые; и они расположены в такой форме oOo».

Кеплеру Галилей посылает зашифрованную в виде анаграммы фразу: «Высочайшую планету тройною наблюдал». Позднее Галилей писал: «Я нашел целый двор у Юпитера и двух прислужников у старика [Сатурна — *С. Г.*], они его поддерживают и никогда не отскакивают от его боков».

Пять месяцев не раскрывал Галилей своей тайны. Кеплеру и Рудольфу II не терпелось узнать разгадку, строились самые невероятные предположения. «Удовлетвори как можно быстрее наше страстное жела-

Христоф Клавий

ние узнать, в чем состоит твое новое открытие. Не существует человека, которого ты мог бы опасаться как соперника». Галилей раскрыл тайну, добавив, что в более слабую трубу Сатурн напоминает маслину. Открытие Галилея впервые упоминается в печати в предисловии к «Диоптрике» Кеплера, которая была опубликована в 1611 г.

Через два года Сатурн неожиданно перестал быть тройным. Галилей связал это с движением Сатурна вокруг Солнца и предсказал, что скоро его снова можно будет наблюдать в виде трех звезд. Предсказание сбылось, но тайны Сатурна Галилей не разгадал. Тайна раскрылась, когда в 1655 г. Гюйгенс, рассматривая Сатурн в телескоп с 92-кратным увеличением, обнаружил, что Сатурн окружен кольцом, которое при меньшем увеличении казалось боковыми звездами. Кольцо становится незаметным, когда к земному наблюдателю оно обращено ребром. Это редкое явление и посчастливилось наблюдать Галилею. Такова была эволюция зрительных впечатлений от Сатурна по мере усиления телескопов: от маслины до шара, окруженного кольцом. Гюйгенс открыл также самый большой спутник Сатурна — Титан.

Вскоре после того как было послано письмо Кеплеру с разгадкой анаграммы, появились новости и о других планетах. Галилей давно пристально наблюдал за Венерой. С Венерой и Меркурием было много хлопот и у сторонников Птолемея, и у сторонников Коперника. Первые не могли договориться, где помещаются их «сферы» — внутри «сферы» Солнца или вне ее. Для сторонников Коперника было ясно, что если эти планеты являются темными телами, то, поскольку они располагаются между Солнцем и Землей, временами должны наблюдаться неполные диски планет (явление, подобное фазам Луны). Этой проблемы не возникает, если предполагать, что планеты светят собственным светом (по-видимому, так думал Кеплер) или что они прозрачны (эта возможность серьезно обсуждалась).

Об этой проблеме напоминает Кастелли в письме Галилею от 5 декабря 1610 г. «Поскольку (как я верю) правильно положение Коперника, что Венера вращается вокруг Солнца,— пишет Кастелли,— то ясна необходимость того, чтобы она наблюдалась нами иногда рогатой, иногда же нет..., если, однако, небольшая величина рогов и испускание лучей не мешают нам постоянно наблюдать эти различия». Но вряд ли Галилей нуждался в этом напоминании. Уже 10 декабря он отправляет в Прагу Кеплеру через тосканского посла Джулиано Медичи шифрованное сообщение об открытии фаз Венеры с сопроводительным письмом: «Я посылаю Вам шифрованное сообщение о еще одном моем необычном наблюдении, которое приводит к разрешению важнейших споров в астрономии и которое содержит важнейший аргумент в пользу пифагорейской и коперниканской системы». Кеплеру, как всегда, не терпится узнать разгадку.

Но первым, кому Галилей раскрыл свою тайну, был Клавий. Галилей только что получил от Клавия известие, что астрономы Римской коллегии наблюдали и спутники Юпитера, и удлиненную форму Сатурна. Поддержка Римской коллегии играла особую роль в планах Галилея, и он спешит удивить Клавия своим новым открытием. Галилей описывает свои наблюдения над Венерой после «ее вечернего появления», рассказывает о том, как неожиданно ее круглая форма стала искажаться со стороны, обращенной к Солнцу, пока Венера не стала напоминать полукруг; потом она «стала заметно рогатой»; предсказывает, какую форму будет принимать Венера, когда она будет наблюдаться в виде утренней звезды. И вот вывод: «Так вот, синьор мой, выясняется, как Венера (и несомненно, что то же самое сделает и Меркурий) движется вокруг Солнца, являющегося вне всякого сомнения центром наибольших обращений всех планет. Кроме того, мы уверены, что эти планеты сами по себе являются темными и блестят только освещенные Солнцем, чего, как я думаю, не происходит с неподвижными звездами по некоторым моим наблюдениям». У Клавия не должно было остаться сомнений в том, куда клонит Галилей.

Так закончился для Галилея год его великих астрономических открытий.

Галилей и в дальнейшем не прекращал астрономические наблюдения. Но никогда уже не будет он уделять столько времени совершенствованию телескопа, и никогда тайны мироздания не будут открываться ему так, как в этот замечательный 1610 год! Достижения Галилея были столь велики, что пройдет не менее полувека, прежде чем в наблюдательной астрономии появятся открытия, сравнимые с открытиями Галилея (Гюйгенс, Кассини).

А пока Галилея начинают волновать другие проблемы, и для решения этих проблем ему важно поехать в Рим.

Покорение Рима. Галилей прибыл в Рим 29 марта 1611 г.; он прибыл как лицо, пользующееся особым вниманием тосканского герцога (в герцогских носилках, остановился в римском дворце Медичи). Любезно приняли Галилея четыре астронома Римской коллегии — Клавий, Гринберг, Малькотий, Лембол. Галилей узнает, что отцы-иезуиты систематически наблюдают в трубы Медичейские звезды, пытаются определить их периоды. 21 апреля один из руководителей Священной службы кардинал Роберт Беллармино посылает им официальный запрос «о новых небесных наблюдениях одного выдающегося математика» (имя не указано) относительно Млечного Пути, Сатурна, Луны, спутников Юпитера. 24 апреля был получен ответ, в основном подтверждающий наблюдения Галилея.

14 апреля Галилей становится пятым членом Академии Линчеев (рысьеглазых), основанной восемь лет назад Федерико Чези, маркизом Монтичелли. Эта Академия ставила своей целью свободное, не связанное никакими рамками изучение природы. Чези писал Галилею: «Те же, кого мы примем, не будут рабами ни Аристотеля, ни какого-нибудь другого философа, а людьми благородного и свободного образа мыслей в исследовании природы». Теперь Галилей ставит на своих работах имя Галилео Линчео.

На вершине Яникульского холма состоялась демонстрация удивительной трубы Галилея (Чези предложил называть ее телескопом).

Галилея чествует Римская коллегия. Доклад, получивший название «Звездный вестник Римской коллегии», читает Одо Малькот. Он называет Галилея «самым знаменитым и счастливейшим из живущих ныне астрономов». Кардинал дель Монто писал герцогу: «Галилей в дни, когда был в Риме, доставил много удовлетворения и, думаю, получил его сам, ибо имел возможность столь хорошо демонстрировать свои открытия, что все достойные и сведущие люди этого города признали их не только достовернейшими и действительнейшими. Если бы мы жили теперь в республике Древнего Рима, то я убежден, что ему бы воздвигли статую на Капитолии, дабы почтить его исключительную доблесть».

Эпилог. Так закончился краткий, но очень продуктивный период в научной жизни Галилея, когда он активно занимался астрономическими наблюдениями. Он продолжался едва ли больше года. Галилей не вернулся к прерванной работе над трактатом по механике. Он уверен, что имеет решающие аргументы в пользу гелиоцентрической системы мира, и все силы отдает пропаганде этих идей.

Галилею еще суждено было вспомнить про Медичейские звезды. С 1636 г. он вел переговоры с Генеральными Штатами Голландии об использовании наблюдений над затмениями спутников Юпитера для измерения долготы на борту корабля. Речь шла о решении одной из самых актуальных задач XVII века*). Переговоры окончились безрезультатно. Но в связи с этими переговорами Галилей вернулся к давно интересовавшей его задаче о вычислении периодов обращения открытых им спутников и безуспешно пытался при помощи опытного в вычислениях монаха Реньери составить таблицы движения. Задача оказалась трудной, и она еще долго доставляла неприятности астрономам. Весьма точные наблюдения и вычисления провел в 1672 г. Кассини в Парижской обсерватории и обнаружил нестабильность во времени наступления затмений. В 1676 г. Ремер объяснил эти аномалии тем, что в моменты разных затмений расстояние между Землей и Юпитером бывает разным, и впервые измерил скорость света.

* * *

Рассказывая сегодня об открытии Галилея, нельзя не вспомнить о том, что при помощи космических аппаратов «Вояджер-1», «Вояджер-2» удалось узнать, как устроена поверхность галилеевых спутников Юпитера. Вот что пишет Дж. Эберхарт об увиденном учеными на переданных снимках: «Оказалось, что «галилеевы луны» вовсе не «коллекция скалистых шаров». Пожалуй, только испещренная кратерами поверхность Каллисто, самого дальнего из четырех спутников, подтвердила предположения ученых. На Ганимеде взорам исследователей открылась целая гамма тектонических разломов, искривлений и отрогов. Но совершенно ошеломили их два других спутника, более близких к планете,— Ио и Европа. Ученые не могли поверить своим глазам — на снимках Ио они увидели разукрашенный в красное и золотое, серебряное и черное бурлящий мир, царство активных вулканов! А когда объективы «Вояджеров» были направлены на Европу, взорам наблюдателей предстала ледяная планета, светлая поверхность которой была словно исхлестана гигантской плетью.»

---

*) Об этом можно прочитать в статье «Маятниковые часы» («Квант», 1974, № 9).

Наша обложка

Если к некоторой кривой провести очень много касательных, а затем — перпендикуляры к ним в точках касания (они называются нормалями), то в большинстве случаев мы увидим, что эти нормали будут касательными к некоторой новой кривой; эту новую кривую называют огибающей семейства нормалей или эволютой исходной кривой. Эволюту эллипса, изображенную на первой странице обложки, нарисовала ЭВМ по программе, составленной Ю. Котовым (прямые на рисунке — это нормали). Попробуйте самостоятельно нарисовать эволюты каких-нибудь известных кривых — например, синусоиды и параболы, а также кривой, задаваемой уравнением $(x^2+y^2-2x)^2=x^2+y^2$ (вручную это сделать не так-то легко!).

А. Боровой, А. Херувимов

Колебания и маятники

Уже не в первый раз Лаборатория «Кванта» обращается к опытам с маятниками. Это и понятно — теория колебаний, которая применяется во многих областях физики и техники, может быть просто и наглядно представлена в таких опытах.

Предлагаемая статья состоит из двух частей. В первой приводятся описания некоторых опытов; для их проведения не требуется никакого специального оборудования. Проделать опыты и качественно объяснить полученные результаты сможет каждый.

Во второй части статьи дается количественное объяснение некоторых явлений. Оно будет понятно тем, кто знаком с темой «Механические колебания», изложенной в самом начале учебника для 10 класса.

Эксперименты и наблюдения

Сейчас уже невозможно проверить легенду о том, как Галилей, стоя на молитве в соборе, внимательно наблюдал за качанием бронзовых люстр. Наблюдал и определял время, затраченное люстрой на движение туда и обратно. Это время потом назвали периодом колебаний. Часов у Галилея не было, и, чтобы сравнить периоды колебаний люстр, подвешенных на цепях разной длины, он использовал частоту биения своего пульса.

Давайте и мы начнем с аналогичных простых опытов.

1. Возьмите небольшой по размерам грузик (лучше всего — гирьку для весов) и привяжите к нему прочную нить или леску (рис. 1). Вы получите простейший так называемый *математический маятник*. Подвесьте маятник, например к гвоздю, и начинайте опыты.

Меняя массу грузика и длину лески, вы можете убедиться в том, что период колебаний такого маятника не зависит от массы грузика, но зависит от длины лески: с увеличением длины l лески период колебаний T увеличивается. Такие выводы сделал и Галилей.

Точная формула для периода колебаний маятника $T=2\pi\sqrt{l/g}$ появилась значительно позже. Ее вывел Гюйгенс. Проверьте эту формулу для вашего маятника.

Понаблюдайте за маятником некоторое время и вы заметите, что размах (амплитуда) его колебаний постепенно уменьшается — колебания затухают. Причем затухание происходит тем быстрее, чем меньше масса грузика. Обратите на это внимание. Несколько позже нам это понадобится.

2. Вбейте два гвоздя на расстоянии приблизительно 30 см друг от друга по горизонтали и прикрепите к ним маятники. Массу одного грузика возьмите равной $m_1=100$ г, а массу второго — $m_2=500$ г. Длину нити первого маятника выберите равной $l_1=1$ м, а длину нити второго маятника нужно будет изменять, например, так: $l_2=0{,}5$ м; 0,7 м; 1 м; 1,2 м; 1,5 м.

Возьмите медную проволоку диаметром около 0,3 мм и сделайте из нее мягкую пружинку длиной 30 см (например, навейте проволоку на обычный круглый карандаш и затем аккуратно снимите).

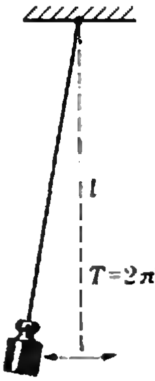


Рис. 1.

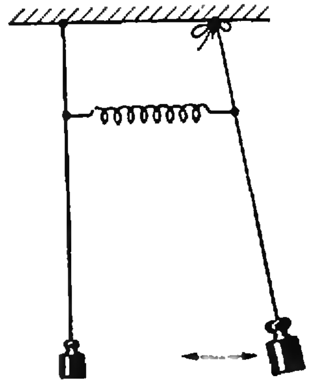


Рис. 2.

Теперь соберите всю «установку», как показано на рисунке 2. Это — так называемые *связанные маятники*. С ними можно проделать много интересных опытов.

Слегка раскачайте тяжелый (второй) маятник и предоставьте систему самой себе. Повторите опыт несколько раз, меняя длину нити тяжелого маятника. Как ведет себя при этом легкий (первый) маятник?

Когда разность длин нитей обоих маятников велика, колебания второго практически не влияют на первый. Когда же длины нитей сравнимы между собой, первый маятник начинает раскачиваться, причем раскачивается он то сильно, то слабо, потом снова сильно и снова слабо и так далее. Почему?

Очевидно, для передачи энергии от второго маятника к первому необходимо, чтобы толчки от пружинки происходили в такт с качаниями первого маятника. Это осуществляется при равенстве длин нитей маятников. В таком случае говорят, что наступил *резонанс*.

Обратите внимание на то, что амплитуда колебаний тяжелого маятника почти не меняется. Значит, он передает легкому маятнику лишь небольшую часть своей энергии.

Поменяйте маятники местами, то есть первоначально раскачайте легкий маятник. Вы убедитесь, что резонанс будет выражен гораздо слабее (чем легче маятник, тем быстрее затухают его колебания!). Проверьте это еще раз, воспользовавшись маятником с грузиком массой 20 г.

Наконец, подвесьте на одинаковых нитях одинаковые по массе грузики и раскачайте один из них. Вы увидите, что в этом случае оба маятника будут попеременно раскачиваться то сильно, то слабо, пока совсем не затухнут. Причем, если один сейчас колеблется с большой амплитудой, то второй — с малой, и наоборот. Колебания как бы перетекают от первого грузика ко второму и обратно.

Оказывается, все дело в наложении колебаний. Маятники соединены слабой пружинкой, колебания которой передают энергию от одного маятника к другому и как бы регулируют эту передачу. Наложение таких двух колебаний называют *биениями*.

Интересно, что математические уравнения, которые описывают биения (и с которыми вы познакомитесь во второй части статьи), недавно пригодились в ... нейтринной физике. Советский ученый академик Б. М. Понтекорво предположил, что один сорт нейтрино (аналог первого маятника) может переходить в другой сорт (второй маятник), если в природе есть слабое взаимодействие (пружинка), связывающее эти сорта. И вот может оказаться, что нейтрино, летящие на Землю от Солнца, по дороге все время меняют свою природу. Происходит то же, что и с маятниками. Сейчас ученые во всем мире ставят эксперименты, чтобы выяснить, существуют ли осцилляции Понтекорво — процесс перехода одного сорта нейтрино в другой.

3. Этот опыт потребует некоторого терпения.

Изготовьте пять—шесть одинаковых маятников и свяжите их одинаковыми пружинками (рис. 3). Приведите в движение первый маятник, и вы увидите, как постепенно колебания будут передаваться остальным маятникам — по цепочке маятников побежит волна.

Такая система — простейшая модель одномерной кристаллической решетки. На ней можно, например, наглядно проиллюстрировать поведение кристаллической решетки, когда в каком-то месте решетки возникают колебания.

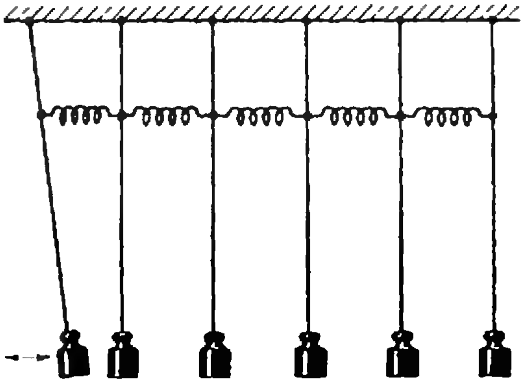


Рис. 3.

Расчеты и объяснения

Попробуем описать поведение связанных маятников с помощью математики.

Напомним, что уравнение движения математического маятника получается из второго закона Ньютона

$$ma_\tau = -mg \sin \varphi,$$

где m — масса маятника, a_τ — проекция ускорения на направление касательной к траектории маятника, $mg \sin \varphi$ — проекция силы тяжести на то же направление, φ — угол отклонения нити от вертикали. При малых углах $\sin \varphi \approx \varphi = \frac{s}{l}$ (s — смещение маятника, измеряемое длиной дуги, l — длина нити), поэтому уравнение движения принимает вид

$$ma_\tau l = -mgs. \qquad (1)$$

Из курса математики известно, что ускорение — это вторая производная смещения от времени: $a_\tau = s''$, так что уравнение (1) можно записать в виде

$$s'' + \omega^2 s = 0, \qquad (2)$$

где $\omega^2 = g/l$. Решением уравнения (2) является функция

$$s = s_м \cos \omega t.$$

Здесь $\omega = \sqrt{g/l}$ — круговая частота колебаний маятника. (Теперь понятно, откуда получается формула для периода колебаний математического маятника: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.)

Для того чтобы учесть влияние пружинки, соединяющей два маятника, удобно уравнение (1) представить так:

$$mls'' = -mg\varphi l. \qquad (3)$$

В правой части этого уравнения записан момент тангенциальной составляющей силы тяжести относительно оси вращения, проходящей через точку подвеса маятника. В таком виде уравнение носит более общий характер, так как позволяет учитывать силы, действующие не только на грузик, но и на нить.

Рассмотрим связанные маятники одинаковой массы m, скрепленные пружинкой жесткостью k (рис. 4). Пусть в некоторый момент времени нити маятников составляют с вертикалью малые углы φ_1 и φ_2, а смещения маятников от положения равновесия равны s_1 и s_2 соответственно. Растяжение пружины в этот момент равно

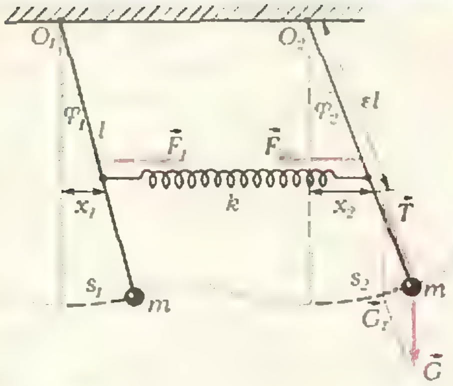


Рис. 4.

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \varepsilon l \sin \varphi_2 - \varepsilon l \sin \varphi_1 \approx$$
$$\approx \varepsilon l (\varphi_2 - \varphi_1) \approx \varepsilon (s_2 - s_1).$$

Со стороны пружины на нити маятников действуют силы упругости $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ такие, что

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = k\Delta x = k\varepsilon(s_2 - s_1).$$

Относительно осей, проходящих через точки подвеса O_1 и O_2, эти силы создают вращательные моменты, противоположные по знаку, но одинаковые по абсолютной величине:

$$|M| = k\varepsilon(s_2 - s_1) \cdot \varepsilon l = k\varepsilon^2 l(s_2 - s_1).$$

Добавим эти моменты (с учетом соответствующих знаков) в правую часть уравнения (3), записанного для каждого маятника. После сокращения на ml получим систему

$$\begin{cases} s_1'' = -\frac{g}{l} s_1 + \frac{k\varepsilon^2}{m}(s_2 - s_1) \\ s_2'' = -\frac{g}{l} s_2 - \frac{k\varepsilon^2}{m}(s_2 - s_1). \end{cases} \qquad (4)$$

Теперь заменим эту систему другой, в которой первое уравнение будет суммой, а второе — разностью уравнений системы (4). Кроме того, учтем, что $s_1'' \pm s_2'' = (s_1 \pm s_2)''$, и потому введем обозначения: $s_1 + s_2 = s_+$ и $s_1 - s_2 = s_-$. В результате получим

$$\begin{cases} s_+'' + \frac{g}{l} s_+ = 0 \\ s_-'' + \left(\frac{g}{l} + \frac{2k\varepsilon^2}{m}\right) s_- = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Каждое из уравнений данной системы имеет вид уравнения (2), решение которого известно:

$$s_+ = s_{+м}\cos\omega_+ t,$$
$$s_- = s_{-м}\cos\omega_- t.$$

Здесь $\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{l}}$ — круговая частота колебаний одного маятника, а $\omega_- = \sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2k\varepsilon^2}{m}}$ — частота, несколько бо́льшая частоты одиночного маятника.

Снова вернемся к переменным s_1 и s_2, для чего почленно сложим и вычтем предыдущие равенства. В результате получим уравнения колебаний каждого из маятников:

$$s_1 = \frac{1}{2}(s_{1м}+s_{2м})\cos\omega_+ t + \frac{1}{2}(s_{1м}-s_{2м})\cos\omega_- t,$$
$$s_2 = \frac{1}{2}(s_{1м}+s_{2м})\cos\omega_+ t - \frac{1}{2}(s_{1м}-s_{2м})\cos\omega_- t.$$

Проанализируем эти уравнения. Если начальные смещения обоих маятников одинаковы: $s_{1м}=s_{2м}=s_м$, то маятники будут колебаться с постоянной амплитудой и частотой $\omega_+=\omega=\sqrt{g/l}$:

$$s_1=s_2=s_м\cos\omega t.$$

Если вначале маятники отклонены в противоположные стороны, так что $s_{1м}=-s_{2м}=s_м$, то маятники будут колебаться тоже с неизменной амплитудой, но с чуть большей частотой $\omega_-=\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2k\varepsilon^2}{m}}$:

$$s_1=s_м\cos\omega_- t,$$
$$s_2=-s_м\cos\omega_- t.$$

Если же в начальный момент сместить из положения равновесия только один маятник, например первый: $s_{1м}=s_м$ и $s_{2м}=0$, то получим

$$s_1=\frac{1}{2}s_м(\cos\omega_+ t+\cos\omega_- t),$$
$$s_2=\frac{1}{2}s_м(\cos\omega_+ t-\cos\omega_- t).$$

Используя тригонометрические тождества

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2},$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2},$$

получим окончательные уравнения колебаний маятников:

$$s_1=s_м\cos\frac{\omega_- -\omega_+}{2}t\cos\frac{\omega_+ +\omega_-}{2}t,$$
$$s_2=s_м\sin\frac{\omega_- -\omega_+}{2}t\sin\frac{\omega_+ +\omega_-}{2}t.$$

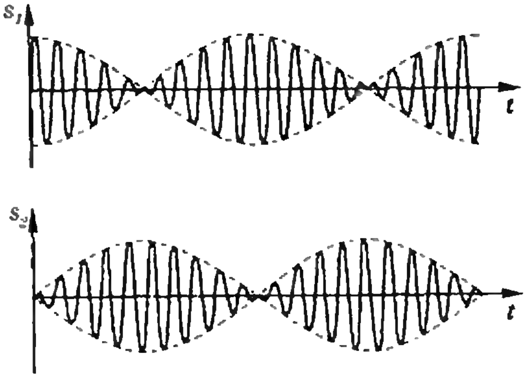


Рис. 5.

Соответствующие графики приведены на рисунке 5.

Заметим, что разность частот $\omega_- - \omega_+$ существенно меньше их суммы $\omega_+ + \omega_-$, поэтому функции $\cos\frac{\omega_- -\omega_+}{2}t$ и $\sin\frac{\omega_- -\omega_+}{2}t$ меняются со временем гораздо медленнее, чем функции $\cos\frac{\omega_+ +\omega_-}{2}t$ и $\sin\frac{\omega_+ +\omega_-}{2}t$. Вследствие этого можно считать, что колебания связанных маятников происходят по гармоническому закону, но амплитуды колебаний не постоянны, а медленно изменяются с течением времени по законам $s_м\cos\frac{\omega_- -\omega_+}{2}t$ и $s_м\sin\frac{\omega_- -\omega_+}{2}t$. (На рисунке 5 пунктиром показаны графики изменения амплитуды со временем.)

Это — те самые биения, которые вы наблюдали во втором опыте (с одинаковыми маятниками). В начальный момент $t=0$ амплитуда второго маятника равна нулю, затем она растет, достигая наибольшего значения $s_м$ в момент времени, определяемый соотношением $\frac{\omega_- -\omega_+}{2}t=\frac{\pi}{2}$. В этот же момент амплитуда первого маятника, которая в начальный момент была максимальной,

(Окончание см. на с. 37)

И. Шарыгин, А. Ягубьянц

Окружность девяти точек и прямая Эйлера

Самый простой из многоугольников — треугольник — издавна привлекает внимание геометров. После Евклида красивые теоремы доказывали о нем такие замечательные ученые древности, как Аполлоний, Герон, Менелай и Птолемей. Ближе к нашему времени треугольником увлекались Эйлер, Понселе, Симсон, Дезарг, Клейн, Адамар.

В наши дни треугольник немного вышел из моды, но не утратил своей былой красоты. В этом вы сможете убедиться, прочитав про связанные с треугольником окружность и прямую, носящие имя Леонарда Эйлера. А рассмотренные затем задачи, мы надеемся, покажут, что вокруг треугольника еще есть, над чем подумать.

Окружность Эйлера

Начнем со следующей замечательной теоремы, опубликованной Эйлером в 1765 году:

*Основания высот, основания медиан и точки, расположенные на серединах отрезков от ортоцентра**) *до вершин треугольника, лежат на одной окружности.*

Окружность эта получила название *окружности девяти точек* или *окружности Эйлера* (рис. 1).

Прежде чем приступить к доказательству этой теоремы, обратим внимание на несколько простых, но полезных фактов, связанных с геометрией треугольника (рекомендуем доказать их самостоятельно).

Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, M — точка пересечения его медиан (остальные обозначения см. на рисунке 1).

(1) *Точки A_3, B_3, C_3 являются центрами окружностей, описанных, соответственно, около треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C.* (Указание. AH, BH, CH — диаметры этих окружностей — см. рис. 2).

(2) *Треугольники AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C подобны между собой и подобны исходному треугольнику ABC.* (Указание. Соответственные вершины обозначены одинаковыми буквами; $\widehat{ABC}=\widehat{AHC_1}=\widehat{AB_1C_1}$.)

(3) *Пусть A, B и C — величины соответствующих углов треугольника ABC. Если эти углы — острые, то величины углов треугольника $A_1B_1C_1$ равны, соответственно, $180°-2A$, $180°-2B$, $180°-2C$; если же, например, $A>90°$, то они равны $2A-180°$, $2B$, $2C$* (рис. 2).

(4) *Расстояние от точки O до каждой стороны треугольника вдвое меньше, чем расстояние от противоположной вершины до ортоцентра* $|A_2O|=\frac{1}{2}|AH|$, $|B_2O|=\frac{1}{2}|BH|$, $|C_2O|=\frac{1}{2}|CH|$. (Указание: Рассмотрите треугольник, стороны которого проходят через точки A, B, C параллельно BC, AC, AB соответственно.)

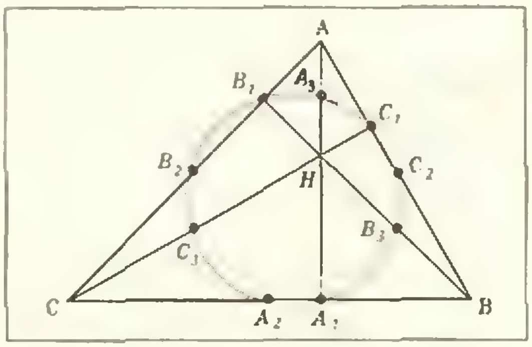
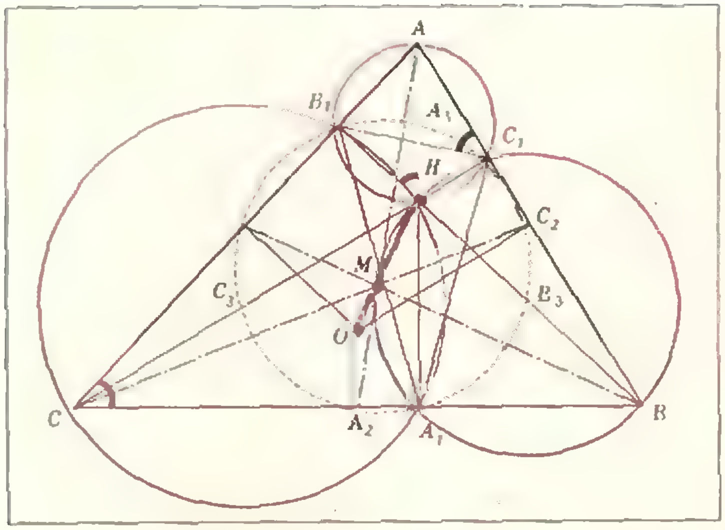


Рис. 1.

---

*) *Ортоцентр* — точка пересечения высот.



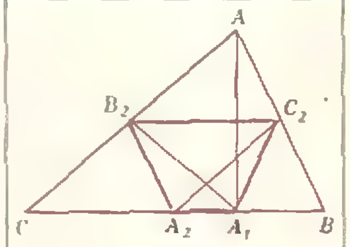


Рис. 3.

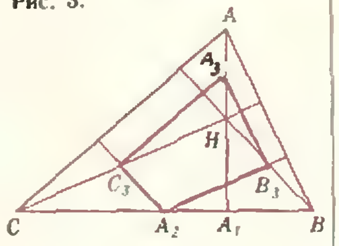


Рис. 2.

Рис. 4.

Прямая Эйлера

Заметим, что из утверждения (4) сразу следует, что точки O, M и H лежат на одной прямой, поскольку прямая OH делит медиану AA_2 в том же отношении, что и точка M. Эта прямая носит название *прямой Эйлера* треугольника ABC. Легко видеть, что $|OM| = \frac{1}{2}|MH|$.

Докажем теперь, что точки A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3 лежат на одной окружности. Ограничимся рассмотрением случая остроугольного треугольника ABC. (Для тупоугольного треугольника проведите рассуждения самостоятельно.)

Сначала заметим, что точки A_1, A_2, B_2, C_2 лежат на одной окружности (рис. 3), поскольку B_2A_1 и C_2A_1 — медианы прямоугольных треугольников AA_1C и AA_1B, проведенные на гипотенузы, и, следовательно, $B_2\widehat{A_1}C_2 = B_2\widehat{A_1}A + A\widehat{A_1}C_2 = A_1\widehat{A}B_2 + A_1\widehat{A}C_2 = \widehat{A} = B_2\widehat{A_2}C_2$. Абсолютно аналогично доказывается, что точки B_1, A_2, B_2, C_2 лежат на одной окружности (точка B_1 — точка «того же сорта», что и A_1!) и что точки C_1, A_2, B_2, C_2 лежат на одной окружности. Таким образом, шесть точек A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 лежат на одной окружности. С другой стороны, если мы рассмотрим, например, четырехугольник $A_3B_3A_2C_3$ (рис. 4) и выразим какие-то два его противоположных угла через углы A, B и C (что нетрудно сделать), мы убедимся, что их сумма равна 180°; отсюда следует, что четырехугольник $A_3B_3A_2C_3$ — вписанный. Таким образом, шесть точек A_3, B_3, C_3, A_2, B_2, C_2 также лежат на одной окружности. Значит, все девять точек A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3 лежат на одной окружности (точки A_2, B_2, C_2 входят в обе шестерки). Теорема Эйлера доказана.

Свойства прямой и окружности Эйлера

(5) *Радиус окружности девяти точек равен половине радиуса окружности, описанной около* $\triangle ABC$.

(6) *Окружность девяти точек гомотетична окружности, описанной около треугольника* ABC, *с коэффициентом* $\frac{1}{2}$ *и центром гомотетии в точке* H (именно так расположены по отношению друг к другу треугольники ABC и $A_3B_3C_3$).

(7) *Эти же окружности гомотетичны, но уже с коэффициентом* $\left(-\frac{1}{2}\right)$ *и центром гомотетии в точке* M (так расположены по отношению друг к другу треугольники ABC и $A_2B_2C_2$).

(8) *Центр окружности девяти точек лежит на прямой Эйлера в середине отрезка* OH.

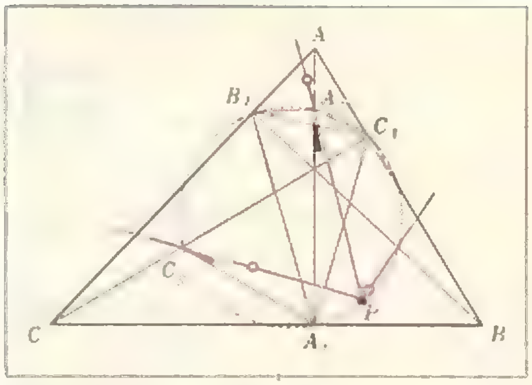


Рис. 5.

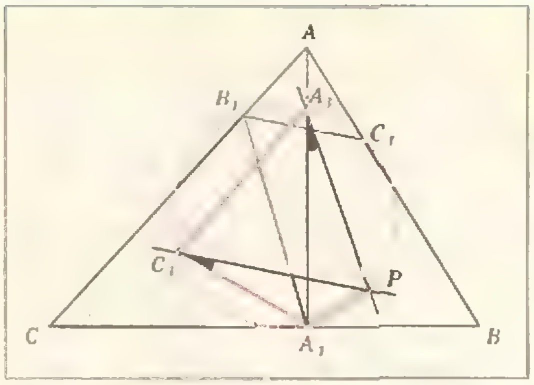


Рис. 6.

Трудная задача

На тему окружности девяти точек и прямой Эйлера составлено много интересных задач. Вот одна из них, опубликованная в книге «Избранные задачи из журнала American Mathematical Monthly» (М., «Мир», 1977):

Дан треугольник ABC; AA_1, BB_1, CC_1 — его высоты. Доказать, что прямые Эйлера треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C пересекаются в такой точке P окружности девяти точек треугольника ABC, для которой один из отрезков PA_1, PB_1, PC_1 равен сумме двух других отрезков (рис. 5).

Пусть, как и прежде, H — ортоцентр треугольника ABC, A_3, B_3, C_3 — середины отрезков AH, BH, CH (они, напомним, являются центрами окружностей, описанных около подобных треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C).

Докажем сначала вспомогательное утверждение. *Если через точки A_3, B_3, C_3 провести прямые, одинаково расположенные*[1] *по отношению к треугольникам AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C, то такие прямые пересекутся на окружности девяти точек треугольника ABC.* Обозначим через P точку пересечения каких-нибудь двух из этих прямых — например, прямых, проведенных через A_3 и C_3 (рис. 6). Так как прямые A_3P и C_3P одинаково расположены относительно треугольников AB_1C_1 и A_1B_1C, $A_1\hat{A}_3P=A_1\hat{C}_3P$. Значит, окружность, проходящая через точки P_1, A_1, C_3, пройдет через точку A_3. Но тогда эта окружность — окружность девяти точек треугольника ABC. Таким образом, любые две из проведенных прямых пересекаются на окружности девяти точек треугольника ABC, отсюда легко заключить, что все три прямые пересекаются в одной точке.

Для завершения доказательства предположим теперь, что P — точка пересечения прямых Эйлера. Легко видеть (проверьте!), что числа $|PA_1|$, $|PB_1|$, $|PC_1|$ пропорциональны синусам углов PA_3A_1, PA_3B_1, PA_3C_1. Положим $P\hat{A}_3A_1=\varphi$.

Предположим, что $\triangle ABC$ — остроугольный. Пользуясь свойством (3) и рисунком 5, найдем

$$P\widehat{A_3}B_1=\varphi+A_1\widehat{A_3}B_1=\varphi+A_1\widehat{C_1}B_1=\varphi+180^\circ-2C,$$

$$P\widehat{A_3}C_1=A_1\widehat{A_3}C_1-\varphi=A_1\widehat{B_1}C_1-\varphi=180^\circ-2B-\varphi.$$

Таким образом, нам нужно доказать, что одно из трех чисел

$$\sin\varphi,\ \sin(2C-\varphi),\ \sin(2B+\varphi)$$

(в данном случае — второе) является суммой двух других.

Рассмотрим треугольник AOH (рис. 7). Поскольку $\triangle ABC\sim\triangle AB_1C_1$ и точки O, A_3 являются центрами описанных около этих треугольников окружностей, $A\hat{O}H=\varphi$ и $O\hat{A}C=H\hat{A}B=90^\circ-B$. Значит,

$$O\hat{A}H=A-O\hat{A}C-A_1AB=A-(90^\circ-B)-(90^\circ-B)=2B+A-180^\circ,$$

откуда $\sin O\widehat{H}A=\sin(360^\circ-2B-A-\varphi)=-\sin(2B+A+\varphi)$.

Если R — радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$, то $|OA|=R$; в силу свойства (4) и равенства $A_2\hat{O}B=\frac{1}{2}C\hat{O}B=A$

$$|AH|=2|OA_2|=2R\cos A.$$

По теореме синусов для треугольника OAH получаем

$$\frac{R}{-\sin(2B+A+\varphi)}=\frac{2R\cos A}{\sin\varphi},$$

$$-\sin\varphi=2\cos A\sin(2B+A+\varphi),$$

$$-\sin\varphi=\sin(2A+2B+\varphi)+\sin(2B+\varphi),$$

$$-\sin\varphi=-\sin(2C-\varphi)+\sin(2B+\varphi),$$

$$\sin(2C-\varphi)=\sin\varphi+\sin(2B+\varphi).$$

Попробуйте самостоятельно проделать доказательство в случае, когда треугольник ABC — тупоугольный.

В заключение приведем без доказательства еще один замечательный факт, связанный с окружностью девяти точек:

Теорема Фейербаха. *Окружность девяти точек касается впи-*

---

[1] То есть образующие с соответствующими сторонами одинаковые углы

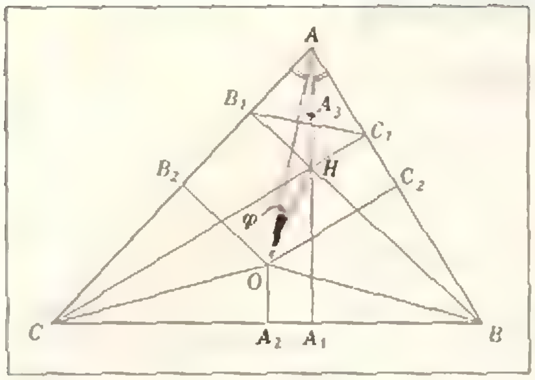


Рис. 7.

санной и трех вневписанных окружностей) данного треугольника.*

Все известные нам доказательства этого утверждения весьма громоздки и носят, по существу, чисто вычислительный характер. Возможно, вам удастся найти хорошее геометрическое доказательство теоремы Фейербаха.

Желающим поближе ознакомиться с геометрией треугольника мы рекомендуем две книги:

С. И. Зетель «Новая геометрия треугольника» (М., «Учпедгиз», 1962).

С. М. Коксетер, С. Л. Грейтцер «Новые встречи с геометрией» (М., «Мир», 1978).

Упражнения

1. Пусть H — отроцентр треугольника ABC. Докажите, что треугольники ABC, ABH, BCH, CAH имеют одну и ту же окружность девяти точек.

2. Пусть K — середина какой-либо стороны треугольника, H — ортоцентр, L — точка пересечения прямой HK с окружностью, описанной около треугольника (K между H и L). Докажите, что $|HK|=|KL|$.

3. Пусть P — основание высоты треугольника, M — точка пересечения медиан, N — точка пересечения прямой MP с описанной окружностью (M между P и N). Докажите, что $2|PM|=|MN|$.

4. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки описанной окружности на стороны треугольника, лежат на одной прямой. Эта прямая называется *прямой Симсона*. Докажите, что прямые Симсона, соответствующие концам диаметра, взаимно перпендикулярны, а их точка пересечения лежит на окружности девяти точек.

5. Внутри треугольника ABC дана точка M. Докажите, что прямые Эйлера треугольников AMB, BMC и CMA пересекаются в одной точке, если

а) M — ортоцентр треугольника ABC,

б) M — точка, из которой все стороны треугольника видны под углом 120° (все углы треугольника меньше 120°).

6. Пусть L — такая точка в плоскости треугольника ABC, что $|AL|:|BL|:|CL|=|BC|:|CA|:|AB|$. Докажите, что L лежит на прямой Эйлера треугольника ABC.

---

*) *Вневписанная окружность* — это окружность, касающаяся одной стороны треугольника и продолжений двух других его сторон.

Колебания и маятники

(Начало см. на с. 30)

становится равной нулю. Это означает, что произошла полная передача энергии от первого маятника ко второму. Затем процесс пойдет в обратном направлении.

Гораздо труднее математически описать колебания связанных маятников с разными массами, но одинаковыми длинами нитей (при желании попробуйте сделать это самостоятельно). Заметим только, что в этом случае амплитуда первоначально отклоненного маятника в нуль не обращается — энергия хотя и передается другому маятнику, но не полностью. Это вы тоже наблюдали на опыте.

Если же длины маятников не одинаковы ($l_1 \neq l_2$), то, как вы видели на опыте, резонанса не будет. В математическом описании это скажется в том, что станет невозможным переход от системы (4) к системе (5).

В заключение советуем вам самостоятельно исследовать вопрос о зависимости колебаний связанных маятников от жесткости пружинки, от положения места ее крепления к нитям и от масс маятников. Попробуйте, например, решить задачу для случая, когда масса одного маятника гораздо больше массы другого, и сравните полученный результат с опытом (для этого один из маятников прикрепите пружинкой к стене).

задачник кванта

Задачи

М696—М700; Ф708—Ф712

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 октября 1981 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 8—81» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М696, М697» или «Ф708». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи.

Задачи Ф708 — Ф711 предлагались на заключительном туре Всесоюзной олимпиады школьников по физике. Число в скобках обозначает класс, в котором предлагалась задача.

М696. Можно ли таблицу 10×10 клеток заполнить 100 различными натуральными числами так, чтобы для любого квадрата $k\times k$ клеток ($2\leqslant k\leqslant 10$) а) суммы, б) произведения k чисел на его диагоналях были одинаковы?

А. Балинский

М697. Назовем *пузатостью* прямоугольника отношение его меньшей стороны к большей (пузатость квадрата равна 1). Докажите, что, как бы ни разрезать квадрат на прямоугольники, сумма их пузатостей будет не меньше 1.

С. Фомин

М698. На сторонах a, b, c, d вписанного в окружность четырехугольника «наружу» построены прямоугольники размерами $a\times c$, $b\times d$, $c\times a$, $d\times b$. Докажите, что центры этих прямоугольников являются вершинами а) параллелограмма, б) прямоугольника.

О. Пенкин

М699*. Полукруг с диаметром AB разрезан отрезком CD, перпендикулярным AB, на два криволинейных треугольника ACD и BCD, в которые вписаны окружности, касающиеся AB в точках E и F (рис. 1). Докажите, что а) $|AD|=|AF|$, б) $[DF]$ — биссектриса угла BDC, в) величина угла EDF не зависит от выбора точки C на AB.

В. Сендеров

М700*. Можно ли множество всех конечных десятичных дробей разбить на а) два, б) три класса так, чтобы в один класс не попали два числа с разностью 10^m (ни при каком целом $m=0, \pm1, \pm2, \ldots$)?

А. Лейдерман

Ф708. Для исследования свойств нелинейного резистора был произведен ряд экспериментов. Вначале была исследована зависимость сопротивления резистора от температуры. При повышении температуры до значения $t_1=100°$ С мгновенно происходил скачок сопротивления от величины $R_1=50$ Ом до величины $R_2=100$ Ом; при охлаж-

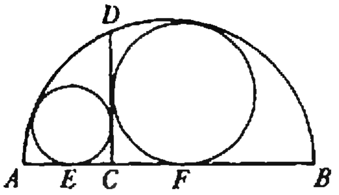


Рис. 1.

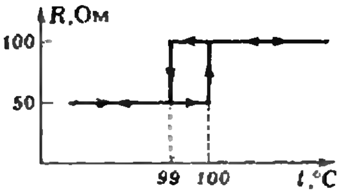


Рис. 2.

дении обратный скачок происходил при температуре $t_2=99°$ С (рис. 2).

Во втором опыте к резистору приложили постоянное напряжение $U_1=60$ В, при котором его температура оказалась равной $t_3=80°$ С.

Наконец, когда к резистору приложили постоянное напряжение $U_2=80$ В, в цепи возникли самопроизвольные колебания тока. Определите период этих колебаний, а также максимальное значение тока. Температура воздуха в лаборатории постоянная и равна $t_0=20°$ С. Теплоотдача от резистора пропорциональна разности температур резистора и окружающего воздуха. Теплоемкость резистора $c=3$ Дж/К. (9)

А. Буздин

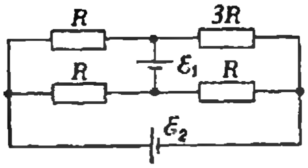


Рис. 3.

Ф709. Собрана схема, показанная на рисунке 3. ЭДС батареи $\mathcal{E}_1$ уменьшили на 1,5 В, после чего токи на различных участках цепи изменились. Как нужно изменить ЭДС батареи $\mathcal{E}_2$, чтобы

1) ток через батарею $\mathcal{E}_1$ стал прежним?
2) ток через батарею $\mathcal{E}_2$ стал прежним?

Внутренними сопротивлениями батарей пренебречь.

А. Зильберман

Ф710. При наблюдении в облаке за падением капли, которая увеличивается в размерах, поглощая мельчайшие капельки, встречающиеся на ее пути, было установлено, что капля движется все время с постоянным ускорением. Определите это ускорение, считая начальный размер капли малым. Сопротивлением воздуха при движении капли пренебречь.

А. Стасенко

Ф711. В таблице приведены экспериментальные данные о теплоемкостях и молярных массах некоторых твердых тел. На основании этих данных установить некоторую физическую закономерность и заполнить три пустые клеточки таблицы. Какова предполагаемая точность ваших предсказаний (в процентах)? Универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль · К). (9)

Е. Сурков

Таблица

	Серебро	Алюминий	Золото	Висмут	Кобальт	Медь	Железо	Литий	Магний	Никель	Платина	Титан	Ванадий
c, Дж/(г · К)	0,238	0,90	0,128	0,122	0,417	0,383	0,447	3,52		0,43	0,131		0,484
A, г/моль	107	27	197	209	59	64		7	24	60	196	48	51

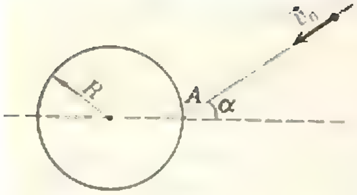


Рис. 4.

Ф712. Небольшой шарик движется с постоянной скоростью $\vec{V}_0$ по гладкой горизонтальной поверхности и попадает в точке A в цилиндрический вертикальный колодец глубины H и радиуса R. Вектор скорости шарика составляет угол α с диаметром колодца, проведенным в точку A (рис. 4). При каком соотношении между $\vec{V}_0$, H, R и α шарик после упругих соударений со стенками и дном сможет «выбраться» из колодца? (8)

С. Кротов

Решения задач

M656—M660; Ф668—Ф672

M656. *В пространстве имеются 30 ненулевых векторов. Докажите, что среди них найдутся два, угол между которыми меньше 45°.*

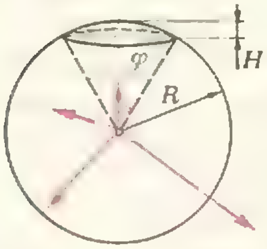


Рис. 1.

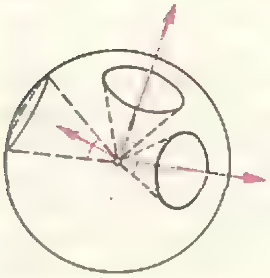


Рис. 2.

Поместим начала всех векторов в одну точку и построим сферу радиуса 1 с центром в этой точке. Возьмем точки пересечения наших векторов (или их продолжений) с построенной сферой и окружим каждую из них шапочкой «диаметром» 45° (рис. 1) или, что по существу то же самое, сами векторы — конусами с раствором 45° (и образующей 1). Утверждение задачи будет доказано, если мы покажем, что какие-то две из этих «окрестностей»: шапочки или конусы — пересекаются. А для этого сравним суммарную площадь поверхностей шапочек (или суммарный объем конусов) с площадью поверхности сферы (соответственно, с объемом шара).

Площадь поверхности шапочки (см. рисунок 1; $H = R(1-\cos\varphi)$ — высота шапочки) равна $2\pi RH = 2\pi\left(1-\cos\frac{\pi}{8}\right) = 2\pi\left(1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)$ (мы воспользовались формулой для косинуса половинного угла). Наша цель — доказать, что $30\cdot 2\pi\left(1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right) > 4\pi$, то есть, что $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} < \frac{4}{15}$. Произведя несколько несложных преобразований (два из которых — возведение в квадрат), придем к верному равносильному неравенству $\frac{1}{2} < \left(\frac{167}{225}\right)^2$. Из этого следует, что среди шапочек найдутся две пересекающиеся; угол между соответствующими им векторами будет меньше 45°.

Если сравнивать объемы (рис. 2), нужно доказать, что объем каждого конуса больше $\frac{4}{90}\pi$. Предлагаем вам убедиться в этом самостоятельно.

А. Толпыго

◆

M657. *В таблице $n \times n$, заполненной числами, все строки различны. Докажите, что из таблицы можно вычеркнуть некоторый столбец так, что в оставшейся таблице все строки также будут различны.*

Допустим противное: *какой бы столбец мы ни вычеркнули, в оставшейся таблице найдется хотя бы одна пара одинаковых строк.* Рассмотрим n «укороченных» таблиц, получающихся из данной, соответственно, вычеркиванием первого, второго, ..., n-го столбца. Отметим для каждой из этих таблиц одну пару одинаковых строк (длины $n-1$). Будем теперь считать, что строки исходной таблицы — это точки на плоскости, причем точки, соответствующие отмеченным парам строк в укороченных таблицах, попарно соединены. Мы получили картинку «n точек — n отрезков». Нетрудно доказать, что в такой картинке найдется *цикл* — замкнутая ломаная с вершинами в некоторых из наших точек. Пусть эти вершины соответствуют строкам A_1, A_2, ..., A_m, и пусть отрезок A_iA_{i+1} получается в результате вычеркивания столбца B_i ($i=1, 2, \ldots, m-1$), и отрезок A_mA_1 — столбца B_m. Тогда в исходной таблице строки A_1 и A_2 отличаются только в столбце B_1, строки A_2 и A_3 — только в столбце B_2, …, строки A_{m-1} и A_m — только в столбце B_{m-1}, так что в столбце B_m во всех этих строках записано одно и то же число. Но это противоречит тому, что точки, соответствующие строкам A_1 и A_m, соединены (поскольку, по условию, все строки в исходной таблице различны, строки A_1 и A_m должны отличаться в столбце B_m).

А. Анджан

◆

М658. *В квадрате со стороной 1 проведено конечное число отрезков (рис. 1), параллельных его сторонам. Отрезки могут пересекать друг друга. Сумма длин проведенных отрезков равна 18. Докажите, что среди частей, на которые квадрат разбивается этими отрезками, найдется такая, площадь которой не меньше 0,01.*

Сумма длин границ всех частей, на которые квадрат разбит отрезками, равна $2 \cdot 18+4=40$ (длины проведенных отрезков входят в эту сумму по два раза, длины сторон квадрата — по одному). Пусть для i-й части сумма длин горизонтальных границ равна $2x_i$, вертикальных — $2y_i$, и площадь i-й части равна c_i^2 ($c_i>0$); тогда $x_iy_i \geqslant c_i^2$ (рис. 2), поэтому $x_i+y_i \geqslant 2\sqrt{x_iy_i} \geqslant 2c_i$. Итак,

$$40=\Sigma(2x_i+2y_i) \geqslant 4\Sigma c_i,$$

откуда $\Sigma c_i \leqslant 10$ (здесь сумма Σ берется по всем частям разбиения).

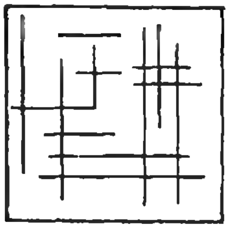


Рис. 1.

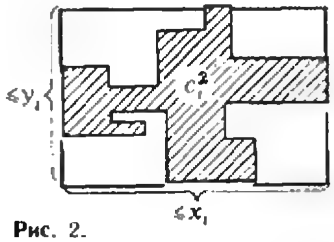


Рис. 2.

Если $c_i^2<0{,}01$ (то есть $c_i<0{,}1$) для всех i, то $1=\Sigma c_i^2<\Sigma 0{,}1c_i=0{,}1\Sigma c_i$, откуда $\Sigma c_i>10$. Противоречие. Очевидно, оценка 18 — точная: восемнадцатью отрезками длины 1 наш квадрат можно разбить на 100 одинаковых квадратиков площади 0,01 каждый.

А. Берзиньш

◆

М659. *Докажите следующие свойства последовательности Фибоначчи $f_1=1$, $f_2=2$, …, $f_{k+1}=f_k+f_{k-1}$.*

а) Каждое натуральное число $n \geqslant 3$ представляется в виде суммы различных чисел Фибоначчи.

б) Обозначим количество таких представлений числа n в виде суммы четного числа слагаемых через K_n, в виде суммы нечетного числа слагаемых — через H_n; тогда $|K_n-H_n| \leqslant 1$ при всех n.*

в) Если перемножить несколько подряд стоящих двучленов из последовательности*

$$1-x,\ 1-x^2,\ 1-x^3,$$
$$1-x^5,\ \ldots,\ 1-x^{f_k},\ \ldots$$

Для краткости мы будем вместо «представление числа n в виде суммы различных чисел Фибоначчи» говорить «представление числа n»; представления, удовлетворяющие условию задачи г), мы будем называть *правильными*.

Утверждение задачи а) содержится в утверждении задачи г).

Решение задачи г). На полях приведена таблица правильных представлений натуральных чисел. Эта таблица устроена так. Ее строки разбиты на группы, содержащие, соответственно, 1, 2, …, f_k, … равенств. Первая группа состоит из равенства $1=1$, вторая — из равенств $2=2$ и $3=1+2$, а группа с номером $k \geqslant 3$ получается из $(k-2)$-й и $(k-1)$-й групп увеличением левой части входящих в них равенств на f_k и приписыванием к правой части слагаемого f_k. Из таблицы видно, что всякое натуральное число $n \geqslant 3$ обладает правильным представлением. Для доказательства единственности правильного представления предположим, что n — самое маленькое число, для которого оно не единственно; пусть

$$n=f_{i_1}+\ldots+f_{i_m}\ (i_1<\ldots<i_m) \qquad (1)$$

— представление, не содержащееся в нашей таблице. Но тогда *(в показателях стоят числа Фибоначчи), то в полученном многочлене все коэффициенты будут равны 0, —1 или +1. Известное нам доказательство утверждений б) и в) опирается на такое свойство:*

г) Для любого $n \geqslant 3$ существует единственное представление n в виде суммы различных чисел Фибоначчи, которое вместе с каждым слагаемым $f_k (k \geqslant 3)$ содержит хотя бы одно из двух предыдущих чисел Фибоначчи f_{k-1} или f_{k-2}.

$1=1$

$2=2$
$3=1+2$

$4=1+3$
$5=2+3$
$6=1+2+3$

$7=2+5$
$8=1+2+5$
$9=1+3+5$
$10=2+3+5$
$11=1+2+3+5$

$12=1+3+8$
$13=2+3+8$
. . . . . .

$1=S(1)$
$2=T(1)$
$3=S(2)$
$4=S(1,1)$
$5=T(2)$
$6=S(3)$
$7=T(1,1)$
$8=S(2,1)$
$9=S(1,2)$
$10=T(3)$
$11=S(4)$
$12=S(1,1,1)$
$13=T(2,1)$
……………………
$37=S(2,2,1)$

$K_1-H_1=M(1)=-1$
$K_2-H_2=N(1)=-1$
$K_3-H_3=M(2)=0$
$K_4-H_4=M(1,1)=1$
$K_5-H_5=N(2)=0$
$K_6-H_6=M(3)=0$
$K_7-H_7=N(1,1)=1$
$K_8-H_8=M(2,1)=-1$
$K_9-H_9=M(1,2)=0$
$K_{10}-H_{10}=N(3)=0$
$K_{11}-H_{11}=M(4)=1$
$K_{12}-H_{12}=M(1,1,1)=0$
$K_{13}-H_{13}=N(2,1)=-1$
. . . .
$K_{37}-H_{37}=M(2,2,1)=0$

правильное представление

$$n-f_{i_m}=f_{i_1}+\ldots+f_{i_{m-1}}$$

тоже не может содержаться в таблице, иначе нам пришлось бы при образовании i_m-й группы включить в таблицу представление (1). Противоречие.

Решение задачи б). Представления натуральных чисел мы будем изображать в виде последовательностей черных и белых кружков: черный кружок на k-м месте означает, что f_k входит в представление, белый — что не входит (мы обрываем последовательность на последнем черном кружке). На рисунке 1 этим способом записаны шесть различных представлений числа 37 (это — все возможные его представления). Правильные представления приобретают при этом вид, показанный на рисунках 2, *а* или 2, *б*; здесь $j_1, \ldots, j_q$ — натуральные числа. В первом случае мы полагаем $n=S(j_1,\ldots,j_q)$, $K_n-H_n=M(j_1,\ldots,j_q)$; во втором случае мы полагаем $n=T(j_1,\ldots,j_q)$, $K_n-H_n=N(j_1,\ldots,j_q)$. (Так, $37=S(2, 2, 1)$, $M(2, 2, 1)=K_{37}-H_{37}=3-3=0$; другие примеры приведены рядом на полях.)

Если $n=f_{i_1}+\ldots+f_{i_m}$ — представление числа n, включающее в себя f_r и f_{r+1}, но не включающее f_{r+2}, то, заменив слагаемые f_r и f_{r+1} слагаемым f_{r+2}, мы получим другое представление числа n. Это преобразование (…●●○…→…○○●…) мы будем называть *элементарным упрощением*. Очевидно, всякое представление числа получается из правильного цепочкой элементарных упрощений. Пусть сначала $q=1$. На рисунке 3 изображен полный набор представлений числа $n=S(j)$ (кстати, равного $f_{j+2}-2$). Мы видим, что $K_{S(j)}$ есть число четных чисел на отрезке от $[(j+1)/2]$ до j, а $H_{S(j)}$ есть число нечетных чисел на этом отрезке. Следовательно,

$$K_n-H_n=M(j)=\begin{cases} 1, \text{ если } j\equiv 0 \bmod 4^{*)}, \\ -1, \text{ если } j\equiv 1 \bmod 4, \\ 0, \text{ если } j\equiv 2 \bmod 4. \end{cases} \qquad (2)$$

Обратимся теперь к числу $M(j_1,\ldots,j_q)$. Разделим представления числа $S(j_1,\ldots,j_q)$ на две группы: представления вида $f_1+\ldots+f_{j_1}+\ldots$ и остальные. Число представлений первой группы совпадает с числом всех представлений числа $S(j_2,\ldots,j_q)$, только последние имеют на j_1 слагаемых меньше, поэтому вклад первой группы в $M(j_1,\ldots,j_q)$ равен $(-1)^{j_1}M(j_2,\ldots,j_q)$ (на полях приведено несколько числовых примеров, иллюстрирующих наше наблюдение).

Далее. Чтобы с помощью элементарных упрощений получить из правильного представления представление второй группы, необходимо сделать элементарное упрощение $(f_{j_1-1}, f_{j_1})\to f_{j_1+1}$, причем с него можно начать. В результате между первыми j_1-2 слагаемыми и остальными возникнет зазор длины 2 (рис. 4), исключающий возможность взаимодействия. Поэтому в дальнейшем элементарные упрощения первых j_1-2 слагаемых и остальных происходят независимо, так что вклад второй группы в $M(j_1,\ldots,j_q)$ равен $M(j_1-2)M(j_2+1, j_3,\ldots,j_q)$. Итак,

$$M(j_1,\ldots,j_q)=(-1)^{j_1}M(j_2,\ldots,j_q)+ \\ +M(j_1-2)M(j_2+1, j_3,\ldots,j_q) \qquad (3)$$

(см. также примеры на полях)**). Докажем теперь индукцией по q, что $M(j_1,\ldots,j_q)=-1$, 0 или 1.

При $q=1$ это мы уже знаем. Предположим, что $M(k_1,\ldots,k_r)=-1$, 0 или 1 при $r<q$ и любых $k_1,\ldots,k_r$. Если $j_1\equiv 0$ или 1 mod 4, то $M(j_1-2)=0$ (см. формулу (2)) и

$$M(j_1,\ldots,j_q)=(-1)^{j_1}M(j_2,\ldots,j_q)=-1, 0 \text{ или } 1.$$

Если $j_1\equiv 2$ или 3 mod 4, то $M(j_1-2)=(-1)^{j_1}$ (см. формулу (2)) при $q=2$ и

---

*) Запись $a\equiv b \bmod c$ (читается: *a сравнимо с b по модулю c*), где $0 < b < c$, означает, что при делении a на c получается остаток b.

**) Формула (3) имеет смысл только при $j_1 \geqslant 3$, но ею можно пользоваться и при $j_1=1, 2$, положив $M(-1)=0$, $M(0)=1$ (что не противоречит и формуле (2)); доказательство оставляется читателю.

$M(1)=-1$
$M(2)=0$
$M(3)=0$
$M(4)=1$

$M(1,\ 1)=-M(1)=1$
$M(1,\ 2)=-M(2)=0$
$M(1,\ 3)=-M(3)=0$

$M(1,4)=-M(4)=-1$
$M(2,\ 1)=M(1)+M(2)=-1$
$M(2,\ 2)=M(2)+M(3)=0$
$M(2,\ 3)=M(3)+M(4)=1$

. . . .

$M(1,\ 1,\ 1)=-M(1,\ 1)=-1$
$M(1,\ 1,\ 2)=-M(1,\ 2)=0$

. . . .

$M(2,\ 1,\ 1)=M(-1)+ +M(0))\ M(2)=0$
$M(2,\ 1,\ 2)=(M(-1)+ +M(0))\ M(3)=0$
$M(2,\ 1,\ 3)=(M(-1)+ +M(0))\ M(4)=1$

. . . .

$M(2,\ 2,\ 1)=(M(0)+ +M(1))\ M(2)=0$

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^5)\times(1-x^8)(1-x^{13})\ldots=1-x-x^2+x^4+x^7-x^8+x^{11}-x^{13}\ldots$$

$$(1-x^{f_3})(1-x^{f_4})(1-x^{f_5})\times(1-x^{f_6})=(1-x^3)\times(1-x^5)(1-x^8)(1-x^{13})=1-x^3-x^5+x^{11}+x^{18}-x^{24}-x^{26}+x^{29}$$

Представления числа 37

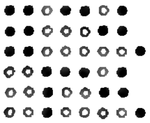


Рис. 1.

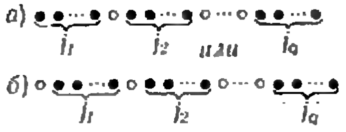


Рис. 2.

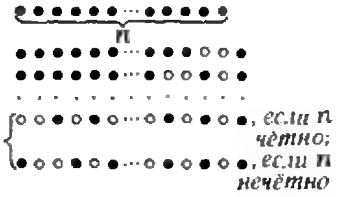


Рис. 3.

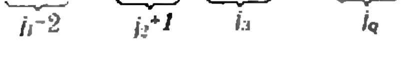


Рис. 4.

$$M(j_1,\ldots,j_q)=(-1)^{j_1}[M(j_2,\ldots,j_q)+M(j_2+1,\ j_3,\ldots,j_q)]=$$
$$=(-1)^{j_1}[(-1)^{j_2}M(j_3,\ldots,j_q)+(-1)^{j_2-1}M(j_3,\ldots,j_q)+$$
$$+M(j_2-2)M(j_3+1,\ \ j_4,\ldots,j_q)+M(j_2-1)M(j_3+1,\ \ j_4,\ldots,j_q)]=$$
$$=(-1)^{j_1}(M(j_2-2)+M(j_2-1))M(j_3+1,\ j_4,\ldots,j_q)$$

при $q\geqslant 3$. В обоих случаях мы получаем, что $M(j_1,\ldots,j_q)=0$, 1 или -1, поскольку, как видно из формулы (2), $M(j_2)+M(j_2+1)=0$, 1 или -1 и $M(j_2-2)+M(j_2-1)=0$, 1 или -1.

Точно так же можно показать, что $N(j_1,\ldots,j_q)=0$, 1 или -1. Более того, ясно, что отсутствие в правильном представлении слагаемого f_1 никакого воздействия на ход элементарных упрощений не окажет, так что в действительности $N(j_1,\ldots,j_q)=M(j_1,\ldots,j_q)$.

Решение задачи в) Эта задача близка к задаче б), и мы ограничимся несколькими замечаниями, которые позволят читателю без труда восстановить ее решение.

Коэффициент при x^n в произведении $(1-x^{f_l})(1-x^{f_{l+1}})\ldots(1-x^{f_m})$ равен разности $K-H$, где K — число представлений числа n в виде суммы четного числа различных слагаемых из множества $\{f_l,\ f_{l+1},\ldots,\ f_m\}$, и H — число представлений числа n в виде суммы нечетного числа таких слагаемых (см. поля). Другими словами, K и H отличаются от прежних K_n и H_n тем, что запрещается брать числа Фибоначчи с номерами, меньшими, чем l, и большими, чем m, а наша задача по-прежнему заключается в том, чтобы показать, что $K-H=-1$, 0 или 1. Прежде всего нужно изменить определение правильного представления: оно должно включать в себя только слагаемые из нашего множества (разумеется, неравенство $k\geqslant 3$ в определении должно быть заменено неравенством $k\geqslant l+2$). Утверждение задачи г) ослабляется: теперь всякое число либо вовсе не имеет правильных представлений, либо имеет одно такое представление. По-прежнему всякое представление получается из правильного цепочкой элементарных упрощений (так что число, не имеющее правильных представлений, не имеет никаких представлений). Числа $S(j_1,\ldots,j_q)$ и $T(j_1,\ldots,j_q)$ определяются как в решении задачи б), только правильное представление числа $S(j_1,\ldots,j_q)$ начинается теперь со слагаемого f_l, а правильное представление числа $T(j_1,\ldots,j_q)$ — со слагаемого f_{l+1}. Определения чисел $M(j_1,\ldots,j_q)$ и $N(j_1,\ldots,j_q)$ и формула (3) не меняются. Некоторой аккуратности требует вычисление в новой обстановке чисел $M(j)$ (и $N(j)$), но читатель с этим вычислением наверняка справится.

Замечание. Читатели, познакомившиеся с помещенной в этом номере журнала статьей «О раскрытии скобок, об Эйлере, Гауссе, Макдональде и об упущенных возможностях», вероятно, обратили внимание на сходство, во всяком случае внешнее, между утверждением только что разобранной задачи и тождеством Эйлера. Это сходство явилось одной из главных причин интереса к задаче со стороны ее авторов.

Д. Фукс

От редакции. Другое решение задачи **М659** мы получили от нашего читателя *Лионаса Мерквичюса*. В его работе используются такие обозначения: через $K(n,\ k)$, соответственно $H(n,\ k)$, обозначается число представлений числа n в виде суммы четного, соответственно нечетного, числа различных слагаемых, выбираемых из множества $f_1,\ldots,f_k$; через $G(n,\ k)$ — разность $K(n,\ k)-H(n,\ k)$. После этого доказываются четыре формулы:

$$G(n,\ k)=0 \text{ при } n>f_{k+2}-2;$$
$$G(n,\ k)=(-1)^kG(f_{k+2}-2-n,\ k) \text{ при } 0\leqslant n\leqslant f_{k+2}-2;$$
$$G(n,\ k)=G(n,\ k-1) \text{ при } 0\leqslant n<f_k;$$
$$G(n,\ k)=-G(n-f_{k-1},\ k-3) \text{ при } f_k\leqslant n<f_k+f_{k-2}.$$

(Первые три из этих формул почти очевидны, так что вся трудность заключена в доказательстве последней.) С помощью этих формул индукцией по k легко показать, что $G(n,\ k)=0$ или ± 1 (нужно только проверить это для $k=1,\ 2,\ 3$). После этого для решения задачи б) достаточно заметить, что

$M(n)=G(n,k)$ при $f_{k+1}>n$, а для решения задачи в) — что коэффициент при x^n в произведении $(1-x^{f_{l+1}})\dots(1-x^{f_{l+k}})$ равен 0, если n не представляется в виде суммы различных слагаемых, выбираемых из множества $f_{l+1},\dots,f_{l+k}$, и равен $G(f_{j_1}+f_{j_2}+\dots+f_{j_s},\ k)$, если $n=f_{l+j_1}+\dots+f_{l+j_s}$, $1<j_1<\dots<j_s<k$.

◆

М660. *На окружности расставляются синие и красные точки (рис. 1, а). Разрешается добавить новую красную точку и одновременно поменять цвет у каждой из двух соседних с ней точек (рис. 1, б), либо убрать красную точку и поменять цвет у каждой из соседних точек (рис. 1, в). Пусть первоначально было всего две красные точки (меньше двух точек оставлять не разрешается). Можно ли несколькими такими операциями получить на окружности*

а) две точки — синюю и красную;

б) 8 красных точек;

в) одну красную и 6 синих точек;

г) две синие точки?

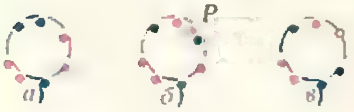


Рис. 1.

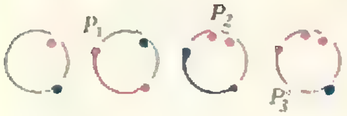


Рис. 2.

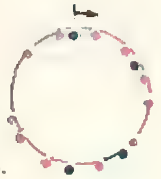


Рис. 3.

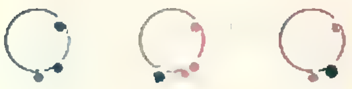


Рис. 4.

Ответы на вопросы б) и в) положительные.

Для б) это вытекает из того факта, что разрешенными добавлениями в любое место на окружности всегда можно вставить три идущие подряд красные точки (рис. 2). Тогда восемь красных точек получаются из двух красных двукратной вставкой трех красных точек.

С другой стороны, из трех идущих подряд красных точек всегда можно получить две синие (выбросив среднюю точку). Поэтому, добавив к двум данным красным точкам вначале красную, затем — два раза по три красных, а потом заменив эти «красные тройки» на «синие пары», получим красную и шесть синих точек.

Отрицательный ответ на вопрос а) следует из того, что при разрешенных операциях *четность числа синих точек* не меняется, а в исходной и в требуемой заключительной позиции она различна.

Отрицательный ответ на вопрос г) вытекает из другого инвариантного свойства наших операций, обнаружение которого требует гораздо большей наблюдательности и большего количества экспериментов. Кроме того, это свойство является инвариантным только на множестве позиций с четным числом синих точек.

Определим для таких расстановок *альтернированную сумму* $|m_1-m_2+m_3-m_4+\dots+m_{2k-1}-m_{2k}|$ длин серий красных точек: m_1 — число красных точек, заключенных между первой и второй синими точками (направление обхода и первая синяя точка выбираются произвольно), m_2 — число красных точек между второй и третьей синими точками, m_3 — между третьей и четвертой,..., m_{2k} — между последней $2k$-й, и первой синими точками (на рисунке 3 $k=2$, $m_1=2$, $m_2=3$, $m_3=1$, $m_4=5$); некоторые m_i могут равняться нулю. Если синих точек в расстановке нет вовсе, положим эту сумму равной числу ее красных точек.

Оказывается, *делимость на* 3 определенной таким образом суммы — инвариантное свойство. (Поэкспериментируйте с расстановкой, изображенной на рисунке 3, а затем докажите сформулированное утверждение для операции убирания красной точки, рассмотрев случаи, когда ее «соседи» — синие точки, красные точки, точки разных цветов.) Но для двух красных точек наша сумма равна 2 (не делится на 3), а для двух синих — равна 0 (делится на 3). Значит, вторую расстановку из первой получить нельзя.

В заключение заметим, что любую (конечную) расстановку красных и синих точек можно получить из некоторой двухточечной или, что то же самое, из любой расстановки можно получить двухточечную. Это замечание почти очевидно: достаточно убирать красные точки до тех пор, пока на окружности не останутся две точки. Если же на окружности на каком-то шаге остаются только синие точки (в количестве, большем двух), то, добавив красную точку и затем убрав соседнюю с ней, получим расстановку с тем же общим числом точек, содержащую красные точки (рис. 4).

К. Казарновский

◆

Ф668. *Через неподвижный блок перекинута невесомая нить. К одному концу нити прикреплен груз массы m_1. К другому концу на пружине*

Если бы грузы были соединены нитью без пружины, то они стали бы двигаться с ускорением, равным по абсолютной величине

$$a=g\,\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}$$

с жесткостью k подвешен груз массы m_2. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна l_0. Найти амплитуду колебаний, которое будет совершать груз m_2, когда систему предоставят самой себе. Качаний поперек нити нет.

(мы предполагаем, что $m_2 > m_1$). При этом сила натяжения нити была бы равна

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$

Будем считать, что в начальный момент систему удерживают в равновесии с помощью дополнительной силы, приложенной к грузу m_1. Тогда натяжение пружины в начальный момент

$$T_0 = m_2 g \neq T,$$

так что кроме ускоренного движения возникают и колебания грузов друг относительно друга. Амплитуда силы натяжения при этих колебаниях равна

$$T_0 - T = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} m_2 g,$$

максимальное растяжение пружины равно

$$\Delta l = \frac{T_0 - T}{k}.$$

Смещения грузов при колебаниях обратно пропорциональны их массам. Если l_1 и l_2 — максимальные смещения грузов m_1 и m_2 соответственно, то

$$l_1 m_1 = l_2 m_2$$

$$l_1 + l_2 = l = \frac{T_0 - T}{k} = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} m_2 g.$$

Отсюда находим амплитуду колебаний груза m_2:

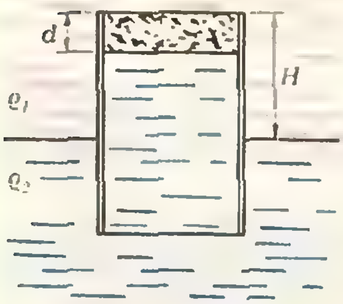
$$l_2 = l \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 - m_1}{k(m_1 + m_2)^2} m_1 m_2 g.$$

Мы рассмотрели движение грузов при условии, что в начальный момент груз m_2 растягивал пружину. Решите задачу самостоятельно, считая, что пружина в начальный момент не растянута.

Г. Коткин

◆

Ф669. *Перевернутый тонкостенный стакан с пробковым дном толщины d плавает на границе раздела двух жидкостей с плотностями ϱ_1 и ϱ_2. Верхняя часть стакана находится на высоте H над границей раздела. Сечение стакана S. На какое расстояние поднимается стакан, если в дне стакана появится дырка?*



После того как в дне появится дырка, уровни раздела жидкостей внутри и снаружи стакана выравняются. При этом стакан должен начать движение вверх, так как выталкивающая сила увеличивается (возрастает давление снизу на пробковое дно, так как $\varrho_2 > \varrho_1$). Единственный противодействующий эффект возникает из-за того, что при этом уменьшается сила, действующая снизу вверх на торец стенок стакана (стакан тонкостенный; значит, площадь торца $\Delta S \ll S$). Ясно, что в случае, когда увеличение выталкивающей силы не очень значительно (а что будет при небольших значениях величины $H - d$), стакан, всплыв на некоторое расстояние, которое мы обозначим через x, вновь окажется в равновесии. Запишем условия равновесия в первом и втором случае (p_0 — давление на границе раздела жидкостей, L — общая высота стакана):

$$mg + (p_0 - \varrho_1 g H)S = \\ = [p_0 + \varrho_2 g(L - H)]\Delta S + [p_0 - \varrho_2 g(H - d)](S - \Delta S), \quad (1)$$

$$mg + [p_0 - \varrho_1 g(H + x)]S = [p_0 + \varrho_2 g(L - H - x)]\Delta S + \\ + [p_0 - \varrho_1 g(H + x - d)](S - \Delta S). \quad (2)$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим

$$m = \varrho_1 HS - \varrho_2 HS + \varrho_1 dS + \varrho_2 L\Delta S - \varrho_2 d\Delta S. \quad (1')$$

$$m = \varrho_1 dS + \varrho_2 L\Delta S - \varrho_2 H\Delta S - \varrho_2 x\Delta S + \varrho_1 H\Delta S + \\ + \varrho_1 x\Delta S - \varrho_1 d\Delta S. \quad (2')$$

Приравняв правые части, получим после несложных преобразований:

$$x = (H - d)\frac{S - \Delta S}{\Delta S}.$$

Стакан остановится при движении вверх, если будет выполнено условие $x < L - H$, или

$$H-d<\frac{\Delta S}{S}\,(L-d).$$

Если это условие не будет выполнено, стакан всплывет на поверхность.

А. Зильберман

◆

Ф670. *Покажите, что максимальная скорость, которую при столкновении может сообщить протону α-частица, составляет 1,6 начальной скорости α-частицы.*

Пусть вначале относительно неподвижной системы отсчета протон покоится, а α-частица имеет скорость $\vec{v}_0$. Процесс их упругого соударения описывается законом сохранения импульса

$$4m\vec{v}_0=m\vec{v}_1+4m\vec{v}_2$$

и законом сохранения энергии

$$\frac{4mv_0^2}{2}=\frac{mv_1^2}{2}+\frac{4mv_2^2}{2},$$

где $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ — векторы скоростей, соответственно, протона и α-частицы в неподвижной системе отсчета после соударения, m и $4m$ — массы протона и α-частицы.

Рассмотрим процесс соударения этих частиц в системе центра масс, то есть в инерциальной системе отсчета, движущейся относительно неподвижной системы отсчета со скоростью $\vec{v}'=\frac{4m\vec{v}_0}{m+4m}=\frac{4}{5}\vec{v}_0$ (в числителе первой дроби стоит полный импульс системы, в знаменателе — ее полная масса). На рисунке изображены вектор $\vec{v}_0$ и векторы скоростей α-частицы (вектор $\overrightarrow{OB}$) и протона (вектор $\overrightarrow{OA}$) в системе центра масс до соударения; $|\overrightarrow{OB}|=\frac{1}{5}|\vec{v}_0|$, $|\overrightarrow{OA}|=\frac{4}{5}|\vec{v}_0|$. Согласно закону сохранения импульса, после соударения векторы $\overrightarrow{OB'}$ и $\overrightarrow{OA'}$ скоростей α-частицы и протона должны лежать на одной прямой и должно выполняться соотношение $|\overrightarrow{OB'}|:|\overrightarrow{OA'}|=1:4$ (см. рисунок); согласно закону сохранения энергии, $|\overrightarrow{OB'}|=|\overrightarrow{OB}|$ и $|\overrightarrow{OA'}|=|\overrightarrow{OA}|$ (покажите!).

Скорости α-частицы и протона в неподвижной системе отсчета изображены на рисунке векторами $\overrightarrow{OC_2}=\overrightarrow{OB'}+\vec{v}'$, $\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{OA'}+\vec{v}'$ соответственно $\left(\vec{v}'=\frac{4}{5}\vec{v}_0\right)$.

Чтобы ответить на вопрос задачи, мы должны определить максимально возможную длину вектора $\overrightarrow{OC_1}$, то есть в равнобедренном треугольнике $OA'C_1$ необходимо определить максимально возможную длину основания при неизменных длинах боковых сторон. Очевидно, что максимум $|\overrightarrow{OC_1}|$ равен $2\cdot\frac{4}{5}|\vec{v}_0|=1{,}6|\vec{v}_0|$. Эта ситуация отвечает центральному удару.

С. Кротов

◆

Ф671. *Имеется 1 л горячей воды с температурой T_1 и 1 л холодной воды с температурой T_2. При помощи горячей воды нагревают холодную. Можно ли сделать так, чтобы окончательная температура воды, бывшей сначала холодной, стала выше температуры воды, которая была сначала горячей?*

Ответ: можно.

Покажем, как это сделать. Пусть в нашем распоряжении имеются сосуд A с горячей водой (температура горячей воды $T_г$), сосуд B с холодной водой (температура $T_х$), сосуд C, стенки которого теплопроводны, и сосуд D, который теплоизолирован.

Нагревание холодной воды проводим в два этапа:

1) Переливаем часть холодной воды из B в C; опускаем C с холодной водой в A. Через некоторое время температуры воды в A и C сравняются: $T_A=T_C=T_1$, причем

$$T_г>T_1>T_х.$$

«Холодную» воду из C переливаем в теплоизолированный сосуд D.

2) Оставшуюся холодную воду выливаем в C; опускаем C в A (в A «горячая» вода с температурой T_1). Через

некоторое время температуры воды в A и C сравниваются: $T'_A = T'_C = T_2$, причем

$$T_1 > T_2 > T_x.$$

Выливаем воду из C в D, где находится «холодная» вода с температурой T_1.

В результате в сосуде D будет «холодная» вода с температурой

$$T_1 > T_3 > T_2,$$

а в сосуде A — «горячая» вода с температурой

$$T_2 < T_3,$$

то есть температура первоначально холодной воды стала выше температуры воды, которая была сначала горячей.

А. Кравчатый

◆

Ф672. *Ко вторичной обмотке включенного в сеть понижающего трансформатора с коэффициентом трансформации $K = 220/127$ подключена нагрузка с сопротивлением $R_н = 10$ Ом. Напряжение в сети $U = 220$ В, сопротивление первичной обмотки трансформатора $R_1 = 3{,}6$ Ом, сопротивление вторичной обмотки $R_2 = 1{,}2$ Ом. Определите напряжение на нагрузке.*

При включении трансформатора в сеть с подключенной нагрузкой в нем возникает переменный магнитный поток амплитуды Φ_0. ЭДС, возникающая в обмотках трансформатора, пропорциональна числу витков и скорости изменения магнитного потока. Это значит, что в первичной обмотке возникает ЭДС

$$\mathcal{E}_1 = n_1 \frac{\Delta\Phi}{\Delta t},$$

а во вторичной обмотке —

$$\mathcal{E}_2 = n_2 \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Отношение $\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = \frac{n_1}{n_2} = K$ называется коэффициентом трансформации трансформатора и по условию задачи $K = 220/127 \approx 1{,}73 \approx \sqrt{3}$.

При подключении трансформатора к сети в первичной обмотке потечет ток, равный

$$I_1 = \frac{U - \mathcal{E}_1}{R_1}. \qquad (1)$$

Во вторичной обмотке протекает ток, равный

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_2}{R_2 + R_н}. \qquad (2)$$

Отношение этих двух токов равно коэффициенту трансформации трансформатора

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{n_1}{n_2} = K = \sqrt{3}. \qquad (3)$$

Напряжение на нагрузке будет равно

$$U_н = I_2 R_н.$$

Из (1) — (3) находим:

$$U_н = \frac{K U_0 R_н}{R_1 + K^2 (R_2 + R_н)} \approx 100 \text{ В}.$$

В. Скороваров

Модели, которые мы выбираем

Для анализа физических явлений мы всегда пользуемся моделями, упрощая и идеализируя реальную ситуацию. Ясно, что в каждом конкретном случае нужно отразить в модели все важные для данной задачи детали и отбросить все лишние (этот совет, как и многие другие, легче давать, чем ему следовать). Поэтому при выборе модели следует оценить, хотя бы приблизительно, действие факторов, которые мы хотим отбросить, и посмотреть, как скажутся сделанные нами допущения и упрощения на точности получаемого решения задачи.

Рассмотрим пример: спортсмен толкает ядро с высоты $h = 1{,}5$ м под углом $\beta = 40°$ к горизонту со скоростью $v = 12$ м/с. Найти дальность полета ядра.

Выберем модель: плоская невращающаяся Земля, воздуха нет, нет также Солнца и Луны. Оценим воздействие отброшенных факторов.

Солнце: дает поправку к ускорению свободного падения $\Delta g_1 = \omega_1^2 R_1$, где $\omega_1 = 2\pi/1$ год, $R_1 = 150$ млн км; $\Delta g_1 \lesssim 10^{-2}$ м/с^2 $\approx$

$\approx 10^{-3}g$. Луна дает примерно то же (вспомним приливы).

Сопротивление воздуха: сила лобового сопротивления $F = \alpha s v^2$. Величину α приблизительно можно оценить, зная скорость выпадения града $v_г \approx 20$ м/с при $r_г \approx 0{,}5$ см:

$$\alpha \pi r_г^2 v_г^2 = m_г g = \varrho_г \frac{4}{3} \pi r^3 g \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha = \frac{4\varrho_г r_г g}{3v_г^2} .$$

Для ядра скорость $v_я$, при которой сила лобового сопротивления воздуха равна силе тяжести, определяется условием

$$v_я = v_г \sqrt{\frac{\varrho_я r_я}{\varrho_г r_г}} \approx 200 \text{ м/с}.$$

Значит для данной в условии скорости $F_{сопр} = mg \left(\frac{12}{200}\right)^2 \approx 3 \cdot 10^{-3} mg$. (Отметим, что при таких скоростях сила вязкого трения больше, чем лобового, однако она также невелика.)

Архимедова сила

$$F_A = \frac{\varrho_в}{\varrho_я} mg \lesssim 10^{-3} mg.$$

Поправка к ускорению свободного падения из-за вращения Земли

$$\Delta g_2 = \omega_2^2 R_2,$$

где $\omega_2 = 2\pi / 1$ сутки, $R_2 = 6{,}3 \cdot 10^6 \cos\varphi$ (φ — широта местности). На экваторе $\Delta g_2 \lesssim 3 \times 10^{-3} g$.

Цифры в задаче заданы «круглые»; из простых практических соображений ясно, что требуемая точность уж никак не лучше 3—5%. Значит, все перечисленные поправки несущественны, и модель наша вполне разумна. Решение задачи совсем простое, мы его не приводим.

Возможны, однако, ситуации, когда даже небольшие поправки могут оказать решающее воздействие на результат. Это может произойти, например, если мы заинтересуемся различиями в движении нескольких тел. Рассмотрите самостоятельно такой вопрос: попадет ли вертикально выстреленный снаряд назад в ствол орудия?

Модель может оказаться и совсем неприменимой, если она не отражает существенных черт явления. Например, модель абсолютно твердого тела для описания удара абсолютно неприменима — важную роль при ударе играют деформации, а абсолютно твердое тело не деформируется. Еще пример: часто пренебрегают индуктивностью проводников (или — что то же самое — энергией магнитного поля, возникающего вокруг проводника при пропускании по нему тока); однако в известной задаче про конденсатор, который после зарядки закорачивают проводником, нельзя одновременно пренебрегать сопротивлением проводника и его индуктивностью — если сопротивление очень мало, то ток получается весьма большим, и даже при малой индуктивности энергия магнитного поля оказывается существенной. Простой анализ показывает, что индуктивностью действительно можно пренебречь, только если выполняется условие $L \ll r^2 C$.

Очень часто при использовании «плохой» модели концы не сходятся с концами, — куда-то девается (или появляется) энергия, не хватает уравнений для решения задачи и т. п. Это всегда должно настораживать!

Разберем полезный пример: на двух нитях подвешена однородная балка. Требуется найти силы натяжения нитей.

Задача эта очень просто решается: нити будем считать нерастяжимыми, составим уравнения равновесия, то есть запишем условия равенства сил и моментов сил, — и неизвестные величины сразу определятся.

Добавим теперь еще одну нить. Сразу появляются неприятности — не хватает уравнений. В чем дело?

Причина тут довольно серьезная — не годится модель. В случае двух нитей она подходила — малые растяжения нитей были несущественны, они приводили лишь к тому, что балка чуть криво висела, а силы при этом практически не менялись. Если же нитей три, положение совсем другое. Чуть ослабим одну нить — вся нагрузка сразу придется на две другие. Значит, малые растяжения существенны, и модель «нерастяжимые нити» не годится. (Ведь можно пренебрегать каким-то фактором, только убедившись, что его влияние пренебрежимо мало.)

Положение легко поправить — нужно задать коэффициенты жесткости нитей (можно одинаковые, если их длины одинаковы) и из геометрических соображений найти связь между удлинениями нитей, а значит, и между силами натяжения. Это и будет недостающее уравнение.

Системы такого рода называют «статически неопределимыми», имея в виду необходимость к уравнениям сил и моментов — уравнениям статики — добавлять уравнения, характеризующие физические свойства тел (например, жесткость). Статически неопределимые задачи встречаются не так уж редко. Например, задача о распределении сил давления на кирпич, лежащий на наклонной плоскости. Она похожа на только что рассмотренную, только опор не три, а очень много. Малейшая неровность на основании кирпича кардинально меняет результат — кирпич нельзя считать абсолютно твердым телом.

Особенно каверзными бывают задачи, где взаимодействуют много тел и при этом есть трение. Один пример: задача про песок, насыпанный в кузов автомобиля (см. Ф656). Давление на стенку кузова зависит и от того, как мы насыпали песок, и от того, как именно движется автомобиль (напомним тем, кто давно не ездил в кузове грузового автомобиля, что даже при движении с постоянной скоростью кузов сильно трясет). Из-за непрерывных толчков в разные стороны сухой песок постоянно перемешивается, при этом силы трения между песчинками все время меняют направление. В среднем при этом действие сил трения компенсируется, и песок напоминает жидкость, налитую в кузов (нечто похожее происходит, когда, желая наблюдать картину силовых линий магнитного поля, мы насыпаем железные опилки на лист бумаги и потряхиваем его, чтобы ослабить трение).

В этом случае задачу легко решить.

Однако все может происходить иначе. Мы можем, например, плотно набить песок в кузов, добиваясь «заклинивания» песчинок, когда уже никакая тряска не поможет — сила давления на стенку может при этом оказаться во много раз больше.

Если же мы насыпаем песок медленно и аккуратно, конусом, а потом осторожно заполняем края и тщательно избегаем тряски, то сила давления может оказаться существенно меньше, чем в «гидростатическом» случае. В общем, статически неопределимые задачи имеют множество одинаково верных (и неверных, разумеется) решений.

Разумный выбор модели может очень облегчить решение серьезной проблемы, причем модель может быть и очень неожиданной. Капельная модель ядра позволила оценить многие эффекты, связанные с устойчивостью ядер; планетарная модель Бора дает возможность вычислить множество полезных величин, хотя ясно, что на самом деле все устроено совсем не так. Ведь модель должна передавать далеко не все свойства изучаемого объекта (как например, гиря на чашке весов моделирует далеко не все свойства взвешиваемого куска сыра).

Итак, при выборе модели явления нужно быть очень аккуратным, не забывая, однако, о том, что живо и наглядно представить себе явление — значит существенно продвинуться в решении задачи.

А. Зильберман

«Математику» — 10 лет

Летом 1980 года исполнилось 10 лет лагерю «Математик». Этот лагерь ежегодно в июле месяце проводится для сельских школьников Вологодской области кафедрой математического анализа Вологодского государственного педагогического института совместно с областным советом профсоюзов, областным отделом народного образования и областным комитетом ВЛКСМ.

В лагере проводится разнообразная политико-воспитательная, культурно-массовая и спортивно-оздоровительная работа, регулярно выпускаются математические газеты и бюллетени, оформляется математический зал, проводится день математических игр и 7 математических боев, две лагерные олимпиады по математике: в начале смены и в конце (это позволяет увидеть результаты работы), конкурс на лучшее решение задач, итоги которого подводятся в конце работы лагеря.

Подробно о лагере рассказано в журнале «Математика в школе», 1980, № 5, с. 64—66. Здесь мы приводим некоторые задачи конкурса, проведенного в «Математике — 80».

1. Лист бумаги площадью 60 см^2 покрыт тремя разноцветными кляксами площадью по 30 см^2. Доказать, что найдутся две кляксы, у которых площадь общей части не меньше 10 см^2.

2. Фокусник предлагает вам записать любое трехзначное число. Затем он подходит и, взглянув на написанное число, сразу приписывает три цифры так, что образовавшееся шестизначное число делится на 37. Как он это делает?

3. Найти все пары целых чисел, сумма которых равна их произведению.

4. Число лет некоторого человека в 1962 году равнялось сумме цифр его года рождения. В каком году он родился?

5. Найти наибольшее четное пятизначное число, первые три цифры которого образуют число, представляющее точный квадрат, а последние три цифры — точный куб.

6. Известно, что $x+1/x$ — целое число. Докажите, что тогда число x^8+1/x^8 — тоже целое.

7. Известно, что $a+b+c<0$ и что уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет действительных корней. Какой знак имеет число c?

8. Известно, что a, b, c — различные числа, причем $a^3+pa+q=0$, $b^3+pb+q=0$; $c^3+pc+q=0$. Доказать, что $a+b+c=0$.

9. Дан острый угол и точка A внутри него. Построить треугольник ABC минимального периметра, вершины B и C которого лежат на сторонах данного угла.

10. В четырехугольнике три тупых угла. Доказать, что из двух его диагоналей большей является та, которая проведена из вершины острого угла.

11. Точка M — центр круга, вписанного в треугольник ABC. Доказать, что центр окружности, проходящей через точки A, M, C, лежит на биссектрисе угла B.

12. При каком значении k уравнения $x^3+kx+1=0$ и $x^4+kx^2+1=0$ имеют общий корень? Найти этот корень.

13. Доказать, что число, которое записывается 81 единицами, делится на 81.

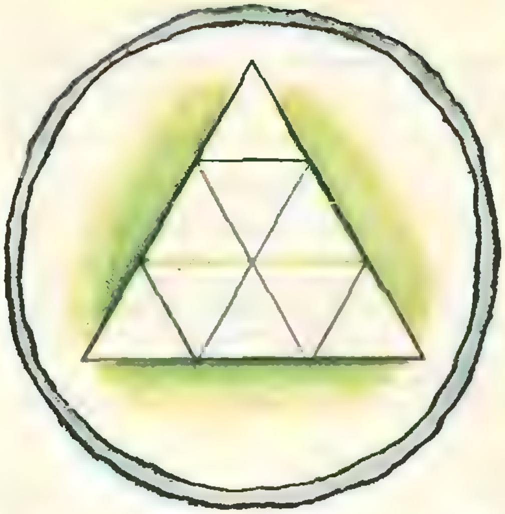
14. При каких c уравнение $4x^3-3x=c$ имеет один, два, три корня?

15. Доказать справедливость неравенства ($n\in N$)

$$\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}>\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Ю. Ломакин,
В. Горбунова

Квант для младших школьников



Задачи

1. При каких значениях n в выражении

$$*1*2*\ldots*n=n+1$$

можно так расставить знаки «+» и «—» вместо *, чтобы получилось верное равенство?

2. Треугольник со стороной 3 разбит на девять маленьких треугольничков со стороной 1 (см. рисунок).

а) Расставьте в них числа от 1 до 9 так, чтобы суммы четырех чисел в трех треугольниках со стороной 2 были одинаковыми.

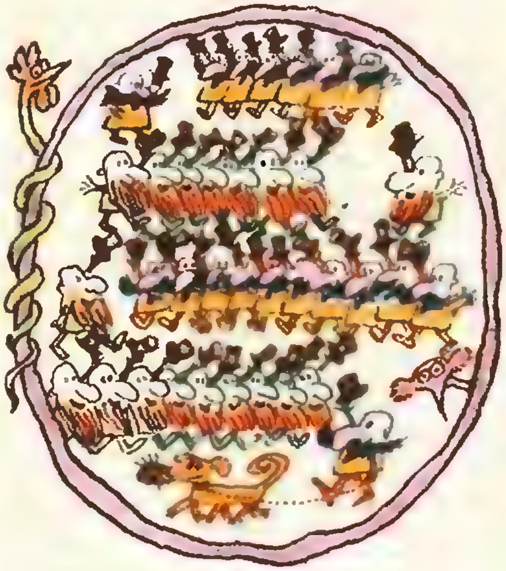
б) Какие значения может принимать эта сумма?

3. Двое детей, совершенно запутавшихся в подсчете дней недели, остановились по дороге в школу, чтобы во всем разобраться.

— Когда «послезавтра» станет «вчера», — сказала Присилла, — то «сегодня» будет так же далеко от воскресенья, как и тот день, который был «сегодня», когда «позавчера» было «завтра».

В какой день недели произносился этот головоломный лепет?

4. Можно ли раскрасить квадратную сетку размером $n\times n$ $(n\geqslant3)$ в шесть цветов так, чтобы в любом прямоугольнике 2×3 содержались бы клетки всех шести цветов?



5. В сказочной стране Перра—Терра среди прочих обитателей проживают карабасы и барабасы. Каждый карабас знаком с шестью карабасами и девятью барабасами. Каждый барабас знаком с десятью карабасами и семью барабасами. Кого в этой стране больше — карабасов или барабасов?

Эти задачи нам предложили *Ю. Аленков, Ф. Бартенев, А. Кабризон, Н. Нецветаев.* Задача № 3 взята из книги Сэма Лойда «Математическая мозаика» (М., «Мир», 1980, задача 31).

Турнир имени М. В. Ломоносова

Есть ли на свете человек, который
мог бы обнять необъятное?
К. Прутков

В этом году московские школьники 5—8 классов в четвертый раз придут на уже ставший традиционным турнир имени М. В. Ломоносова. Он будет проходить 27 сентября в 10 часов утра в помещении различных московских вузов, таких как МАИ, МГПИ, МИИГАиК, МИСИ, МИСиС, МИЭМ, МЭИС (программа турнира везде одна и та же). Адрес для справок: 109028, Москва, Б. Вузовский пер. 3/12, МИЭМ, физико-математическая школа.

Такие ежегодные встречи, в отличие от олимпиад, собирают под одной крышей несколько разнообразных конкурсов — по математике и физике, биологии и химии, лингвистике и науке о Земле. Год от года их состав несколько меняется.

Но это не просто одновременное проведение в одном месте нескольких олимпиад. Члены оргкомитета и жюри турнира — в основном, студенты или недавние выпускники московских вузов. Когда-то они регулярно посещали олимпиады, каждый — по своей науке, но теперь поняли все недостатки узкой специализации, пожалев об ее раннем для себя начале. Добавить к олимпиадной глубине ломоносовскую широту — вот основная цель турнира.

Что же положено в основу турнира? Во-первых, у организаторов нет никаких обязательных требований к участникам, кроме единственного — не мешать другим, если те этого не хотят. Каждый пришедший на турнир сам выбирает себе конкурс по вкусу: он может все время потратить на математику или, если захочет, обойти все аудитории, где проводятся разные конкурсы. И надо сказать, что даже заядлые приверженцы одной науки часто не могут устоять перед искушением заглянуть на «чужие» конкурсы и вдруг начинают понимать, что многие вещи, которые раньше им казались скучными и неинтересными, на самом деле не так уж скучны и неинтересны. Так что большинство участников становятся «многоборцами».

Второе замечательное качество — примерно одинаковое число участников и организаторов, причем каждый участник может прямо во время турнира побеседовать на соответствующую тему с любым членом жюри. Особой тактики придерживаются биологи: они предлагают несколько десятков вопросов, которые тут же обсуждаются со школьниками. Бывает, что такие беседы рождают новые вопросы и затягиваются к обоюдному удовольствию сторон. Например, в прошлом году восторг и буйство фантазии участников вызвала задача, в которой предлагалось помечтать об особенностях жизни на планете, где единственным источником энергии ее обитателей является гравитационное поле. (Как видно, деление по предметам — весьма условное.)

И третья особенность. Ясно, что, например, на математическом конкурсе постоянный читатель «Кванта» окажется в выигрышном положении, скажем, перед химиком, который и попал-то на этот конкурс случайно, в поисках своего, химического. Или наоборот. Вот почему организаторы конкурсов стараются придумать такие задачи и вопросы, решение которых требуют не столько тренированности, сколько умения подумать, сопоставить, увидеть в странном — простое, в неизвестном — знакомое. Конечно, в каждом конкурсе есть и сложная задача — для любителей. Но все-таки бо́льшая часть заданий предполагает не только хорошую память на формулы. Умение «на пальцах» объяснить решение или высказать о нем разумную идею — это то, что требуется.

Кроме заданий серьезных участникам предлагаются и задачи шуточные. Например, такая: *могут ли 40 человек (массой по 70 кг) поместиться в телефонной будке?* Несмотря на несерьезность вопроса, ответ на него предполагает вполне здравые «физические» рассуждения. И действительно. Вспомним, что человек может довольно хорошо плавать; следовательно, плотность человека приблизительно равна плотности воды. Объем телефонной будки легко оценить на глаз: 2—2,5 м^3. Зная, что 1 м^3 воды имеет массу 1000 кг, получаем, что в такую будку можно «залить» 28—35 человек. (Для справки: в 1975 году в Калифорнии был установлен «мировой рекорд» — в телефонную будку залезли 26 человек.)

Как показывает опыт, наибольший интерес вызывают задачи, которые можно «пощупать» своими руками. И это достижимо не только на конкурсе по экспериментальной физике. Придумывают и математики. Однажды они провели конкурс по «экспериментальной математике» (бывает и такое!), а в другой раз — по «игровой». Что будет в этом году — еще не известно.

Атмосфера непринужденности и творчества на турнире сказывается во многом. Например, на одном из предыдущих турниров в результате совместных экспериментов участников и организаторов родилось несколько ранее не известных жюри вариантов задачи о вращении бумажной вертушки при ее падении в воздухе

«Прибор» для опыта — своими руками.

Члены жюри готовят опыты для физического конкурса.

Фото Е. Шаблыгина и А. Клопотовича

Опыт начался.

В заключение приведем несколько задач из прошлых турниров.

Задача 1 (теоретическая физика). *На столе на одинаковом расстоянии от стены лежат две шайбы. В них одновременно стреляют из двустволок. Одной шайбе пуля попадает в центр, а другой — в бок. Пули застревают в шайбах. Какая шайба быстрее докатится до стены? Трение отсутствует.*

Ответ прост: так как начальный импульс у шайб с пулями одинаков и в данных условиях у системы «шайба — пуля» импульс сохраняется, то обе шайбы достигнут стены одновременно. Но многие, кто решал эту задачу, приводили такие рассуждения: энергия пули, попавшей в бок шайбе, расходуется на вращение и на поступательное движение шайбы, а энергия второй пули — только на поступательное движение. Значит, вторая шайба имеет бо́льшую кинетическую энергию и движется быстрее. Где здесь ошибка?

Задача 2 (теоретическая физика). *Один шарик лежит на столе, а другой — подвешен на нити. У какого шарика больше теплоемкость, если они абсолютно одинаковые?*

Вспомним, что теплоемкость — это количество теплоты, которое надо передать телу, чтобы нагреть его на один градус. Поскольку шарики одинаковые, изменение их внутренней энергии одинаково. Однако, нагреваясь, тела расширяются. При этом у шарика, лежащего на столе, центр тяжести поднимается, а у висящего на нити — опускается. Следовательно, шарику, лежащему на столе, надо будет добавить энергию, чтобы приподнять его центр тяжести, и шарик, висящий на нити, часть своей потенциальной энергии переведет в тепловую. Ясно, что у первого шарика теплоемкость больше.

Задача 3 (экспериментальная физика). *Если катушку потянуть за нитку, держа ее низко над землей, катушка покатится к тянущему. А если поднять нитку выше, катушка покатится в противоположную сторону. Почему?*

Посмотрите на рисунок 1. Точка *A* — мгновенный центр вращения катушки. Очевидно, что, если сила натяжения нитки создает опрокидывающий катушку момент относительно точки *A*, катушка покатится в ту сторону, в которую ее опрокидывают. Так, натяжение нитки *1* заставляет катушку катиться влево, натяжение нитки *2* — вправо, а натяжение нитки *3* лишь приподнимет катушку.

Задача 4 (наука о Земле). *Почему бессмысленно указывать в календарях время восхода Солнца в Москве с точностью до секунды?*

Оказывается, в различных частях Москвы восход начинается в разное время, и это различие доходит до двух минут. Но это происходит не потому, что Москва расположена на семи холмах, на вершинах которых восход встречают раньше, чем в низине, и не потому, что неясно, что считать восходом — когда Солнце лишь показалось или когда оно целиком вышло из-за горизонта (об этом всегда можно договориться). Все дело в том, что Москва имеет относительно большую протяженность.

Оценим, какую часть соответствующей параллели занимает Москва. Длину этой параллели найдем, зная длину парижского меридиана (~40000 км) и широту, на которой расположена Москва (~60°): $l \sim 40000$ км $\times 0{,}5 \sim 20000$ км. Считая, что диаметр Москвы $d \sim 30$ км, получим, что искомая часть равна $d/l \sim 30/20000 \sim 1{,}5 \cdot 10^{-3}$. Следовательно, время восхода на восточной окраине Москвы отличается от времени восхода на ее западной окраине на $\Delta t \sim 24$ ч $\cdot\, 1{,}5 \cdot 10^{-3} \sim 2$ мин.

Задача 5 (игровая математика). *На шахматной доске в левом нижнем углу стоит ладья. Двое играющих по очереди двигают эту ладью (за один ход ладья может перемещаться на любое число полей по вертикали или горизонтали). В данной игре ладья не может двигаться влево и вниз, а может вправо и вверх. Проигравшим считается тот, кто привел ладью в правый верхний угол. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий игру или тот, кто ходит вторым?*

Если задача сразу не поддается решению, полезно рассмотреть какой-нибудь ее частный случай или, наоборот, обобщить задачу. Рассмотрим игру на доске 3×3 (рис. 2). Ясно, что после любого хода первого игрока (на b1, c1, a2, a3) второй может поставить ладью на b3 или c2 и выиграть. Если бы игра велась на доске с полубесконечными «крыльями» (рис. 3), второй игрок выигрывал бы после того, как первый поставит ладью на эти «крылья» (ходом на b3 или c2). Если теперь свести игру на доске *n*×*n* к игре на доске 3×3 с «крыльями», получится, что всегда будет побеждать второй игрок. А сделать это очень просто: на любой ход первого игрока второй отвечает ходом, возвращающим ладью на диагональ a1—b2,..., пока первый игрок не пойдет ладьей на одно из «крыльев». А уж там...

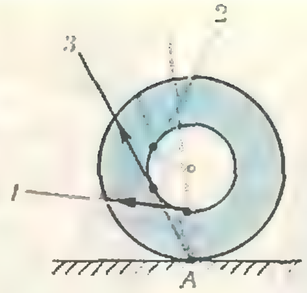


Рис. 1.

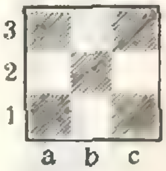


Рис. 2.

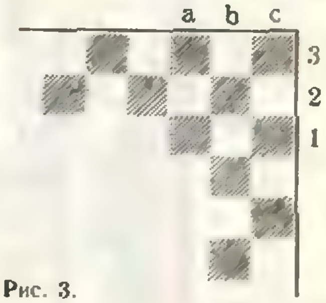


Рис. 3.

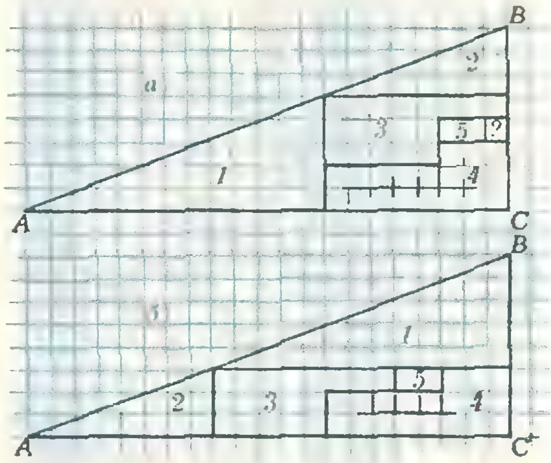
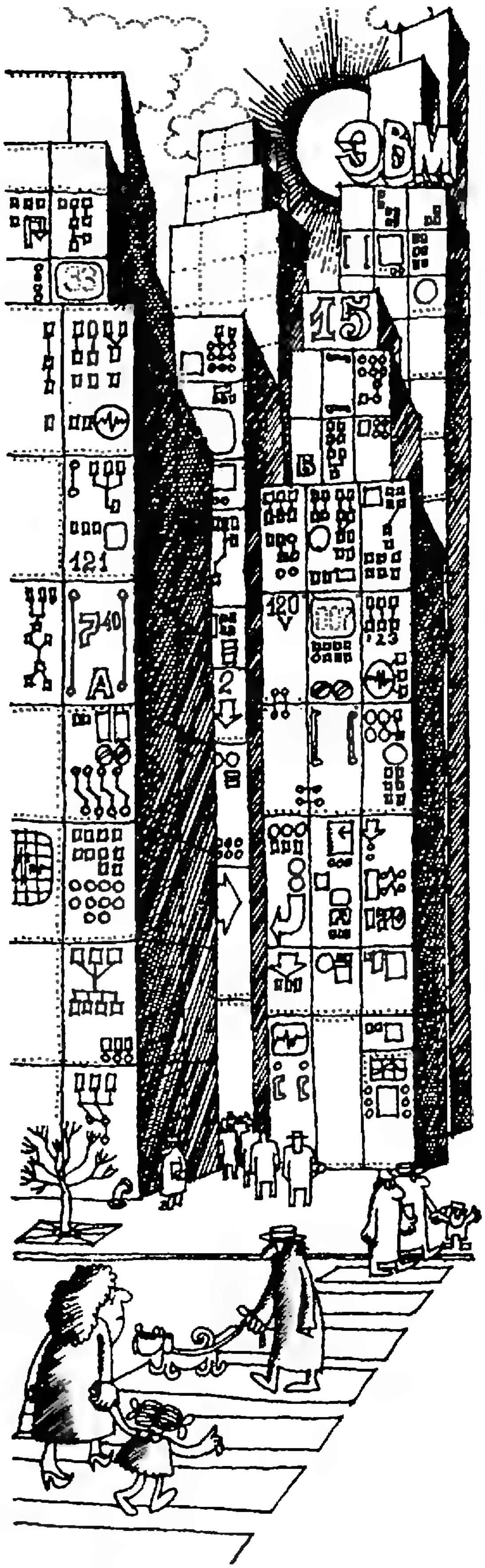


Рис. 4.

Задача 6 (?). *Два треугольника* (рис. 4) *составлены из одних и тех же частей. Тем не менее площади у них разные. Почему?*

На самом деле обе фигуры — не треугольники, а четырехугольники: на глаз излом линии *AB* заметить трудно.

А. Николаев, В. Гяхт



Б. Бабаян

Многопроцессорный вычислительный комплекс «Эльбрус»

В этой статье рассказывается о новой советской вычислительной машине. Как и у всякой ЭВМ, у нее есть процессор («Квант», 1980, № 5) и память («Квант», 1980, № 4). Вернее, даже целая иерархия запоминающих устройств: очень быстродействующая, но сравнительно маленькая по объему память, расположенная в самом процессоре; основная память; медленная «внешняя память». Информация из внешней памяти поступает в основную память с помощью специальных процессоров ввода-вывода.

Модульная система

Так сейчас устроены почти все ЭВМ. Отличие «Эльбруса» заключается в том, что он разбит на сравнительно слабо связанные между собой части (устройства), называемые *модулями.* Примеры модулей: процессор, основная память, устройство ввода-вывода и т. п. Для модулей характерны небольшое число внешних связей и хорошая взаимозаменяемость. Как правило, модули соединяются друг с другом по принципу «каждый с каждым», то есть каждый процессорный модуль соединяется с каждым модулем основной памяти и т. д.

Такая организация имеет много преимуществ. Во-первых, используя различное число однотипных модулей, можно получать разные вычислительные машины разной производительности; увеличивая число модулей, можно постепенно наращивать мощность машины. Во-вторых, если в машине поломался какой-либо модуль, то это приведет лишь к временному снижению ее скорости, так как остальные модули продолжают работать. В-третьих, собирая много однотипных модулей в одну систему, мы можем получить машину, которая считает значительно быстрее, чем в обычном случае.

Таким образом, система «Эльбрус» имеет очень переменный состав. Если не принять надлежащих мер, то при каждом изменении состава пришлось бы переписывать программы. Так было бы, например, если бы в программе содержался адрес ячейки памяти из модуля, который поломался. Чтобы этого не происходило, в «Эльбрусе», кроме реальной памяти, существует *виртуальная*, или *математическая*, память. Это уже не реальное устройство, расположенное в определенном месте машины, а абстрактное понятие, состоящее из совокупности чисел, обозначающих адреса «математических ячеек» (для «Эльбруса» это числа от 0 до $2^{33} \approx 4 \cdot 10^9$). Именно эти адреса используются при работе программ, а перевод их в адреса реальных ячеек производится автоматически, по специальным таблицам. Таким образом, если меняется состав машины, то меняются лишь эти таблицы, а программы остаются неизменными.

Объем виртуальной памяти значительно больше объема реальной машинной оперативной памяти. Наличие таблиц перевода позволяет ненужную в данный момент информацию хранить во внешней памяти, отметив этот факт в таблицах.

Для удобства программиста

Еще более важной чертой «Эльбруса» является внимательное отношение к проблемам программирования. Разработчики старались сделать эту машину удобной для программистов. А проблемы в области программирования сейчас стоят очень серьезные. В конце 60-х годов стали даже говорить о кризисе программирования. Дело в том, что за 30 с лишним лет существования вычислительной техники способы производства вычислительных машин шагнули далеко вперед, а производство программ (программирование) остается, в основном, ручным трудом. Программ надо разрабатывать так много, что, кажется, недалек тот день, когда почти каждый образованный человек будет программировать. Кроме того, существует много полезных алгоритмов, которые могли бы быть выполнены современными вычислительными машинами, но которые просто невозможно запрограммировать ввиду большого объема и сложности соответствующих программ.

Одним из хорошо известных способов, облегчающих программирование, являются так называемые *языки высокого уровня* (Алгол, Паскаль, Рапира и др.). Языки высокого уровня — это, по существу, абстрактные машины, придуманные программистами и реализованные на реальных машинах с помощью программ. Специальные программы, называемые *трансляторами*, переводят программы с языков высокого уровня на машинные языки.

В «Эльбрусе» много сделано для того, чтобы можно было легко и быстро транслировать программы с языков высокого уровня и чтобы полученные программы быстро работали и занимали мало места в памяти. Это, например, безадресная система команд, описанная в статье «Трехадресные, одноадресные и ...безадресные машины» («Квант», 1981, № 4).

Теги

Очень важным, с точки зрения программирования, является введение в «Эльбрус» системы тегов. *Теги*[*] — это служебные разряды, сопровождающие каждое машинное слово и описывающие его тип. В других машинах информацию о том, например, какое в данной ячейке число (целое или действительное, длинное или короткое), надо хранить в самих командах; поэтому различных команд, выполняющих, например, сложение, очень много. В результате удлиняется программа: чтобы закодировать все эти операции, нужно много двоичных разрядов. В «Эльбрусе» одной и той же операцией можно складывать и два целых числа и целое с действительным и короткое действительное с длинным целым и т. д. Машина, разбирая теги исходных чисел, понимает, какие преобразования чисел нужно выполнить перед операцией. Благодаря наличию тегов вылавливается много ошибок в программах.

---

[*] Английское слово tag означает «бирка», «ярлычок».

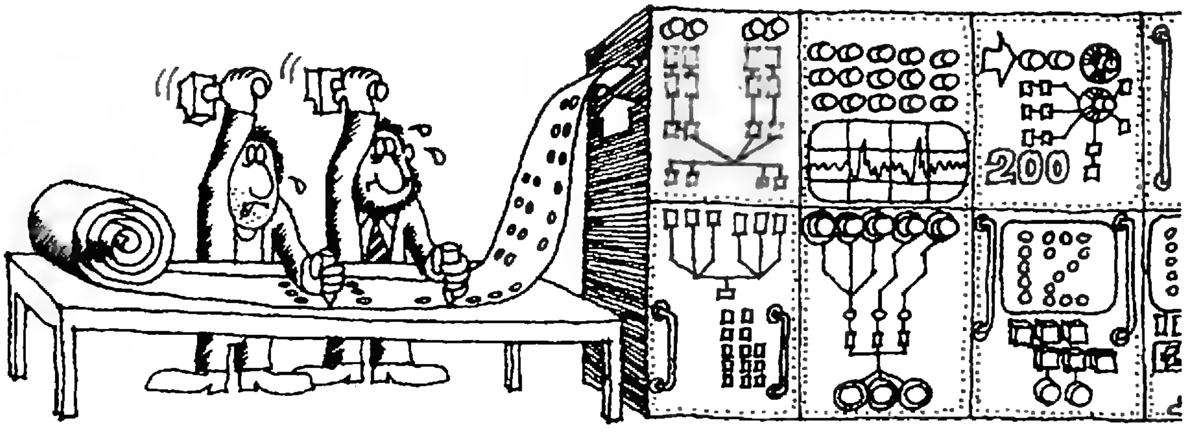
Сама машина следит, например, за тем, чтобы нельзя было выполнить сложение двух машинных слов, содержащих адреса ячеек памяти. Такой дополнительный контроль позволяет быстрее отыскать ошибки, то есть сильно облегчает отладку программ. Особенно важно, что, какие бы ошибки ни допустил программист, машина не разрешит выполнять неправильные действия с адресной информацией.

Защита памяти

В случае ошибки, обнаруженной машиной, решение задачи аварийно прекратится. Таким образом, благодаря наличию тегов появилась возможность строго контролировать рождение адресной информации и ее обработку. В результате в «Эльбрусе» удалось реализовать новую, очень удобную и эффективную систему защиты информации.

Защита информации — очень важный вопрос при работе современной машины. Большие машины одновременно выполняют много задач, но эти задачи решаются не совсем одновременно. Если, например, при решении какой-либо задачи потребовалось обратиться к медленно действующим внешним запоминающим устройствам для пересылки из них информации в основную память, то эта сравнительно длительная работа поручается процессорам ввода-вывода, сам центральный процессор переключается на решение какой-либо другой задачи. «Распределением обязанностей» в этом случае ведает *операционная система* — совокупность специальных программ, управляющая прохождением задачи и организующая процесс «параллельного» выполнения их решений.

В многопроцессорной машине процессоров много, но задач, расположенных в памяти, еще больше, так что процессоры по очереди решают все задачи. Если в какой-либо задаче может существовать ошибка, которая будет менять информацию в ячейках памяти другой задачи, то говорят, что при этом нарушается *защита памяти*. Если бы такое могло случиться, то другая задача была бы решена неверно. Во всех современных машинах существуют те или иные способы защиты памяти. В



«Эльбрусе» защита памяти основана на использовании тегов.

Адресная информация, содержащая описание определенных областей памяти, нужных для данной задачи, и снабженная специальными тегами, называется *дескриптором*. Если задача располагает лишь дескрипторами, описывающими ее собственные области, то никаким способом нельзя во время решения этой задачи добраться до других областей, то есть нарушить защиту. В «Эльбрусе» защита осуществляется не только между задачами, но и между отдельными частями одной и той же задачи. Такие части называются *процедурами*.

Очень удобно отлаживать процедуры независимо друг от друга, а потом объединять их в одну большую программу. Такой метод программирования, поддержанный в «Эльбрусе» аппаратно, благодаря наличию в машине готовых процедур, часто называют *модульным*. Он тоже очень сильно облегчает программирование.

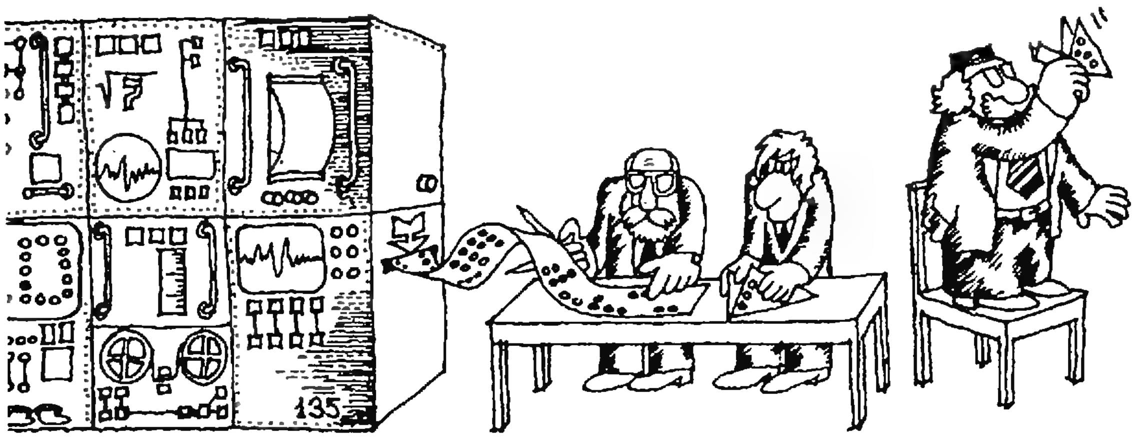
На «Эльбрусе» все программы пишутся только на языках высокого уровня, в том числе наиболее сложные системные программы, например операционная система и трансляторы. Раньше эти программы, как правило, писались практически на языке машины.

Еще быстрей

Удобство программирования — важнейшая сторона системы «Эльбрус», но, кроме того, эта машина очень быстрая[*]. Мы уже говорили в начале статьи, что ее скорость повышается благодаря наличию многих процессоров. В то же время каждый процессор обладает очень высокой скоростью. В прошлом принято было считать, что всякие удобства, включаемые в машину, замедляют ее. Однако это было верно тогда, когда при разработке машины инженеры сильно экономили оборудование. Теперь же, когда в результате технологического прогресса оказалось возможным сосредоточить в старых объемах на несколько порядков больше оборудования с улучшением практически всех его параметров, положение коренным образом изменилось. Ориентация на программистские проблемы вынудила разработчиков наиболее типичные и часто встречающиеся конструкции языков реализовать в аппаратуре, что значительно повысило производительность каждого процессора. В настоящее время не будет преувеличением сказать, что только машина, ориентированная на удобное программирование, позволяет получить предельно большую производительность.

---

[*] По быстродействию десятипроцессорный «Эльбрус-2» превосходит одну из самых мощных современных отечественных машин БЭСМ-6 примерно в 100 раз.



Мир глазами инженера

Дж. ГОРДОН
КОНСТРУКЦИИ, или
ПОЧЕМУ НЕ ЛОМАЮТСЯ ВЕЩИ
ИЗДАТЕЛЬСТВО МИР МОСКВА

Недавно в издательстве «Мир» (в серии «В мире науки и техники») вышла книга известного английского инженера, специалиста по теории прочности профессора Редингского университета Джеймса Эдварда Гордона. Называется эта книга «Конструкции, или Почему не ломаются вещи». Она посвящена проблемам конструирования и физическим основам теории прочности.

Тема, затронутая в книге, сложна как для специалистов, прекрасно знающих все трудности и проблемы, возникающие при работе в этой области, так и для находящихся в счастливом неведении дилетантов. Правда, двести лет назад (не говоря уже о более давних временах) специалисты отличались от дилетантов только тем, что, находясь в том же счастливом неведении, как же точно надо строить, они все же осмеливались строить на свой страх и риск. Довольно часто расплатой за подобную дерзость служили груды обломков. К счастью, результаты деятельности инженеров и строителей прошлого не всегда бывали столь плачевны. В этом нас красноречиво убеждают уникальные памятники архитектуры. Однако строить методом проб и ошибок, не зная наверное, удастся ли довести строительство до конца, было довольно накладно. Блестящие умы прошлого пытались превратить процесс строительства и конструирования из искусства по наитию в строгую и точную науку. Насколько трудновыполнимой была эта задача, можно судить хотя бы по такому факту. В самом начале XIX века Юнг ввел понятие модуля упругости (ныне носящего его имя) — фундаментальнейшего понятия теории упругости. Вот как он его объяснял: «Модуль упругости любого вещества есть столб этого вещества, способный производить давление на свое основание, которое так относится к весу, вызывающему определенную степень сжатия, как длина вещества к уменьшению этой длины». Не удивительно, что, прежде чем модулю Юнга удалось завоевать умы инженеров, прошла добрая половина столетия. Дальше дело продвигалось более быстрыми темпами (в основном, благодаря успешному союзу с инженерной практикой), но до самого конца XIX века было немало успешно работающих инженеров-практиков, пользующихся только собственной интуицией и свысока смотревших на «новомодные теории». Справедливости ради следует заметить, что инженеры-теоретики тех времен, добросовестно выполнив все расчеты, ошибались ничуть не реже своих коллег-практиков. Правда, у теоретиков было одно преимущество, в конечном итоге обеспечившее им победу: один раз поняв причину ошибки, они ее больше не повторяли.

На протяжении всей книги профессор Гордон как заядлый детектив занимается поисками преступника, разрушающего все встречающееся на его пути: будь то дома, мосты, корабли или плотины. По ходу дела выясняется, что бороться надо не с одним преступником, а с целой бандой: виновниками катастроф оказываются и концентрация напряжений, возникающая около отверстий и приводящая к растрескиванию материала; и деформации — растяжения, сдвиги, кручения; и линии давления, коварно выходящие за допустимые границы. Согласно законам жанра, преступников в конце концов удается выявить и в некоторой степени обезвредить, создав такие условия (то есть такие конструкции), в которых они не могут проявить свои разрушительные способности. Но стоит инженеру или конструктору упустить из вида хоть одного из героев повествования, как тот не замедлит напомнить о себе грудой обломков и руин, возникающих на месте неосмотрительно смело созданных конструкций.

Сравнение серьезной книги с детективом в данном случае вполне уместно. Книга читается с большим интересом, что прежде всего можно объяснить ее литературными достоинствами. Автор не просто излагает читателю факты, сами по себе достойные внимания. Он ведет занимательное повествование, снабжая факты такими мелкими и достоверными подробностями, что читатель из стороннего наблюдателя сам превращается в соучастника событий. Так, например, рассказывая о хитроумной и сложной оснастке парусных судов, Дж. Гордон пишет: «Каждая секция мачты делается из отдельного бревна и удерживается в нужном положении сложной и хитроумной системой вант и растяжек. Система устроена таким образом, что при необходимости все верхние части мачты и реи могут быть разобраны и спущены на палубу. Так как самые большие брусья весят по нескольку тонн, требуется не только мастерство, но и немалое присутствие духа, чтобы поднимать и опускать такие громоздкие предметы на качающемся корабле. Большой корабль имел команду примерно 800 человек, большинство из них могло бы посрамить как верхолазов, так и тренированных атлетов. Парусные учения британского флота на Средиземном море в 40-х годах прошлого века стали легендой. Адмирал, закончив завтрак, мог подать сигнал: всем кораблям сменить стеньги; о затраченном времени и числе несчастных случаев доложить». Дальнейшее успешно дорисует воображение читателей: пища для фантазии дана богатая.

В занимательной, а иногда и парадоксальной форме читателю преподносится множество интереснейших сведений. Оказывается, то, что мы называем архитектурными излишествами (башенки, статуи, фигуры, контрфорсы, аркбутаны, своды и т. д.), на самом деле обеспечивает крепость и надежность зданий. Не всегда замена ломающихся деталей на более массивные и прочные приводит к желаемому результату повышения надежности. Так произошло, например, с крылом моноплана Д-8 времен первой мировой войны. После замены задних лонжеронов крыльев на более толстые и прочные число аварий не сократилось, а, наоборот, увеличилось, причем самолет исправно начинал разрушаться именно с упроченных задних лонжеронов. Или разве не интересно узнать, что затея древних вавилонян построить башню до небес вовсе не является такой уж безумной. Пользуясь материалом своей эпохи, древние строители вполне могли построить башню высотой свыше двух километров (вряд ли по представлениям древних их боги устраивали свои обиталища так высоко). Единственное, о чем надо было позаботиться древним строителям, — чтобы башня стояла строго вертикально; статические же нагрузки на каменную кладку в такой башне были бы вполне безопасны.

Много интересного можно узнать и о живых конструкциях, внимание которым автор уделяет постоянно. Так, надежное кровоснабжение всего нашего организма обеспечивается удивительными упругими свойствами стенок кровеносных сосудов; дерево оказывается в состоянии выдерживать напор сильного ветра, благодаря исключительно оригинальному распределению напряжений в стволе; несимметричная форма перьев птиц объясняется неравномерным распределением давления воздуха на них во время полета; оказывается, с точки зрения физики, между автомобилем, лыжником и кенгуру имеется много общего, а простой земляной червяк являет нам пример блестящего решения довольно сложной конструкторской задачи.

Особый колорит придают книге со вкусом подобранные к отдельным разделам и главам эпиграфы. Чтение их может доставить немало приятных минут.

Однако настроившихся на легкое и развлекательное времяпрепровождение читателей необходимо предупредить, что восприятие некоторых понятий и определений требует при чтении определенного напряжения, поскольку автор строго и последовательно (несмотря на занимательность формы и ее принципиальные упрощения) излагает точную научную дисциплину.

В заключение, к сожалению, приходится констатировать, что профессор Дж. Гордон, как истый англичанин, признает все только английское, обращая свой взор на другие страны только в том случае, если для конкретных примеров в Англии ничего подходящего отыскать невозможно. Надо полагать, что более частое обращение к практике инженеров-неангличан позволило бы сделать повествование еще более занимательным и поучительным.

А. Аринштейн

Алгебра без чисел

В XX веке роль алгебры в современной математике возросла настолько, что сейчас говорят об «алгебраизации» математики. Этот процесс почти не нашел отражения в школьном курсе, однако было бы очень полезно, чтобы школьники, интересующиеся математикой, могли с ним познакомиться. Прекрасным пособием для этого может служить книга Л. А. Калужнина и В. И. Сущанского «Преобразования и перестановки» (М., «Наука», 1979).

Цель книги — ознакомить учащихся с началами теории групп, нашедшей широкое применение в математике и естественных науках, например в ядерной физике, теории относительности и кристаллографии.

Теоретико-групповые понятия и результаты излагаются в книге в рамках теории групп перестановок конечных множеств. Это позволяет авторам показать разнообразные и интересные применения теории групп и в достаточной мере оправдать введение понятия группы.

Вы, наверное, согласитесь, что, скажем, квадрат красивее трапеции, но вряд ли сумеете объяснить, почему вы так считаете. Оказывается, теория групп позволяет указать некоторую естественную «меру красоты» различных геометрических фигур, и именно этой мерой вы, вероятно, подсознательно руководствуетесь, сравнивая фигуры.

Чрезвычайно эффектным является анализ с помощью теории групп популярной одно время игры «в пятнадцать».

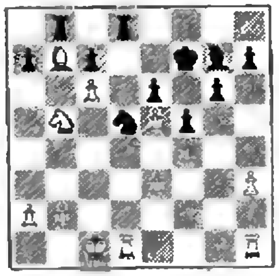
Книга написана с большим педагогическим мастерством, различные понятия утверждения, конструкции иллюстрируются большим числом рисунков, так что читать ее легко и интересно.

Г. Фалин

Консультирует чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

Ботвинник проигрывает и... выигрывает

Пятидесятые годы прошли под знаком соперничества между Михаилом Ботвинником и Василием Смысловым. Если в матче 1954 года претендент ограничился почетной ничьей, то в 1957 году ему уже удалось взойти на вершину (счет 12,5:9,5). Вот эпизод из шестой партии матча.

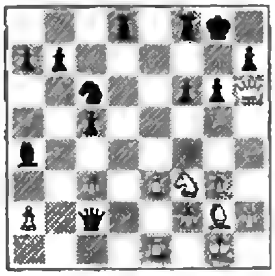


Смыслов — Ботвинник

23. Л:d5! Эффектное продолжение, которое сразу решает исход борьбы. **23...cd 24. К:c7 Лdc8 25. С:c8 Л:c8 26. К:d5 Л:c6+ 27. Крd2 Кре6 28. Кc3. Черные сдались.**

Ботвинник превосходно подготовился к матч-реваншу и через год уверенно вернул себе корону (12,5:10,5). Он начал матч с трех «рядовых» побед, и после 15-й партии счет мог уже стать 10:5. Положение черных, которыми играл Ботвинник, было значительно лучшим, причем почти любой ход сохранял перевес. Гроссмейстер погрузился в раздумье с тем, чтобы наметить наиболее четкий план выигрыша. Каково же было удивление Ботвинника, когда вдруг к столику подошел арбитр и сообщил, что черные просрочили время и им засчитывается поражение. Единственный случай такого рода за всю историю матчей на первенство мира!

Интересная позиция возникла в 18-й партии матча.

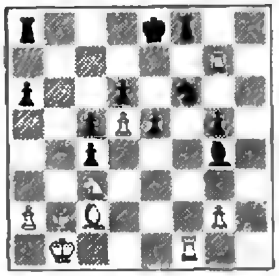


Ботвинник — Смыслов

Матовое кольцо вокруг черного короля вот-вот сомкнется. Однако белые довели свой перевес до победы только спустя... 50 ходов, причем «по дороге» могли сами получить мат! Тем не менее первое впечатление от позиции не является ошибочным — в распоряжении белых была эффектная комбинация, которая, увы, осталась за кулисами: 23. Кd4!! cd (не меняет дела 23...К:d4 24. Сd5+! Л:d5 25. Лe7 Лf7 26. Лe8+) 24. Сd5+! Л:d5 (24... Крh8 25. Лe7) 25. Лe8!, и мат неизбежен.

Волшебник шахмат Михаил Таль на рубеже 50-х и 60-х годов своими удивительными комбинациями приводил в трепет самых стойких гроссмейстеров. Путь от мастера до чемпиона мира он прошел всего за три года! Выиграв матч у Ботвинника со счетом 12,5:8,5, 23-летний рижанин стал восьмым и самым молодым в истории шахматным королем. В комбинационных бурях он явно превосходил своего могучего соперника. Эпизод из 17-й партии матча, выигранной кинжальным тактическим ударом Таля, вы можете найти на «шахматной страничке» в «Кванте», 1980, № 2.

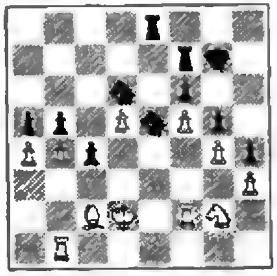
Через год в матч-реванше Ботвинник вновь блеснул умением находить «ахиллесову пяту» в игре своих соперников. Глубоко проанализировав причины неудачи в поединке с молодым рижанином, он с удивительной легкостью вернул себе титул сильнейшего шахматиста мира (счет 13:8). Вот финальная сцена заключительного, 21-го поединка.



Ботвинник — Таль

28. Кe4! Кd7 (28... К:e4 29. Сa4+!) **29. К:d6+ Крd8 30. Л:f8+ К:f8 31. К:c4 Сd7 32. Лf7 Крc7 33. d6+. Черные сдались.**

В середине 60-х годов Тигран Петросян поражал всех мастерством в защите. Он был почти непробиваемым шахматистом, и журналисты присвоили ему титул «железного тигра». В 1963 году, выиграв матч у своего выдающегося соперника со счетом 12,5:9,5, Петросян стал девятым чемпионом мира. Следующее положение возникло в 18-й партии матча.



Ботниник — Петросян

Черные изящно реализуют свой позиционный перевес: 51...c3+! **52. Кр:c3 Лc7+ 53. Крd2 Кec4+ 54. Крd1 Кa3! 55. Лb2 Кdc4 56. Лa2 ab 57. ab К:b5 58. Лa6 Кc3+ 59. Крc1 К:d5 60. Сa4 Лec8 61. Кe1 Кf4. Белые сдались.**

Это был 25-й матч на первенство мира. Он стал последним в биографии патриарха советских шахмат М. Ботвинника. Право на матч-реванш было отменено, начинать «с нуля» Ботвинник не захотел. Кроме того, экс-чемпион мира, владевший шахматной короной 15 лет с двумя годичными перерывами, практической игре в скором времени предпочел работу по созданию искусственного шахматиста! Его целиком увлекла разработка алгоритма игры в шахматы для ЭВМ.

Окружность девяти точек и прямая Эйлера

1. Девять точек, определяющие окружность, для всех треугольников одни и те же.

2. Воспользуйтесь свойством (6).

3. Воспользуйтесь свойством (7).

4. Докажите, что если M — точка на описанной окружности и H — ортоцентр треугольника, то прямая Симсона, соответствующая точке M, делит $[HM]$ пополам — так же, как и окружность девяти точек. Далее докажите, что угол между прямыми Симсона, соответствующими точкам M_1 и M_2, измеряется половиной дуги M_1M_2.

5. а) Если O_1, O_2, O_3 — центры окружностей, описанных около треугольников AMB, BMC и CMA, то O_1O_2CA, O_2O_3AB, O_3O_1BC — параллелограммы, а ортоцентрами треугольников AMB, BMC и CMA являются, соответственно, C, A и B. Значит, прямые Эйлера O_1C, O_2A и O_3B пересекаются в точке, являющейся серединой отрезков O_1C, O_2A, O_3B.

б) Пусть O_1, O_2, O_3 — центры окружностей, описанных около треугольников AMB, BMC и CMA, O'_1, O'_2 O'_3 — точки, им симметричные относительно, соответственно, прямых AB, BC, CA. Докажите, что треугольник $O'_1O'_2O'_3$ — правильный, точки M, O'_1, O'_2, O'_3 лежат на одной окружности, прямые Эйлера треугольников AMB, BMC и CMA проходят через O_1, O_2, O_3 и середины отрезков MO'_1, MO'_2, MO'_3 соответственно и перпендикулярны этим отрезкам. Следовательно, прямые Эйлера пересекаются в центре окружности, описанной около треугольника $O'_1O'_2O'_3$.

6. Пусть $|BC|=a$, $|CA|=b$, $|AB|=c$. Множество точек M, для которых

$$|MA|^2(b^2-c^2)+|MB|^2(c^2-a^2)+|MC|^2(a^2-b^2)=0,$$

есть прямая, поскольку центр описанной окружности и точка пересечения медиан удовлетворяют этому уравнению (для точки пересечения медиан воспользуйтесь формулой, выражающей их длины через стороны треугольника), эта прямая есть прямая Эйлера. Легко проверить, что точка L также удовлетворяет этому уравнению.

Математические соревнования в ФМШ при ЛГУ

(см. «Квант» № 7)

Школьные олимпиады

1. См. рисунок 1.

2. Положив $a=\sqrt[3]{5}$, $b=\sqrt[3]{2}$, перепишем тождество в виде $3\sqrt{a-b^2}=b+ab^2-a^2$ и докажем его возведением обеих частей в квадрат ($a^3=5$, $b^3=2$).

3. Если $[AB_1]$, $[AB_2]$, ..., $[AB_9]$ — данные отрезки, то утверждение задачи следует из того, что ни при каком выборе знаков сумма векторов $\pm\overrightarrow{AB_1}\pm\overrightarrow{AB_2}\pm\ldots\pm\overrightarrow{AB_9}$ не равна 0, так как проекция этой суммы на ось, перпендикулярную прямой l, — это сумма девяти равных по модулю (и не равных 0) чисел.

4. См. рисунок 2.

5. Пусть в произвольный момент времени одна из стрелок образует с направлением на 12 часов угол α, а другая — угол β (α и β измерены в градусах). Если первая стрелка — часовая, вторая — минутная, то $\frac{12\alpha-\beta}{360}\in\mathbf{Z}$, если, наоборот, первая стрелка — минутная, а вторая — часовая, то $\frac{12\beta-\alpha}{360}\in\mathbf{Z}$. Время невозможно определить правильно, если выполнены оба условия, причем стрелки не совпадают. Это имеет место в том и только в том случае, когда $\frac{143\alpha}{360}\in\mathbf{Z}$, но $\frac{11\alpha}{360}\notin\mathbf{Z}$. Так как $0\leqslant\alpha<360$, условие $\frac{143\alpha}{360}\in\mathbf{Z}$ выполняется при $\alpha=\frac{360}{143}n$, где $n=0, 1, 2, \ldots, 142$, а условие $\frac{11\alpha}{360}\in\mathbf{Z}$ выполняется при $n=0, 13, 26, \ldots, 130$. Таким образом, в течение полусуток встретится $143-11=132$ момента, когда время по данным часам невозможно определить, а в течение суток таких моментов 264.

6. Так как данное число делится на 9, остается обеспечить делимость на 25. Легко понять, что искомое число должно оканчиваться на 75.

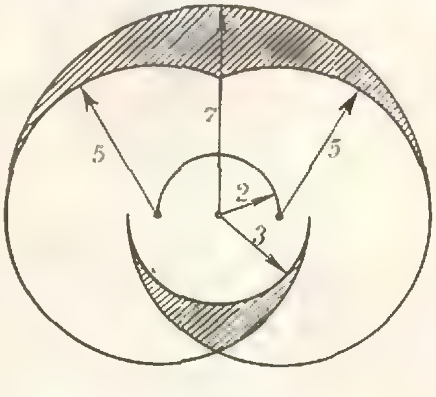


Рис. 1.

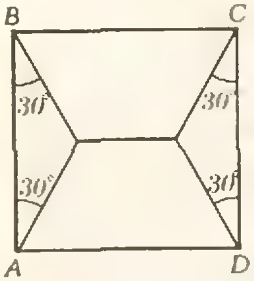


Рис. 2.

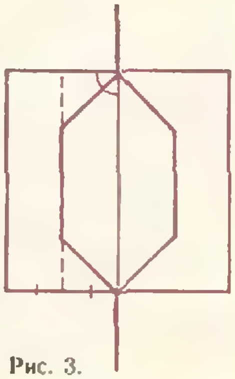


Рис. 3.

и перед семеркой должно стоять максимально возможное число девяток. **Ответ.** 26 цифр.

7. См. рисунок 3.

8. Перевернем те и другие часы одновременно. Через 7 минут переворачиваем первые часы, через 11 минут — вторые часы, через 14 минут и те, и другие. Песок на больших часах пересыпается через 3 минуты после последнего переворачивания, то есть через 17 минут после начального момента.

9. График одной из таких функций изображен на рисунке 4.

10. Приведем пример такой функции. Зададим последовательность (a_n) равенствами: $a_1=0$, $a_2=1$, $a_n=a_{n-2}^2+2$ (при $n\geqslant 3$). Очевидно, промежуток $[0;\ +\infty[$ разбивается на непересекающиеся промежутки $[a_1;\ a_2[$, $[a_2;\ a_3[$, $[a_3;\ a_4[$ и т. д., причем функция $x\to x^2+2$ переводит первый из этих промежутков в третий, второй — в четвертый, третий — в пятый и т. д. Функцию f построим по индукции так, чтобы она отображала первый промежуток на второй, второй — на третий, третий — на четвертый и т. д. Для этого положим $f(x)=x+1$, если $x\in[a_1;\ a_2[$. Предположим, что f уже определена при всех $x<a_n$. Пусть $x\in[a_n;\ a_{n+1}[$. Найдем такое $t\in[a_{n-1};a_n[$, что $f(t)=x$ (это можно сделать так как f уже определена на отрезке $[a_{n-1};\ a_n[$ и отображает его на отрезок $[a_n;\ a_{n+1}[$), и положим $f(x)=t^2+2$. Для $x<0$ положим, $f(x)=f(-x)$.

11. Допустим, что расстояние x не встречается между двумя красными точками, а расстояние y не встречается между двумя синими точками. Пусть a — конец одного из отрезков. Тогда $a+x$ — синяя точка, $(a+x)+y$ — красная точка и $a+y$ — красная точка. Мы получили две красные точки $a+y$ и $a+x+y$ на расстоянии x.

12. Возьмем натуральное m, большее числа цифр в каждом из чисел a и b. Положим $n=10^m-1$. Тогда $na=10^m a-a$. Если a_1, a_2, ..., a_{s-1}, a_s — последовательные цифры числа a, причем $a_s\neq 0$, то a_1, a_2, ..., a_{s-1}, a_s-1 — первые s цифр числа na, $9-a_1$, $9-a_2$, ..., $9-a_{s-1}$, $10-a_s$ — s последних цифр этого числа, а остальные $m-s$ цифр этого числа — девятки. Поэтому сумма цифр числа na равна $9m$ и тем самым не зависит от a. Следовательно, такую же сумму цифр имеет число nb.

13. Поместите в точку A массу 1, в точки D и B — массы 2, в точку C — массу 4. Центр тяжести этой системы — точка R. Поместив в A и C массы 2, в D — массу 1, а в B — массу 4, получим центр тяжести — точку S. Отсюда выведите, что $|FS|=|SR|=|RK|$. Аналогично, $|MQ|=|QR|=|RH|$. Поэтому $(QS)\parallel(MF)$ и, значит, $(QS)\parallel(BD)$. Аналогично доказывается, что $(PR)\parallel(AC)$.

14. Для любых положительных чисел x и y легко доказывается неравенство $\left(\frac{x}{y}\right)^{x-y}\geqslant 1$, откуда $x^y\cdot y^x\leqslant x^x\cdot y^y$. Применив последнее неравенство к каждой паре чисел a_i, a_j, где $i<j$, и перемножив получившиеся неравенства, придем к утверждению задачи.

15. Для решения воспользуемся тождеством

$$n^4+4=((n-1)^2+1)\cdot((n+1)^2+1)$$

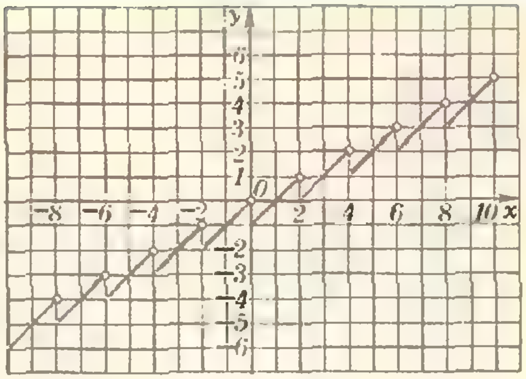


Рис. 4.

Получаем

$$\frac{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(11^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(12^4+\frac{1}{4}\right)}=$$

$$=\frac{(2^4+4)(6^4+4)\cdot\ldots\cdot(22^4+4)}{(4^4+4)(8^4+4)\cdot\ldots\cdot(24^4+4)}=$$

$$=\frac{(1^2+1)(3^2+1)(5^2+1)(7^2+1)\cdot\ldots}{(3^2+1)(5^2+1)(7^2+1)(9^2+1)\cdot\ldots}$$

$$\frac{\ldots\cdot(21^2+1)(23^2+1)}{\ldots\cdot(23^2+1)(25^2+1)}=$$

$$=\frac{2}{626}=\frac{1}{313}.$$

16. Так как биссектрисы углов B, E и K являются серединными перпендикулярами отрезков AC, CH, HA, они пересекаются в одной точке. Обозначим ее через O. Ясно, что $|OA|=|OC|=|OH|$. Положим $\widehat{OAB}=\widehat{OCB}=\alpha$, $\widehat{OCE}=\widehat{OHE}=\beta$, $\widehat{OHK}=\widehat{OAK}=\gamma$. По условию $\alpha+\beta=\alpha+\gamma=\beta+\gamma$. Следовательно, $\alpha=\beta=\gamma$. Значит, $[OA]$, $[OB]$, $[OC]$, $[OE]$, $[OH]$, $[OK]$, — биссектрисы соответетствующих углов. Поэтому O — центр вписанной окружности.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 5)

1. 34316 + 75 281 + 9 = 109 606.

2. Искомая «десятка» может, например, начинаться с числа а) 114 (см. таблицу простых чисел в учебнике «Математика 5») или 11! + 2 (11! = 1 · 2 · 3 · 4 · ... · 11); б) 113; в) 18; г) 6; д) 1 или 3.

Нетрудно доказать, что максимальное количество простых чисел среди десяти последовательных натуральных чисел равно пяти, причем такая «десятка» единственна: начинается она числом 2.

3. По условию, $\widehat{DBB_1}$ в два раза больше $\widehat{DAA_1}$ (рис. 5). Отсюда следует (докажите!), что точка M лежит на дуге DA окружности $(B,\ |AB|)$.

4. Требуемая расстановка получится, если сначала занумеровать кружки по порядку (рис. 6), а затем поменять местами числа, расположенные в серединах противоположных сторон большого шестиугольника (рис. 7).

5. См. рисунок 8.

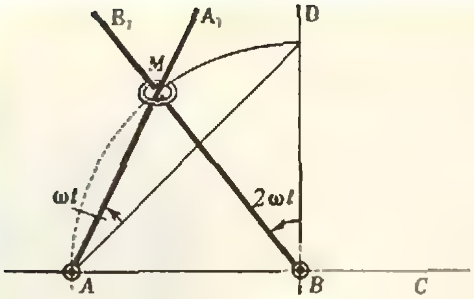


Рис. 5.

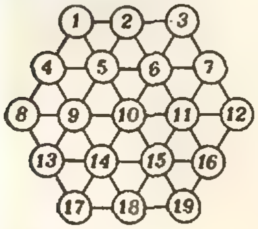


Рис. 6.

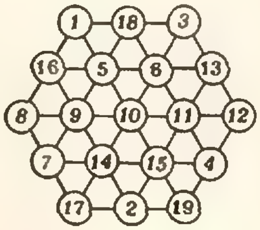


Рис. 7

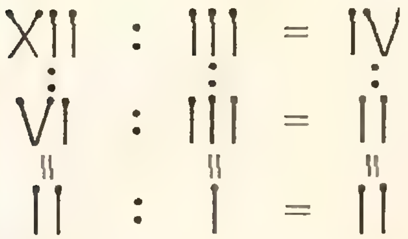


Рис. 8.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 6)

1. 7 составов. Проще всего в этом убедиться, если нарисовать диаграммы движения составов, взяв систему координат «время — расстояние». Интересно, что разница во времени между Москвой и Фрунзе не важна.

2. См. рисунок 9.

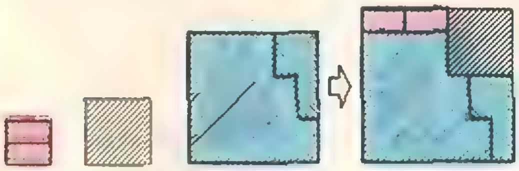


Рис. 9.

3. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{21}$ — числа, написанные на первом диске. Повернем второй диск 21 раз на углы $2\pi/21$, $4\pi/21$, ..., $40\pi/21$, 2π. Так как сумма видимых через окошечки пяти чисел при каждом повороте равна нулю, сумма всех таких сумм (всего их 21 — по одной от каждого поворота) также равна нулю. Но в этой «сумме сумм» каждое из чисел, написанных на первом диске, встречается ровно 5 раз, и поэтому $5(a_1+a_2+\ldots+a_{21})=0$, откуда $a_1+a_2+\ldots+a_{21}=0$.

4. 1) $625=25^2$; 2) $7^4=2401$; 3) $39^2=1521$; 4) $128=2^7$; 5) $2^{12}=4096$; 6) $96\times7=672$.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 7)

1. **«Переставляшки».** *Хаос, шеяк, лось, фанза* (есть слово *фáнза* — китайский дом с двускатной крышей, преимущественно в сельских местностях, и есть слово *фанзá* — род шелковой ткани), *навес, атлас, склеп, крест, ментор* (а вовсе не *монтёр*), *щетина, логика, кондор* (птица), *корвет* (трехмачтовый корабль), *корсет* (широкий, упругий пояс для стягивания талии), *лепесток, риска, тесак, ласка, тапир, ропот, порка, колос, оклад, садок.*

Марш — шрам — шарм (обаяние).

Спрут — спурт (бурный финиш) — *струп* (сухая корочка на заживающей ране).

Рост — сорт — торс (туловище) — *трос.*

Колун — клоун — уклон — кулон.

Автор — втора (второй голос в музыкальной партии) — *отвар — рвота — товар — тавро.*

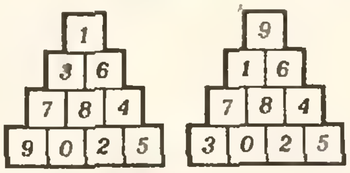


Рис. 10.

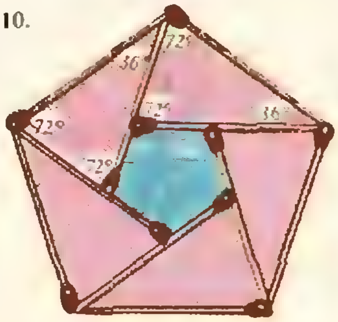


Рис. 11.

2. Два решения — см. рисунок 10.

3. См. рисунок 11: пятиугольники — правильные, треугольники — равнобедренные.

4. При правильной игре выигрывает начинающий: первым ходом он проводит бóльшую диагональ 1980-угольника, а затем соединяет точки, симметричные относительно проведенной диагонали тем, которые соединяет второй игрок.

Шахматный конкурс

(см. «Квант» № 8)

1. Ласкер — Бауэр (Амстердам, 1889 г.). Одна из самых знаменитых шахматных комбинаций — белые одного за другим жертвуют двух слонов: **1. С:h7+! Кр:h7 2. Ф:h5+ Крg8 3. С:g7! Кр:g7 4. Фg4+ Крh7 5. Лf3 е5 6. Лh3+ Фh6 7. Л:h6+ Кр:h6 8. Фd7! Черные сдались.**

2. Ласкер — Стейниц (Петербург, 1895—1896 гг.). **1. Ф:f4! ef 2. Кf6! Ке6 3. К:d7 К:g5 4. Ле7 Крg8 5. Кf6+ Крf8 6. Л:c7. Черные сдались.**

3. Ласкер — Пирц (Москва, 1935 г.). **1. Л:f6! gf 2. Фh5+ Крd8** (2... Крe7 3. Кf5+! ef 4. Кd5+ Крd8, 5. Сb6+; 2...Крd7 3. Фf7+ Сe7 4. Кf5! Лe8 5. Лd1) **3. Фf7 Сd7** (3...Сe7 4. Кf5 Фc7 5. Кa4! Лf8 6. Ф:h7 Крe8 7. Сb6 Фd7 8. Фh5+ Лf7 9. Кg7+ Крf8 10. Фh8×) **4. Ф:f6+ Крc7 5. Ф:h8 Сh6 6. К:e6+! Ф:e6 7. Ф:a8 С:e3+ 8. Крh1. Черные сдались.**

(см. «Квант» № 4)

1. Капабланка — Моррис (Нью-Йорк, 1911 г.). **1. Лe7! Ф:e7 2. К:f5.** Черные сдались — на отступление ферзя следует 3. Л:h7+ Кр:h7 4. Фh5×.

2. Капабланка — Топоров (Нью-Йорк, 1918 г.). **1. Кh6+ Крh8 2. Ф:e5!! Ф:e5 3. К:f7+! Черные сдались** (3...Л:f7 4. Лd8+ ведет к мату, а после 3...Крg8 4. К:e5 черные остаются без фигуры).

3. Капабланка — Зубарев (Москва, 1925 г.). **1. Лe1+ Сe5** (1...Крd8 2. Фa8+; 1...Крd6 2. Фb6+) **2. d6+! Крe6 3. Фb3+ Крf5 4. Фd3+ Крg5 5. Фe3+ Крf5** (5...Крh5 6. g4+Крh4 7. Фh6×) **6. Фe4+Крe6 7. Фc4+ Кр:d6** (7...Крf5 8. Фg4×) **8. Лd1+Крe7 9. Л:d7+ Кр:d7 10. Ф:a6. Черные сдались.**

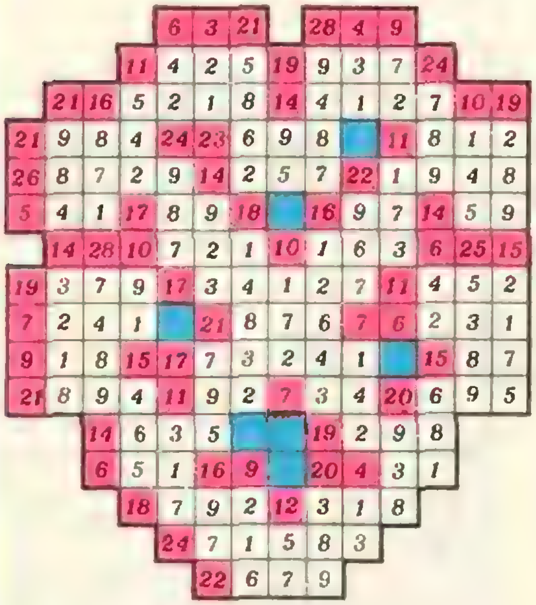
(см. «Квант» № 5)

1. Алехин — Ейтс (Лондон, 1922 г.). **1. Кf6! Лgf8 2. Л:g7! Л:f6 3. Крe5!** Черные сдались — они либо теряют ладью, либо получают мат в два хода: 3...Лaf8 4. Лh7+ Крg8 5. Лcg7×.

2. Алехин — Фримэн (сеанс одновременной игры, Нью-Йорк, 1924 г.). **1. Лe8+ Кf8 2. Кh6+! Ф:h6 3. Л:f8+! Кр:f8 4. Фd8×.**

3. Алехин — Колле (Париж, 1925 г.). **1. Ф:d7! Л:d7 2. Лe8+ Крh7 3. Лcc8. Черные сдались** (грозит Лh8×).

Кросснамбер.
(см. «Квант» № 7, с. 18)



				6	3	21		28	4	9			
			11	4	2	5	19	9	3	7	24		
	21	16	5	2	1	8	14	4	1	2	7	10	19
21	9	8	4	24	23	6	9	8	■	11	8	1	2
26	8	7	2	9	14	2	5	7	22	1	9	4	8
5	4	1	17	8	9	18	■	16	9	7	14	5	9
	14	28	10	7	2	1	10	1	6	3	6	25	15
19	3	7	9	17	3	4	1	2	7	11	4	5	2
7	2	4	1	■	21	8	7	6	7	6	2	3	1
9	1	8	15	17	7	3	2	4	1	■	15	8	7
21	8	9	4	11	9	2	7	3	4	20	6	9	5
		14	6	3	5	■	■	19	2	9	8		
		6	5	1	16	9	■	20	4	3	1		
			18	7	9	2	12	3	1	8			
				24	7	1	5	8	3				
					22	6	7	9					

В чем дело?
(см. «Квант» № 6, с. 10)

а) $y_1 - y_2 = 1$ при всех $x \neq \pm 1$.

б) В формулировку «основного свойства первообразной» входит промежуток, на котором та или иная функция является первообразной для данной функции. Функции y_1 и y_2 являются первообразными для функции $y=\frac{1}{x}$ на промежутке $]0;\ +\infty[$ — на этом промежутке они отличаются на константу (3). Эти же функции являются первообразными для функции $y=\frac{1}{x}$ на промежутке $]-\infty;\ 0[$ — на этом промежутке они тоже отличаются на константу (5). На любом промежутке, включающем 0, эти функции не являются первообразными ни для какой функции, так как при $x=0$ они не определены — поэтому на любом таком промежутке «основное свойство первообразной» к ним не применимо.

Номер подготовили:
А. Виленкин, А. Егоров, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
Г. Красиков, Э. Назаров, М. Сидоров, Н. Смирнова, Л. Черниевская

Зав. редакцией Л. Чернова

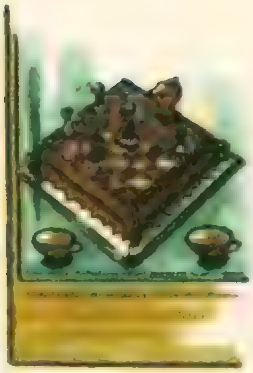
Художественный редактор Т. Макарова

Корректор А. Ипатова

113035, Москва, Б. Ордынка 21/16
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 20.6.81
Подписано в печать 29.7.81
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 7,13 Т-23451
Цена 30 коп. Заказ 1464
Тираж 232 467 экз.

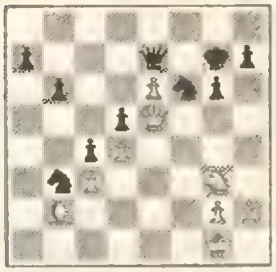
Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

ШАХМАТНЫЙ КОНКУРС



ШЕСТЬ КОМБИНАЦИЙ

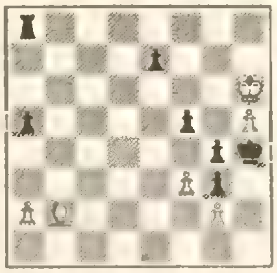
В «Кванте», 1981, № 5 были предложены комбинации первого русского чемпиона мира по шахматам А. Алехина. Новые конкурсные задания представляют собой комбинации, заимствованные у следующих чемпионов.



1. Ботвинник — Капабланка. Белые выигрывают.

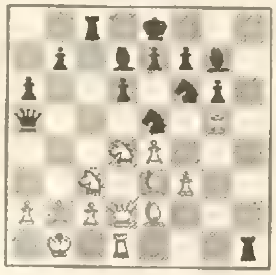
Эта известная позиция возникла в партии, игранной в 1938 году на международном турнире в Голландии. Здесь белые провели красивую комбинацию, которую Ботвинник позже использовал как пробный камень при разработке своего алгоритма шахматной игры на ЭВМ. Кое-какие варианты алгоритм выдал, но, кажется, экс-чемпион мира убедился, что пока он играет в шахматы лучше, чем его электронный ученик. Любопытно, что в 1954 году на Всемирной шахматной Олимпиаде в Амстердаме Ботвинник к своему большому удивлению в витрине одной из кондитерских обнаружил торт, на котором красовалась позиция, изображенная на диаграмме! Так что голландские кондитеры тоже умеют создавать произведения в жанре изобразительных шахмат.

Два наших шахматных ветерана в этом году праздновали свои юбилеи: Михаил Ботвинник — 70-летие, Василий Смыслов — 60-летие. Ботвинник уже давно не играет в турнирах, Смыслов же до сих пор сохраняет хорошую шахматную форму — совсем недавно он успешно сыграл в Московском международном турнире, разделив 2—4-е места. Следующая комбинация никогда не была осуществлена в реальной партии. Этот оригинальный этюд Смыслов придумал в 17-летнем возрасте.



2. В. Смыслов, 1938 г. Ничья.

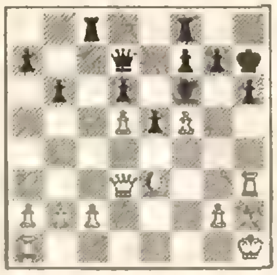
Красивые комбинации встречаются не только в этюдах или турнирных поединках.



3. Таль — N. N. Белые выигрывают.

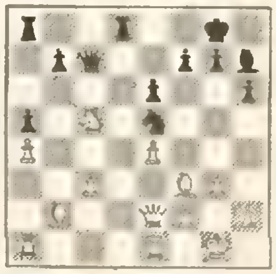
Неизвестный противник Михаила Таля, один из участников сеанса одновременной игры гроссмейстера, только что взял своей ладьей белую ладью на h1. Любой бы на месте Таля не задумываясь сыграл Л:h1. Однако на то Таль и волшебник шахмат, чтобы придумывать за доской фантастические решения!

Найдя эффектный выигрыш белых в следующей позиции (1956 г.), вы убедитесь, что комбинация Петросяна в матче со Спасским, 1966 года была подготовлена им... десятью годами раньше.



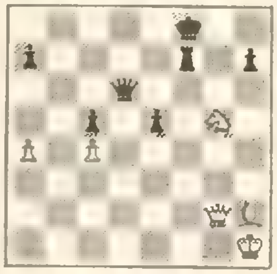
4. Петросян — Симагин. Выигрыш.

Следующий пример показывает, что чемпионы мира умеют выигрывать не только белыми фигурами.



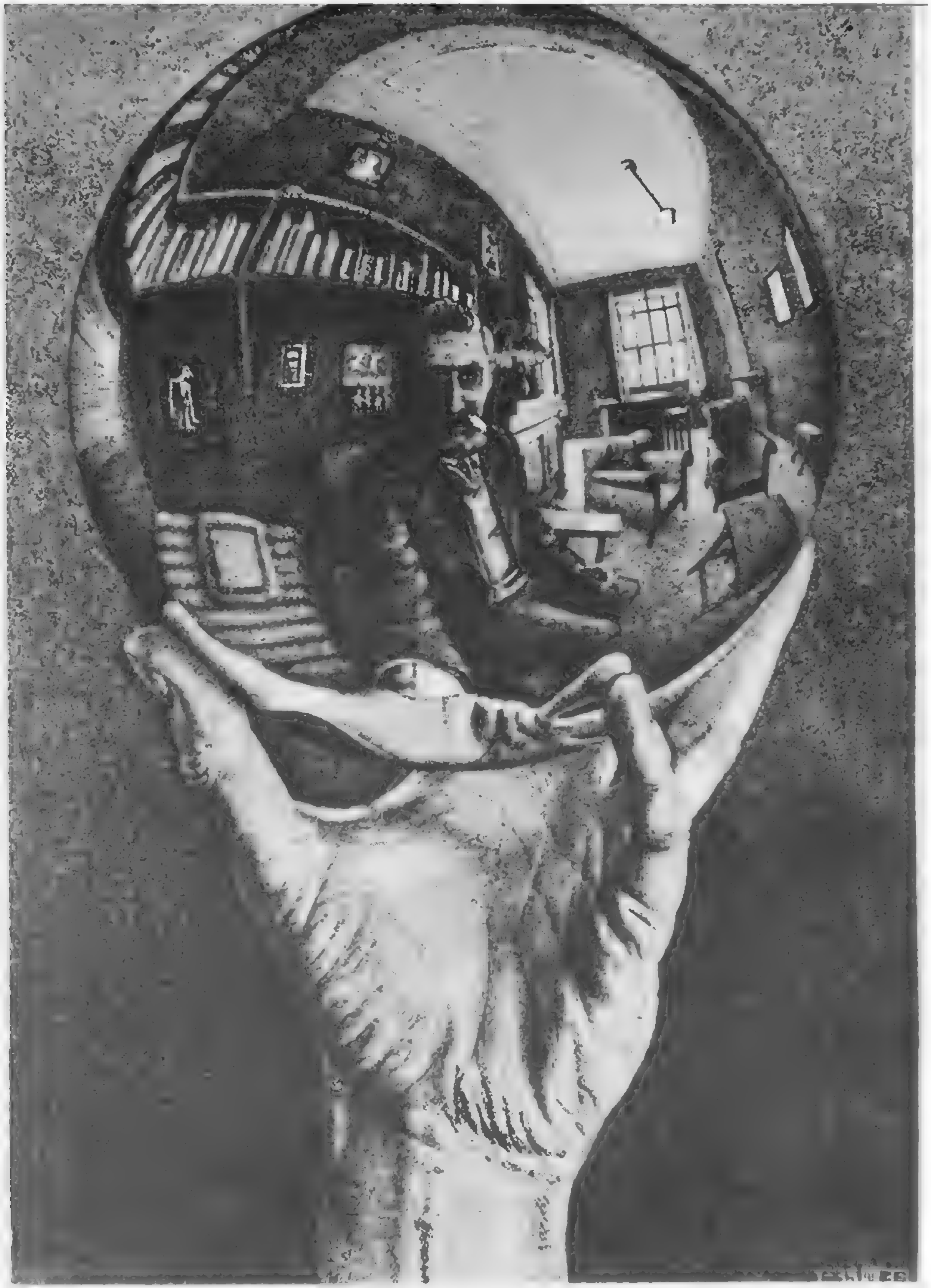
5. Хуг — Спасский. Черные начинают и выигрывают.

И в заключение одна комбинация Роберта Фишера.



6. Фишер — Куппер. Белые выигрывают.

Срок отправки решений — 30 сентября 1981 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс № 8—81»).

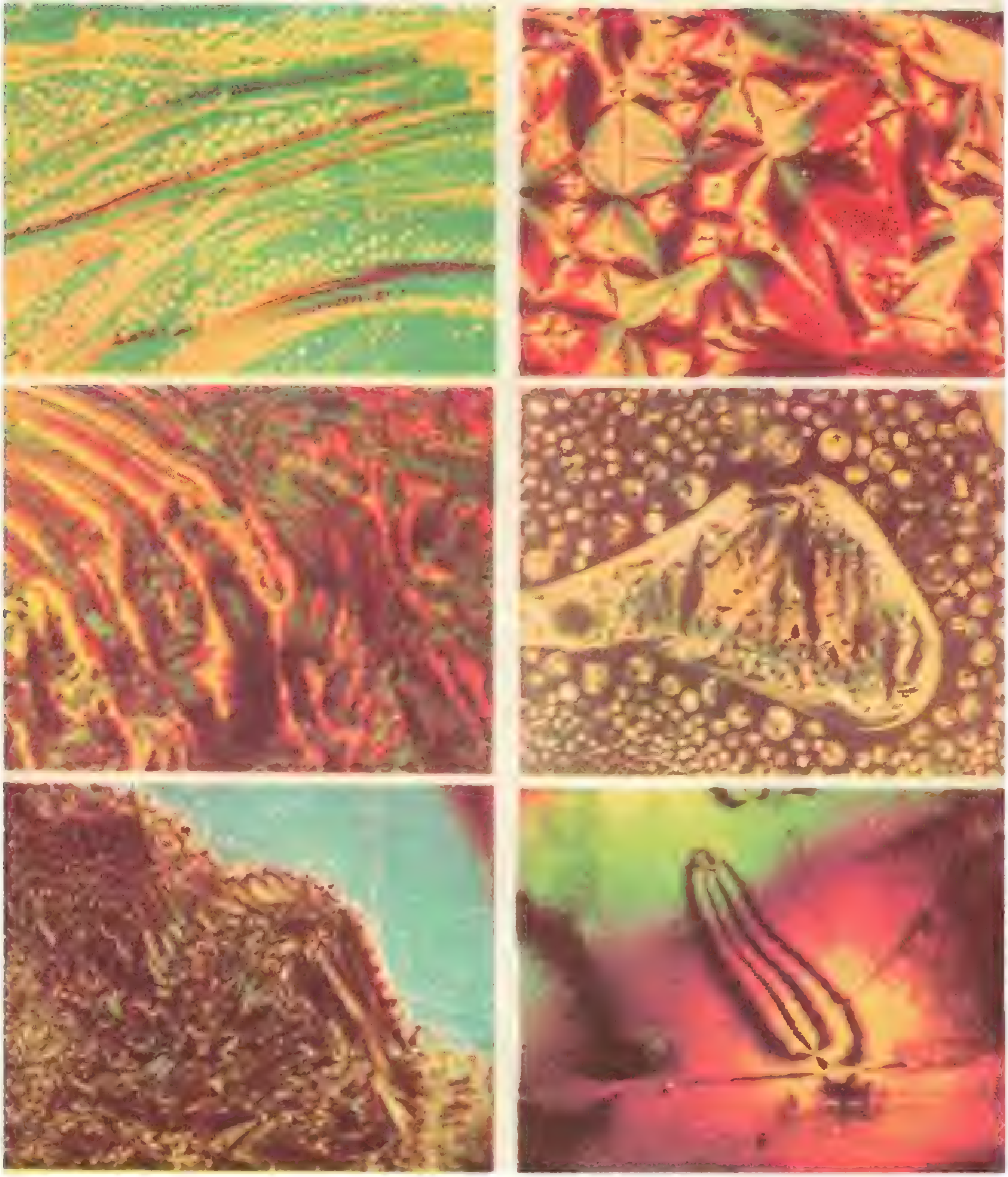


Мы не раз помещали в нашем журнале репродукции с работ замечательного голландского художника М. Эшера. В этом номере мы знакомим вас еще с одной его работой.

Как вы думаете, рисовал ли художник «с натуры» или это — плод его воображения?

Индекс 70465

Эти загадочные пейзажи и мозаики — фотографии реальных объектов, именуемых жидкими кристаллами. Фотографии сделаны под микроскопом при различных условиях освещения. Структура жидких кристаллов и их свойства весьма неожиданны и разнообразны. Рассказ о них помещен в этом номере журнала.



НОМЕР
9

Основан в 1970 году

КВАНТ

9
1981

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ
МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд

В НОМЕРЕ:

2 С новым учебным годом!

Ученые обращаются к молодежи

4 *Н. Семенов.* Смелее, не отступайте перед трудностями!

• • •

[illegible] *С. Пикин.* Снова о жидких кристаллах
13 *М. Крейн, А. Нудельман.* Замечательные пределы, порождаемые классическими средними

Математический кружок

16 *И. Яглом.* Почти простые числа

Задачник «Кванта»

20 Задачи М701 — М705; Ф713 — Ф717
21 Решения задач М661 — М665; Ф673 — Ф677
28 Список читателей, приславших правильные решения
30 Премии «Кванта»

«Квант» для младших школьников

31 Задачи
32 *А. Калинин.* Эта удивительная вязь колец

По страницам школьных учебников

36 *Г. Перевалов.* Можно и без производной

Практикум абитуриента

42 *В. Нахшин.* Уравнения думают за нас
46 *И. Габович.* Вспомогательные отрезки и углы

Искусство программирования

50 *А. Рар.* Какие бывают языки программирования
55 Конкурс машинных рисунков

Рецензии, библиография

57 *М. Гервер.* Веселая мозаика Сэма Лойда
61 *И. Зорич.* История одного заблуждения

63 **Шахматная страничка**

64 **Ответы, указания, решения**

Шахматный конкурс *(3 с. обложки)*

Наша обложка *(41)*

Физики о физиках *(40)*

Новости науки *(40)*

Смесь *(41, 49, 62)*

О математическом смысле узора, показанного на первой странице обложки, вы можете прочитать на с. 41

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1981

С новым учебным годом!

Быстро пролетели прекрасные летние дни. Отшумели школьные каникулы. И снова звонок приглашает вас в просторные светлые классы, вы встречаетесь со старыми друзьями, делитесь впечатлениями, строите планы на будущее.

У многих из вас школьное лето было не только месяцами отдыха, но и месяцами упорного труда. Около трех миллионов учащихся провели каникулы в лагерях труда и отдыха, помогали колхозам и совхозам выращивать и убирать урожай. В 45 тысячах школ были созданы ученические школьные бригады. Они объединяли 2,5 миллиона учащихся 8—10 классов. Ребята работали на полях, в лесничествах, на производственных предприятиях, стройках, в сфере обслуживания. Школа трудовой закалки на пороге самостоятельной жизни необычайно полезна для нашей молодежи.

Нынешний год — знаменательный в жизни нашего народа. Это год XXVI съезда КПСС, первый год новой, одиннадцатой пятилетки. Съезд уделил большое внимание состоянию школьных дел. В отчетном докладе Генерального секретаря ЦК КПСС Л. И. Брежнева, в частности, сказано: «Взят важный рубеж — завершен переход к обязательному всеобщему среднему образованию. Главное сегодня в том, чтобы повысить качество обучения, трудового и нравственного воспитания в школе, изжить формализм в оценке результатов труда учителей и учащихся, на деле укрепить связь обучения с жизнью, улучшить подготовку школьников к общественно полезному труду».

В одиннадцатой пятилетке наша страна должна добиться новых крупных успехов на пути повышения эффективности и улучшения качества продукции во всех звеньях народного хозяйства. Эти требования продиктованы жизнью и, прежде всего, происходящей сейчас научно-технической революцией. Используя ее достижения, можно коренным образом изменить эффективность любого труда, любой профессиональной деятельности. А это значит, что растут требования к работникам практически на любом рабочем месте. Удовлетворить этим требованиям можно лишь успешно овладевая достижениями современной науки и техники.

Присмотритесь внимательно к тому, о чем пишут наши газеты, прислушайтесь к тому, о чем рассказывают радио и телевидение — комплексно автоматизированные линии и цеха, роботы и промышленные манипуляторы, станки с программным управлением, новые технологические процессы, рождающие небывалую продукцию, применение ЭВМ в управлении, торговле, обслуживании, здравоохранении, новые, все более мощные и разнообразные машины в сельском хозяйстве... Может ли в будущем все это успешно использовать тот, кто сегодня учится плохо, перебиваясь с двойки на тройку? Конечно, есть еще у нас профессии, не требующие глубоких знаний и специальной подготовки, но с каждым годом потребность в них будет все меньше и меньше.

Ребята иногда спрашивают: «Почему все должны знать математику и физику — ведь не всем же эти науки понадобятся в их будущей работе?» Конечно, для того, чтобы подсчитать в магазине сдачу, достаточно и знания элементарной арифметики. Зачем же алгебра и геометрия будущему повару, закройщице или рабочему на конвейере? Работать можно по-разному. Можно день за днем, ни над чем не задумываясь, класть одни и те же продукты в котел, разрезать ткань по стандартным шаблонам и завертывать гайки примитивным инструментом. А можно уже сегодня подсчитывать калорийность продуктов, составлять оптимальные и недорогие пищевые рационы, искать наиболее экономные методы раскройки тканей, совершенствовать инструменты и приемы труда. Вот тут-то без хорошего знания школьных дисциплин шагу не сделаешь!

Изучение математики дает человеку не узко профессиональные знания и навыки, пригодные для какой-то одной профессии, а развивает, тренирует и совершенствует его ум — учит правильно рассуждать, анализировать прочитанное или услышанное, обосновывать и убедительно доказывать свои суждения, принимать правильные решения в сложных жизненных ситуациях. Математика учит человека думать и думать правильно, а это необходимо всем.

Не менее важна и физика. Она дает человеку знания об основных законах природы, являющихся теоретическим фундаментом всей современной техники. И если шофер хочет не просто крутить руль и нажимать ногою на педали, а хоть немного разбираться в своей машине, ему безусловно нужны хорошие знания школьной физики. А электричество — ведь мы с ним неразрывно связаны и дома, и на работе. Как же не знать его основных законов!

Школа не готовит профессиональных физиков, математиков или историков. Чтобы стать ученым, надо много и упорно трудиться. Но многовековой опыт человечества позволил отобрать и ввести в школьные программы то, что нужно всем членам общества, независимо от их будущих профессий.

Наши читатели имеют более глубокий интерес к математике и физике, — иначе они не были бы подписчиками нашего журнала. Многие из вас увлечены этими науками, с удовольствием прорабатывают наши статьи и решают предлагаемые нами задачи. Но нам хотелось бы, чтобы даже те, кто по-настоящему влюблен в математику или физику, не пренебрегали остальными школьными предметами, а старались и в них искать основные закономерности, причинные связи, анализировать ход доказательств, словом, как сказал наш великий поэт, алгеброй поверять гармонию. И еще нам хотелось бы, чтобы ваш интерес к этим наукам не оставался внутри вас, не был бы только вашим личным достоянием. Постарайтесь увлечь этим ваших товарищей, привлекайте их к постановке опытов, о которых мы рассказываем в «Лаборатории «Кванта», к решению задач, головоломок, кроссвордов, ребусов. Пусть и они почувствуют «радость скромных побед», поверят в свои силы, проверят свои способности.

Выступая на третьем съезде комсомола, В. И. Ленин призывал молодежь активно отдавать свои знания другим, помогать товарищам успешно учиться. «Только в такой работе превращается молодой человек или девушка в настоящего коммуниста» — говорил Владимир Ильич. Мы строим коммунизм, и каждый школьник может с успехом и большой пользой участвовать в этом строительстве уже сегодня.

Н. Семенов

Смелее, не отступайте перед трудностями!

Каждый год в советскую науку вступают тысячи юношей и девушек.

При воспитании молодежи, начинающей научную работу, самое важное — последовательное и неуклонное развитие у нее инициативы и самостоятельности.

Конечно, это не значит, что мы, ученые, должны предоставить молодежь самой себе: пусть, мол, привыкает к самостоятельности, пусть самоопределяется в науке. При таком «самотечном» методе первые же шаги молодежи могли бы привести к цепи ошибок и глубоких разочарований. Однако еще хуже вторая крайность — передача огромного теоретического и экспериментального наследства в готовом виде.

Необходимо, чтобы молодежь до многого доходила сама, изыскивая свои, пусть еще не лучшие, но самостоятельные решения. Это после первых неуверенных шагов даст возможность молодым ученым почувствовать свою силу, свою способность хоть с трудом, но уже самостоятельно шагать в науке. Наш долг — давать им задачи не с очевидным ответом, а те, которые бы требовали серьезных размышлений, коренного изменения и усовершенствования методики работы и глубокого самостоятельного анализа.

Мы стараемся ни в коем случае не навязывать «безоговорочных» суждений и путей решения и не требуем, чтобы результаты решения строго соответствовали точке зрения руководителя — и никакой другой.

Академик Николай Николаевич Семенов — дважды Герой Социалистического Труда, лауреат Нобелевской, Ленинской и Государственных премий, директор Института химической физики АН СССР.

Статья перепечатывается из сборника «Ленин. Наука. Молодежь», выпущенного в 1980 году издательством «Наука».

Мы обязаны помогать, но не диктовать. Научная догма вредна. Она мешала развитию науки и в древности, и во времена Ломоносова, и в наши дни.

Однако среди молодых ученых встречаются такие, которые с первых же шагов сами стараются не искать «нехоженных троп». Они недовольны такой постановкой, жалуются на недостаточное руководство, склонны к движению по «автострадам» науки, ошибочно полагая, что такое движение быстрее и результативнее.

В большинстве случаев подобные молодые ученые через год-два начинают чувствовать, что пути настоящей науки не здесь, что нужно идти иной раз по полному бездорожью, по целинным землям, где каждый шаг стоит огромного труда. Но ведь именно в этом труде формируются воля ученого и твердое стремление к самостоятельной работе. Если в сознании юноши или девушки не произойдет такого крутого поворота, им не следует посвящать себя науке.

Научное руководство никогда не должно достигать уровня, при котором приходится вести молодежь за руку. Я отверг навсегда этот метод еще в те времена, когда был старше своих молодых учеников всего на пять-шесть лет. И никогда в жизни не жалел об этом.

Работать творчески, с огоньком можно во всех областях науки и техники. Это подтверждается множеством замечательных примеров труда нашей молодежи, строящей огромные города и заводы, поднимающей миллионы гектаров целины, создающей сложные машины и новые материалы. И не следует думать, что молодой ученый — это только тот, кто работает в соответствующем институте под руководством академиков и профессоров, имеет научное звание или ученую степень. Науку движут вперед и молодые новаторы, рационализаторы, изобретатели, упорно работающие каждый в своей области, создающие немало нового, ложащегося в фундамент величественного здания науки.

В поисках нового неизбежны неудачи. Но истинный ученый не должен их бояться, опускать руки. Ведь именно неудачи часто помогают в поисках правильного пути, показывают, в каком направлении не следует двигаться, а в каком надо работать еще упорнее. Нередко поэтому бывает так, что анализ ряда неудачных экспериментов приводит к великим открытиям.

Научная работа в любой области открывает неиссякаемый источник радости. Открытия и достижения, умножая славу нашей великой Родины, тем самым приносят славу и огромное удовлетворение отдельным ученым.

Будьте же смелее в науке, не отступайте в ней перед трудностями! Перед молодежью лежит еще неистощимая целина, которая принесет народу урожаи невиданного изобилия.

С. Пикин

Снова о жидких кристаллах

В августовском номере журнала в статье «Жидкие кристаллы» было рассказано об одном типе жидких кристаллов — нематической жидкости, о том, что из себя представляют молекулы такой жидкости, как они взаимодействуют между собой, о важнейших областях применения этих жидких кристаллов. Теперь мы хотим познакомить вас с двумя другими типами жидких кристаллов, которые играют исключительно важную роль в науке, технике и жизни. Речь пойдет о холестерических и смектических жидких кристаллах.

Холестерическим называют состояние жидких кристаллов, впервые наблюдавшееся в эфирах холестерина. Смектическое состояние берет свое название от греческого слова σμηγμα — «мыло» и обозначает жидкость, структура которой подобна жидкой мыльной пленке, состоящей на самом деле из множества тонких слоев, легко скользящих друг по другу.

Холестерическая жидкость

Структура холестерической жидкости (холестерика) во многом сходна с нематической, но имеет одно существенное отличие. Можно сказать, что холестерик обладает нематическим состоянием послойно, то есть состоит из стопки нематических слоев (рис. 1, *а*). Но оси этих параллельных друг другу слоев развернуты на некоторый угол, причем для двух соседних слоев этот угол составляет малую величину $\alpha \approx 0{,}5^\circ$. Расстояние между соседними слоями примерно равно поперечному размеру молекулы a. Если двигаться вдоль оси Z, перпендикулярной плоскости слоев (см. рис. 1, *а*), то через число слоев $N = \pi/\alpha$ ориентация молекул станет такой же, как в самом первом слое (направления $\vec{n}$ и $-\vec{n}$ физически эквивалентны). Расстояние $h = a \cdot 2\pi/\alpha$, через которое повторяется ориентация молекул в пространстве, представляет собой удвоенный период своеобразной решетки (рис. 1, *б*). Величину h принято называть шагом спирали, которую образуют в пространстве концы молекул, лежащих в последовательных слоях.

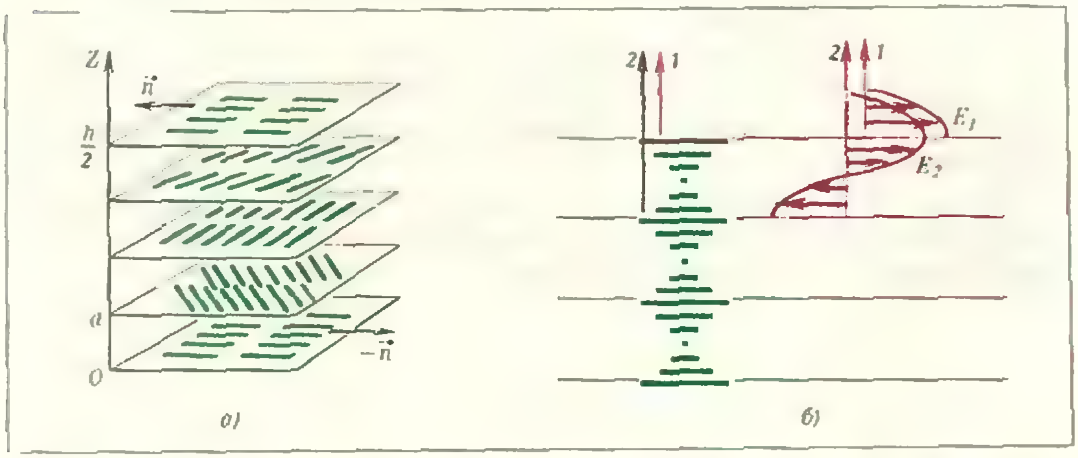


Рис. 1. Холестерический жидкий кристалл. *а*) холестерическая спираль; *б*) селективное отражение света холестериком.

Описанная периодическая решетка — ее называют холестерической спиралью — удивительна тем, что четкая периодичность в ней касается только ориентации молекул. В то же время в каждом нематическом слое молекулы могут свободно перемещаться, меняться местами; словом, холестерическая жидкость свободно течет вдоль таких плоскостей, но спираль при этом почти не нарушается. Молекулы могут перескакивать и из слоя в слой, поворачиваясь при этом на угол α, но это дается им не так легко. Все это и определяет особые свойства холестерической жидкости, схожие со свойствами твердого кристалла. Особенности структуры холестерической жидкости наиболее сильно проявляются при изменении температуры вещества и при различных внешних воздействиях. Холестерическая спираль обладает яркими оптическими свойствами, чувствительными к малейшим повреждениям столь своеобразной решетки. Все это вызвало громадный интерес к изучению и применению холестерических жидких кристаллов. Однако, прежде чем говорить о применениях холестерических жидких кристаллов, разберемся, чем вызвана такая структура холестерика.

Мы знаем сегодня, что объяснение заключается в особенности строения молекул, из которых состоят эти вещества. Молекулы холестерика — почти такие же, как в нематической жидкости, но имеют на своем конце небольшой отросток (рис. 2, *а*). Этот отросток образуется обычно одним или несколькими атомами, которые выступают из основной плоскости, содержащей подавляющее большинство атомов молекулы. Симметрия молекулы нарушается из-за отростка и напоминает симметрию руки, которая, как известно, бывает только правой или только левой.

Как сказывается такая форма молекул на ориентационном порядке жидкости? Подобные молекулы можно расположить параллельно друг другу в определенной плоскости, например в плоскости, в которой лежат сами молекулы. Именно эти плоскости и образуют отдельные слои холестерика (рис. 2, *б*). А как могут быть «пристроены» друг к другу эти слои? Очевидно, что молекулы слоя *2* могут быть параллельны молекулам слоя *1* (речь идет об основных, плоских, участках молекул), если слои расположены друг от друга на расстоянии, примерно равном высоте отростков. В этом случае отростки не мешают молекулам оставаться параллельными. Если расстояние между слоями меньше высоты отростков, то векторы $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ не могут быть строго параллельны — мешают отростки. Поэтому между векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ имеется малый угол α.

Таким образом, мы приходим к выводу, что несимметричные молекулы должны образовывать стопку нематических слоев, причем от слоя к слою молекулы должны поворачиваться на определенный угол α. В за-

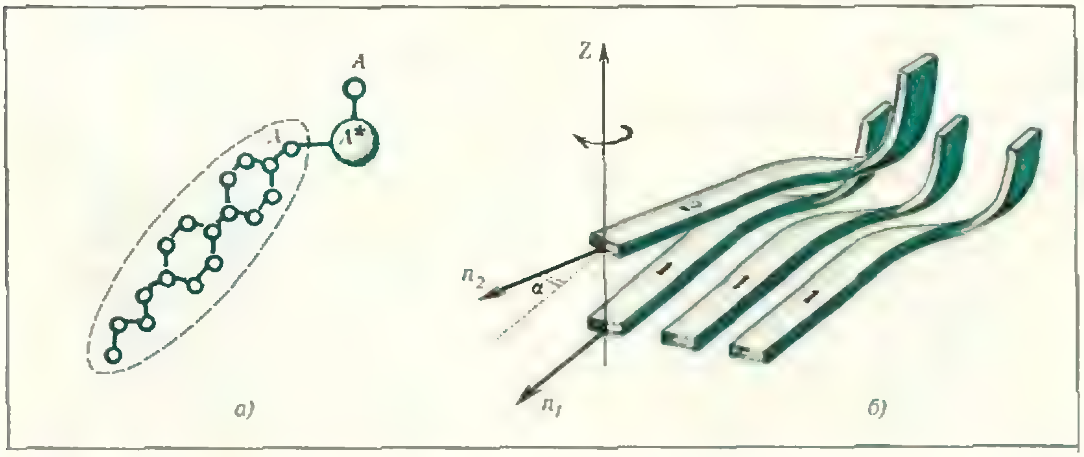


Рис. 2. Молекулы холестерика. *а*) атомная структура; *б*) ориентация в соседних слоях.

висимости от того, как изогнуты отростки отдельных молекул, холестерические спирали могут быть либо правыми, либо левыми. (Кстати, на рисунках 1, *а* и 2, *б* изображена левая спираль — продвигаясь вдоль оси спирали, мы видим, что молекулы поворачиваются своими длинными осями против часовой стрелки.)

Конечно, подобные рассуждения об устройстве холестерической жидкости — довольно грубые и приближенные, но они дают наглядное представление об особенностях структуры таких веществ. В этих рассуждениях можно пойти дальше и поинтересоваться, чему же равны угол α и шаг спирали h. Разумеется, эти величины — параметры вещества, состоящего из конкретных молекул. Но приближенно их можно оценить, если исходить из разумного предположения, что угол α тем меньше, чем меньше энергия взаимодействия отростков с основными участками молекул и чем больше взаимодействие плоских участков между собой. Поскольку, грубо говоря, в отросток входит примерно один атом, а в плоский участок — примерно 100 атомов, то отношение этих энергий взаимодействия составляет около 1/100. Соответственно, угол α примерно равен сотой доле радиана, то есть половине градуса. В свою очередь шаг спирали h при поперечном размере молекулы $a \approx 10$ Å составляет несколько тысяч ангстрем, то есть сравним с длиной волны света в видимой части спектра. Мы увидим, что это чрезвычайно ценно.

Избирательное отражение света холестериками

Важнейший оптический эффект, наблюдаемый в холестерической жидкости, заключается в избирательном отражении света слоем холестерика. Холестерические плоскости, как и обычные кристаллические плоскости, могут отражать падающие на них волны. Волны, отраженные разными плоскостями, могут при интерференции и ослаблять, и усиливать друг друга. Если свет падает перпендикулярно плоскостям, то условие усиления таково: между соседними эквивалентными плоскостями должно укладываться строго полволны падающего света. Из рисунка 1, *б* видно, почему так происходит. Мы хотим, чтобы колебания в волнах, отраженных от первой и второй плоскостей, происходили в одинаковых фазах, то есть значения электрического поля $\vec{E}$ в каждой точке и в любое время были одинаковы. При этом амплитуды $\vec{E}_0$ обеих волн складываются — происходит усиление света. Так будет, если волна *2* (см. рис. 1, *б*), вошедшая в кристалл, на пути от первой ко второй плоскости и обратно отстанет от волны *1* ровно на длину волны λ. Но в холестерике такие плоскости находятся на расстоянии $h/2$ друг от друга (на этом расстоянии ось $\vec{n}$ поворачивается на 180°). Поэтому условие усиления в данном случае есть $h/2 = \lambda/2$, или $h = \lambda$.

Свойство холестерика отражать свет с избранной длиной волны ($\lambda = h$) обуславливает соответствующую окраску вещества, которая зависит от шага холестерической спирали. А шаг спирали очень сильно зависит от температуры. Обычно вещество при высокой температуре (в изотропном состоянии) бесцветно, затем, в момент перехода в холестерик (при меньшей температуре), синеет (вспомним наблюдение Ф. Рейницера) и при дальнейшем понижении температуры последовательно приобретает все цвета спектра, от синего до красного. Это означает, что по мере охлаждения холестерической жидкости шаг спирали увеличивается, а при нагревании — уменьшается. Такое поведение холестерической спирали нетрудно объяснить.

Напомним, что в силу особенностей взаимодействия молекул с отростками оси $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ не могут образовать между собой слишком малый угол (как, скажем, в кристаллической решетке соседние атомы не могут сближаться на слишком малое расстояние, меньшее диаметра атома). Но с повышением температуры в результате тепловых колебаний молекул в каждом нематическом слое увеличивается разброс молекулярных ориентаций относительно выделенного направления $\vec{n}$ (как в кристалле увеличиваются амплитуды тепловых колебаний атомов). Иными словами, оси отдельных молекул в нематическом слое оказываются не параллельными выделенному направлению $\vec{n}$. Поэтому при нагревании угол между осями $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ соседних слоев должен увеличиваться, чтобы тепловые колебания не приводили к критическому угловому сближению молекул (в кристаллической решетке при нагревании увеличивается среднее расстояние между атомами и наблюдается тепловое расширение тела). Увеличение угла α, характеризующего закручивание осей $\vec{n}$ в пространстве, и вызывает уменьшение шага холестерической спирали по мере увеличения температуры.

Это замечательное явление лежит в основе широкого применения холестериков в качестве простых и эффективных термоиндикаторов для медицинской диагностики, отыскания повреждений в сложных электронных схемах, контроля температурного поля в лопатках турбин и т. п. Сейчас синтезированы холестерические вещества, в которых весь спектр цветов, от красного до синего, наблюдается при изменении температуры всего на 0,01 градуса, что говорит о большой чувствительности устройств на их основе.

Шаг холестерической спирали также очень чувствителен к содержанию примесей в холестерике, и поэтому эти вещества могут служить надежными индикаторами загрязнений в атмосфере.

Жидкие кристаллы — растворы

Жидкокристаллическое состояние можно получить и при растворении подходящих веществ в растворителе, например в воде, который сам по себе не образует жидкий кристалл. При этом получаются самые разные жидкие кристаллы. Если молекулы растворяемого вещества имеют форму стержней — получается нематическая жидкость; если у стержнеобразных молекул имеются отростки — холестерическая жидкость. Можно получить и более сложные состояния.

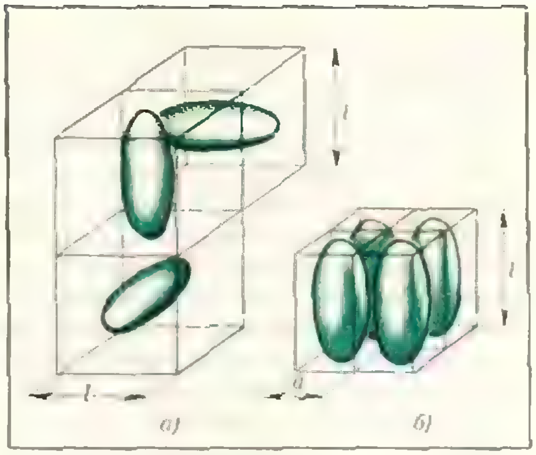


Рис. 3. Зависимость ориентации молекул от их плотности.
а) **низкая плотность;** *б)* **высокая плотность.**

В таких жидких кристаллах важную роль играют не только силы притяжения между молекулами, уже обсуждавшиеся нами, но и силы отталкивания молекул на близких расстояниях. Роль сил отталкивания можно наглядно представить себе следующим образом. В большом объеме при высокой температуре молекулы, например стержнеобразные, не подчиняются никакому ориентационному порядку, то есть поворачиваются в пространстве как угодно. Но чтобы при всевозможных поворотах молекулы не мешали друг другу, не задевали друг друга, надо каждой молекуле отвести в жидкости определенный объем. Этот объем представляет собой кубик с размером ребра, примерно равным длине молекулы l; в пределах такого кубика с объемом l^3 молекула действительно может быть ориентирована как угодно (рис. 3, *а*).

Поместим теперь то же число молекул при той же температуре в меньший объем, то есть повысим плотность системы. В результате на каждую молекулу станет приходиться объем, меньший чем l^3. Как будут размещаться молекулы в этом случае? Естественно, они смогут разместиться в меньшем объеме, если не будут поворачиваться как угодно, задевая друг друга, а займут более или менее параллельные положения. Если размер поперечного сечения молекул a заметно меньше l и на каждую молекулу приходится объем $\sim a^2 l$, то все молекулы должны быть ориентированы одинаково, так как только в этом случае они не задевают друг друга (рис. 3, *б*). Но это может произойти лишь в случае очень высокой плотности. При средней плотности, когда на каждую молекулу приходится объем, меньший чем l^3, но больший чем a^2l, ориентационный порядок будет, конечно, неполным, но все-таки заметным. И связан этот порядок с тем, что молекулы не могут из-за сильного отталкивания проникать друг в друга.

Плотность стержнеобразных молекул можно изменять без заметного изменения общего объема жидкости, когда такие молекулы растворяются в каком-нибудь обычном растворителе, например в воде. Повышая содержание воды в соответствующем растворе, мы получаем обычную неориентированную жидкость. При очень малом же содержании растворителя образуется нематическая или холестерическая жидкость, в зависимости от деталей структуры молекул. Обсуждавшиеся в предыдущей статье растворы полимерных молекул являются как раз такими нематическими жидкими кристаллами.

Работу клеток живого организма во многом определяют жидкие кристаллы — растворы, которые образуются из специальных молекул. Эти молекулы устроены более сложно. Их взаимодействие друг с другом и с молекулами растворителя характеризуется силами отталкивания и силами электростатического притяжения. Такая молекула схематически изображена на рисунке 4, *а*. Она состоит из небольшой головки, представляющей собой электрический диполь, и длинного незаряженного хвоста. Напомним, что молекулы воды — тоже электрические диполи. Противоположно заряженные концы диполей притягиваются друг к другу, и поэтому молекулярные головки притягивают воду. В то же время хвосты молекул химически устроены так, что они отталкивают воду, как молекулы жиров или воска.

Частично твердые жидкие кристаллы

Строение особых молекул, описанных выше, объясняет большое разнообразие структуры жидких кристаллов — растворов. Например, при определенной концентрации таких молекул в воде могут получаться жидкие кристаллы, в которых молекулы не только одинаково ориентируются, но и образуют жесткую кристаллическую решетку. Только эта решетка лишь отчасти похожа на обычную решетку твердого тела, периодическую в трех взаимно перпендикулярных направлениях. Таких направлений в особых жидких кристаллах может быть только два или даже одно.

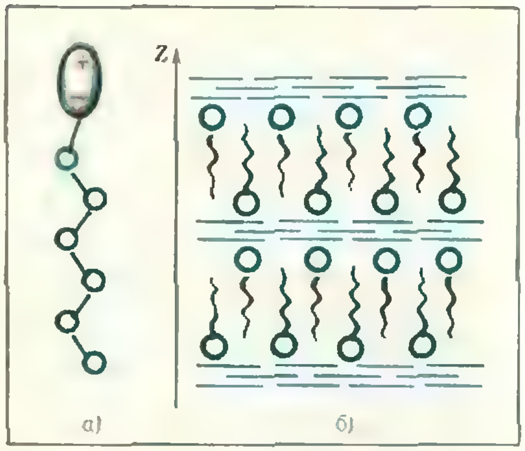


Рис. 4. Водный раствор — жидкий кристалл. *а)* дипольная молекула; *б)* стопка жидких слоев (смектик).

На рисунке 4, *б* изображена стопка слоев, образующихся при не очень малой концентрации молекул в воде. Хвосты молекул как бы «прячутся» от воды за оболочками из дипольных головок. Вода является прослойкой между двойными слоями молекул. Стопка таких слоев образует кристаллическую решетку, периодическую только в одном направлении — вдоль оси Z. В этом направлении жесткость решетки почти такая же, как в твердом теле, в то время как в поперечных направлениях слои могут свободно скользить, то есть вдоль слоев система ведет себя как жидкость. Такая структура сродни мылу, поэтому такие жидкие кристаллы называются смектическими. Они похожи на холестерики своей слоистостью, но периоды решеток в этих двух случаях совершенно различны. В холестериках период составляет несколько тысяч ангстрем, а в смектиках —

несколько десятков ангстрем (что соответствует длине молекулы).

При определенной концентрации раствора возникает кристаллическая решетка, периодическая в двух направлениях. При этом дипольные молекулы собираются в жидкие столбики или «нити», которые, собственно, и образуют такую решетку, похожую на стопку карандашей (рис. 5, *а*). Подобные отчасти твердые кристаллы существуют не только в растворах. Ими могут быть и отдельные вещества, изменяющие свое состояние при изменении температуры. При этом обычно с понижением температуры состояния меняются в такой последовательности: обыкновенная жидкость — нематическая жидкость или холестерик — смектик — твердый кристалл. Долгое время не находили жидкокристаллических веществ с решетками, периодическими в двух направлениях, но недавно были обнаружены и они. На рисунке 5,*б* изображена такая решетка, образованная жидкими столбиками дискообразных молекул. Интересно, что в последнем случае существует и ориентационный порядок: плоскости дисков в столбике параллельны друг другу, хотя центры дисков располагаются совершенно хаотически вдоль оси жидкого столбика.

Структура жидких кристаллов — растворов имеет огромное значение для жизнедеятельности организма, например для циркуляции крови, переноса ею кислорода, функционирования клеток мозга, для работы разнообразных клеточных мембран. Такие мембраны часто имеют структуру типа изображенной на рисунке 4,*б*; дефекты этой структуры приводят к заболеванию организма. Образование холестерических и тем более смектических жидких кристаллов в крови вызывает сердечно-сосудистые заболевания. При неблагоприятной концентрации различных компонент в желчи образуются сначала неполностью твердые кристаллы, а затем и «камни». Эти примеры можно было бы продолжить. Вот еще два.

Первый пример связан с выражением «холестерин в крови», которым пользуются и врачи, и не специалисты, чтобы указать на заболевание, выражающееся в закупорке кровеносных сосудов. Это как раз тот случай, когда «хороший» (то есть с совершенной структурой) холестерический жидкий кристалл, образовавшийся в результате болезни, является плохим симптомом. Действительно, мы уже отмечали, что холестерик обладает хорошей текучестью только вдоль нематических слоев, в то время как в поперечном направлении он скорее походит на твердое тело. Поэтому, когда в кровеносном сосуде появляются кусочки холестерических спиралей, расположенные так, что поток крови должен протекать сквозь нематические слои, сопротивление этому потоку очень сильно возрастает — сосуд закупоривается.

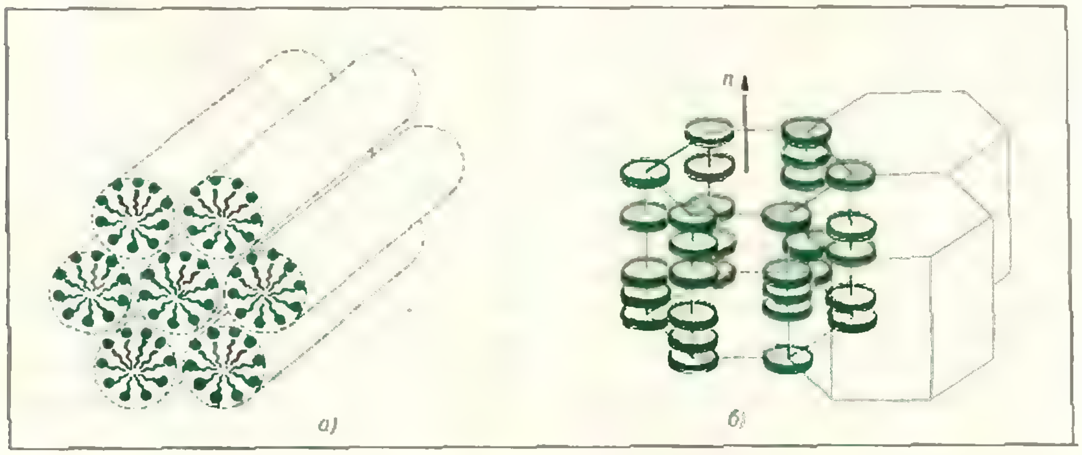


Рис. 5. Кристаллическая решетка, периодическая в двух направлениях. *а)* жидкие «нити» в растворе; *б)* жидкие «нити» из молекул-дисков.

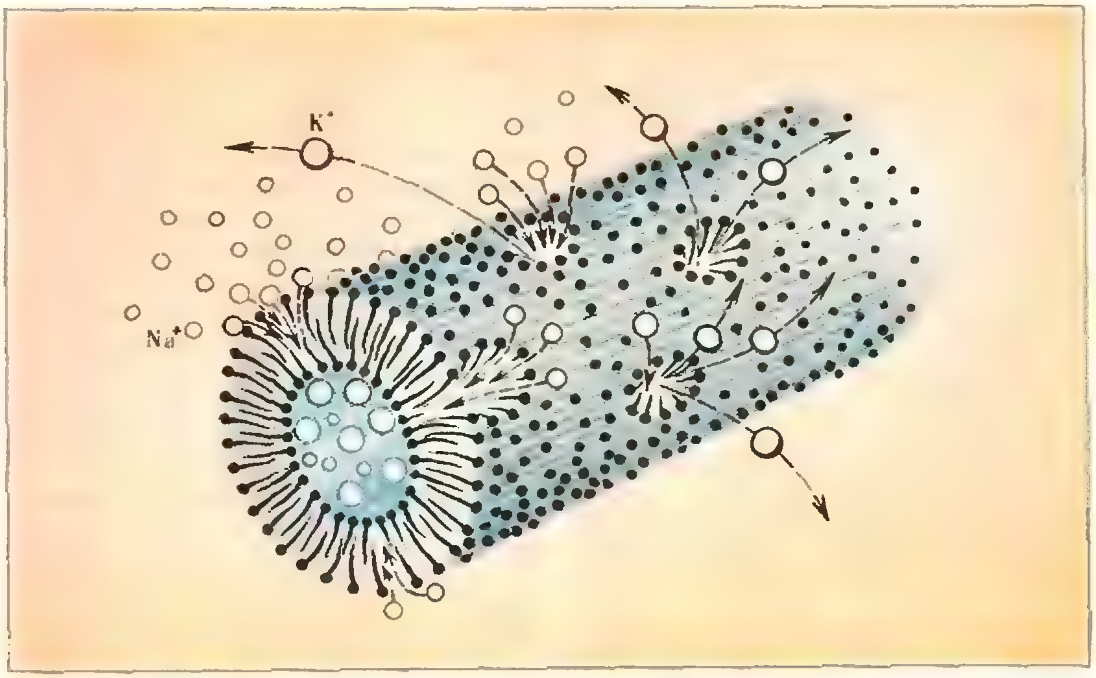


Рис. 6. Нервное волокно в состоянии возбуждения. Показаны «каналы» в жидкокристаллической оболочке, сквозь которые проходят ионы K^+ и Na^+.

Другой пример — мембраны в нервных волокнах и в волокнах сердечной мышцы. В таких волокнах распространяются возбуждения, представляющие собой электрические импульсы. В волокне смектик в виде цилиндрической оболочки (мембраны) окружает канал с протоплазмой, хорошо проводящей электрический ток. Основная роль в распространении электрических импульсов принадлежит мембране. В состоянии покоя между наружной поверхностью волокна и протоплазмой существует разность потенциалов (около 0,1 В), вызванная различной концентрацией положительных ионов калия и натрия вне и внутри волокна. Внутри волокна ионов калия в 50 раз больше, а ионов натрия в 10 раз меньше, чем снаружи. Это связано с тем, что ионы калия гораздо легче проникают сквозь мембрану, чем ионы натрия. В возбужденном состоянии резко увеличивается натриевая проницаемость мембраны, причем поток ионов натрия внутрь клетки сначала выравнивает потенциалы, а затем заряжает протоплазму положительно. После этого начинает нарастать поток ионов калия наружу до восстановления первоначальной разности потенциалов.

Какую же роль здесь играет смектик? Есть основания полагать, что во время возбуждения молекулы с длинными хвостами поворачиваются в месте воздуждения на 90° и даже на 180°. Это сильно облегчает прохождение ионов сквозь смектический слой, так как на участке возбуждения смектик как бы расплавляется. Сквозь такие жидкие каналы в первую очередь проникают ионы натрия, имеющие небольшой диаметр; затем наступает очередь больших ионов калия (рис. 6). Процесс перехода ионов должен завершиться полным «залечиванием» смектической мембраны в данном месте. Тем временем возбуждение передается соседнему участку мембраны, на котором повторяется тот же процесс. В результате электрические колебания распространяются по нервным волокнам и в сердечной мышце (так же, как это происходит в кабеле).

Хочется подчеркнуть, что здесь мы только прикоснулись к проблеме, которая еще далеко не решена, но путь решения, несомненно, проходит через изучение жидкокристаллического состояния вещества.

М. Крейн, А. Нудельман

Замечательные пределы, порождаемые классическими средними

Для двух положительных чисел a и b, как известно, *средним арифметическим* называется число $\frac{a+b}{2}$, *средним геометрическим* — число $\sqrt{ab}$. Реже, чем эти средние, встречается *среднее гармоническое* $\frac{2ab}{a+b}$ (ему равна, например, средняя скорость автомобиля, проехавшего первую половину пути со скоростью a, вторую — со скоростью b). Каждое из этих средних расположено между числами a и b (убедитесь в этом).

Легко проверяется справедливость неравенств

$$\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} \qquad (1)$$

для любых положительных $a \neq b$*).

Мы займемся здесь следующим вопросом. Пусть даны два положительных числа a и b, $a<b$. Вычислив какую-нибудь пару средних этих чисел, получим числа a_1 и b_1. Затем для чисел a_1 и b_1 вычислим те же средние — получим числа a_2 и b_2. С ними повторим ту же процедуру и так далее. В результате получим последовательности (a_n) и (b_n).

Например, взяв среднее геометрическое и среднее арифметическое и отправляясь от чисел 1 и 3, получаем

$$\begin{aligned} a_1 = \sqrt{3} &\approx 1{,}732050808, & b_1 &= 2; \\ a_2 &\approx 1{,}861209718, & b_2 &\approx 1{,}866025404; \\ a_3 &\approx 1{,}863616006, & b_3 &\approx 1{,}863617561; \\ a_4 &\approx 1{,}863616784, & b_4 &\approx 1{,}863616784; \end{aligned}$$

и т. д.

Мы видим, что в нашем примере последовательности (a_n) и (b_n) очень быстро сближаются. Всегда ли так будет? Оказывается, подобные последовательности всегда имеют общий предел — это доказывается сравнительно легко. Но как найти значение этого предела?

Арифметико-гармоническое среднее

Мы начнем со случая, когда выбранная пара средних — это среднее гармоническое и среднее арифметическое; таким образом, члены последовательностей (a_n) и (b_n) определяются формулами

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n+b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \qquad (2)$$

$$(n=0, 1, 2, \ldots;\ a_0=a,\ b_0=b).$$

Задача о нахождении их общего предела предлагалась на II командной олимпиаде школ города Омска («Квант», 1979, № 12).

Из неравенств (1) следует

$$a<a_n<a_{n+1}<b_{n+1}<b_n<b,$$

то есть последовательность (a_n) возрастает «навстречу» убывающей последовательности (b_n).

Таким образом, обе последовательности монотонны и ограничены; следовательно, по теореме Вейерштрасса («Алгебра и начала анализа 9», п. 32) они имеют пределы $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Перейдя к пределу в одном из равенств (2), получим

$$\beta = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n+b_n}{2} = \\ = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n\right) = \frac{1}{2}(\alpha+\beta),$$

откуда $\alpha=\beta$: последовательности (a_n), (b_n) имеют общий предел. Этот предел называется *арифметико-гармоническим средним* чисел a и b. Найдем его. Из (2)

---

*) Неравенствам (1) посвящена интересная статья З. А. Скопеца «Сравнение различных средних двух положительных чисел» («Квант», 1971, № 2).

$$a_{n+1}\cdot b_{n+1}=a_n\cdot b_n=\ldots=a_1b_1=ab,$$

поэтому $\alpha^2=(\lim\limits_{n\to\infty}a_n)^2=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\times\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\times b_n)=ab$, откуда

$$\boxed{\alpha=\sqrt{ab}=\beta,}$$

(арифметико-гармоническое среднее совпадает со средним геометрическим).

Упражнение 1. *Докажите, что* $b_n-a_n<\frac{b-a}{2^n}$.

Таким образом, последовательности (a_n) и (b_n) достаточно быстро сходятся к $\sqrt{ab}$. Поэтому они могут оказаться полезными для приближенного вычисления квадратных корней. Для вычисления $\sqrt{c}$ нужно начинать последовательности (a_n), (b_n) с таких чисел a и b, что $c=ab$ (например, $a=1$, $b=c$), причем процесс будет сходиться тем быстрее, чем меньше разность между этими множителями (например, для вычисления $\sqrt{56}$ лучше брать не $a=1$, $b=56$, а $a=7$, $b=8$). Легко убедиться, что последовательности (a_n) и (b_n) получаются по формулам

$$b_{n+1}=\frac{1}{2}\left(b_n+\frac{c}{b_n}\right),\quad a_{n+1}=\frac{c}{b_n}.$$

Для иллюстрации вычислим $\sqrt{12}$, положив $b=4$. Получаем $b_1=\frac{1}{2}\left(4+\frac{12}{4}\right)=3{,}5$, $b_2\approx3{,}464285715$, $b_3\approx3{,}464101620$, $b_4\approx3{,}464101615$ и далее все знаки стабилизируются: $\sqrt{12}\approx3{,}464101615$.

Арифметико-геометрическое среднее

Четырнадцатилетний Карл Фридрих Гаусс*) обнаружил на числовых примерах, что при вычислении последовательностей (a_n) и (b_n) с помощью геометрических и арифметических средних:

$$a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n},\quad b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}\qquad(3)$$
$$(n=0,\,1,\,2,\,\ldots;\ a_0=a,\ b_0=b)$$

эти последовательности очень быстро сближаются.

Упражнение 2. *Докажите существование и совпадение пределов последовательностей* (3).

Этот общий предел называется *арифметико-геометрическим средним* чисел a и b и обозначается через $\mu(a,b)$. Найти явное выражение для $\mu(a,b)$ через a и b очень не просто. Впервые оно было получено Гауссом в результате необычайно остроумных и виртуозных рассуждений и преобразований, использующих свойства так называемых эллиптических интегралов. Приведем это выражение без доказательства*):

$$\boxed{\mu(a,b)=\frac{\pi}{2\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}}}.}$$

Геометрическо-гармоническое среднее

Если строить последовательности (a_n) и (b_n) с помощью средних гармонических и средних геометрических:

$$a_{n+1}=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n},\quad b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}\qquad(4)$$
$$(n=0,\,1,\,2,\,\ldots;\ a_0=a,\ b_0=b),$$

то в этом случае легко доказать, что они сходятся к общему пределу. Назовем его *геометрическо-гармоническим средним* чисел a и b и обозначим через $\nu(a,b)$. Однако ничего существенно нового по сравнению с последовательностями (3) здесь нет, так как из (4) усматриваем, что

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}}{2},\quad\frac{1}{b_{n+1}}=\sqrt{\frac{1}{a_n}\cdot\frac{1}{b_n}}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{\nu(a,b)}=\mu\left(\frac{1}{b},\frac{1}{a}\right),$$

или же, в силу формулы Гаусса.

$$\boxed{\nu(a,b)=\frac{2ab}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}}.}$$

---

*) Биографию «Короля математиков» и интересные сведения о его научной деятельности читатель найдет в статье С. Гиндикина «Карл Фридрих Гаусс» («Квант», 1977, № 8).

*) Если это выражение использовать «в обратном направлении», получится быстрый способ приближенного вычисления интеграла, стоящего в знаменателе: он равен $\frac{\pi}{2\mu(a,b)}$, а среднее $\mu(a,b)$ вычисляется приближенно с помощью последовательностей (a_n) и (b_n). В наш век ЭВМ эти вычисления можно провести с огромной скоростью и точностью.

Среднее Шваба — Шенберга

Итак, из трех средних: арифметико-гармонического, арифметико-геометрического и геометрическо-гармонического — только первое элементарно выражается через исходные числа a и b. Тем удивительнее, что небольшое изменение последовательностей (3) приводит к последовательностям, общий предел которых также элементарно выражается через a и b («элементарно» не означает, что он находится просто!). Положим

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\quad b_{n+1}=\sqrt{a_{n+1}b_n} \qquad (5)$$

$(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ a_0=a,\ b_0=b)$.

Упражнение 3. *Докажите существование и совпадение пределов последовательностей (5).*

Этот предел называется *средним Шваба — Шенберга.* Найдем его. Любопытно, что он получается из простых геометрических соображений.

На рисунке 1 изображены равнобедренный треугольник AOB с боковыми сторонами $|OA|=|OB|-b$ и высотой $|OD|=a$ (угол при вершине O обозначен через 2φ), дуга окружности ACB с центром в вершине O и радиуса b ($[OC]\perp[AB]$) и средняя линия $[A_1B_1]$ треугольника ABC.

$$|OD_1|=|OD|+|DD_1|=$$
$$=|OD|+\frac{|DC|}{2}=a+\frac{b-a}{2}=\frac{a+b}{2}=a_1.$$

Из прямоугольного треугольника OA_1C

$$|OA_1|^2=|OD_1||OC|=a_1b,$$
$$|OA_1|=\sqrt{a_1b}=b_1.$$

Таким образом, числа a_1 и b_1 получаются из a и b простым геометрическим построением, причем отрезок длины a_1 опять является высотой из вершины равнобедренного треугольника с боковой стороной длины b_1. Для дальнейшего заметим, что

$$\widehat{A_1OB_1}=\varphi,\ |A_1B_1|=\frac{1}{2}|AB|.$$

Проделав то же построение, отправляясь от треугольника A_1OB_1, получим равнобедренный треугольник A_2OB_2 (рис. 2), у которого $|OD_2|=a_2$, $|OA_2|=|OB_2|=b_2$, $\widehat{A_2OB_2}=\frac{\varphi}{2}$, $|A_2B_2|=\frac{1}{2}|A_1B_1|=\frac{1}{2^2}|AB|$.

Повторив эти построения n раз, придем к треугольнику A_nOB_n, у которого высота $|OD_n|=a_n$, боковые стороны $|OA_n|=|OB_n|=b_n$, $\widehat{A_nOB_n}=\frac{\varphi}{2^{n-1}}$, $|A_nB_n|=\frac{1}{2^n}|AB|$.

Построим теперь дугу окружности радиуса b_n с центральным углом величины 2φ и разделим ее на 2^n конгруэнтных дуг. Последовательно соединив точки деления хордами, получим правильную 2^n-звенную ломаную линию, вписанную в эту дугу; ее длина равна $2^n|A_nB_n|=|AB|$. Эта же ломаная является описанной для дуги окружности радиуса a_n с тем же центром и центральным углом (рис. 3). Так как периметр ломаной заключен между длинами этих дуг,

$$2\varphi a_n<|AB|<2\varphi b_n,$$

откуда

$$2\varphi\lim_{n\to\infty}a_n<|AB|<2\varphi\lim_{n\to\infty}b_n.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$, получаем для общего предела α:

$$\alpha=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\arccos\frac{a}{b}}.$$

Заметим в заключение, что при $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{\sqrt{2}}$ получаем $\alpha=\frac{2}{\pi}$; таким образом, последовательности (5) позволяют вычислять значение π с любой степенью точности.

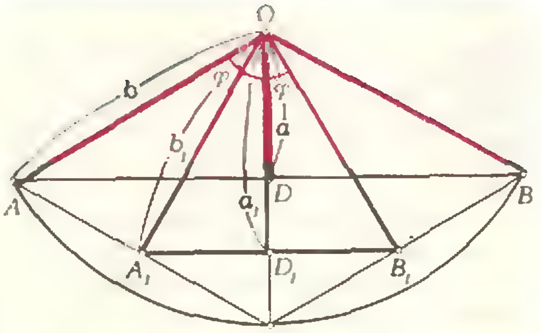


Рис. 1.

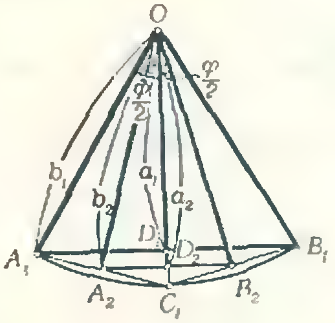


Рис. 2.

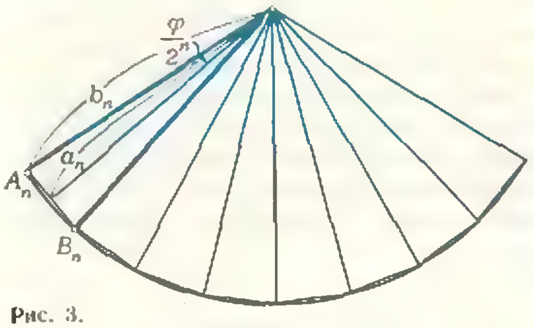


Рис. 3.

И. Яглом

Почти простые числа

Как в математике делаются открытия? Часто — так же, как в других науках: подмеченный факт исследователь пытается включить в качестве частного случая в общую закономерность. Найти эту закономерность не всегда удается, и математик, как и любой другой исследователь, действует «методом проб и ошибок». Как при этом могут выглядеть его рассуждения, когда речь идет о делимости чисел, рассказано в этой статье.

1. Малая теорема Ферма

Ясно, что квадрат n^2 натурального числа n будет четным или нечетным одновременно с самим числом n. Таким образом, числа n^2 и n всегда будут одновременно четными или одновременно нечетными, то есть справедливо

Утверждение 1. *Разность $n^2—n$ делится на 2 при любом n.*

Рассмотрим теперь разность $n^3—n$. Конечно, на 2 эта разность тоже всегда будет делиться: ведь числа n^3 и n также будут четными или нечетными одновременно. Но, более того, эта разность всегда делится и на 3. В самом деле, число n либо делится на 3 (то есть имеет вид $3k$), либо дает при делении на 3 остаток 1 (имеет вид $n=3k+1$), либо дает при делении на 3 остаток 2 (тогда его можно представить в виде $n=3k+2=3(k+1)-1=3(k'-1)$.

Если n делится на 3, то и n^3 делится на 3. Если же n имеет вид $3k\pm1$, то

$$n^3=(3k\pm1)^3=3(9k^3\pm9k^2+3k)\pm1,$$

то есть $n^3=3l\pm1$.

Во всех случаях разность $n^3—n$ кратна 3. Итак, имеет место

Утверждение 2. *Разность $n^3—n$ делится на 3 при любом n.*

Упражнения

1. Докажите утверждения 1 и 2 разложением многочленов $n^2—n$ и $n^3—n$ на множители

2. Докажите, что разность $n^3—n$ делится на 6 при любом n

Утверждения 1 и 2 внушают надежду, что справедлива

Гипотеза 1. *Разность $n^m—n$ делится на m при любых m и n.*

Увы! Легко набрести на контрпример, опровергающий эту гипотезу: разность $2^4—2=14$ не делится на 4.

Все же хотелось бы надеяться, что сходство между утверждениями 1 и 2 не является случайным. Попробуем проверить разность $n^5—n$. Например, $2^5—2=30$ делится на 5. Легко установить, что это не случайно, и справедливо

Утверждение 3. *Разность $n^5—n$ делится на 5 при любом n.*

В самом деле, число n либо делится на 5, либо дает при делении на 5 один из остатков 1, 4 (в этих случаях оно представимо в виде $5k\pm1$), либо дает при делении на 5 один из остатков 2, 3 (тогда $n=5k\pm2$). Если n делится на 5, то и n^5 делится на 5. Если $n=5k\pm1$, то

$$n^2=(5k\pm1)^2=5(5k^2\pm2k)+1.$$

Если $n=5k\pm2$, то

$$n^2=(5k\pm2)^2=5(5k^2\pm4k+1)-1.$$

Таким образом, если n не делится на 5, то число n^2 имеет вид $5L\pm1$ и

$$n^4=(5L\pm1)^2=5(5L^2\pm2L)+1$$

дает при делении на 5 остаток 1. Отсюда следует, что разность $n^4—1$, а значит и разность $n^5—n=n(n^4—1)$, делится на 5.

Теперь мы имеем уже три похожих утверждения. Это заставляет нас продолжать поиск. Разность

$2^6-2=62$ на 6 не делится, зато $2^7-2=126$ на 7 делится. Случайно ли это? Попробуем исследовать разность n^7-n.

Если n делится на 7, то и n^7-n, разумеется, тоже делится на 7.

Если же n не делится на 7, оно должно иметь один из трех видов: $7k\pm 1$ (такой вид имеют числа, дающие при делении на 7 остатки 1 и 6), $7k\pm 2$ (в случае остатков 2 и 5), $7k\pm 3$ (при остатках 3 и 4). Поскольку

$$(7k\pm a)^2=7(7k^2\pm 2ka)+a^2,$$

квадраты n^2 всех чисел n, не делящихся на 7, имеют при делении на 7 либо остаток 1, либо остаток 4, либо остаток $2\,(3^2=7+2)$. Таким образом, для таких n число n^2 имеет вид $7L+c$, где c равно 1, 2 или 4. Для всех этих значений c число c^3 дает при делении на 7 остаток 1. Поэтому

$$n^6=(n^2)^3=(7L+c)^3=$$
$$=7(49L^3+21L^2c+3Lc^2)+c^3$$

при делении на 7 дает остаток 1. Отсюда следует, что разность n^6-1, а значит и разность $n^7-n=n(n^6-1)$, делится на 7. Итак, имеет место

Утверждение 4. *Разность n^7-n делится на 7 при любом n.*

Упражнения

3. Докажите утверждения 3 и 4 разложением многочленов n^5-n и n^7-n на множители.

4. Докажите, что разность n^5-n делится на 30 при любом n.

Теперь нас больше не смущает, что $2^8-2=258$ не делится на 8 — возможно, утверждение 1 было исключением, и у нас на основании утверждений 2 — 4 возникает

Гипотеза 2. *Разность n^m-n делится на m при любом n и любом нечетном m.*

Впрочем, и эта гипотеза, увы!, не выдерживает дальнейшей проверки: разность $2^9-2=510$ не делится на 9. Зато снова оказываются верными

Утверждение 5. *Разность $n^{11}-n$ делится на 11 при любом n.*

Утверждение 6. *Разность $n^{13}-n$ делится на 13 при любом n.*

Упражнение 5. Докажите утверждения 5 и 6.

Поскольку мы сейчас занимаемся гипотезой 2, нас не очень огорчит, что разности $2^{10}-2=1022$, $2^{12}-2=4094$ и $2^{14}-2=16\,382$ не делятся соответственно на 10, 12, 14. Несколько обиднее, что и разность $2^{15}-2=32\,766$ не делится на 15: значит, гипотеза 2 «существенно неверна» — случай $n=9$ является не единственным контрпримером.

Если мы не поленимся возводить число 2 в достаточно большие степени, мы сможем проверить, что разности $2^{17}-2=131\,070$ и $2^{19}-2=$ $=524\,286$ делятся соответственно на 17 и 19. Возникают гипотезы:

Гипотеза 3. *Разность $n^{17}-n$ делится на 17 при любом n.*

Гипотеза 4. *Разность $n^{19}-n$ делится на 19 при любом n.*

Упражнение 6. Докажите гипотезы 3 и 4.

Просуммируем полученные результаты: разность n^m-n делится на m при любом n, если

$$m=2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\qquad (*)$$

для остальных рассмотренных нами значений m ($m=4$, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15) это утверждение оказалось ложным. Но числа (*) нам хорошо знакомы, это — не что иное, как простые числа. Возникает гипотеза, что верна

Теорема 1. *Разность n^m-n делится на m при любом n и любом простом m.*

Эта теорема действительно верна. Замечательный французский математик Пьер Ферма*) сформулировал ее (без доказательства) в 1640 г. в одном из своих писем. Ныне она называется *малой теоремой Ферма.* Первое дошедшее до нас ее доказательство принадлежит Леонарду Эйлеру (опубликовано в 1741 г.). Доказательство малой теоремы Ферма можно прочесть и в «Кванте» — 1972, № 10 с. 2, или 1978, № 10, с. 7.

Упражнение 7. Докажите, что разность $m^{61}\cdot n-m\cdot n^{61}$ делится на 56 786 730 при любых m и n.

---

*) О Ферма можно прочесть в «Кванте», 1976, № 8.

2. Почти простые числа

Вспомним, как мы в предыдущем пункте пришли к малой теореме Ферма. Фиксировав m, мы выяснили, все ли разности n^m-n делятся на m. Чтобы сформулировать правдоподобную гипотезу, мы каждый раз сначала проверяли, делится ли на m число 2^m-2. При всех рассмотренных простых m разность 2^m-2 делилась на m, при составных — не делилась. Естественно возникает

Гипотеза 5. *Разность 2^m-2 делится на m при простом m и не делится — при составном**).

Гипотезу 5 высказали еще древнекитайские математики — около 2,5 тысячи лет назад.

В древнем Китае, как и во всех других предшествующих древней Греции цивилизациях (Вавилоне, Древнем Египте и т. д.), математика была не дедуктивной, а рецептурной наукой. Основную роль в математике играли не выводы, а факты, причем вопрос о том, как тот или иной факт был установлен, не считался особенно важным: достаточно правдоподобная догадка вполне могла заменить доказательство. Выписав несколько десятков первых чисел $N_m=2^m-2$ $(m=2, 3, 4, \ldots)$ и проверив, какие из них делятся на m, а какие не делятся, древнекитайские математики уверились в справедливости гипотезы 5 и зафиксировали ее как теорему. Однако мы с вами — не древние китайцы. Великие Евклид и Архимед (а еще ранее их — и Пифагор, и Платон, и Аристотель) убедили нас, что сущность математики состоит именно в доказательствах, без которых никакое утверждение нельзя считать верным.

Назовем натуральное число $m\neq 1$ *почти простым*, если разность 2^m-2 делится на m.

В силу малой теоремы Ферма любое простое число является почти простым. Поэтому гипотезу 5 можно переформулировать так:

Гипотеза 5′. *Каждое почти простое число является простым.*

Мы уже сказали, что древнекитайские математики рассмотрели делимость на m нескольких десятков первых чисел N_m и не нашли опровергающих примеров. Сегодня, с помощью ЭВМ, нетрудно было бы проверить делимость на m нескольких сотен первых чисел N_m. Однако и тут опровергнуть гипотезу 5 было бы непросто: среди первых 300 натуральных чисел мы бы не нашли почти простых чисел, не являющихся простыми. Однако гипотеза 5 все-таки неверна, то есть справедлива

Теорема 2. *Существуют почти простые числа, не являющиеся простыми.*

Самым маленьким таким числом является 341. Найти его было нелегко, доказать же, что оно — почти простое, совсем несложно, если к нашим услугам будет

Лемма 1. *Разность n^m-1 делится на $n-1$ при любых m и n,* вытекающая из тождества

$$n^m-1=(n-1)(n^{m-1}+n^{m-2}+\ldots+n+1).$$

В силу этой леммы

$$N_{341}=2^{341}-2=2(2^{340}-1)=2[(2^{10})^{34}-1]$$

делится на $2^{10}-1=1023=3\cdot 341$, а значит, и на 341.

Теперь легко может быть доказана гораздо более сильная

Теорема 3. *Существует бесконечно много почти простых чисел, не являющихся простыми.*

Эта теорема, очевидно, следует из такой леммы:

Лемма 2. *Если m — почти простое число, не являющееся простым, то и $m_1=2^m-1$ — почти простое число, не являющееся простым, причем $m_1>m$.*

В самом деле, так как m — не простое, $m=kL$, где $k>1$, $L>1$. Тогда, в силу леммы 1,

$$m_1=2^m-1=2^{kL}-1=(2^k)^L-1$$

делится на 2^k-1. Из $L>1$ следует $2^k-1<m_1$. Из $k>1$ вытекает $2^k-1>1$. Значит, m_1 — не простое.

Так как m — почти простое, $m_1-1=2^m-2=N_m$ делится на m: $N_m=mn$. Поэтому, в силу леммы 1,

---

*) Первая «половина» гипотезы 5 является, конечно, частным случаем малой теоремы Ферма.

$$2^{m_1-1}-1=2^{mn}-1=(2^m)^n-1$$

делится на $m_1=2^m-1$, а значит, и

$$N_{m_1}=2^{m_1}-2=2(2^{m_1-1}-1)$$

также делится на m_1, то есть m_1 — почти простое.

Наконец, из $m_1>1$ вытекает $m_1>m$.

Из теоремы 2 и леммы 2 следует *бесконечность множества нечетных почти простых чисел, не являющихся простыми.*

В 1926 г. француз П. Пуле (P. Poulet) составил полную таблицу всех нечетных почти простых чисел, не являющихся простыми и не превосходящих 5 000 000 000 (этих чисел оказалось довольно много); в 1928 г. он опубликовал таблицу всех таких чисел в пределах от 50 000 000 до 100 000 000. Однако вопрос о существовании четных почти простых чисел, отличных от простого числа 2, долго оставался открытым. Первое такое число 161 038 нашел в 1950 г. американец Д. Лемер (D. Lehmer). В 1951 г. голландец Н. Бегер (N. G. W. Beeger) доказал *бесконечность множества четных почти простых чисел.*

Упражнения

8. Докажите, что следующие (составные) числа являются почти простыми: а) 561, б) 2047, в) 161 038.

9. Существуют ли такие числа $m>1$, что на m делится число: а) 2^m-1, б) 2^m+1, в) 2^m+2, г) $2^{m-1}-1$?

3. Совсем почти простые числа

Все делители простого числа m, отличные от 1, — простые числа (такой делитель один — само m). Назовем натуральное число $m\neq 1$ *совсем почти простым*, если все его делители, отличные от 1, являются почти простыми числами.

Ясно, что *каждое простое число* одновременно *является и совсем почти простым, а каждое совсем почти простое число — почти простым.* Легко устанавливается

Теорема 4. *Существуют совсем почти простые числа, не являющиеся простыми.*

Например, $341=11\cdot 31$ — такое число, причем, очевидно, наименьшее из таких чисел.

В 1936 г. уже упоминавшийся американский математик Д. Лемер доказал, что существует бесконечно много почти простых чисел, разлагающихся, подобно числу 341, в произведение двух простых множителей. Так как все эти числа, очевидно, являются совсем почти простыми, *существует бесконечно много совсем почти простых чисел, не являющихся простыми.*

Упражнения

10. Являются ли совсем почти простыми следующие почти простые числа: а) 561, б) 2047?

11. Докажите, что ни одно четное почти простое число, отличное от 2, не может быть совсем почти простым.

Из результата упражнения 10 вытекает, что не все почти простые числа являются совсем почти простыми. Из упражнения 11 и указанного выше результата Н. Бегера следует, что *существует бесконечно много почти простых чисел, не являющихся совсем почти простыми.*

Заключительная серия упражнений связана с изучением тех чисел m, для которых выполняется утверждение малой теоремы Ферма, то есть таких m, что при любом n разность n^m-n делится на m.

Упражнения

12. Существуют ли такие составные числа m, что разность 3^m-3 делится на m?

13. Для любого ли натурального n существуют такие составные m, что разность n^m-n делится на m?

14. Докажите, что $3^{341}-3$ не делится на 341.

15. Докажите, что существуют такие составные числа m, что при любом n разность n^m-n делится на n.

Указание. Рассмотрите числа 561, 2821, 10 585, 15 841.

Отметим, наконец, что ни один человек в мире не знает сегодня:

I. Конечно ли множество чисел, названных в задаче 15?

II. Есть ли среди них четные числа?

В заключение считаю необходимым указать, что термины «почти простые» и «совсем почти простые» были введены автором при написании данной статьи.

задачник кванта

Задачи

M701 — M705; Ф713 — Ф717

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 ноября 1981 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 9—81» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М701, М702» или «Ф713». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

M701. Люда, Марина и Наташа нарисовали остроугольный треугольник LMN. Затем Люда построила свой треугольник, у которого длины двух сторон равны $|LM|$ и $|LN|$, а угол между ними на 60° больше угла L треугольника LMN. Точно так же Марина построила свой треугольник со сторонами длины $|ML|$ и $|MN|$, угол между которыми на 60° больше $\widehat{M}$, а Наташа — свой, у которого угол между сторонами $|NL|$ и $|NM|$ равен $\widehat{N}+60°$. Докажите, что третьи (новые) стороны треугольников у всех трех девочек одинаковы.

А. Каплан

M702. Обозначим через S_n сумму первых n простых чисел: $S_1=2$, $S_2=2+3=5$, $S_3=2+3+5=10$, $S_4=17$ и т. д. Докажите, что при любом n между S_n и S_{n+1} встречается точный квадрат.

И. Жук

M703*. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3\left(x+\frac{1}{x}\right)=4\left(y+\frac{1}{y}\right)=5\left(z+\frac{1}{z}\right), \\ xy+yz+zx=1. \end{cases}$$

А. Федоров

M704*. Вокруг квадрата описан параллелограмм (вершины квадрата лежат на разных сторонах параллелограмма). Докажите, что перпендикуляры, опущенные из вершин параллелограмма на стороны квадрата, образуют новый квадрат (рис. 1).

Н. Васильев

M705. На прямоугольном листе клетчатой бумаги расположено несколько прямоугольных карточек, стороны которых лежат на линиях сетки. Карточки покрывают лист в два слоя (то есть каждую клетку листа покрывают в точности две карточки).

а) Пусть каждая карточка имеет размеры 1×2 клетки. Докажите, что можно выбрать часть карточек так, чтобы они покрывали лист в один слой. (Передвигать карточки нельзя.)

Останется ли это верным, если карточки

б) могут иметь произвольные размеры,

в)* имеют размеры 1×3 клетки?

Г. Гальперин, В. Произволов

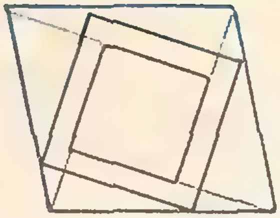


Рис. 1.

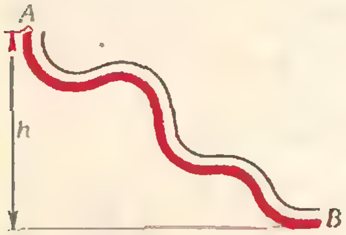


Рис. 2.

Ф713*). Гибкий трубопровод длины l соединяет в пространстве точки A и B, разность высот между которыми равна h (рис. 2). Внутри трубопровода по всей его длине лежит веревка, которую удерживают в точке A. С каким ускорением начнет двигаться веревка в первый момент времени, после того как ее отпустят? Трением между веревкой и стенками трубопровода пренебречь.

Ф714. В закрытом сосуде на поверхности воды плавает шар. Как изменится глубина погружения шара, если в сосуд накачать воздух так, чтобы давление воздуха в сосуде увеличилось в два раза?

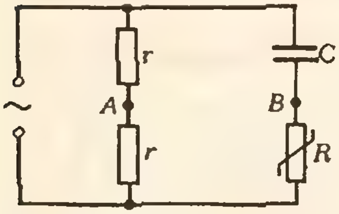


Рис. 3.

Ф715. Как зависит напряжение между точками A и B (рис. 3) от сопротивления резистора R?

Ф716. Из куска тонкой стальной ленты ширины d, в которой пробито небольшое отверстие радиуса r, сделали обруч и поставили его на стол так, что отверстие оказалось внизу. Из этого положения обруч немного сместили и предоставили самому себе. Чему равно максимальное значение скорости качения обруча?

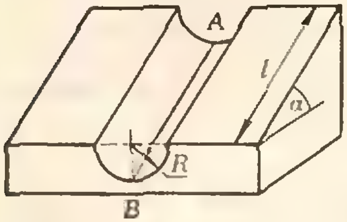


Рис. 4.

Ф717. Маленький шарик скользит без трения по цилиндрическому желобу радиуса R, ось которого наклонена под углом α к горизонту; длина желоба равна l (рис. 4). Сколько раз шарик пересечет линию AB, если он начал свое движение вблизи точки A?

---

*) Задачи по физике, вошедшие в этот выпуск Задачника «Кванта», взяты из архива И. Ш. Слободенкого, который в течение многих лет вел этот раздел в нашем журнале.

Решение задач

М661 — М665; Ф673 — Ф677

М661. *На берегу круглого озера четыре пристани: K, L, P, Q. От пристани K отплывает катер, от L — лодка. Если катер поплывет прямо в P, а лодка — прямо в Q, то они столкнутся в некоторой точке X озера. Докажите, что если катер поплывет в Q, а лодка — в P, то они достигнут этих пристаней одновременно.*

Разумеется, в условии предполагается, что катер движется с постоянной скоростью u, а лодка — с постоянной скоростью v. Из подобия треугольников KXQ и LXP $\frac{|KX|}{|LX|}=\frac{|KQ|}{|LP|}$. Поскольку катер и лодка достигают точки X одновременно, $\frac{|KX|}{u}=\frac{|LX|}{v}$, откуда $\frac{|KQ|}{|LP|}=\frac{u}{v}$, то есть $\frac{|KQ|}{u}=\frac{|LP|}{v}$.

Н. Васильев

М662. *В копилке собрано четыре рубля медными монетами. Докажите, что этими монетами можно заплатить три рубля без сдачи.*

Достаточно доказать, что можно заплатить без сдачи один рубль.

В копилке могут находиться монеты четырех видов: однокопеечные, двухкопеечные, трехкопеечные и пятаки. Поэтому монет какого-то вида не меньше рубля.

Если это — пятаки, двухкопеечные или однокопеечные, то ясно, что можно заплатить рубль без сдачи.

Рассмотрим поэтому случай, когда больше, чем на рубль, трехкопеечных монет, а монет каждого другого вида меньше, чем на рубль.

Если в копилке есть хотя бы одна однокопеечная монета, то, добавляя ее к 33 трехкопеечным, получаем рубль.

Если есть две двухкопеечные или два пятака, то, добавляя к 32 (соответственно к 30) трехкопеечным, получаем рубль.

Остается, таким образом, один случай, когда однокопеечных монет нет, двухкопеечных меньше двух, пятаков тоже меньше двух.

Если пятаков нет, то двухкопеечных монет не меньше двух (398 не делится на 3); если двухкопеечных нет, то пятаков не меньше двух (395 не делится на 3). Итак, в рассматриваемом случае есть один пятак и одна двухкопеечная, и мы можем набрать рубль, добавив один пятак и одну двухкопеечную к 31 трехкопеечной монете.

Интересно разобраться, какие вообще суммы могут быть уплачены без сдачи при четырехрублевом наборе медных монет в копилке.

Например, если в копилке только двухкопеечные монеты, то не может быть уплачена никакая нечетная сумма; если только пятаки, то — никакая сумма, не делящаяся на 5; если, наконец, в копилке 133 трехкопеечных и одна однокопеечная, то не может быть уплачена никакая сумма, которая при делении на 3 дает в остатке 2.

Значит, если некоторая сумма может быть уплачена при любом четырехрублевом наборе медных монет в копилке, то она делится на 10 и при делении на 3 не дает в остатке 2. Все ли такие суммы могут быть уплачены?

А. Кушниренко

◆

М663. *Найдите все простые числа p, для которых число 2^p+p^2 — тоже простое.*

При $p=2$ получается составное число 8, при $p=3$ — простое число 17.

Докажем, что при простом $p>3$ число 2^p+p^2 всегда делится на 3.

Действительно, $p=3k\pm1$ при некотором натуральном k. Поэтому

$$2^p+p^2=(3-1)^{3k\pm1}+(3k\pm1)^2=(3M-1)+(3N+1)=3(M+N).$$

Можно рассуждать иначе. Из нечетного p следует, что $2^p+1=(2+1)(2^{p-1}-2^{p-2}+\ldots+1)$. Значит, 2^{p-1} делится на 3. Поскольку p не делится на 3, $p^2-1=(p-1)(p+1)$ делится на 3. Отсюда следует делимость на 3 суммы $(2^p+1)+(p^2-1)=2^p+p^2$.

С. Майзус

◆

М664. *Дан четырехугольник $ABCD$ площади S. Обозначим точки пересечения высот треугольников ABC, BCD, CDA, DAB через H, K, L, M соответственно. Докажите, что площадь прямоугольника $HKLM$ тоже равна S.*

Самое простое аналитическое решение этой задачи получается с помощью операции *псевдоскалярного произведения векторов:* $\vec{a}\wedge\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\varphi$, где φ — угол, на который нужно повернуть вектор $\vec{a}$ против часовой стрелки, чтобы его направление совпало с направлением вектора $\vec{b}$. Геометрический смысл числа $\vec{a}\wedge\vec{b}$ — ориентированная площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 1). Нужные нам свойства:

1°. $(\vec{a}+\vec{b})\wedge\vec{c}=\vec{a}\wedge\vec{c}+\vec{b}\wedge\vec{c}$,
2°. $\vec{a}\wedge\vec{b}=-\vec{b}\wedge\vec{a}$.

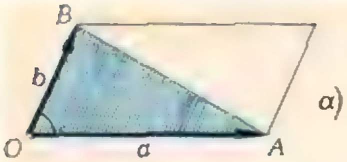


Рис. 1,а. $\vec a\wedge\vec b=2S_{\triangle AOB}$, если $\triangle AOB$ ориентирован положительно — против часовой стрелки.

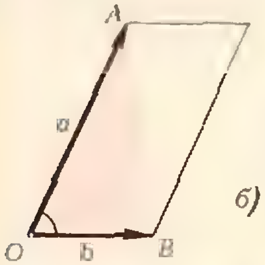


Рис. 1,б. $\vec a\wedge\vec b=-2S_{\triangle AOB}$, если $\triangle AOB$ ориентирован отрицательно.

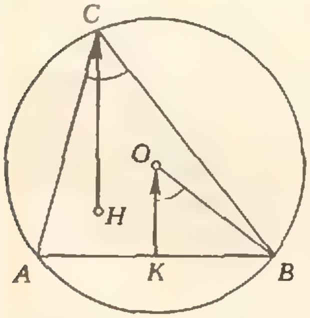


Рис. 2. $\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{KO}=\operatorname{ctg}\hat C\times R^{90^\circ}(\overrightarrow{AB})$.

3°. $\vec a\wedge\vec b=0$, если векторы $\vec a$ и $\vec b$ коллинеарны следуют из того, что $\vec a\wedge\vec b$ равно скалярному произведению векторов $\vec b$ и $R^{90^\circ}(\vec a)$.

Удобно ввести «симметричные» обозначения: пусть $A_1A_2A_3A_4$ — данный четырехугольник, H_1, H_2, H_3 и H_4 — точки пересечения высот треугольников $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$ и $A_1A_2A_3$ соответственно, а $\vec a_i$ и $\vec h_i$ — векторы, идущие из фиксированной точки O в A_i и H_i ($i=1, 2, 3, 4$).

Докажем, что треугольники $A_1A_2A_3$ и $H_1H_2H_3$ равновелики (имеют одинаковую площадь) и одинаково ориентированы. Поскольку удвоенная площадь $\triangle A_1A_2A_3$ (с учетом ориентации) равна $\overrightarrow{A_1A_2}\wedge\overrightarrow{A_1A_3}=(\vec a_2-\vec a_1)\wedge(\vec a_3-\vec a_1)=\vec a_1\wedge\vec a_2+\vec a_2\wedge\vec a_3+\vec a_3\wedge\vec a_1$, мы должны доказать равенство

$$\vec a_1\wedge\vec a_2+\vec a_2\wedge\vec a_3+\vec a_3\wedge\vec a_1=\vec h_1\wedge\vec h_2+\vec h_2\wedge\vec h_3+\vec h_3\wedge\vec h_1. \qquad (1)$$

Для этого мы используем лишь тот факт, что $[A_iH_j]\parallel[A_jH_i]$ при всех $i\neq j$. Скажем, $[A_1H_2]\parallel[A_2H_1]$, поскольку они перпендикулярны $[A_3A_4]$; поэтому $(\vec a_1-\vec h_2)\wedge(\vec a_2-\vec h_1)=0$. Сложив три равенства:

$$\vec a_1\wedge\vec a_2-\vec h_1\wedge\vec h_2=\vec a_1\wedge\vec h_1-\vec a_2\wedge\vec h_2,$$
$$\vec a_2\wedge\vec a_3-\vec h_2\wedge\vec h_3=\vec a_2\wedge\vec h_2-\vec a_3\wedge\vec h_3,$$
$$\vec a_3\wedge\vec a_1-\vec h_3\wedge\vec h_1=\vec a_3\wedge\vec h_3-\vec a_1\wedge\vec h_1,$$

получим (1).

Разумеется, так же доказывается вообще, что треугольники $A_iA_jA_k$ и $H_iH_jH_k$ равновелики и одинаково ориентированы (для всех $i\neq j\neq k$); в частности, это относится к треугольникам $A_3A_4A_1$ и $H_3H_4H_1$. Отсюда следует равенство площадей четырехугольников $A_1A_2A_3A_4$ и $H_1H_2H_3H_4$.

Более того, оба эти четырехугольника будут одновременно либо (а) выпуклыми, либо (б) невыпуклыми, но несамопересекающимися, либо (в) самопересекающимися: если все четыре треугольника $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$ имеют одинаковую ориентацию, то (а), если один отличается по ориентации от трех других — (б); если «счет ничейный» 2:2 — (в)

Если бы мы попытались перевести это решение на элементарно геометрический язык, получились бы громоздкая картина из множества параллелограммов, очевидные соотношения между площадями которых запутаны из-за особенностей расположения. Более элегантное геометрическое решение (требующее, однако, некоторых вычислений; в частности, оно использует формулу $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$) основано на полезных соотношениях, показанных на рисунке 2, где H — точка пересечения высот треугольников ABC, O — центр описанной вокруг него окружности, K — середина стороны AB*). На этом пути сразу ясно, что для четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$, вписанного в окружность, «ортоцентрический» четырехугольник $H_1H_2H_3H_4$ будет ему не только равновелик, но и конгруэнтен (в общем случае, как следует из равенства площадей треугольников $A_iA_jA_k$ и $H_iH_jH_k$, эти четырехугольники *аффинно эквивалентны*, то есть один получается из другого линейным преобразованием координат).

Б. Батырев, Н. Васильев, В. Трофимов

◆

М665. *Световое табло состоит из нескольких лампочек, каждая из которых может находиться в двух состояниях (гореть или не гореть). На пульте несколько кнопок, при нажатии каждой из которых одновременно меняется состояние у некоторого набора лампочек*

Пусть число лампочек равно N, количество кнопок — n. Обозначим через A_i подмножество лампочек, которое переключает i-я кнопка, то есть узор, который получается из начального состояния B_0 — «все лампочки не горят» — при нажатии i-й кнопки; мы будем также говорить об «операции A_i», понимая под этим нажатие i-й кнопки.

---

*) Это решение будет приведено в книге И. Ф. Шарыгина «Задачи по геометрии», выходящей в Библиотечке «Квант».

(для каждой кнопки — своего). Вначале лампочки не горят.

а) Докажите, что число различных узоров, которые можно получить на табло, — степень двойки.

б) Сколько различных узоров можно получить на табло, состоящем из $m \times n$ лампочек, расположенных в форме прямоугольника, если кнопками можно переключить каждый горизонтальный и каждый вертикальный ряд лампочек (проверьте ваш ответ для небольших значений m, n)?

в) Придумайте другие примеры табло и наборов (переключаемых кнопками), в которых можно найти число узоров.

Мы получили много доказательств утверждения а), основанных на разных соображениях. Приведем вкратце некоторые из них.

1°. Всего существует 2^N различных узоров светового табло, потому что каждая из N лампочек может находиться в двух состояниях — гореть или не гореть. Пусть нажатием кнопок из начального узора B_0 можно получить m разных узоров B_0, B_1, ..., B_{m-1}. Тогда из любого начального узора X можно получить такое же количество узоров — это те узоры, которые отличаются от X на множествах B_0, B_1, ..., B_{m-1}. Таким образом, если все 2^N узоров разбить на несколько классов: отнести к одному классу те узоры, которые можно получить друг из друга нажатием кнопок, то в каждом классе будет по m узоров. Поэтому 2^N делится на m; следовательно, m — степень двойки.

2°. Пусть кнопки занумерованы так, что ни один из s узоров A_1, A_2, ..., A_s нельзя получить комбинацией предыдущих (с меньшими номерами), а каждый из остальных $k-s$ узоров A_{s+1}, ..., A_k можно получить комбинацией некоторых из операций A_1, A_2, ..., A_s. Тогда общее число узоров m, которое можно получить из начального состояния B_0, равно 2^s. В самом деле, все комбинации операций A_1, A_2, ..., A_s, соответствующие 2^s различным подмножествам множества $\{1, 2, ..., s\}$, дают различные узоры: если бы какие-то два из них совпадали:

$$A_{i_1}A_{i_2}...A_{i_m}=A_{j_1}A_{j_2}...A_{j_l},$$

то узор A с наибольшим из входящих в это равенство номеров можно было бы получить комбинацией предыдущих.

3°. Посмотрим вначале не на все N лампочек, а на первые L из них. Пусть на этих лампочках из начального состояния B_0 можно получить m_L различных узоров. Затем посмотрим на $(L+1)$-ю лампочку. Если состояние $(L+1)$-й лампочки вполне определяется набором состояний первых L лампочек, то $m_{L+1}=m_L$. Если же хотя бы два узора совпадают на первых L лампочках, но отличаются на $(L+1)$-й, то можно получить узор, в котором первые L лампочек не горят, а $(L+1)$-я горит. Тогда из каждого узора наших L лампочек можно получить два различных узора из первых $L+1$ лампочек, то есть $m_{L+1}=2m_L$. Поскольку одна (первая) лампочка может находиться в двух состояниях, ясно, что интересующее нас $m=m_N$ будет степенью двойки.

Многие читатели заметили, что операции A_i и состояния табло («узор») удобно представлять как наборы из N чисел $+1$ и -1 (при этом операция нажатия кнопки соответствует умножению наборов) или как наборы из N чисел 0 и 1 (тогда наборы складываются почленно «по модулю 2», то есть $1+1=0$).

Применим первое из этих представлений для решения задачи б).

Будем считать, что $x_{ij}=-1$, если лампочка в i-й строке и j-м столбце горит, и $x_{ij}=1$ — в противном случае ($1<i<m$, $1<j<n$). Докажем, что общее число узоров, которые можно получить из начального состояния «все $x_{ij}=1$», равно 2^{m+n-1}.

Допустимые операции (их $m+n$) — это умножение строки или столбца на -1. Очевидно, мы можем получить произвольный набор из $m+n-1$ чисел ± 1 в первой строке и в первом столбце: x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n}, x_{21}, x_{31}, ..., x_{m1}. Но каждое из остальных x_{ij} этими $m+n-1$ числами определяется уже однозначно, поскольку при любых допустимых операциях будет сохраняться равенство $x_{ij}x_{11}=x_{i1}x_{1j}$.

Аналогичное рассуждение (с использованием тождества $x_{ijk}x_{1jk}x_{i1k}x_{ij1}=x_{111}x_{11k}x_{1j1}x_{i11}$) показывает, что для табло, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, состоящего из $m \times n \times p$ лампочек, у которого разрешается переключать любой ряд лампочек, параллельный ребру параллелепипеда, число узоров в одном классе равно $2^{mnp-(m-1)(n-1)(p-1)}$, то есть число классов узоров равно $2^{(m-1)(n-1)(p-1)}$ (см. решение 1° задачи а)).

Н. Васильев

Ф673. *Груз висит на упругой нити. Если к грузу прикладывать силу, медленно нарастающую от нулевого значения, то нить оборвется, когда величина силы достигнет значения F_1. При какой минимальной величине силы оборвется нить, если прикладываемая сила мгновенно достигает некоторого значения и в дальнейшем остается неизменной?*

Упругую нить можно рассматривать как пружину. Пусть жесткость этой пружины равна k. Согласно условию задачи при медленном нарастании силы нить обрывается, когда полная сила $F_п$, приложенная к ней, равна

$$F_п=mg+F_1, \qquad (*)$$

где m — масса подвешенного груза. Посмотрим, что происходит в том случае, когда прикладываемая сила мгновенно достигает некоторого значения F и в дальнейшем не меняется.

В начальный момент (когда сила равна нулю) нить растянута под действием силы тяжести груза mg на величину x_0, определяемую условием $kx_0=mg$, то есть координата конца нити в положении равновесия равна $x_0=mg/k$ (за начало отсчета принято положение конца нити в отсутствие груза). При приложении силы F координата конца нити в положении равновесия будет равна $x'=mg/k+F/k$. Однако в состояние равновесия система перейдет лишь после затухания возникающих колебаний. Начальная амплитуда этих колебаний определяется начальным отклонением системы от положения равновесия, то есть $A=x'-x_0=F/k$. Так как затухание колебаний мало, через половину периода полное растяжение пружины будет равно

$$x_п=\frac{mg+F}{k}+A=\frac{mg}{k}+2\frac{F}{k}.$$

Это означает, что к нити приложена суммарная сила

$$F'_п=mg+2F.$$

Нить оборвется, если эта сила больше чем сила $F_п$ (см. $(*)$), определяющая предел прочности нити. Таким образом, минимальная сила F_{min}, при которой произойдет обрыв нити, находится из условия $F'_п=F_п$, то есть

$$mg+2F_{мин}=mg+F_1;$$

отсюда

$$F_{min}=F_1/2.$$

Г. Баронов

◆

Ф674. *Серный ангидрид SO_3 в количестве $\nu_1=1$ моль поместили в замкнутый сосуд и нагрели до температуры $T_1=1000$ К, при которой SO_3 частично диссоциирует на сернистый ангидрид SO_2 и кислород: $SO_3=SO_2+\frac{1}{2}O_2$. Степень диссоциации в этих условиях оказалась равной $\alpha_1=0{,}2$ (то есть диссоциировали 20% первоначально имевшихся молекул SO_3). Когда в тот же сосуд поместили $\nu_2=0{,}4$ моль SO_3, то оказалось, что для получения такого же, как в первом опыте, давления газ надо нагреть до температуры $T_2=2000$ К. Определить степень диссоциации SO_3 во втором опыте. Все вещества в обоих опытах находятся в газообразном состоянии.*

При полной диссоциации из 1 моля SO_3 получается 1,5 моля газов (SO_2 и O_2). Следовательно, если диссоциировало $\alpha\nu$ молей SO_3, то в сосуде находятся $1{,}5\alpha\nu$ молей SO_2 и O_2 и $(1-\alpha)\nu$ молей SO_3; полное число молей газов в сосуде равно

$$n=1{,}5\alpha\nu+(1-\alpha)\nu=(1+0{,}5\alpha)\nu.$$

Запишем уравнения состояния газов в сосуде в первом ($\nu_1=1$ моль, $T_1=1000$ К, $\alpha_1=0{,}2$) и во втором ($\nu_2=0{,}4$ моль, $T_2=2000$ К, $\alpha_2=?$) случаях (давления и объемы в обоих случаях одинаковы):

$$pV=n_1RT_1,\ pV=n_2RT_2.$$

Следовательно, $n_1T_1=n_2T_2$, то есть

$$(1+0{,}5\alpha_1)\nu_1T_1=(1+0{,}5\alpha_2)\nu_2T_2,$$

откуда

$$\alpha_2=2\left((1+0{,}5\alpha_1)\frac{\nu_1T_1}{\nu_2T_2}-1\right)=0{,}75=75\%.$$

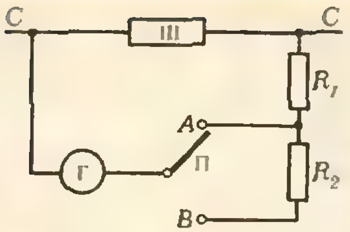
В. Белонучкин

◆

Ф675. *Для измерения больших токов в цепи СС (см. рисунок) используется шунт Ш,*

Так как сопротивление шунта много меньше сопротивления подключенной к нему измерительной схемы, напряжение на участке СС равно $U=Ir_ш$.

параллельно которому через сопротивления $R_1=2$ Ом и R_2 подключается измерительный прибор Г с внутренним сопротивлением $r=10$ Ом. В положении А переключателя П вся шкала прибора соответствует току в цепи $I_1=10$ А. Каким надо взять сопротивление R_2, чтобы в положении В переключателя П вся шкала прибора соответствовала току $I_2=100$ А?
Сопротивление шунта считать много меньше внутреннего сопротивления прибора.



Если стрелка прибора при двух вариантах замыкания схемы отклоняется на полную шкалу, то токи, текущие через прибор, в обоих случаях одинаковы. Следовательно,

$$\frac{I_1 r_ш}{R_1+r}=\frac{I_2 r_ш}{R_1+R_2+r},$$

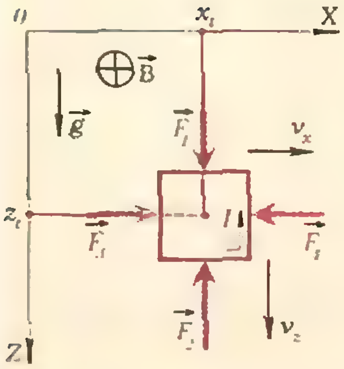
откуда

$$R_2=\left(\frac{I_2}{I_1}-1\right)(R_1+r)=108\text{ Ом}.$$

Л. Луганский

◆

Ф676. *Проволочной квадратной рамке с периметром $4a$ и массой m сообщают в горизонтальном направлении некоторую начальную скорость. Рамка движется в вертикальной плоскости, все время находясь в магнитном поле, перпендикулярном плоскости рамки (см. рисунок). Индукция поля меняется по закону $B(z)=B(0)+kz$, где $k=\text{const}$. Сопротивление рамки равно R. Через некоторое время скорость рамки становится постоянной и равной v. Найти начальную скорость, сообщаемую рамке. Ускорение свободного падения g.*



В отсутствие магнитного поля рамка двигалась бы в поле тяжести Земли с постоянной горизонтальной скоростью $\vec{v}_0$ вдоль оси X и равноускоренно с ускорением свободного падения $\vec{g}$ вдоль оси Z. Очевидно, что движение рамки не изменилось бы, если бы она падала в однородном магнитном поле. В нашем случае поле — не однородное (вдоль оси Z): $B(z)=B_0+kz$, то есть индукция поля линейно растет с ростом z; поэтому при падении рамки поток магнитной индукции Φ, пронизывающий контур рамки, будет меняться и в контуре рамки будет возникать ЭДС индукции. Поскольку рамка является замкнутым проводящим контуром, по ней потечет индукционный ток. В этом случае, согласно закону Ампера, на стороны рамки будут действовать силы со стороны магнитного поля. Найдем направления и величины этих сил.

Пусть в некоторый момент времени центр масс рамки находится в точке с координатами x_t, z_t и проекции скорости центра масс на оси X и Z равны v_x и v_z (см. рисунок). Поток магнитной индукции Φ, пронизывающий рамку в этот момент времени, равен

$$\Phi=\frac{(B_0+k(z_t-a/2))+(B_0+k(z_t+a/2))}{2}a^2=(B_0+kz_t)a^2.$$

Здесь $B_0+k(z_t-a/2)$ и $B_0+k(z_t+a/2)$ — значения индукции магнитного поля соответственно у верхней и нижней сторон рамки; поскольку зависимость $B(z)$ — линейная, для вычисления Φ мы пользуемся средним (по высоте z) значением индукции.

ЭДС индукции в рамке в данный момент времени равна

$$|\mathscr{E}|=\frac{|\Delta\Phi|}{\Delta t}=ka^2\frac{|\Delta z|}{\Delta t}=ka^2|v_z|,$$

индукционный ток равен

$$I=\frac{|\mathscr{E}|}{R}=\frac{ka^2}{R}|v_z|.$$

Согласно правилу Ленца, возникающий в рамке индукционный ток будет течь против часовой стрелки. По закону Ампера со стороны магнитного поля на верхнюю сторону рамки будет действовать сила

$$|\vec{F}_1|=(B_0+k(z_t-a/2))Ia=(B_0+k(z_t-a/2))\frac{ka^3}{R}|v_z|,$$

на нижнюю сторону — сила

$$|\vec{F}_2|=(B_0+k(z_t+a/2))Ia=(B_0+k(z_t+a/2))\frac{ka^3}{R}|v_z|.$$

Силы $\vec{F}_3$ и $\vec{F}_4$, действующие на боковые стороны рамки, очевидно, будут равны по величине и противоположны по знаку:

$$|\vec{F}_3|-|\vec{F}_4|=\frac{(B_0+k(z_l-a/2))+(B_0+k(z_l+a/2))}{2}\,Ia=$$

$$=(B_0+kz_l)\,\frac{ka^3}{R}\,|v_z|,$$

$$\vec{F}_3+\vec{F}_4=0.$$

Следовательно, $v_x=\mathrm{const}$, то есть рамка будет двигаться вдоль оси X с постоянной скоростью, равной начальной скорости v_0.

Таким образом, характер движения рамки в направлении оси Z определяется силами $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и силой тяжести $m\vec{g}$. При установившейся скорости v рамки проекция скорости на ось Z постоянна, то есть ускорение $\vec{a}_z$ вдоль оси Z равно нулю:

$$m|\vec{a}_z|=m|\vec{g}|+|\vec{F}_1|-|\vec{F}_2|=mg-\frac{k^2a^4}{R}|v_z|=0.$$

Отсюда находим проекцию $v_{\text{уст.}\,z}$ на ось Z установившейся скорости рамки:

$$v_{\text{уст.}\,z}=mgR/k^2a^4.$$

Установившаяся скорость рамки равна $v=\sqrt{v_0^2+v_{\text{уст}\,z}^2}$, где v_0 — проекция скорости v на ось X, равная, как мы показали, начальной скорости, сообщенной рамке. Таким образом,

$$v_0=\sqrt{v^2-v^2_{\text{уст}\,z}}=\sqrt{v^2-\left(\frac{mgR}{k^2a^4}\right)^2}.$$

Скорость $v_{\text{уст.}\,z}$ может быть найдена и из энергетических соображений. При установившемся движении рамки изменение за время Δt потенциальной энергии рамки в поле тяжести Земли равно тепловой энергии, выделяющейся за это время в рамке:

$$mgv_{\text{уст.}\,z}\Delta t=I^2_{\text{уст}}R\Delta t=\left(\frac{ka^2}{R}\right)^2v^2_{\text{уст.}\,z}R\Delta t.$$

Отсюда

$$v_{\text{уст.}\,z}=\frac{mgR}{k^2a^4}.$$

В. Можаев

◆

Ф677. *С помощью системы концентрических зеркал (рис. 1) на экране получено изображение Солнца. Радиусы зеркал $R_1=12$ см, $R_2=-30$ см. Каково должно быть фокусное расстояние тонкой линзы, чтобы с ее помощью получалось изображение Солнца такого же размера?*

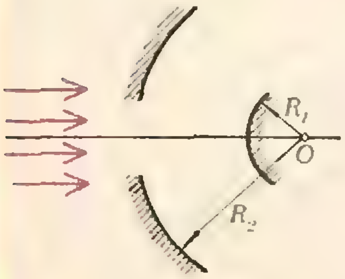


Рис. 1.

Задача может быть решена двумя способами.

1. В фокальной плоскости первого зеркала (радиуса R_1) получается изображение Солнца, которое является предметом для второго зеркала (радиуса R_2). Если угловой размер Солнца равен α, то размер этого изображения равен $l=\alpha F_1=\alpha R_1/2$; находится изображение на расстоянии $d_2=R_2-R_1/2$ от второго зеркала. Увеличение второго зеркала равно $\Gamma_2=F_2/(d_2-F_2)=R_2/(R_2-R_1)$. Размер изображения, получающегося в системе зеркал, равен

$$L_з=l\Gamma_2=\frac{\alpha R_1}{2}\,\frac{R_2}{R_2-R_1}=\alpha\,\frac{R_2R_1}{2(R_2-R_1)}.$$

Тонкая линза создает в своей фокальной плоскости изображение Солнца размера

$$L_л=\alpha F_л.$$

Чтобы получить изображение размера $L_л=L_з$, надо взять линзу с фокусным расстоянием

$$F_л=\frac{R_2R_1}{2(R_2-R_1)}=10\text{ см}.$$

2. На рисунке 2 показан ход одного из лучей (AB), параллельных оптической оси системы зеркал. Точка M — точка пересечения падающего на систему луча AB (его продолжения) с лучом DF, выходящим из системы. Поместим в плоскость NN', проходящую через точку M и перпендикулярную оптиче-

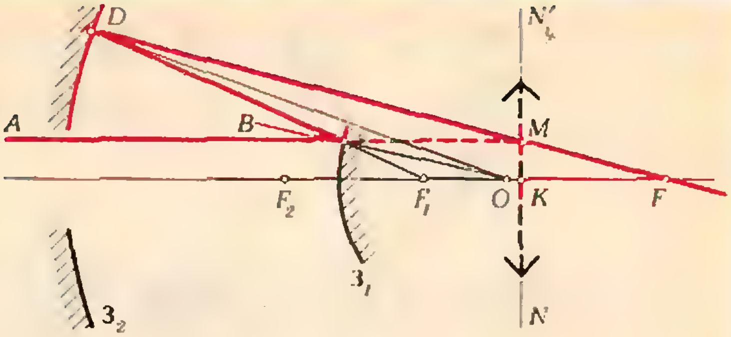


Рис. 2.

ской оси системы, тонкую линзу с фокусным расстоянием $F_л = |KF|$.

Луч AB, падающий на линзу (в отсутствие зеркал), после преломления пройдет через точку F, то есть ход луча будет тот же, что и на выходе системы зеркал. Следовательно, изображение Солнца, полученное с помощью линзы, будет иметь те же размеры, что и изображение, даваемое системой зеркал.

Нетрудно рассчитать, что фокусное расстояние линзы должно быть равно $F_л = 10$ см.

Е. Кузнецов

Список читателей, приславших правильные решения

В этом номере мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения задач М646—М660; Ф663—Ф677 {жирные цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач}.

Математика

Большинство читателей, приславших свои решения, справились с задачами **М647**, **М648**, **М651**. Остальные задачи решили: *Е. Абакумов* (Ленинград) **52—54**; *Э. Абдуллаев* (Масаллы) **53, 54**; *В. Авербах* (Донецк) **58**; *В. Александров* (Саратов) **53**; *М. Алексеев* (Москва) **50а) — в), 52, 54**; *А. Аляев* (с. Пачелма Пензенской обл.) **53**; *М. Араслинов* (Запорожье) **53, 54**; *Я. Базалий* (Донецк) **46**; *А. Барг* (Николаев) **46**; *Ю. Баркаган* (Пенза) **54**; *Е. Белова* (Видное) **53, 54**; *А. Бердюгин* (Ангарск) **53**; *И. Бинус* (Пенза) **52, 54, 56**; *Н. Близнюк* (Пятигорск) **53**; *А. Болдырихин* (Могилев-Подольский) **53, 56**; *А. Брудный* (Ярославль) **50а)—в), 52, 53, 56, 58**; *В. Будовский* (Харьков) **53**; *В. Ваяуев* (Тула) **53, 54**; *О. Васюра* (Калиновка) **53**; *М. Володинская* (Киев) **54**; *М. Гайсинский* (Ташкент) **46, 50а)—в), 52, 54, 55а), б)**; *В. Гапонов* (Москва) **53, 54**; *М. Гапонова* (Горький) **50а), б)**; *О. Гарифуллин* (Пенза) **52, 54**; *В. Геншенбейн* (Москва) **52, 54, 55а), 56**; *Г. Головин* (Славянск) **52, 54**; *А. Гольденшлюгер* (Фрунзе) **52, 53**; *С. Горшков* (Москва) **50а), б), 52, 54**; *Е. Горшков* (Пермь) **54**; *Д. Гоцко* (Львов) **50а)—в), 53, 54, 55а)**; *О. Гринив* (Киев) **46, 50а)—в), 52—54, 56, 58**; *А. Гутин* (Клинцы) **46, 50а)—в), 52—54, 55а)**; *А. Даниленко* (Харьков) **54**; *В. Денисов* (Москва) **46, 50а), 52—54**; *С. Долгополов* (Полтава) **53**; *Т. Доложина* (Херсон) **52**; *О. Дранко* (Киев) **46, 50а), б), 52—54**; *А. Дробышев* (Ленинград) **54**; *А. Дубицкас* (Таураге) **46, 53, 54**; *О. Ерошкин* (Днепропетровск) **53, 54, 56, 58, 59**; *И. Жуков* (Ленинград) **46, 50а)—в), 52, 54, 57, 58, 60**; *Б. Зальцман* (Хабаровск) **53**; *А. Зеге* (Минск) **50а) — в), 53, 54, 56**; *А. Золотых* (Курск) **52—54, 56, 58, 60**; *И. Зябрев* (Кролевец) **52—54, 56**; *З. Ибрагимов* (Масаллы) **50а), 53**; *В. Ивлев* (Донецк) **50а), б), 53**; *А. Ишханян* (Джермук) **53, 54**; *М. Каган* (Пенза) **52, 54**; *А. Кагарманов* (Белорецк) **52—54, 56**; *А. Казмерчук* (Киев) **54**; *А. Карпович* (Киев) **54**; *А. Кац* (Ташкент) **52, 54**; *Н. Качан* (д. Якимовки Минской обл.) **53, 54**; *А. Кернерман* (Киев) **53**; *В. Ким* (Бектемир) **46**; *С. Ким* (Бектемир) **46, 50а), б), 53, 54**; *А. Киселев* (Ташкент) **52—54**; *В. Кисиль* (Одесса) **52—54, 56**; *М. Климовицкий* (Пермь) **54**; *В. Козловский* (д. Н. Двор Гродненской обл.) **52, 54, 56**; *И. Колпаков* (Сочи) **50а), б), 52, 54**; *А. Корнилов* (Ростов-на-Дону) **50а)—в), 52—54, 60**; *Д. Короткин* (Ленинград) **46, 50а), б), 52—54; 56—59**; *И. Кривицкий* (п. Березка Владимирской обл.) **50а), б)**; *О. Крижановский* (Харьков) **50а), б), 52—54**; *Е. Кузнецов* (Ижевск) **46**; *Ю. Куприков* (Подольск) **53, 54**; *С. Ламихов* (Ташкент) **50а), б), 52—54**; *И. Ланджев* (Дургас, НРБ) **53**; *Л. Лейцин* (Чернигов) **53, 54, 57**; *О. Мазуров* (Новосибирск) **53, 54**; *О. Малов* (Казань) **53**; *С. Мамедов* (Баку) **53, 54**; *Е. Мендрелюк* (Могилев-Подольский) **53**; *Л. Меркявичус* (Лентварис) **46, 52—60**; *А. Мильман* (Одесса) **53, 54, 56—58**; *Л. Мильман* (Минск) **53, 54**; *Э. Мирзоян* (Ереван) **46, 50а), б), 53, 54**; *А. Насретдинов* (Свердловск) **53**; *Г. Непомнящий* (Винница) **50а)**; *Ю. Николаевский* (Харьков) **50а), б), 54,**

55а); *А. Никонов* (Кировград) **50а), б), 52—54, 56, 58**; *М. Овецкий* (Донецк) **56, 58**; *П. Овчинников* (Вязники) **46, 52, 54, 55а), 56, 58**; *В. Образцов* (Москва) **60**; *М. Окроян* (Ереван) **46, 50а), б)**; *В. Перевалов* (Ангарск) **53**; *Г. Перельман* (Ленинград) **46, 50а), б), 52—54**; *Е. Попов* (Белорецк) **52—54**; *Л. Потемкина* (Киев) **50а), б), 52, 53**; *В. Поярков* (Николаев) **50а), б), 52, 53**; *Ю. Прохоров* (Москва) **50а), 52, 54**; *Н. Розенвайн* (Киев) **53**; *В. Романюк* (С. Куснище Волынской обл.) **54**; *А. Руденский* (Донецк) **46, 50а)—в)**; *П. Савельев* (Ногинск) **53**; *А. Савкин* (п/о Воейково Ленинградской обл.) **46, 50а)—в), 52, 54, 56, 58**; *Н. Сайгина* (Саратов) **46, 50а)—в), 53, 54**; *К. Салий* (Саратов) **53**; *Р. Самборский* (Тернополь) **52—54**; *М. Сафаров* (Новосибирск) **52—54**; *М. Свердликов* (Новосибирск) **52, 53, 56, 58**; *А. Сикса* (Киев) **46, 52—54**; *А. Смирнов* (Курган) **52**; *Н. Солодовникова* (Долгопрудный) **53**; *А. Сохет* (Харьков) **50а), б), 52, 54, 55а)**; *С. Спичак* (Припять) **50а)—в)**; *В. Стафеев* (Челябинск) **52**; *Э. Степанян* (Баку) **50а)—в), 52—54, 58**; *Ю. Талденко* (Сумы) **46, 52, 54**; *Л. Тимофеев* (Клин) **52, 54, 55а), 56**; *С. Тимофеев* (совх. Саханка Донецкой обл.) **54**; *В. Титенко* (д. Блужа Минской обл.) **52, 54, 56, 58**; *С. Ткаченко* (Могилев-Подольский) **53, 56**, *Ю. Трофимчук* (Калиновка Винницкой обл.) **53**; *Г. Трунов* (Москва) **54**; *Р. Угриновский* (Хмельник) **53, 54, 55а), 56**; *Я. Фельдман* (Киев) **53, 54, 56**; *А. Филановский* (Ленинград) **52**; *В. Финогеев* (Москва) **53**; *Д. Фомин* (Ленинград) **46, 50а)—в), 52—54, 55а), б), 56, 58**; *О. Фонарев* (Сумгаит) **46, 50а)—в), 55а)**; *А. Харитонский* (Киев) **50а), в)**; *А. Хасанов* (с. Колатан АзССР) **53**; *А. Хилков* (Новомосковск) **50а), б), 52—54, 56**; *О. Хорошевская* (Новосибирск) **52—54**; *А. Хохлов* (Москва) **53, 54, 56**; *В. Цекановский* (Донецк) **50а)—в)**; *И. Цимох* (Кировград) **52—54**; *О. Чалых* (Витебск) **46, 50а), б), 53, 54, 55а), 57**; *Е. Черненко* (Пенза) **54**; *А. Чистоклетов* (п. Мулловка Ульяновской обл.) **56**; *А. Шайдеров* (Калининград) **56**; *В. Шах* (с. Замшаны Волынской обл.) **46**; *З. Шибзухов* (Нальчик) **50а), б)**; *А. Шигарев* (Сибай) **56**; *В. Штейнбок* (Москва) **52, 54**; *Л. Элькун* (Ташкент) **50а), 52—54**; *Л. Эпремидзе* (Тбилиси) **46, 53, 54, 56—58**; *Ф. Эфендиев* (Баку) **54**; *С. Юровский* (Мытищи) **52**; *А. Ярхина* (Москва) **54**; *Н. Яцкевич* (Саратов) **53**; *А. Яшпатров* (Ангарск) **53**.

Физика

Почти все читатели, приславшие свои решения, справились с задачами **Ф664, Ф665, Ф671** и **Ф675**. Остальные задачи решили: *В. Абаджев* (Львов) **73—77**; *В. Аветисов* (Баку) **66, 70—77**; *И. Аглиуллин* (Москва) **66**; *Э. Алиев* (Баку) **66, 69, 70, 73, 76, 77**; *Г. Андрян* (с. Н. Оратаг Аз.ССР) **73**; *Э. Аносин* (Латв.ССР) **73, 76**; *К. Аракелов* (Моздок) **70, 73, 74, 76**; *Т. Аракелян* (Ереван) **73, 76, 77**; *Д. Асмус* (Челябинск) **73, 74**; *А. Ахмедзянов* (Уральск) **63, 66, 68, 72—74, 76**; *О. Ахремов* (Вильнюс) **73, 74, 76**; *А. Бабаев* (Баку) **73**; *Э. Багдасарян* (Баку) **73**; *Я. Базалий* (Донецк) **73, 74, 76, 77**; *Д. Басалаев* (Черногорск) **66**; *О. Бендер* (Запорожье) **66, 67, 73, 74, 76**; *П. Бибиков* (Ленинград) **73, 74**; *Л. Бураковский* (Киев) **72**; *Б. Вейцман* (Одесса) **63, 66, 68—77**; *В. Вермуя* (Душанбе) **74**; *А. Вернета* (ст. Старошнинская Краснодарского кр.) **67, 69, 72**; *Р. Вилеев* (Пермь) **73, 74**; *А. Владимиров* (Пущино) **66, 74, 76, 77**; *Ю. Воеводов* (Гомель) **74**; *С. Вознюк* (Харьков) **74, 76, 77**; *А. Воробьев* (Тихвин) **66, 67**; *Р. Върбанов* (Тервел, НРБ) **69—72**; *Г. Гаев* (Саратов) **74, 76, 77**; *Н. Гасанов* (Баку) **70**; *А. Григоров* (Ямбол, НРБ) **72**; *К. Григоришин* (Запорожье) **73, 74**; *Д. Григорьев* (Москва) **67—77**; *И. Губин* (Ереван) **67, 69**; *А. Гутин* (Клинцы) **67—72**; *Ю. Гуревич* (Кемерово) **73, 74, 76**; *И. Гурович* (Одесса) **73, 74**; *И. Дамм* (Черновцы) **66, 67, 70, 73, 74**; *А. Денисов* (Новосибирск) **66**; *А. Добряков* (Житомир) **70, 76**; *М. Догадов* (Арзамас) **66**; *С. Дубинский* (Керчь) **74, 77**; *С. Евдокимов* (Витебск) **66, 67, 69, 70, 72**; *В. Евстратов* (Ленинград) **73, 74, 76**; *Т. Енчев* (Ямбол, НРБ) **73, 77**; *И. Еськов* (Таганрог) **74**; *А. Жупинский* (Молодечно) **66**; *Д. Зайцев* (Ясногорск) **69**; *В. Зац* (Ташкент) **74**; *Ю. Звегинцев* (Харьков) **66, 69, 72**; *М. Зейфман* (Вологда) **63, 66, 73—77**; *И. Златогорский* (Саратов) **66**; *П. Здоманович* (Алма-Ата) **74**; *Е. Ильмер* (Ленинград) **66**; *Л. Йосипов* (Киев) **66, 73**; *В. Кагаловский* (Харьков) **67**; *А. Клейман* (Бердичев) **73, 74**; *И. Климкович* (с. Чернелица Ивано-Франковской обл.) **66**; *С. Козлов* (Москва) **63, 66, 67, 69, 73—77**; *А. Колежук* (Киев) **76**; *В. Комов* (Александров) **63, 66, 69, 72—77**; *И. Компанейцев* (Алма-Ата) **72**; *М. Копп* (Мичуринск) **66**; *С. Королев* (Кирсанов) **66**; *Г. Костылин* (Минск) **69**; *А. Костюковский* (Харьков) **67**; *А. Кубышкин* (Киев) **69, 72—74**; *Л. Кудрявцев* (Нефтекамск) **69, 74**; *С. Кудрявцев* (Магадан) **66**; *В. Курганов* (п. Усть-Куйга Як.АССР) **66, 72**; *Л. Кучук* (Минск) **73, 76**; *И. Куянов* (Казань) **66**; *А. Латынин* (Киев) **73, 74**; *В. Леков* (Ямбол, НРБ) **70**; *Ю. Логвин* (Лида) **72, 74, 76**; *А. Ляпин* (Москва) **66, 67**; *И. Маркичев* (Киржач) **73, 74, 76**; *Д. Мансуров* (ст. Акстафа Аз.ССР) **66**; *Е. Мельничук* (с. Черноводы Хмельницкой обл.) **73**; *А. Мильман* (Одесса) **67, 68, 70, 74, 76, 77**; *В. Михайлов* (Опочка) **73, 74, 76**; *П. Морозов* (Тула) **73, 74**; *А. Мосупов* (п. Магнитка Челябинской обл.) **66**; *Д. Набутовский* (Новосибирск) **73, 74, 77**; *Г. Напобашвили* (Тбилиси) **73**; *М. Найговзин* (Баку) **66**; *К. Немченко* (Донецк) **73—77**; *С. Нестеренко* (Красноярск) **66, 74**; *К. Никашев* (Салават) **73, 74**; *Л. Никитин* (Великие Луки) **74**; *Ю. Остапчук* (Здолбунов) **66, 73, 74, 76**; *А. Охапкин* (Львов) **66**; *С. Пащенко* (Киев) **69, 74, 76, 77**; *В. Пентегов* (Киев) **66, 69, 73**; *В. Пешикова* (Запорожье) **66**; *В. Петров* (Свердловск) **76**; *М. Пинскер* (Москва) **73**; *А. Пироженко* (Мытищи) **63, 66, 67, 73—77**; *О. Плотникова* (Волгоград) **66**; *И. Полюбин* (Иваново) **73—77**; *А. Попов* (Климовск) **69**; *Л. Потемкина* (Киев) **66**; *В. Прилипко* (Киев) **66**; *А. Ривилис* (Киев)

(Окончание см. на с. 56)

Премии «Кванта»

В 1980/81 учебном году редакция получила более 13 тысяч писем с решениями задач из Задачника «Кванта». Школьники, решившие наибольшее число задач или приславшие наиболее оригинальные решения, награждаются специальными премиями, учрежденными редакционной коллегией журнала.

Книгами серии «Библиотечка «Квант» с автографами авторов награждаются:

АБДУЛАЕВ Эльмар (г. Масаллы, с. ш. № 2)
АХМЕДЗЯНОВ Аскат (г. Уральск, с. ш. № 6)
БРУДНЫЙ Александр (г. Ярославль, с. ш. № 33)
ГРИГОРЬЕВ Дмитрий (г. Москва, с. ш. № 57)
ГУТИН Александр (г. Клинцы, с. ш. № 2)
ЕВДОКИМОВ Сергей (г. Витебск, с. ш. № 3)
ЗЕЙФМАН Михаил (г. Вологда, с. ш. № 9)
ИБРАГИМОВ Захид (г. Масаллы, с. ш. № 2)
КИМ Сергей (г. Бектемир, с. ш. № 2)
КОЗЛОВ Сергей (г. Москва, ФМШ № 18 при МГУ)
МЕРКЯВИЧУС Ляонас (г. Лентварис, с. ш. № 2)
ОВЧИННИКОВ Павел (г. Вязники, с. ш. № 11)
РОМАНЮК Виктор (с. Куснище Волынской обл.)
СМИРНОВ Алексей (г. Курган, с. ш. № 28)
ФОНАРЕВ Олег (г. Сумгаит, с. ш. № 11)
ФРОЛОВ Александр (г. Тула, с. ш. № 36)

Подпиской на журнал «Квант» на 1982 год награждаются:

БАГДАСАРЯН Эмин (г. Баку, с. ш. № 46)
ВЕЙЦМАН Борис (г. Одесса, с. ш. № 53)
ЕРОШКИН Олег (г. Днепропетровск, с. ш. № 15)
ЖУКОВ Игорь (г. Ленинград, с. ш. № 227)
ЗВЕГИНЦЕВ Юлий (г. Харьков, с. ш. № 118)
КОРОТКИН Дмитрий (г. Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ)
ПЕНТЕГОВ Всеволод (г. Киев, с. ш. № 145)
СОКОЛ Александр (п. Черноголовка Моск. обл., с. ш. № 82)
СПИВАК Александр (г. Москва, ФМШ № 18 при МГУ)
ТАЛДЕНКО Юрий (г. Сумы, с. ш. № 10)
ТИТЕНКО Владимир (д. Блужа Минской обл.)
УГРИНОВСКИЙ Роман (г. Хмельник, с. ш. № 3)
ЧАЛЫХ Олег (г. Москва, ФМШ № 18 при МГУ)

За успешное участие в XV Всесоюзной физико-математической олимпиаде подпиской на «Квант» на 1982 год награждаются:

АБДРАФИКОВА Надежда (г. Белорецк, с. ш. № 14)
АВДЫЕВ Марат (г. Мары, с. ш. № 5)
АСЛАНЯН Ашот (г. Ереван, ФМШ)
ВИКТОРОВ Виктор (г. Рязань, с. ш. № 45)
ДЕШКОВСКИЙ Александр (г. Барановичи, с. ш. № 6)
ЖИТОМИРСКИЙ Виктор (г. Харьков, с. ш. № 27)
КИМ Сергей (г. Алмалык, с. ш. № 15)
КОЛПАКОВ Андрей (п. Почет Красноярского края, с. ш. № 1)
КУДИНОВ Олег (г. Заринск, с. ш. № 2)
КУДЯ Андрей (р. п. Таловая Воронежской обл., с. ш. № 51)
МАКСИМУК Михаил (г. Торопец, с. ш. № 2)
МАЛЫШЕВ Владимир (г. Иркутск, с. ш. № 21)
МАРЧЕНКО Оксана (г. Талас, с. ш. № 2)
МАТЧАНОВ Ходжабай (колхоз им. Хамсы Хорезмской обл.)
МЕЛЬНИК Юрий (г. Единцы, с. ш. № 1)
МИЛЕНИНА Наталья (г. Кропоткин, с. ш. № 45)
МОСКАЛЕНКО Людмила (г. Стерлитамак, с. ш. № 27)
ПУКЛИНА Елена (г. Киев, с. ш. № 24)
РОДИОНОВ Юрий (Г. Новоалтайск, с. ш. № 12)
САНГАДЖИ-ГОРЯЕВ Баатр (п. Ики-Бурул Калмыкской АССР, с. ш. № 1)
СТАХОВСКИЙ Виталий (г. Капустин-Яр, с. ш. № 231)
СУЛЕЙМАНОВ Рустам (г. Янгиабад, с. ш. № 10)
СУХОРУЧКИН Михаил (г. Киров, с. ш. № 37)
ТЕТЕРИНА Ирина (г. Ангрен, с. ш. № 33)
ШМЕЛЕВ Евгений (п. Надежный Якутской АССР, с. ш. № 19)
ШУМИЛОВ Павел (г. Минск, с. ш. № 50)
Республиканская ФМШ (г. Ташкент)

Квант для младших школьников

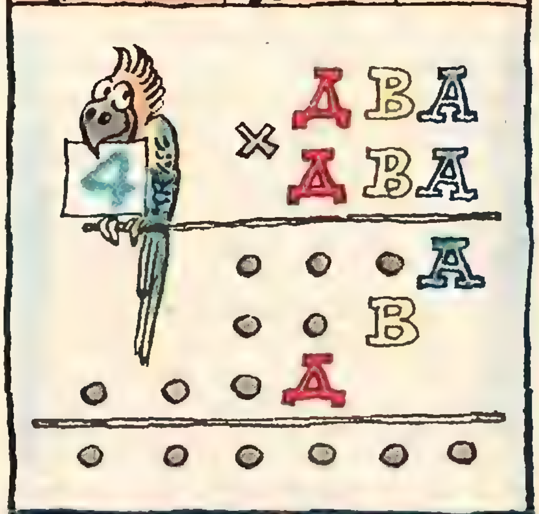
Задачи

1. В магазин привезли муку в мешках. Известно, что в первом, втором и третьем мешках не менее 60 кг муки, первом, втором и четвертом — не более 50 кг муки, первом, третьем и четвертом — не более 40 кг муки, а во втором, третьем и четвертом — не более 30 кг муки. Сколько муки было в каждом мешке?

2. Расшифруйте ребус ДВА×ДВА, изображенный на рисунке. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные. Точки могут быть любыми цифрами.

3. Однажды придворный Математик, получив свое жалованье за год серебряными талерами, разложил монеты в девять неравных столбиков (см. рисунок) так, что числа монет в столбиках образовали магический квадрат третьего порядка*); при этом некоторые столбики получились довольно высокими, но все же столбика, который насчитывал бы больше трехсот монет, не было. Королю понравилась затея Математика; он только пожалел, что все числа получились составными. «Если бы Ваше величество, — сказал Математик, — добавило к моему жалованью еще 9 талеров, я положил бы в каждый столбик еще по монете, и тогда сохранился бы магический квадрат, но все числа монет в столбиках были бы уже простыми». Король совсем уж было собрался увеличить жалованье Математику, как в разговор вмешался Шут. Он взял из каждого столбика по монете и новые числа все оказались простыми (а квадрат, разумеется, остался магическим)! Как сложил свои монеты Математик?

Эти задачи нам предложили
В. Бережной и *Б. Рублев*
(ученики 9 класса ФМШ
при КГУ, Киев),
А. Швецов, Г. Шишкина



---

*) Квадрат 3×3 из девяти чисел, суммы которых по строкам, столбцам и диагоналям одинаковы.

А. Калинин

Эта удивительная вязь колец

«Квант» уже рассказывал о *кольцах Борромео* (А. Савин «Олимпийские кольца» — «Квант», 1980, № 7). Это три кольца, переплетенные между собой так, что их не расцепишь, хотя любые два из них не зацеплены. Известны они издавна — когда-то они так поразили воображение основателей древних родов Нормандии, Бургундии и Ломбардии, что те помещали эти кольца в свои гербы. По древнему итальянскому роду патрициев из города Милана, роду Борромео, чьи воины носили на одежде нашивки из трех переплетенных колец, эти кольца и стали называть кольцами Борромео. А на надгробье великого Микеланджело (см. вторую страницу обложки) три венка: лавровый, оливковый и дубовый, переплетаясь между собой, как кольца Борромео, символизируют три взаимосвязанных вида искусства, в которых прославился Микеланджело Буонарроти, — скульптуру, живопись и архитектуру. Такое же переплетение венков показано и на одной из медалей, отчеканенной в честь этого великого художника эпохи Возрождения (рис. 1).

Но нас интересует не эстетическая или символическая сторона дела, а математическая. Почему кольца Борромео не расцепляются? Можно ли аналогично зацепить большее число колец? Имеются ли у зацепленных колец полезные применения? Ответить на эти вопросы нам помогут

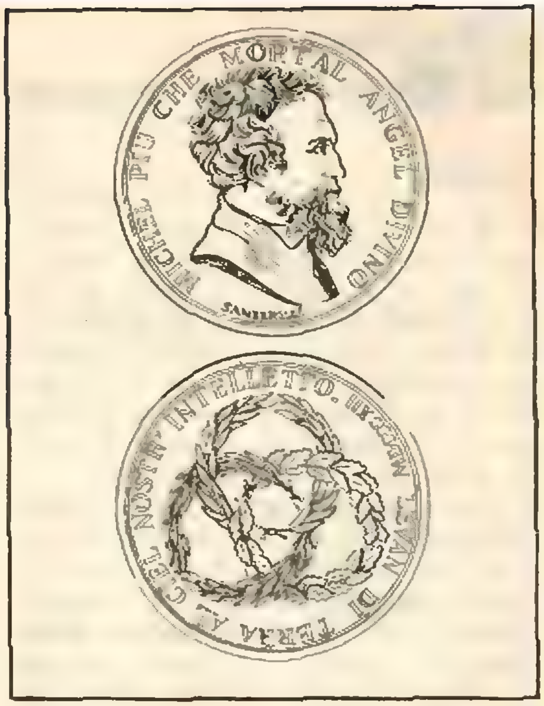

MICHEL PIU CHE MORTAL ANGEL DIVINO
SANGIORGI
TERRA C'ET NOSTR' INTELLETTO. MIRACOL SARAN DI
TU VERTU

Рис. 1.

Проволочные модели

Изготовим кольца Борромео из гибкой проволоки (или веревки). Выбрав какие-нибудь два кольца (скажем, красное и синее), разведем их, не изгибая, друг от друга (рис. 2). При этом третье (желтое) кольцо изогнется, образуя нечто вроде двойной скобы. Эта скоба вставлена в синее кольцо, а красное кольцо служит замком, не позволяя нам вынуть скобу из синего кольца. Но оборвешь любое кольцо — все развалится!

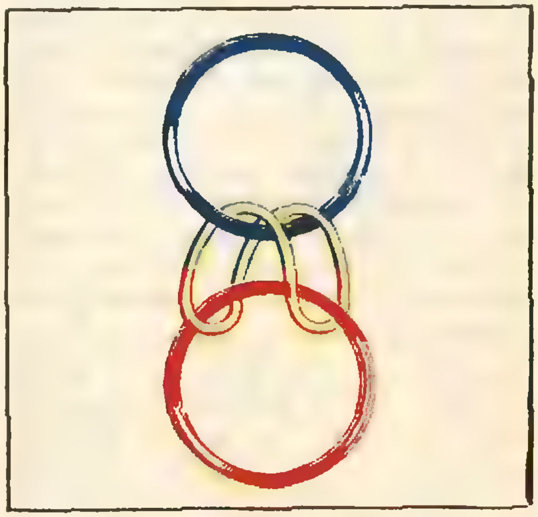


Рис. 2.

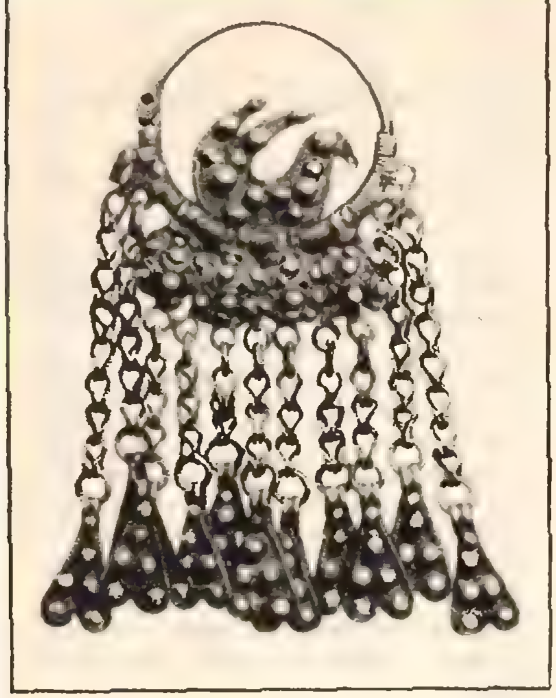


Фото 1.

Будем говорить, что совокупность проволочных колец образует *тривиальное зацепление*, если они на самом деле не зацеплены, то есть их можно отделить друг от друга (разрешается их гнуть и как угодно двигать, но рвать нельзя). В противном случае мы скажем, что кольца образуют *нетривиальное зацепление* или что они *зацеплены*. На языке этих терминов мы можем о кольцах Борромео сказать, что, во-первых, они зацеплены и, во-вторых, удаление любого кольца приводит к тривиальному зацеплению.

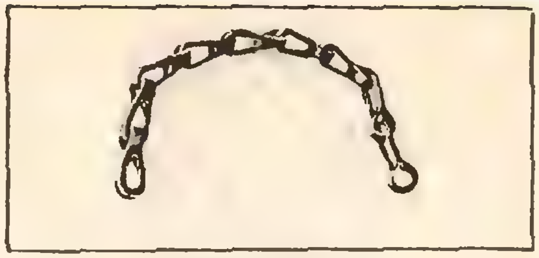


Фото 2.

Нетрудно изготовить переплетение любого числа колец, обладающих тем же свойством, если расположить кольца в виде

Цепочки

Цепочка на рисунке 3, *а* — наиболее естественное и известное зацепление, но возможны и другие варианты (рис. 3, *б*, *в*). Может быть, вы придумаете какой-нибудь новый вариант?

Подобные цепочки значительно проще изготовить, чем обычные цепи. Действительно, у обычной цепи приходится сваривать внутренние звенья, предварительно зацепив их с соседними, в то время как у наших цепочек все звенья (кроме двух концевых) изготовляются независимо. Недаром эта конструкция издавна применяется в быту (дверные цепочки — см. фото 2) и для украшений (древние подвески народностей Кавказа — см. фото 1).

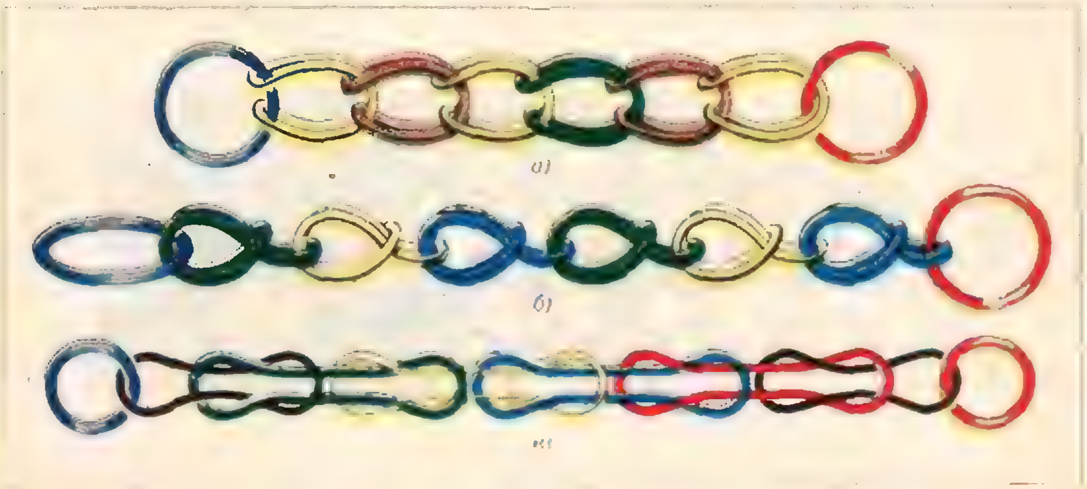


Рис. 3.

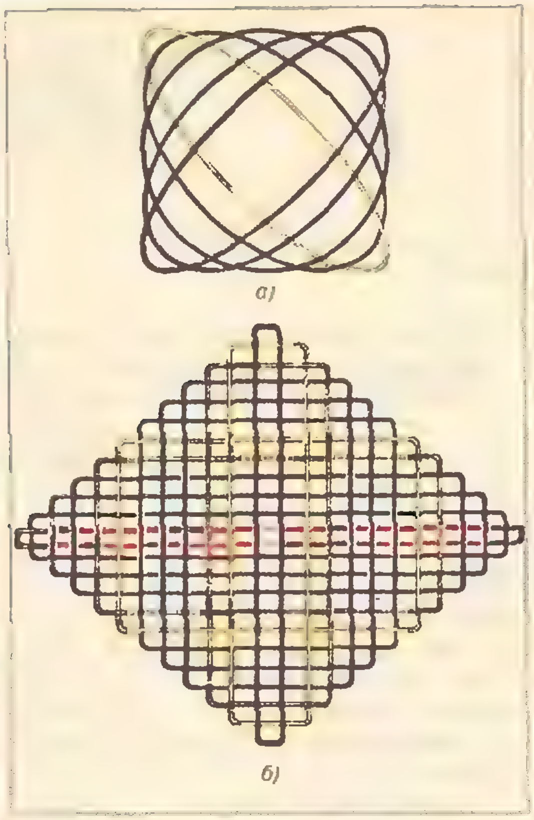


Рис. 4.

Цепочки полезны, конечно, но менее красивы, чем кольца Борромео. Однако, если звенья цепочки попробовать расправить так, чтобы они снова стали плоскими, то цепочки разворачиваются в красивые

Розетки

На рисунках 4,*а* и 4,*б* изображены розетки, полученные соответственно из 5-звенной и 12-звенной цепочки типа той, что на рисунке 3, *а*. Пользуясь цветными проводами, попробуйте осуществить переход от переплетения 3,*а* к 4,*б*. Постарайтесь получить розетки и из цепочек 3,*б* и 3,*в*.

«Коврик», получившийся на рисунке 4,*б*, сплетен не из одной или двух нитей, а из 12 довольно больших колец: удаление любого из них приводит к тривиальному зацеплению — весь «коврик» рассыпается. Из последнего рисунка видно, что количество колец, из которых состоит «коврик», может быть сколь угодно большим, и тем не менее достаточно разорвать одно (притом любое!) кольцо, чтобы «коврик» распался на отдельные кольца.

Построения типа колец Борромео можно использовать и для изготовления

Кольчуги

Здесь уже нужны маленькие, жесткие колечки; переплетать их можно по-разному (см., например, рисунки 5,*а* и 5,*б*). Возможны и другие интересные варианты. Подумайте!

Заметим, что, хотя построение на рисунке 5,*а* основано на повторении рисунка колец Борромео, удаление одного колечка не приводит к полному распадению кольчуги. Например, при удалении красного кольца кольчуга 5, *а* распадается на два куска; впрочем, если бы в кольчу-

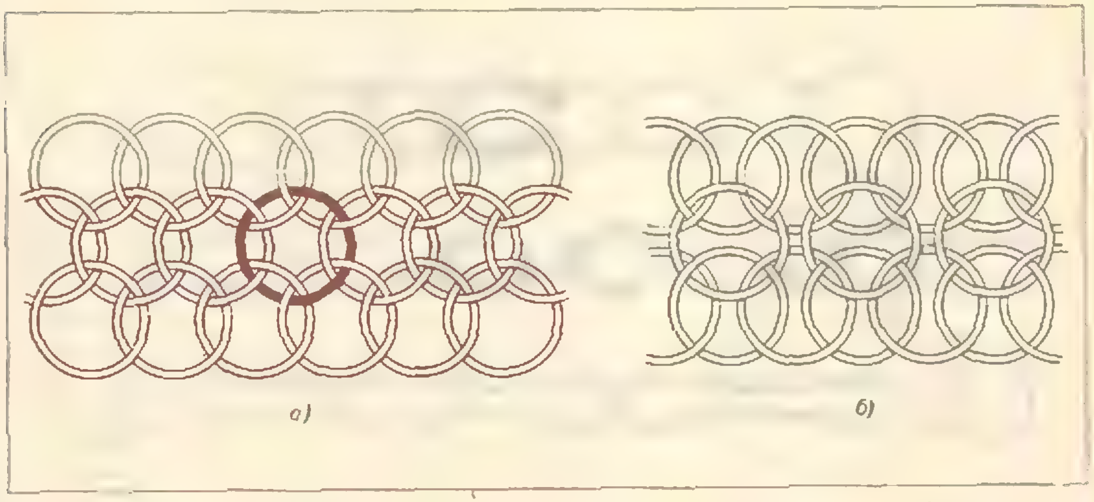


Рис. 5.

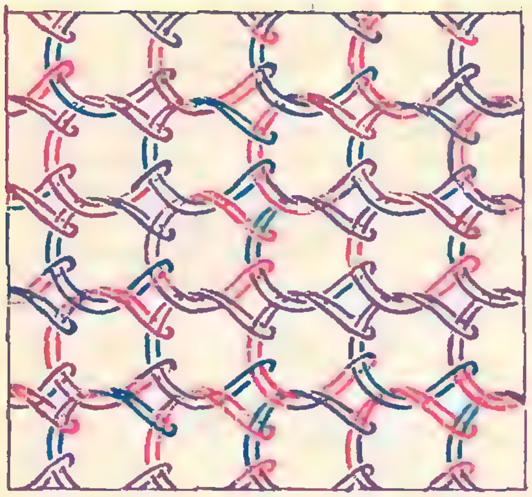


Рис. 6.

ге было больше трех рядов, удаление одного колечка привело бы лишь к небольшой дырке или разрыву.

Иначе ведет себя кольчуга на рисунке 6, составленная из «двойных скобок» — при удалении любой из них она полностью рассыпается!

Как здесь не вспомнить трикотажные изделия или капроновые чулки — разорвалась петелька, и по ткани «поползла стрелка». Как хорошо было бы женщинам, если бы капроновые чулки делали не из одной нитки, а из множества мелких колечек, как на кольчуге 5,*а*! В решении такой задачи может помочь математическое исследование зацеплений колец. Этими вопросами занимается ветвь математики, называемая *топологией*, вернее, ее раздел — *теория узлов и зацеплений*, сочетающий в себе тонкую геометрию и остроумную алгебру.

К примеру, старшеклассники, прочитавшие статью О. Виро («Квант», 1981, № 3), без труда дадут строгое математическое доказательство того, что кольца Борромео образуют нетривиальное зацепление: они не имеют «правильной раскраски».

Не вникая в непростые алгебраические методы этой науки, начать можно с изобретения новых интересных зацеплений разных типов. Так, красивые «зацепления плоскости», показанные на первой странице обложки «Кванта» № 7 за 1980 год, придуманы совсем недавно А. Савиным, хотя они основаны на древней идее колец Борромео. Это легко понять, изучив наш последний рисунок (рис. 7).

Если эта тематика вас заинтересует, присылайте нам ваши соображения и рисунки.

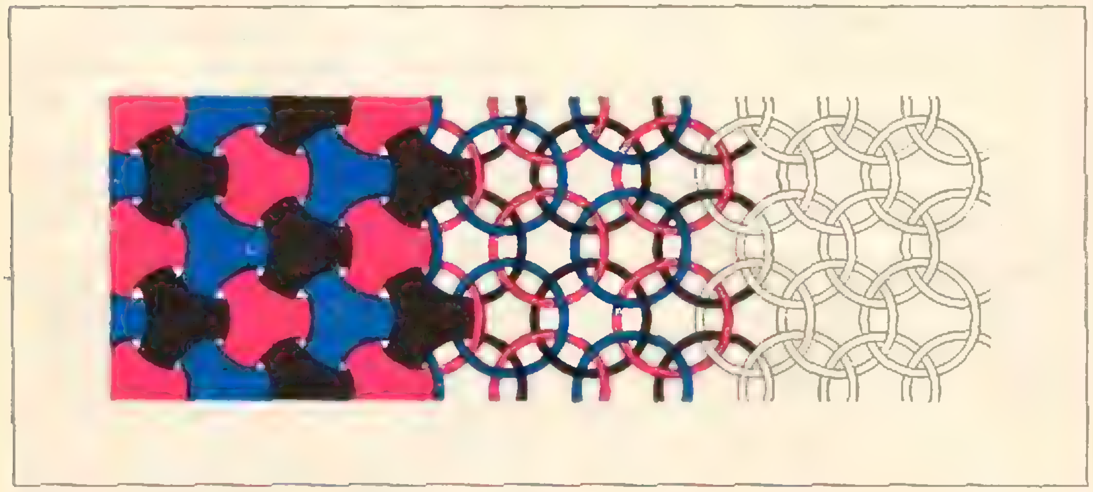


Рис. 7.

Г. Перевалов

Можно и без производной

Преобразование графика

На вступительных экзаменах одному из абитуриентов было предложено построить график функции $f(x) = 2\lg(x-1)$. Он, как рекомендует учебное пособие «Алгебра и начала анализа 9—10» (п. 27), нашел область определения функции f, вычислил производную f', увидел, что она всюду на $D(f)$ положительна, сделал вывод, что функция f на $D(f)$ возрастает, нашел точку пересечения графика с осью абсцисс, записал результаты исследования в виде таблицы и построил график (рис. 1, *а*).

x	$]1;2[$	2	$]2;+\infty[$
$f'(x)$	+	+	+
$f(x)$	↗	0	↗

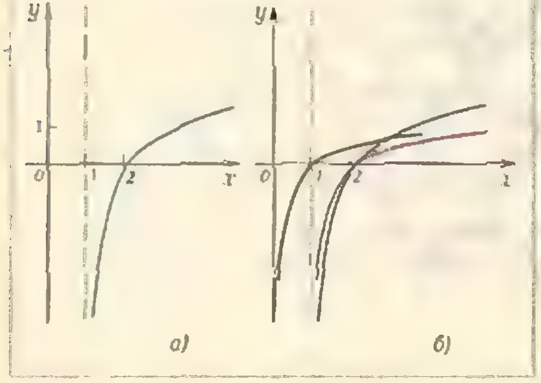


Рис. 1.

Однако искомый график можно построить без всяких вычислений, если применить правила преобразования графиков, изложенные в конце упомянутого пособия («Материал для повторения», п. 9). Перечислим эти правила:

1. График функции $y=f(x)+B$ получается из графика функции $y=f(x)$ переносом $\vec{r}(0;\ B)$, то есть переносом параллельно оси ординат на B — вверх, если $B>0$; вниз, если $B<0$ (рис. 2).

2. График функции $y=f(x+b)$ получается из графика функции $y=f(x)$ переносом $\vec{s}(-b;\ 0)$, то есть переносом параллельно оси абсцисс на $-b$ — влево, если $b>0$; вправо, если $b<0$ (рис. 3.).

3. График функции $y=A\cdot f(x)$ получается умножением каждой ординаты графика функции $y=f(x)$ на A, то есть растяжением от оси абсцисс в A раз, если $A>1$, и сжатием к оси абсцисс в $\frac{1}{A}$ раз, если $0<A<1$ (рис. 4).

3′. График функции $y=-f(x)$ получается симметрией графика функции $y=f(x)$ относительно оси абсцисс (рис. 5).

4. График функции $y=f(ax)$ получается сжатием графика функции $y=f(x)$ к оси ординат в a раз, если $a>1$, и растяжением от оси ординат в $\frac{1}{a}$ раз, если $0<a<1$ (рис. 6).

4′. График функции $y=f(-x)$ получается симметрией графика функции $y=f(x)$ относительно оси ординат (рис. 7).

Заодно уж приведем два гораздо менее важных, менее универсальных правила, которые могут пригодиться в «абитуриентских» задачах:

5. График функции $y=|f(x)|$ совпадает с графиком функции $y=f(x)$ там, где $f(x)\geqslant 0$, и получается из него симметрией относительно оси абсцисс там, где $f(x)<0$ (рис. 8).

6. График функции $y=f(|x|)$ при $x\geqslant 0$ совпадает с графиком функции $y=f(x)$; при $x<0$ он получается

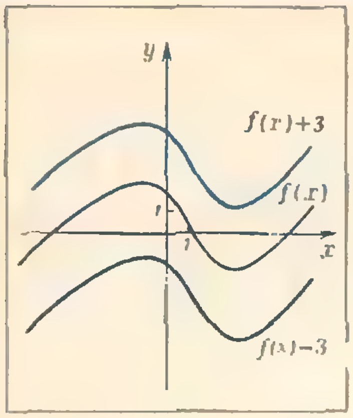

y
f(x)+3
f(x)
1
1
x
f(x)−3

Рис. 2.

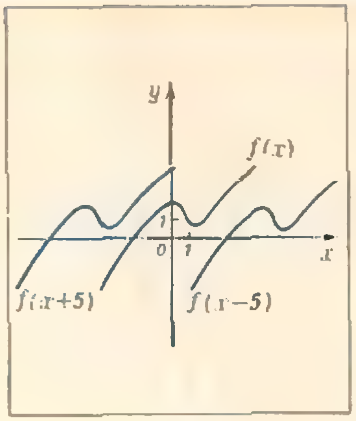

y
f(x)
1
0
1
x
f(x+5)
f(x−5)

Рис. 3.

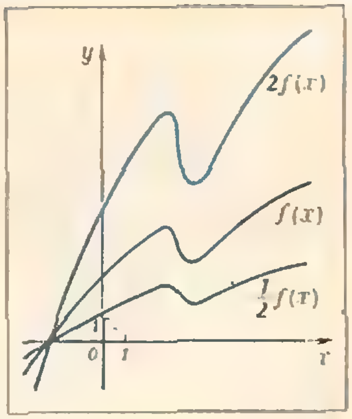

y
2f(x)
f(x)
$\frac{1}{2}f(x)$
1
0
1
x

Рис. 4.

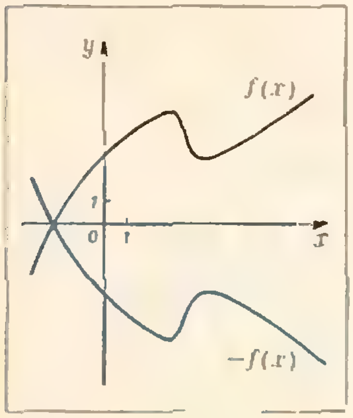


Рис. 5.

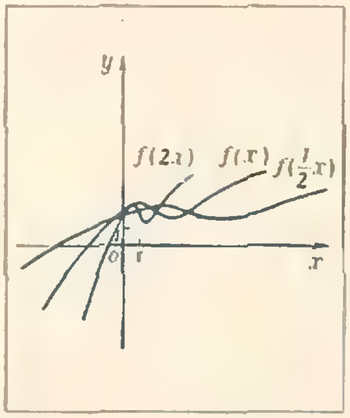

y
f(2x)
f(x)
$f(\frac{1}{2}x)$
1
0
1
x

Рис. 6.

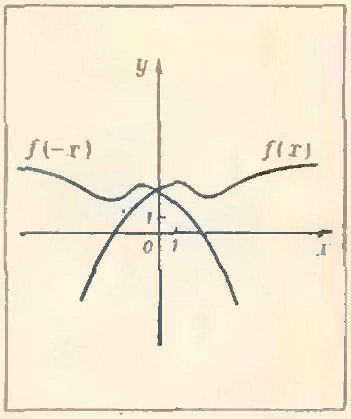


Рис. 7.

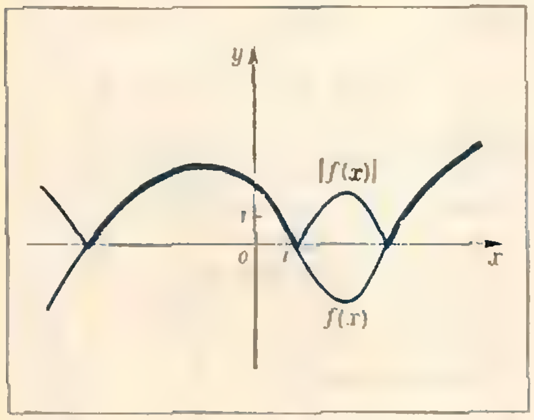


Рис. 8.

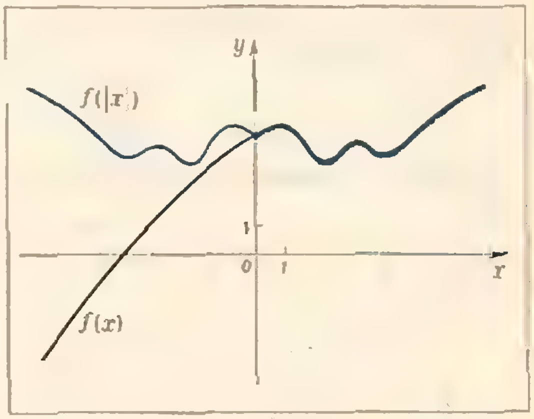


Рис. 9.

симметрией «правой половины» графика функции $y=f(x)$ относительно оси ординат (рис. 9).

Чтобы построить график функции $y=2\lg(x-1)$ *методом преобразования графика*, надо график функции $y=\lg x$ перенести параллельно оси абсцисс вправо на 1 и растянуть полученный график от оси абсцисс в 2 раза (рис. 1, *б*). Сравните, читатель, «общий» способ построения этого графика (см. начало статьи) с изложенным здесь. Не правда ли, этот намного приятнее!

Иногда, чтобы применить этот метод, надо сначала выражение, при помощи которого задана функция, преобразовать. Например, график функции $y=\frac{2x-3}{3x+5}$ легко стро-

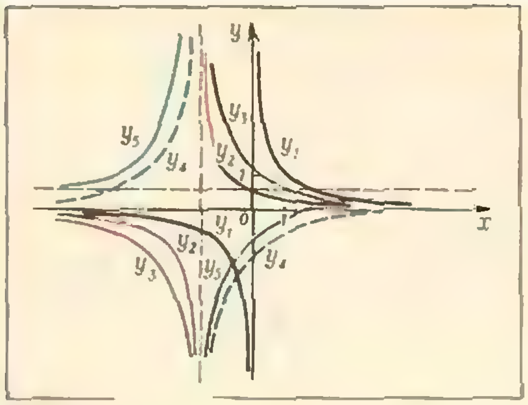


Рис. 10.

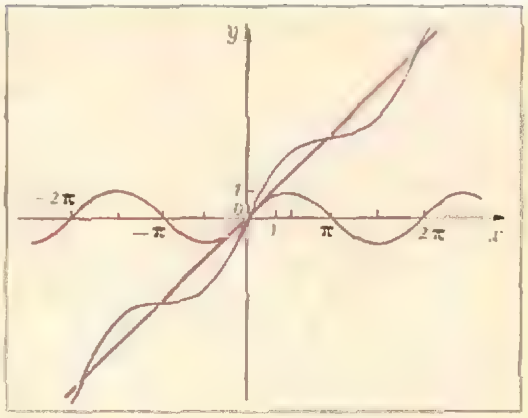


Рис. 11.

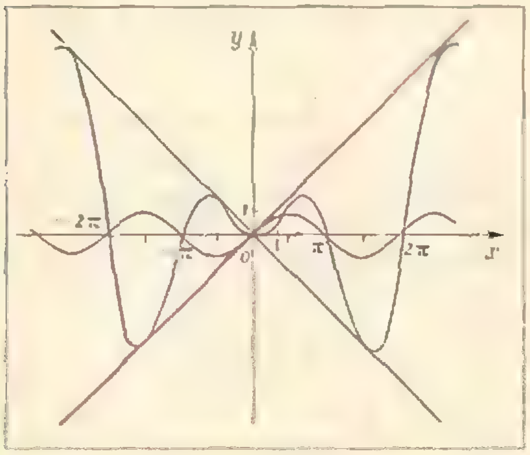


Рис. 12.

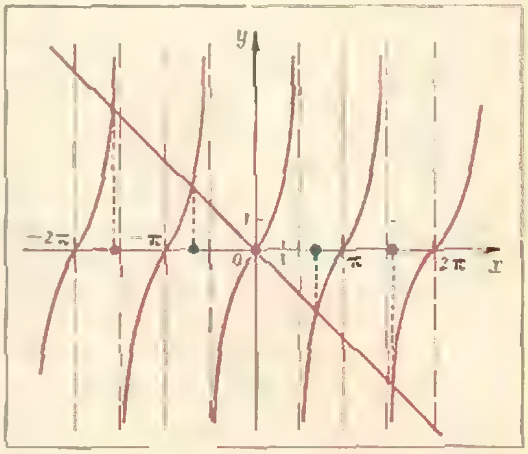


Рис. 13.

ится методом преобразования графика, поскольку

$$\frac{2x-3}{3x+5}=\left(-\frac{19}{9}\right)\cdot\frac{1}{x+\frac{5}{3}}+\frac{2}{3}.$$

Напишем «вспомогательную цепочку»:

$$y_1=\frac{1}{x}$$

$$y_2=\frac{1}{x+\frac{5}{3}}$$

$$y_3=\frac{19}{9}\cdot\frac{1}{x+\frac{5}{3}}$$

$$y_4=-\left(\frac{19}{9}\cdot\frac{1}{x+\frac{5}{3}}\right)$$

$$y_5=\left(-\frac{19}{9}\right)\cdot\frac{1}{x+\frac{5}{3}}+\frac{2}{3}$$

Таким образом, нужный график получается из графика функции $y=\frac{1}{x}$ четырьмя последовательными преобразованиями: переносом параллельно оси абсцисс влево на $\frac{5}{3}$, растяжением от оси абсцисс в $\frac{19}{9}$ раз, симметрией относительно оси абсцисс и переносом параллельно оси ординат на $\frac{2}{3}$ (рис. 10).

Методу преобразования графика поддается очень широкий класс функций. Постройте, например, этим методом графики функций $y=\frac{1}{2^x-2}$, $y=\lg(-x)+2$, $y=3\sin(2x-1)+5$, $y=\sin^4x+\cos^4x$.

Не ошибитесь: график функции $y=f(ax+b)$ получается, конечно, переносом графика функции $y=f(ax)$ параллельно оси абсцисс, но переносом не на $-b$, а на $-\frac{b}{a}$ (почему?).

Правила преобразования графиков, перечисленные выше, позволяют сообразить, что если число T является периодом функции $y=f(x)$, то периодом функции $y=A\cdot f(ax+b)+B$ является число $\frac{T}{a}$: из всех преобра-

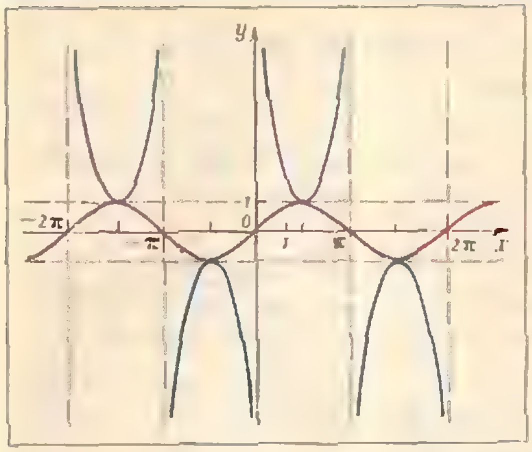


Рис. 14.

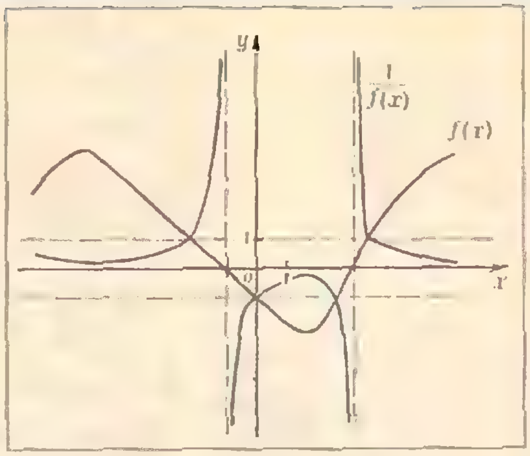


Рис. 15.

зований, перечисленных в этих правилах, на период влияет только преобразование из правила 4.

Действия над графиками

Иногда нужный график можно получить, произведя над «составляющими графиками» арифметические действия, указанные в формуле, задающей функцию.

Пример 1. Попробуем построить график функции $f(x)=x+\sin x$ сложением ординат графиков функций $y=x$ и $y=\sin x$ (рис. 11). Заметим, прежде всего, что функция f — нечетная, и будем поэтому «складывать графики» только при $x\geqslant 0$. Очевидно, там, где $\sin x>0$, искомый график будет лежать над прямой $y=x$; на промежутках, на которых $\sin x<0$, он будет лежать под этой прямой; в точках $x=\pi k$ $(k\in \mathbf{N})$ он будет пересекать ее. На отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ оба слагаемых возрастают — значит, будет возрастать и их сумма f. Но на отрезке, скажем, $\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$ первое слагаемое возрастает, второе убывает — что будет с суммой f, не ясно. Без вычислений здесь не обойтись. $f'(x)=1+\cos x>0$ всюду, кроме точек $x=\pi+2\pi k$ $(k\in \mathbf{N})$. Значит, функция f возрастает на $[0;\ +\infty[$.

Пример 2. Попробуем теперь построить график функции $f(x)=x\cdot\sin x$ умножением ординат соответствующих графиков (рис. 12). Функция f — четная, поэтому будем «перемножать графики» при $x\geqslant 0$. На промежутке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ оба сомножителя положительны и возрастают — значит, на этом промежутке будет возрастать и функция f. Но на промежутке $\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$ один из положительных сомножителей растет, второй убывает. Что будет с произведением? Если в предыдущем примере еще можно было обойтись без производной (докажите без производной, что из $x_1<x_2$ следует $x_1+\sin x_1<x_2+\sin x_2$), то здесь это сделать вряд ли удастся. Исследование производной ($f'(x)=\sin x+x\cdot\cos x$, $f'(x)=0\Longleftrightarrow \operatorname{tg} x=-x$) показывает, что точки экстремума функций f и $y=\sin x$ не совпадают (рис. 13).

Пример 3. График функции $f(x)=\frac{1}{\sin x}$ легко строится делением единицы на ординаты функции $y=\sin x$ (рис. 14). Так же легко строится любой график вида $g(x)=\frac{1}{f(x)}$, если график функции f известен (рис. 15).

Попробуйте аналогичным способом построить графики функций $y=x+\lg x$, $y=2^x\cdot\sin x$, $y=\frac{\sin x}{1+x^2}$.

Физики о физиках

Задача Дирака

Будучи студентами Московского государственного университета, мы почти всегда присутствовали на заседаниях Физического общества имени П. Н. Лебедева, где обсуждались новейшие работы по физике Это были памятные годы быстрого становления квантовой механики: одна за другой появлялись основополагающие работы Дирака, Гейзенберга, де Бройля и других, вскоре ставшие классическими. На заседаниях часто горячо выступал недавно приехавший в Москву Игорь Евгеньевич Тамм, впоследствии академик, лауреат Государственных и Нобелевской премий.

Именно на этих собраниях московские физики ввели единицу скорости речи «1 Тамм», равную пяти нормальным единицам. Впрочем, вскоре появилась еще более крупная единица: «1 Глаголева-Аркадьева», равная пяти «Таммам»

В 1926 году, прослушав блестящий систематический курс электродинамики у профессора Н. Н. Андреева (впоследствии также академика), мы — несколько четверокурсников МГУ — решили прослушать курс и у И. Е. Тамма. Узнав, что большинство его слушателей кое-что смыслят в электродинамике, И. Е. не стал читать систематический курс, а излагал лишь отдельные вопросы, казавшиеся ему чем-то интересными или наиболее трудными. При этом он избегал обычных доказательств, прямо у доски искал новые пути рассуждений, иногда запутывался, иногда сам себя опровергал. Словом, мы смогли полностью оценить точность пушкинского высказывания: «Следить за мыслью великого человека есть наука самая занимательная».

Позже, по окончании университета, мне довелось встречаться с Игорем Евгеньевичем и на научных заседаниях, и в частной жизни: в альпинистских лагерях Кавказа, на Черноморском побережье, куда он обычно выходил после очередного восхождения (И. Е. был превосходным альпинистом), а также в Подмосковье.

Как-то раз мы ехали в полупустом вагоне дачного поезда, и Игорь Евгеньевич увлекательно рассказывал о своих встречах с известными физиками. Вдруг он спросил: «А вы знаете задачу Дирака: как представить любое целое число двойками и математическими знаками?». Я не знал, и Игорь Евгеньевич уже достал записную книжку, чтобы показать решение, как вдруг вошел контролер. И. Е. долго безуспешно искал билет. Я шепнул контролеру, что перед ним — член-корреспондент Академии наук, но тот был непреклонен. Заплатив штраф, Игорь Евгеньевич растерянно сказал: «Как странно! Я отчетливо помню, что купил билет. Но совсем не помню, клал ли его в карман».

Почему-то эта забывчивость очень расстроила И. Е., о Дираке он не вспомнил, а мне спросить о решении было неловко. И только позже, зимой, встретив Игоря Евгеньевича на концерте в Доме ученых, мне удалось узнать решение задачи Дирака. Вот оно:

$$\log_2(\log_2 2)=0,$$

$$\mp\log_2(\log_2\sqrt{2})=\pm 1,$$

$$\mp\log_2(\log_2\sqrt{\sqrt{2}})=\pm 2$$

и так далее.

А теперь вопрос к читателям. Как вы думаете, можно ли заменить двойку какой-нибудь другой цифрой?

Н. Малов

Новости науки

Нейтрон → антинейтрон?

В шестом номере «Кванта» было рассказано о том, как физики пытаются обнаружить распад протона, то есть его превращение в легкие частицы (например, в положительный мю-мезон и нейтрино). И хотя такой распад (если он действительно существует) — чрезвычайно редкое явление, есть реальная надежда обнаружить его, если в течение года распадается хотя бы один из 10^{31} протонов.

Но если окажется, что протон действительно превращается в легкие частицы, то почти наверняка похожее превращение должен претерпевать и нейтрон. Однако накопить тонны нейтронов и обнаружить распад нейтрона — задача, по крайней мере сейчас, безнадежная

Несколько лет назад сотрудник Института ядерных исследований АН СССР В. А. Кузьмин заметил, что существуют реальные шансы обнаружить другой процесс — превращение нейтрона в антинейтрон. Протон не может сам по себе превратиться в антипротон: для этого у него должен был бы измениться знак заряда; заряд же в природе сохраняется. У нейтрона нет заряда, как нет его и у антинейтрона, поэтому процесс превращения $n \to \tilde{n}$ в принципе может происходить. Летящий нейтрон может периодически превращаться в антинейтрон и обратно без того, чтобы нарушить фундаментальные законы природы.

Подсчеты показали, что, если работать с нейтронами, летящими со скоростью 100 м/с (это так называемые холодные нейтроны: такую среднюю скорость имели бы молекулы идеального газа при температуре ~0,8 К), то на расстоянии 5 м от реактора можно было бы зарегистрировать антинейтроны, если превращение нейтрон→антинейтрон происходит не реже, чем один раз за 10^7 с, то есть примерно раз в 4 месяца.

Это один из самых интересных и неожиданных опытов, который сейчас подготавливается физиками.

Я. С.

Геометрические задачи наших читателей

1. Пусть a, b, c — длины, соответственно, сторон BC CA и AB произвольного треугольника ABC. Пусть O_1 — точка пересечения его биссектрисс, O_2 — точка пересечения медиан. Обозначим через K, L и M точки пересечения прямой O_1O_2 с прямыми BC, CA и AB. Пусть, наконец, λ, μ и ν — числа, для которых $\overrightarrow{BK}=\lambda\cdot\overrightarrow{KC}$, $\overrightarrow{CL}=\mu\cdot\overrightarrow{LA}$, $\overrightarrow{AM}=\nu\cdot\overrightarrow{MB}$. Докажите, что $\lambda=\frac{a-c}{a-b}$, $\mu=\frac{a-b}{c-b}$, $\nu=\frac{c-b}{c-a}$.

2. Пусть в треугольнике ABC длины a, b, c сторон BC, CA, AB удовлетворяют соотношению $a>c>b$. Пусть $h_a=|AA_0|$, $h_b=|BB_0|$, $h_c=|CC_0|$ — длины высот AA_0, BB_0, CC_0 треугольника, а H_a, H_b, H_c — проекции их оснований A_0, B_0, C_0 на биссектрисы углов A, B и C соответственно. Докажите, что для площадей треугольников с вершинами в этих точках справедливы следующие равенства:

а) $a^3\cdot S_{AH_aA_0}+b^3\cdot S_{BH_bB_0}=c^3\cdot S_{CH_cC_0}$;

б) $\frac{S_{AH_aA_0}}{h_a^3}+\frac{S_{BH_bB_0}}{h_b^3}=\frac{S_{CH_cC_0}}{h_c^3}$.

3. Известно, что в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность. Пусть E — точка пересечения его диагоналей AC и BD. Докажите, что

$$\frac{|AE|}{|EC|}=\frac{\operatorname{ctg}\widehat{A}/2}{\operatorname{ctg}\widehat{C}/2}.$$

У. Аяла

4. а) Пусть ABC — треугольник, M — точка внутри него, являющаяся общей вершиной трех конгруэнтных равносторонних треугольников, две другие вершины каждого из которых лежат на смежных сторонах треугольника ABC (см. рис.). Докажите, что длина стороны этих равносторонних треугольников равна

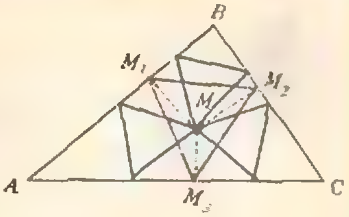
$$\frac{2abc}{a^2+b^2+c^2+4S\sqrt{3}},$$

где S — площадь треугольника ABC, a, b, c — длины его сторон.

б) Обозначим через M_1, M_2 и M_3 проекции точки M на стороны данного треугольника (см. рис.). Докажите, что треугольник $M_1M_2M_3$ — равносторонний.

А. Ягубьянц

5. Через центр O окружности, вписанной в треугольник ABC, проведен отрезок MN с концами на сторонах треугольника, $M\in[AB]$, $N\in[AC]$. На прямых BO и CO взяты, соответственно, точки D и E такие, что отрезки DN и ME параллельны стороне BC. Докажите, что точки A, D и E лежат на одной прямой.



(Обобщение этой задачи — замечательная теорема из проективной геометрии: *Если прямые BC, ME и DN проходят через одну точку и прямые BD, CE и MN проходят через одну точку, то и прямые BM, NC и DE также проходят через одну точку.*)

С. Мейдман

6. В треугольнике ABC проведены биссектрисы внутренних углов A, B, C до пересечения с описанной вокруг него окружностью в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Обозначим через O точку пересечения этих биссектрис. Докажите, что середины отрезков AO, BO, CO, A_1O, B_1O, C_1O, A_1B_1, B_1C_1 и A_1C_1 лежат на одной окружности.

И. Кушнир

Наша обложка

Двойственность

На первой странице обложки показаны один из 11 правильных паркетов («Квант», 1979, № 2, с. 9) и «двойственное» к нему покрытие плоскости конгруэнтными многоугольниками. Тонкой игрой красок и линий наш художник В. Лухин сумел осуществить постепенный переход от паркета, составленного из квадратов и правильных треугольников (синий и зеленый цвета вверху), к покрытию плоскости одинаковыми пятиугольниками (желтый и красный — внизу).

Этот переход известен в топологии как *двойственность Пуанкаре*. Она позволяет перейти от любого покрытия плоскости выпуклыми многоугольниками к другому такому покрытию. Геометрически этот переход описывается так: в одной из внутренних точек каждого многоугольника (*грани*) ставится точка (новая *вершина*); две новые вершины соединяются (новым) *ребром* тогда и только тогда, когда их грани имеют общее (старое) ребро. При этом каждой старой вершине будет соответствовать многоугольник — новая грань.

В нашем случае новые вершины выбирались в центре старых граней, что обеспечило конгруэнтность всех новых граней (почему?).

Посмотрите, какие покрытия плоскости получаются, если применить эту конструкцию к другим правильным паркетам, и подумайте, что будет, если ее применить дважды подряд.

О. М.

В. Нахшин

Уравнения думают за нас

Решение любой расчетной задачи по физике состоит из двух частей — физической и математической.

Пока мы обдумываем условие задачи, анализируем, в соответствии с какими физическими законами происходит данное явление, и составляет соответствующую систему уравнений, мы — физики. После этого физика временно отходит на задний план. Теперь мы — математики, и перед нами стоят иные проблемы: как наиболее рационально решить полученную систему уравнений и найти ответ? Причем ответ нужно найти в общем (буквенном) виде, чтобы слева от знака равенства стояла только искомая величина (в буквенном обозначении), а справа — комбинация из только известных величин (тоже в соответствующих буквенных обозначениях).

Но вот ответ в общем виде получен, и мы снова обращаемся к физике: прежде чем подставить числовые данные, надо проверить размерность искомой величины и проанализировать ответ с точки зрения его правдоподобности. Если размерность верна и ответ правдоподобен, можно подставлять данные и считать.

Описанные этапы решения присущи практически всем задачам. Однако иногда — а именно о таких случаях и будет рассказано в статье — после расчетов получается неожиданный абсурдный результат, что свидетельствует о неверном решении. Так бывает, например, когда ни условие задачи, ни интуиция, ни здравый смысл не могут подсказать, в какую сторону протекает тот или иной процесс или каков конечный результат.

Приступая к решению такой задачи, мы вынуждены предположить какой-то вариант и в соответствии с ним составить систему уравнений. Если ответ получится абсурдным, отчаиваться не стоит. Просто нам не повезло: наше предположение оказалось неверным. Однако определенную информацию мы все же получили — в предполагаемом направлении процесс не идет. Что же, допустим другой вариант и так далее. Задача превращается в небольшое исследование, а уравнения — как бы в товарищей по размышлению. В конце концов они нас не подведут (разумеется, если мы их не подведем, то есть не ошибемся в составлении и решении) и расскажут нам об истинном направлении процесса или о конечном результате.

Рассмотрим несколько конкретных задач.

Задача 1. *На вершине шероховатой наклонной плоскости укреплен блок, через который переброшена нить (рис. 1). К концам нити прикреплены два тела массами* $m_1=3$ *кг и* $m_2=2$ *кг. Найдите ускорение системы и силу трения между первым телом и плоскостью, если коэффициент трения* $\mu=0{,}5$ *и угол наклона плоскости к горизонту* $\alpha=30°$.

Куда ускоряется система и движется ли она вообще? Из условия задачи не ясно. Между тем, знать это очень важно. Так, если система

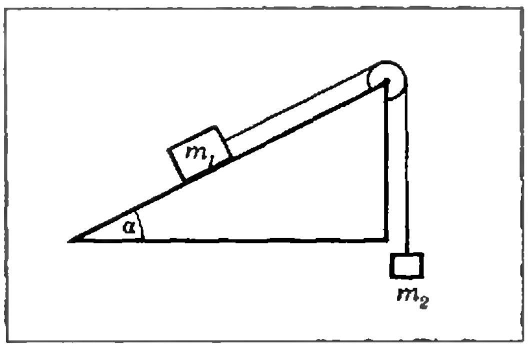


Рис. 1.

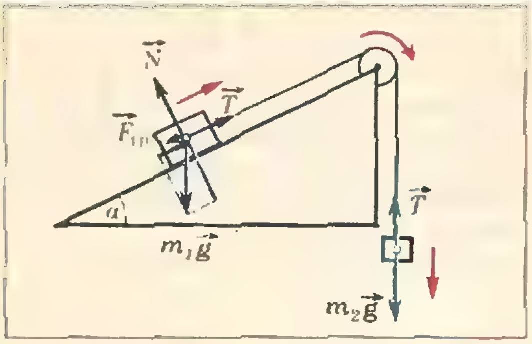


Рис. 2.

движется, имеет место трение скольжения и модуль этой силы равен $F_{тр}=\mu N$ (N — модуль силы нормальной реакции). Если же система покоится, на первое тело действует сила трения покоя, про которую известно только, что она не больше силы трения скольжения.

Может быть, поможет интуиция? С одной стороны, первое тело тяжелее второго, но, с другой стороны, второе тело висит в воздухе, а первое лежит на наклонной плоскости, да к тому же есть трение. Нет, интуиция нас не выручит, нужен анализ. Попробуем переложить наши заботы на уравнения.

Предположим, что блок вращается по часовой стрелке, то есть второе тело опускается с ускорением, а первое — с тем же по модулю ускорением поднимается по плоскости. Изобразим силы, действующие на каждое тело (рис. 2), и запишем систему уравнений второго закона Ньютона в проекциях на соответствующие направления (для первого тела это — направления вдоль плоскости и перпендикулярно к ней, а для второго тела это — вертикальное направление):

$$\begin{cases} T-m_1g\sin\alpha-\mu N=m_1a, \\ N-m_1g\cos\alpha=0, \\ m_2g-T=m_2a. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем

$$a=g\frac{m_2-\mu m_1\cos\alpha-m_1\sin\alpha}{m_1+m_2}\approx-1{,}6\ \text{м/с}^2$$

— проекция ускорения на выбранное направление отрицательна. Значит, наше предположение неверно. Что же тогда происходит с системой? Движется в противоположном направлении? А с каким ускорением?

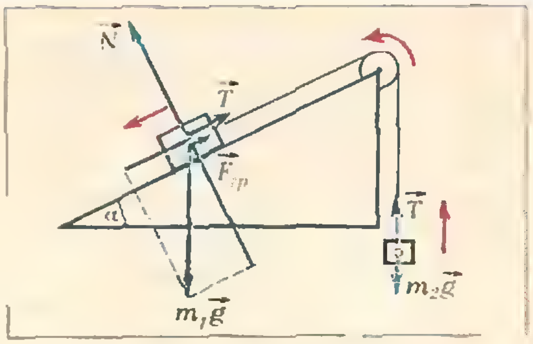


Рис. 3.

В этом месте многие допускают ошибку, считая, что система ускоряется в противоположном направлении с тем же по модулю ускорением ($\approx 1{,}6$ м/с^2). Иногда так действительно можно считать. Например, если бы в данной системе не было силы трения, при изменении выбранного направления движения на противоположное проекции всех сил изменили бы свой знак, и ускорение получилось бы таким же по модулю, но с противоположным знаком. В нашем же случае при новом предположении проекция силы трения по-прежнему отрицательна, поэтому соответствующая система уравнений будет другой (рис. 3):

$$\begin{cases} m_1g\sin\alpha-T-\mu N=m_1a, \\ N-m_1g\cos\alpha=0, \\ T-m_2g=m_2a. \end{cases}$$

Отсюда

$$a=g\frac{m_1\sin\alpha-\mu m_1\cos\alpha-m_2}{m_1+m_2}\approx$$
$$\approx-3{,}6\ \text{м/с}^2.$$

И вновь проекция ускорения оказалась отрицательной; следовательно, новое предположение тоже неверно.

Итак, уравнения, «подумав» за нас, привели к выводу, что система не ускоряется, то есть

$$a=0.$$

Значит, для нахождения силы трения, точнее — силы трения покоя, нельзя пользоваться формулой $F_{тр}=\mu N$, справедливой для силы трения скольжения.

Для определения искомой силы посмотрим, какие еще силы (или их проекции) действуют на первое тело в направлении вдоль наклонной плоскости. Это — проекция силы тяжести, равная по модулю $m_1 g \sin\alpha = 15$ Н, и сила натяжения нити, модуль которой можно найти из условия покоя второго тела: $T = m_2 g = 20$ Н. Следовательно, сила трения покоя направлена вдоль плоскости вниз и равна по модулю

$$F_{\text{тр.п}} = T - m_1 g \sin\alpha = 5 \text{ Н}.$$

Кстати, нетрудно убедиться в том, что в данном случае сила трения $F_{\text{тр.п}} = 5$ Н действительно меньше $\mu N = \mu m_1 g \cos\alpha \approx 13$ Н.

Задача 2. *В калориметр, содержащий $m_1 = 3$ кг льда при температуре $t_1 = -10°$C, вливают $m_2 = 2$ кг воды при температуре $t_2 = 80°$C. Какая температура установится в результате теплообмена? Теплоемкость калориметра не учитывать.*

Ясно, что конечная температура t находится в промежутке от — 10 до +80° С:

$$-10°\text{C} < t < 80°\text{C}.$$

Следовательно, она может быть больше 0°С — температуры таяния льда, меньше этой температуры или равной ей. Какой именно она окажется, заранее сказать нельзя. Будем к цели пробираться «на ощупь», перебирая возможные варианты и полагаясь на волю уравнений.

Предположим, что $t > 0°$C, то есть что в калориметре будет только вода. Тогда лед получает тепло в три этапа: будучи собственно льдом, нагреваясь от —10 до 0°С, превращаясь в воду при 0°С и, будучи уже водой, нагреваясь от 0° С до t. При этом вода отдает тепло только при охлаждении от температуры t_2 до t. Запишем соответствующее уравнение теплового баланса:

$$c_1 m_1 (0 - t_1) + \lambda m_1 + c_2 m_1 (t - 0) + c_2 m_2 (t - t_2) = 0,$$

где $c_1 = 2{,}1 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К) и $c_2 = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К) — удельные теплоемкости льда и воды, а $\lambda = 3{,}4 \cdot 10^5$ Дж/кг — удельная теплота плавления льда. Отсюда найдем

$$t = \frac{c_1 m_1 t_1 + c_2 m_2 t_2 - \lambda m_1}{c_2 (m_1 + m_2)}.$$

Подставив числовые данные, получаем $t < 0°$C. Значит, наше предположение неверно.

Теперь допустим, что $t < 0°$C. В таком случае вода отдает тепло в три этапа — охлаждаясь до 0°С, превращаясь в лед при 0°С и в качестве льда охлаждаясь до искомой температуры t, а первоначальный лед получает тепло только в один этап — нагреваясь от t_1 до t:

$$c_1 m_1 (t - t_1) + c_2 m_2 (0 - t_2) - \lambda m_2 + c_1 m_2 (t - 0) = 0.$$

Решив это уравнение, получаем

$$t = \frac{c_1 m_1 t_1 + c_2 m_2 t_2 + \lambda m_2}{c_1 (m_1 + m_2)}.$$

Подставим числовые данные и убедимся, что $t > 0°$ С. Следовательно, и второе наше предположение было неверным.

Остается единственный вариант: $t = 0°$C. Это и будет ответом задачи.

Здесь мы предвидим некоторое чувство досады у читателя: почему автор нарочито подбирает примеры, где все первоначальные предположения оказываются неверными, и оба столь громоздких решения приводят к сравнительно простым результатам ($a = 0$, $t = 0°$C)? Почему бы, в самом деле, не предположить заранее именно эти простейшие варианты?

Такой путь возможен, но облегчения он не сулит. Так, в первой задаче, предположив покой и не имея при этом формулы для силы трения покоя, мы должны будем составить систему из трех уравнений равновесия, но, решив ее и найдя силу трения, надо обязательно проверить, действительно ли она меньше силы трения скольжения. Если окажется, что нет, придется все решение, описанное выше, начинать сначала.

Во второй задаче, предположив $t = 0°$C, мы должны подтвердить это уравнением теплового баланса, но неизвестно, как его составить. Мы не знаем, что раньше дошло до нуля: лед «снизу» или вода «сверху», и как следствие — расплавилась ли часть (и какая часть) льда или замерзла часть воды? Можно, конечно, опять что-то предположить, но число вариантов будет не меньше, а даже больше, чем в приведенном выше решении.

Задача 3. *Найдите токи во всех ветвях схемы, изображенной на рисунке 4. Здесь $\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_2 = \mathscr{E} = 1$ В,*

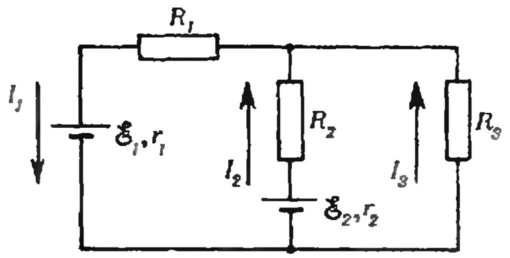


Рис. 4.

$r_1 = r_2 = r = 1$ Ом и $R_1 = R_2 = R_3 = R = 10$ Ом.

Предположим, что токи I_1, I_2 и I_3 направлены так, как показано на рисунке 4, хотя мы достоверно этого и не знаем. Если мы ошиблись, соответствующие уравнения нас поправят.

Поскольку в точках разветвления (узлах) электрический заряд не накапливается, заряд, поступающий в единицу времени в узел, равен заряду, уходящему из узла за то же время, то есть

$$I_1 = I_2 + I_3.$$

Выделим в данной схеме два простых замкнутых контура, например левый и правый, и выберем в них направления обхода, например против часовой стрелки. Согласно закону сохранения энергии, алгебраическая сумма ЭДС равна алгебраической сумме падений напряжения:

$$\mathcal{E} - \mathcal{E} = I_1 R + I_1 r + I_2 r + I_2 R,$$
$$-\mathcal{E} = -I_2 R - I_2 r + I_3 R.$$

Объединим полученные уравнения в систему и для простоты подставим числовые данные:

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3, \\ 10 I_1 + I_1 + I_2 + 10 I_2 = 0, \\ 10 I_2 + I_2 - 10 I_3 = 1. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем

$$I_1 = -\frac{1}{31}\text{ А}, \ I_2 = \frac{1}{31}\text{ А}, \ I_3 = -\frac{2}{31}\text{ А}.$$

Первый и третий токи получились отрицательными. Это означает, что наши предположения об их направлениях оказались неверными. Числовые значения мы нашли верно, а направления этих токов — противоположны предполагаемым.

Задача 4. *Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 25$ м/с. Через какое время оно будет на высоте $h = 40$ м?*

Запишем известную формулу для координаты тела, брошенного вертикально вверх (положительным считаем направление вверх):

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Решая его относительно t, получим

$$t = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}.$$

Однако при подстановке числовых данных выясняется, что выражение под корнем отрицательно. Что это означает?

Оказывается, это уравнение на своем языке подсказывает нам, что данное тело вообще не достигает такой высоты. В самом деле, максимальная высота подъема $h_{max} = v_0^2/2g \approx 31,5$ м, что меньше $h = 40$ м.

Так что бывают случаи, когда уравнения «думают» неожиданно, незапланированно.

Английский естествоиспытатель Томас Гексли однажды сравнил математику с жерновами, перемалывающими только то, что в них засыпано, не более того. Приведенные примеры иллюстрируют эту мысль — если в уравнение была заложена неверная идея, решение выдаст «шелуху» и тем самым подтолкнет нас к поиску рационального «зерна».

Упражнения

1. Однородный рычаг массой $m = 10$ кг опирается на опору, находящуюся на расстоянии $l_1 = 25$ см от его левого конца. Длина рычага $l = 1$ м. К левому концу рычага подвешен груз массой $m_1 = 2$ кг. С какой силой надо действовать на правый конец вниз под углом $\alpha = 30°$ к горизонту, чтобы рычаг находился в равновесии?

2. В калориметр, где находится $m_1 = 1$ кг льда при температуре $t_1 = 0$°C, впускают $m_2 = 500$ г водяного пара при температуре $t_2 = 100$°C. Какая температура установится после того, как произойдет теплообмен? Теплоемкостью калориметра можно пренебречь.

3. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 15$ м/с. Какой путь пройдет оно за $t = 2$ с полета? Ускорение свободного падения считать равным $g = 10$ м/с^2.

И. Габович

Вспомогательные отрезки и углы

При решении геометрических задач часто бывает полезно помимо величин, данных в условии, ввести вспомогательные величины (длины отрезков, величины углов и т. п.) и выразить через них искомую величину. При этом в одних случаях вспомогательные величины в ходе решения «исчезают» (например, сокращаются), в других — определяются через данные.

Задача 1 (МФТИ, 1979). *Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон AC и BC соответственно в точках M и N и пересекает биссектрису BD в точках P и Q. Найти отношение площадей треугольников PQM и PQN, если* $\widehat{A}=\frac{\pi}{4}$, $\widehat{B}=\frac{\pi}{3}$ (рис. 1).

Решение. Проведем в треугольниках PQM и PQN высоты $[MM_1]\perp[PQ]$ и $[NN_1]\perp[PQ]$. Поскольку треугольники PQM и PQN имеют общее основание,

$$\frac{S_{\triangle PQM}}{S_{\triangle PQN}}=\frac{|MM_1|}{|NN_1|}.$$

Пусть O — центр вписанной окружности и $|OM|=|ON|=x$. Поскольку $\widehat{BON}=\frac{\pi}{3}$, а $\triangle ONN_1$ — прямоугольный, $|NN_1|=\frac{x\sqrt{3}}{2}$. Так как $\widehat{C}=\frac{5}{12}\pi$, из четырехугольника $NOMC$ получаем $\widehat{MON}=\frac{7\pi}{12}$. Поэтому $\widehat{MOM_1}=\frac{\pi}{12}$. Из $\triangle MOM_1$ получаем $|MM_1|=$ $=x\sin\frac{\pi}{12}=x\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=$ $=x\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}}$.

Задача 2 (МОПИ, 1978). *Высота правильной четырехугольной пирамиды составляет с боковой гранью угол 30°. Через сторону основания пирамиды проведена плоскость, перпендикулярная противолежащей грани. Найти отношение объемов многогранников, полученных при пересечении пирамиды этой плоскостью.*

Решение. Легко видеть, что четырехугольник $CDMN$ (рис. 2), получающийся в сечении, является трапецией. Через высоту SO и апофему SE проведем плоскость. Эта плоскость перпендикулярна боковым граням SAB и SCD (почему?). Поэтому $\widehat{FSO}=30°$. Так как $|SF|=|SE|$ и $\widehat{FSE}=60°$, треугольник FSE — правильный. Пусть $|AB|=|AD|=|EF|=x$. Тогда $|MN|=\frac{x}{2}$, $|EP|=\frac{x\sqrt{3}}{2}$. Найдем объем четырехугольной пирамиды $SCDMN$. Отрезок SP — высота этой пирамиды (почему?), а трапеция $CDMN$ — ее основание. Поэтому $V_{SCDMN}=\frac{1}{3}|SP|\cdot S_{CDMN}$.

Так как $|SP|=\frac{x}{2}$ и $S_{CDMN}=$ $=\frac{\left(x+\frac{x}{2}\right)}{2}\cdot\frac{x\sqrt{3}}{2}=\frac{3x^2\sqrt{3}}{8}$, получаем

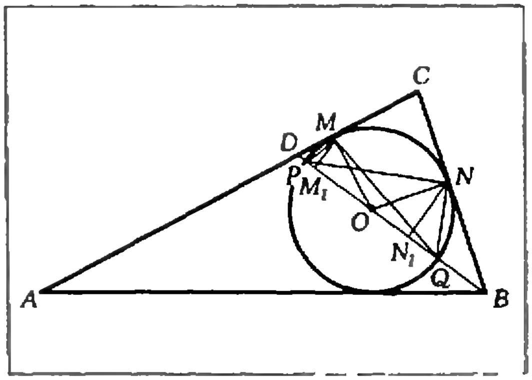


Рис. 1.

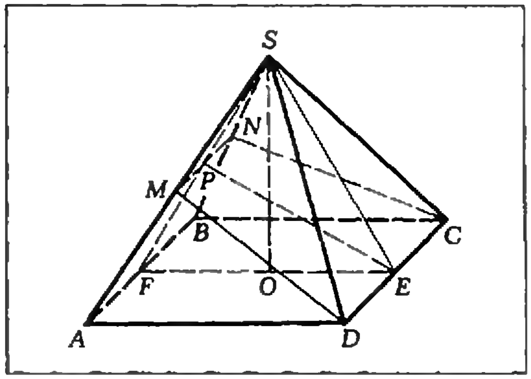


Рис. 2.

$V_{SCDMN}=\frac{x^3\sqrt{3}}{16}$. Легко видеть, что $V_{SABCD}=\frac{1}{3}|SO|\cdot x^2=\frac{x^3\sqrt{3}}{6}$.

Теперь ясно, что

$$\frac{V_{SCDMN}}{V_{ABCDMN}}=\frac{V_{SCDMN}}{V_{SABCD}-V_{SCDMN}}=\frac{3}{5}.$$

Иногда введение вспомогательного отрезка оказывается полезным при решении задач, в которых требуется найти некоторый угол.

Задача 3 (КПИ, 1979). *В правильную треугольную пирамиду вписан шар. Определить угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости основания, зная, что отношение объема пирамиды к объему шара равно* $\frac{27\sqrt{3}}{4\pi}$.

Решение. Если шар вписан в правильную пирамиду, то его центр лежит на высоте пирамиды, шар касается основания в его центре, а боковых граней — в точках, принадлежащих апофемам пирамиды («Геометрия 9—10», с. 181). Пусть $\widehat{SDO}=\varphi$ (рис. 3), $|BC|=x$. Так как $|OD|=\frac{x\sqrt{3}}{6}$, $|SO|=\frac{x\sqrt{3}}{6}\operatorname{tg}\varphi$. Поэтому $V_{SABC}=\frac{1}{3}|SO|\cdot S_{ABC}=\frac{x^3}{24}\operatorname{tg}\varphi$. Поскольку O_1D — биссектриса угла SDO, $\widehat{O_1DO}=\frac{\varphi}{2}$. Поэтому $|O_1O|=\frac{x\sqrt{3}}{6}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ и объем шара равен $\frac{\pi x^3\sqrt{3}}{54}\operatorname{tg}^3\frac{\varphi}{2}$. Из условия получаем уравнение

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}^3\frac{\varphi}{2}}=9.$$

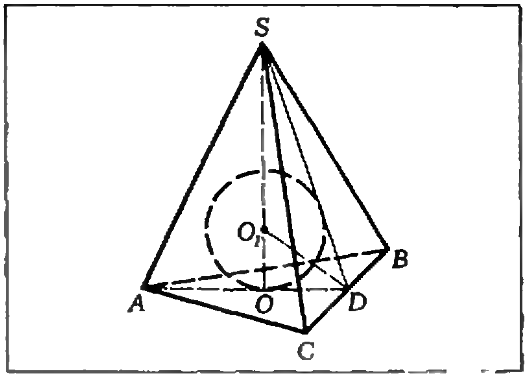


Рис. 3.

Заменив $\operatorname{tg}\varphi$ его выражением через $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, получаем

$$9\operatorname{tg}^4\frac{\varphi}{2}-9\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}+2=0,$$

откуда $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ или $\varphi_1=\frac{\pi}{3}$ и $\varphi_2=2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{3}$. Подумайте, почему условию этой задачи соответствуют два возможных значения φ.)

Введение вспомогательного элемента (отрезка или угла) часто бывает полезно в случаях, когда данные в условии задачи отрезки и углы лежат в разных плоскостях. При этом желательно, чтобы вводимые и данные элементы входили в один треугольник.

Задача 4 (КГУ, физфак, 1978). *Плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды равен α, а высота — h. Определить объем пирамиды.*

Решение. Пусть $|SD|=x$ (рис. 4). Проведем апофему SE. Из

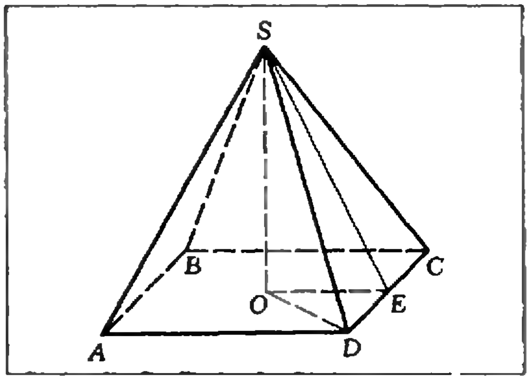


Рис. 4.

$\triangle SDE$ находим $|DE| = x\sin\frac{\alpha}{2}$. $|CD| = 2x\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$. Таким образом, $V=\frac{4}{3}x^2h\sin^2\frac{\alpha}{2}$. Теперь выразим x^2 через h и α. Для этого рассмотрим треугольник SOD. Имеем $|SD|^2 = |SO|^2+|OD|^2$, но $|OD| = |CD|\times\frac{\sqrt{2}}{2} = x\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}$. Поэтому $x^2=h^2+2x^2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, откуда $x^2=\frac{h^2}{\cos\alpha}$. Следовательно, $V=\frac{4}{3}h^3\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$.

Приведем решение этой задачи, использующее введение вспомогательного угла. Пусть $\widehat{SDO}=\varphi$. Из $\triangle SDO$ получаем $|DO| = h\,\mathrm{ctg}\,\varphi$, $|CD| = h\sqrt{2}\,\mathrm{ctg}\,\varphi$. Таким образом, $V=\frac{2}{3}h^3\,\mathrm{ctg}^2\varphi$. Осталось выразить $\mathrm{ctg}^2\varphi$ через функции угла α. Для этого введем вспомогательный отрезок SD. Пусть $|SD| = x$. Тогда $|DE| = x\sin\frac{\alpha}{2}$, $|OD| = x\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\varphi=\frac{|OD|}{|SD|}=\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}$. Поэтому $\mathrm{ctg}^2\varphi=\frac{\cos^2\varphi}{1-\cos^2\varphi}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$, что приводит к полученному ранее ответу.

В данном случае второе решение задачи оказалось несколько длиннее первого.

Введение вспомогательного отрезка часто помогает при решении задач, в условии которых даны угол и какой-нибудь нелинейный элемент (например, объем) и требуется найти другой нелинейный элемент (поверхность, площадь сечения, объем исходной или как-нибудь связанной с ней фигуры).

Задача 5 (КГУ, физфак, 1978). *В шар, площадь поверхности которого S, вписан конус. Угол между образующей конуса и плоскостью основания равен α. Определить площадь полной поверхности конуса.*

Решение. Если конус вписан в шар, то центр шара лежит на высоте конуса либо на ее продолжении за плоскость основания («Геометрия 9—10», с. 108). Осевым сечением рассматриваемой комбинации фигур является равнобедренный треугольник, вписанный в окружность большого круга.

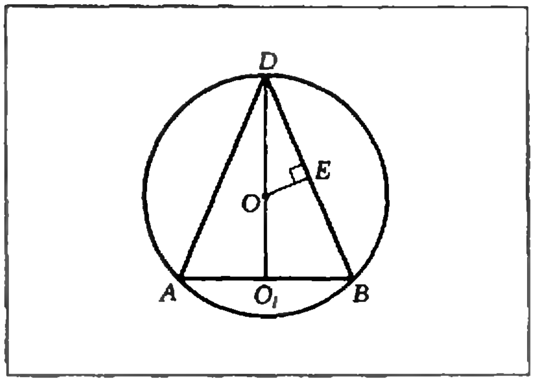


Рис. 5.

Если $\alpha\geqslant 45°$, то центр шара O лежит на высоте конуса (рис. 5). Пусть $|DB| = x$; тогда из $\triangle DBO_1$ находим $|O_1B| = x\cdot\cos\alpha$.

$$S_{п}=\pi|O_1B|\cdot(|DB|+|O_1B|)=$$
$$=\pi x\cos\alpha(x+x\cdot\cos\alpha)=$$
$$=2\pi x^2\cos\alpha\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Очевидно, $\widehat{DOE}=\widehat{DBO_1}=\alpha$ и $|DE| = \frac{x}{2}$. Из $\triangle DOE$ получаем $|DO| = \frac{x}{2\sin\alpha}$ и $S=4\pi\cdot\frac{x^2}{4\sin^2\alpha}=\frac{\pi x^2}{\sin^2\alpha}$, откуда $\pi x^2=S\sin^2\alpha$. Таким образом,

$$S_{п}=2S\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}=$$
$$=S\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Легко видеть, что проведенные рассуждения остаются в силе и при $\alpha<45°$.

Упражнения

1 (МФТИ, 1979). В $\triangle ABC$ дано $\widehat{A}=\frac{\pi}{3}$, $\widehat{B}=\frac{\pi}{4}$. Продолжения высот треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках M, N и P. Найти отношение площадей треугольников ABC и MNP.

2 (КПИ, 1978). Найти отношение объема правильной n-угольной пирамиды к объему вписанного в нее шара, зная, что окружности, описанные около основания и боковых граней пирамиды, конгруэнтны.

3 (КГУ, мехмат, 1978). Вершина правильной треугольной пирамиды является центром сферы, которая касается плоскости основания пирамиды. Отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади поверхности сферы равно a. Определить угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости основания.

4 (ЛВУ ж.-д. войск и военных сообщений, 1978). В конус вписан шар, поверхность которого равна площади основания конуса. Найти косинус угла при вершине в осевом сечении конуса.

5 (КГУ, физфак, 1978). Найти объем правильной треугольной пирамиды, зная плоский угол α при вершине и расстояние a от боковой грани до противоположной ей вершины основания.

6 (КАИ, 1978). Определить объем правильной четырехугольной пирамиды, у которой сторона основания равна a, а двугранный угол между боковыми гранями равен α.

7 (КПИ, 1979). Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с площадью Q и острым углом α. Боковая грань, проходящая через катет, который прилежит к данному углу, перпендикулярна к плоскости основания, две другие грани образуют с основанием углы, равные β. Найти объем пирамиды.

8 (КГУ, физфак, 1978). В шар, площадь поверхности которого S, вписан конус. Угол между образующей конуса и плоскостью основания равен α. Определить площадь полной поверхности конуса.

Числовые ребусы

1. *Ребусы — перевертыши*

а)
```
                 круг
         ×  окружность
   --------------------
                  у****
                 ь****
                т****
               н****
              с****
             р****
             к***
           о****
          о****
         н****
 ----------------------
        **************
```

б)
```
         ×  окружность
                  круг
 ----------------------
           р********тг
          н*********у
         с*********к
        о**********к
 ----------------------
        **************
```

В. Радунский

2. Следующие числовые ребусы:

```
I.   _игрек |три
      три    три
      _ске
       сте
       _гек
        гек
```

```
II.   ******* |икс
     _икс      пиявка
        ***
       _три
         ****
        _пять
           ***
          _два
           ****
          _****
            ****
             кот
```

```
III.  _тысяча |икс
       люкс    икс
      _тлтч
       тяиа
       _юрча
        юрча
```

```
IV.   _четыре |зет
       чраз    зет
       _аар
        зет
        _ызбе
         ызбе
```

составлены в двенадцатиричной системе счисления. В каждом примере цифры заменены буквами и звездочками; одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные; звездочки могут быть любыми цифрами.

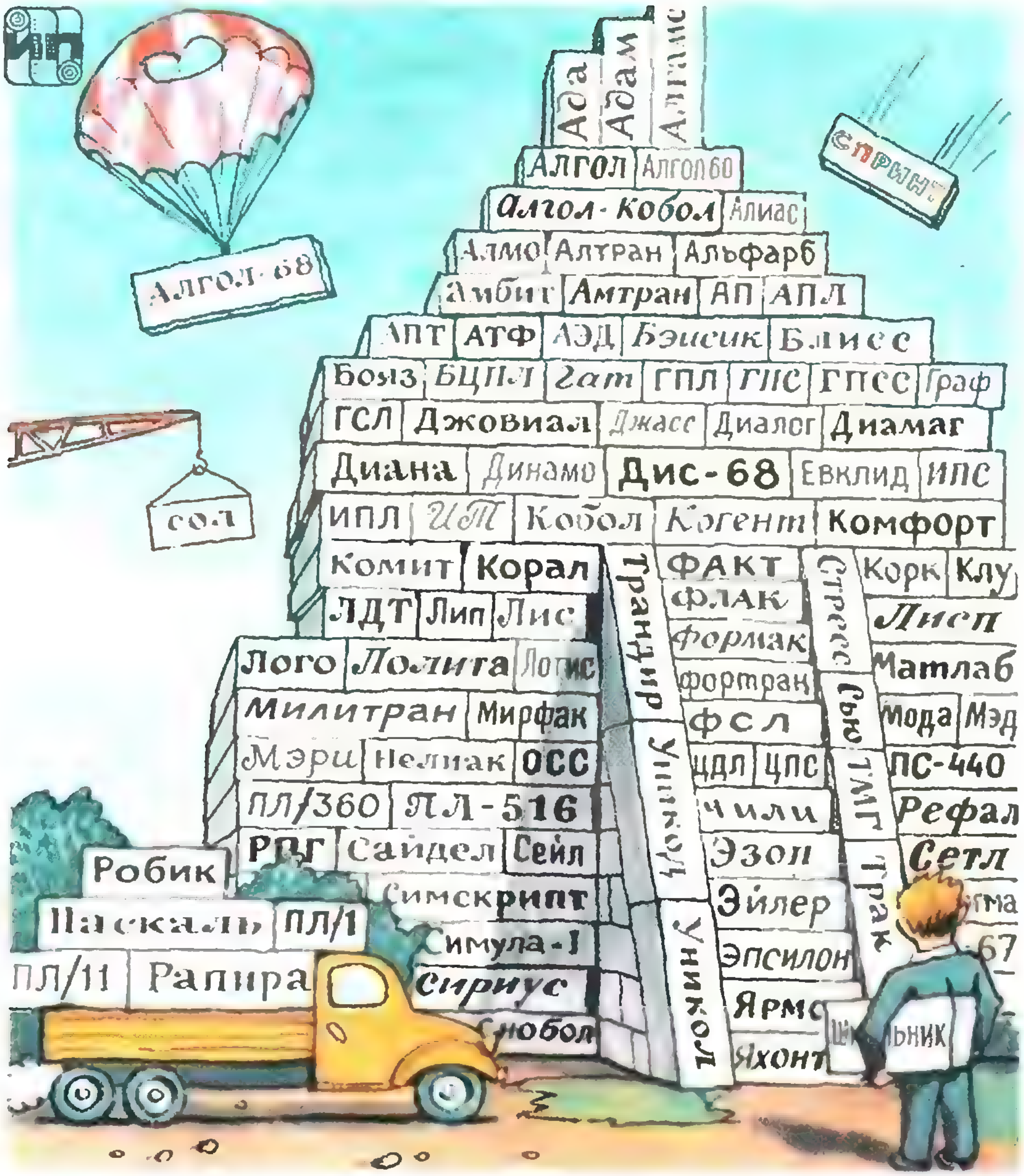
Чтобы вам было легче решить задачу, мы помещаем таблицу умножения в двенадцатиричной системе. Новые цифры (10_{10} и 11_{10}) обозначены соответственно символами X и Y.

	2	3	4	5	6	7	8	9	X	Y
2	4	6	8	X	10	12	14	16	18	1X
3	6	9	10	13	16	19	20	23	26	29
4	8	10	14	18	20	24	28	30	34	38
5	X	13	18	21	26	2Y	34	39	42	47
6	10	16	20	26	30	36	40	46	50	56
7	12	19	24	2Y	36	41	48	53	5X	65
8	14	20	28	34	40	48	54	60	68	74
9	16	23	30	39	46	53	60	69	76	83
X	18	26	34	42	50	5X	68	76	84	92
Y	1X	29	38	47	56	65	74	83	92	X1

Э. Рекстин

К СВЕДЕНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ

С 1 января 1982 года цена за экземпляр нашего журнала устанавливается в размере 40 копеек, стоимость годовой подписки — 4 рубля 80 копеек. Это связано с увеличением стоимости бумаги для печати, затрат на полиграфическое исполнение журнала, расходов на подготовку рукописей и художественно-графическое оформление издания.


Ада
Адам
Алгамс
Спринт
Алгол-68
Алгол
Алгол 60
Алгол-Кобол
Алиас
Алмо
Алтран
Альфарб
Амбит
Амтран
АП
АПЛ
АПТ
АТФ
АЭД
Бэйсик
Блисс
Бояз
БЦПЛ
Гат
ГПЛ
ГПС
ГПСС
Граф
ГСЛ
Джовиал
Джасс
Диалог
Диамаг
Диана
Динамо
Дис-68
Евклид
ИПС
ИПЛ
ИТ
Кобол
Когент
Комфорт
сол
Комит
Корал
Трандир
ФАКТ
Стресс
Корк
Клу
ЛДТ
Лип
Лис
ФЛАК
Лисп
Лого
Лолита
Лотис
Формак
Матлаб
Фортран
Сью
Милитран
Мирфак
ФСЛ
Мода
Мэд
Мэри
Нелиак
ОСС
ЦДЛ
ЦПС
ТМГ
ПС-440
ПЛ/360
ПЛ-516
Чили
Рефал
РПГ
Сайдел
Сейл
Униcор
Эзоп
Трак
Сетл
Робик
Симскрипт
Эйлер
Паскаль
ПЛ/1
Симула-1
Эпсилон
ПЛ/11
Рапира
Сириус
Уникол
Ярмо
Снобол
Яхонт

А. Рар

Какие бывают языки программирования

От редакции. Публикуемая ниже статья доступна и тем читателям, которые не занимаются в Заочной школе программирования.
Свой третий и заключительный курс Заочная школа начнет в следующем номере.

Хотя первые ЭВМ были созданы только в сороковых годах, в настоящее время языков программирования развелось видимо-невидимо (неполный список этих языков изображен на заставке к этой статье).

Учащиеся ЗШП хорошо знают язык Рапира, мы будет ссылаться на него в сносках. Остальные читатели могут эти сноски игнорировать.

Наш рассказ мы начнем с того далекого времени, когда языков программирования еще не было, а были только

Машинные языки

Машинный язык ЭВМ — это не что иное, как система ее машинных команд (см. «Квант», 1981, № 4 — «Трехадресные, одноадресные и... безадресные машины»). Правила «понимания» машиной этих команд заложены в саму конструкцию ЭВМ так же, как, например, в конструкцию автомобиля заложено «понимание» того, что «означает» поворот руля.

Приведем пример работы программиста, использующего язык одной из трехадресных машин. Допустим, что этот программист должен по ходу решения своей задачи вычислить, на какой высоте H находится свободно падающая материальная точка через T секунд после начала падения, если начальная высота точки — A м, начальная скорость — V м/с. Соответствующая физическая формула хорошо известна:

$$H=9{,}81\cdot T^2/2+V\cdot T+A,$$

но программисту удобнее переписать ее в другом виде:

$$H=(9{,}81\cdot T/2+V)\cdot T+A.$$

В самом начале работы над программой программист должен выполнить для нее «распределение памяти», то есть определить адреса ячеек, которые будут служить для хранения тех или иных величин.

Пусть, например, он распределил память следующим образом:

Величина	Адрес ячейки
Константа 9,81	1001
Константа 2	1002
Переменная A	1101
Переменная V	1102
Переменная T	1103
Переменная H	1104

Пусть, далее, в нашей машине (это, кстати, заслуженный ветеран отечественной вычислительной техники — машина М-220, используемая еще кое-где и в наши дни) операция сложения имеет код 01, деления — 04, умножения — 05. Тогда в соответствующем месте своей программы, например начиная с ячейки 0101, программист пишет:

```
0101    05    1001    1104
0102    04    1104    1104
0103    01    1104    1104
0104    05    1103    1104
0105    01    1101    1104
```

Как видим, в целях экономии места ячейка 1104 использована не только для переменной H, но и для хранения промежуточных результатов.

Работая на машинном языке, программист встречается с большими трудностями: ему приходится самому заботиться о распределении памяти, он должен все время помнить, в какой ячейке хранится та или иная величина, каков адрес той или иной команды из программы. Еще существеннее то, что программа и данные к ней жестко связаны с расположением в машинной памяти, так что переместить какую-либо их часть на другое место без изменения адресов во многих командах нельзя. Поэтому вставить в программу какой-то новый кусок трудно, еще труднее составить большую программу из частей, заготовляемых отдельно разными людьми. Частично избавиться от этих затруднений помогли

Первые языки программирования — автокоды

Автокод — язык программирования, тесно связанный с конкретной машиной и ее системой команд. Поэтому для разных машин должны существовать разные автокоды, но для одной и той же машины можно создать несколько автокодов. Мы здесь рассмотрим пример автокода самого низкого уровня, то есть автокода, наиболее близкого к машинному языку.

Желая запрограммировать приведенную выше формулу на автокоде для машины М-220, программист напишет, например, такую последовательность операторов автокода:

```
У   =E'9.81';T,H
Д   H,=E'2',H
С   H,V,H
У   H,T,H
С   H,A,H
```

(С — сложение, У — умножение, Д — деление; с помощью конструкции =Е'...' изображается числовая константа).

Уже на этом примере видны как удобства автокода, так и его недостатки. С одной стороны, программист не заботится больше ни о каких адресах. Изменяя программу или соединяя несколько программ в одну, он должен беспокоиться только о том, чтобы разные величины не имели одного и того же имени, и может не обращать внимания на их перемещение по памяти. Но, с другой стороны, тексты на автокоде еще слишком близки к текстам на машинном языке, действия на нем слишком мелки, непривычны для математика.

Как бы ни был низок уровень автокода, написанные на нем программы машиной уже непосредственно не воспринимаются, и их, как и программы, написанные на любом другом языке программирования, надо перед исполнением переводить на машинный язык. Для такого перевода (*трансляции*) разработаны специальные программы — *трансляторы*. Трансляторы с автокодов называются *ассемблерами*. Близость автокода к машинному языку обеспечивает сравнительную простоту ассемблера.

Фортран и Алгол

Первым языком, не зависящим от машины, стал язык *Фортран*, предназначенный для программирования вычислительных задач. Он был создан в 1956 г. в США. В 1958—1960 гг. группой математиков из разных стран был разработан для тех же целей язык *Алгол-60*. Эти два языка и сейчас еще широко распространены во всем мире. На них написано огромное количество программ из различных областей применения вычислительной математики. Языки эти во многом отличаются друг от друга, но мы не будем здесь касаться их различий. Вместо этого вернемся к нашему примеру. Нам приятно будет узнать, что для вычисления искомой величины теперь достаточно всего лишь одного оператора:

$$H=(9.81*T/2+V)*T+A$$

(пример записан на Фортране).

Наряду с обычными переменными объектами рассматриваемых языков могут быть также массивы — одномерные, двумерные и т. д. Одномерный массив — это числовая последовательность определенной длины*). Двумерный массив — это последовательность, состоящая из одномерных массивов одной и той же длины, и т. д. Массив должен быть описан в программе; такое описание должно полностью определять его размеры. Пусть, например, в программе на Фортране описан некоторый двумерный массив с именем ТАБЛИЦА и в описании этого массива указаны его размеры: 3 — по первому измерению и 4 — по второму**). Удобно представлять этот массив как таблицу (матрицу) из 3 строк и 4 столбцов, заполненную числами (*элементами массива*). В некоторый момент исполнения программы эта матрица может быть, например, такой:

$$\begin{matrix} -4 & 0 & 5 & 8 \\ 6 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 15 & 11 \end{matrix}$$

Элемент на пересечении I-й строки и J-го столбца задается *переменной с индексами* ТАБЛИЦА (I, J). Над переменной с индексами можно производить такие же действия, как и над обычными переменными, так что пара операторов

```
K=2
ТАБЛИЦА (1,1)=ТАБЛИЦА
(K+1,4)+ТАБЛИЦА (K,K)
```

заменит верхний левый элемент матрицы на число 9.

В языках Алгол-60 и Фортран существуют *условные операторы*, позволяющие определять дальнейший ход исполнения программы в зависимости от текущих значений тех или иных переменных, а также *операторы цикла*, осуществляющие многократное исполнение некоторой части программы***). В Алголе-60 существуют *процедуры*, позволяющие вызывать в разных местах программы исполнение одной и той же группы операторов*); сходные средства (подпрограммы) есть и в Фортране.

---

*) На Рапире одномерные массивы называются *кортежами* (см. «Квант», 1980, № 3, ЗШП, урок 8).

**) На Рапире — 3 составляющих кортежа, каждый из которых имеет по 4 элемента.

***) О подобных средствах в Рапире см. «Квант», 1980, № 9, ЗШП, урок 9.

Еще одно вавилонское столпотворение

Вслед за созданием Фортрана в разных странах начали возникать все новые и новые языки программирования. Сейчас, пожалуй, счет их надо вести на сотни. По поводу этого обилия языков часто вспоминают библейское сказание о Вавилонском столпотворении. Согласно этому сказанию, жители Вавилона решили построить башню (столп) до самого неба. Но из этого ничего не получилось. Бог, не желая допустить людей на небо, разделил единый человеческий язык на языки разных народов, и строители перестали понимать друг друга. На заставке к статье изображена новая Вавилонская башня.

Есть две причины для такого усердного языкотворчества. Во-первых, ЭВМ — это универсальные вычислительные устройства, предназначенные для решения произвольных задач, возникающих в самых различных сферах человеческой деятельности. Конечно, все эти задачи можно решить при помощи машинных языков, но мы видели, что это весьма трудно. Языки же Фортран и Алгол-60, сильно облегчая программирование обычных вычислительных задач, для других задач подходят плохо. Поэтому и стали появляться специализированные языки для все новых и новых классов задач, порой весьма узких и специфичных. Во-вторых, существенно то, что программирование — очень молодая область человеческой деятельности. Многое в нем еще не устоялось, и поэтому программисты творят, выдумывают, пробуют, подбирая наиболее подходящие для тех или иных целей языковые средства. И эти пробы в конечном счете полезны, так как дают возможность оценивать и сравнивать разные подходы в расчете на использование их в будущих, более совершенных языках. А языки, которыми не пользуются, естественным образом отмирают.

Приглядимся теперь внимательней к отдельным кирпичам новой Вавилонской башни и рассмотрим сначала

Специализированные языки

Вычислительные задачи тоже бывают разными. Это могут быть инженерные и научно-технические задачи, в которых надо производить большое количество вычислений над сравнительно небольшим количеством данных. Для этих целей как раз хорошо подходят Алгол-60 и Фортран. Есть также бухгалтерско-экономические и учетные задачи, где производимые операции несложны, но должна перерабатываться большая и сложно организованная информация, например ведомости расчета заработной платы. Для таких задач еще в 1960 г. был разработан язык *Кобол*. Программы на Коболе задают формат (способ расположения) информации на входных и выходных документах и определяют с помощью фраз, близких к фразам английского (или русского) языка, какие действия надо выполнять над числовыми величинами и над текстами, входящими в эту информацию.

Распространены в то же время и такие задачи, в которых обработка текстов или другой нечисловой (*символьной*) информации занимает центральное место. Таким задачам был посвящен один из уроков Заочной школы программирования («Квант», 1980, № 11), но мы несколько расширим тематику этого урока, упомянув еще два круга задач.

Полушутя можно сказать, что Алгол-60, Фортран и Кобол знают арифметику, но не знают алгебры: они в состоянии вычислить значение выражения x^2-y^2 при конкретных значениях x и y, но им не под силу преобразовать это выражение в $(x+y)(x-y)$. Мы столкнулись здесь с одной из важных задач обработки символьной информации — формульными преобразованиями.

---

*) О процедурах в Рапире см. «Квант», 1980, № 2, ЗШП, урок 6.

Другой круг задач — это применение программирования к самому программированию. Программы, написанные на каком-либо языке, нуждаются в редактировании разного рода и, самое важное, в трансляции, переводе на машинный язык. Но программы — это тексты, и все эти задачи относятся к области текстовой обработки, зачастую сложной и специфичной. Существует много языков, предназначенных для работы с текстами. Наиболее известен из них *Снобол*.

Некоторые языки программирования характеризуются не столько областью применения, сколько структурой обрабатываемых данных. Таков *Лисп* — язык, специально предназначенный для работы с информацией, организованной в списки. Список отличается от одномерного массива большей гибкостью. Длина его не фиксируется заранее, его можно пополнять в любом месте новыми элементами и из любого его места можно удалять элементы. Практически это означает, что элементы списка не располагаются в памяти вплотную друг к другу (как это обычно имеет место для массивов), но зато каждый элемент снабжен ссылкой, указывающей, где находится следующий элемент. Ясно, что местные изменения в списке не приводят к сдвигу списка по памяти — меняются всего лишь отдельные ссылки.

Универсальные языки

С середины 60-х годов наряду со стремлением к созданию специализированных языков программирования возникло и противоположное стремление: стали появляться универсальные языки, пригодные для любых задач — инженерных или бухгалтерских, редакторских или трансляторских — с произвольной структурой обрабатываемой информации.

Сразу можно сказать, что в соревновании между специализированными и универсальными языками не может быть победителя. И те, и другие языки хороши в одних условиях и плохи в других. Если программисту часто приходится переходить с одного класса задач на другой или если в пределах одной и той же задачи приходится, скажем, и производить сложные вычисления, и редактировать текст, то, конечно, надо пользоваться универсальным языком. С другой стороны, ясно, что нет смысла запускать громоздкий универсальный инструмент, если имеешь дело с каким-то ограниченным видом работ. Из универсальных языков программирования упомянем здесь *ПЛ/1, Алгол-68, Сетл* и *Паскаль*.

Несколько огрубляя, можно сказать, что ПЛ/1 произошел из Фортрана, а предшественником Алгола-68 был Алгол-60. ПЛ/1 и Алгол-68 могут работать с данными, организованными весьма сложным образом. Например, можно задать массив, элементы которого являются списками, каждый из которых состоит последовательно из целого числа, строки символов, числового массива, снова целого числа и т. д. Алгол-68 характерен также тем, что программист может в своей программе придавать операциям языка (например, сложению с его обычным знаком +) новый или дополнительный смысл (например, поэлементное сложение массивов), а также задавать новые операции. Программист может также, определив новый набор операций, нужных для некоторого класса задач, сделать этот набор доступным для всех программ, решающих задачи этого класса. Таким образом, Алгол-68 оказывается языком саморасширяющимся и (так как могут появляться новые операции) в то же время самонастраивающимся (на определенную область применения).

Главной особенностью языка Сетл является использование нового типа

Употребленное здесь понимание выражения «универсальный язык» не общепринято. Например, упоминаемая в списке литературы книга С. С. Лаврова даже Алгол-60 называет универсальным языком.

данных — *множеств**). Язык Паскаль выбран для подробного изучения в следующих номерах «Кванта».

С языками, о которых шла речь в этой статье, более основательно читатель может познакомиться по следующей литературе:

Первин Ю. А. «Основы Фортрана» (М., «Наука», 1973).
Лавров С. С. «Универсальный язык программирования (Алгол-60)» (М., «Наука», 1972).
Коддингтон Л. «Ускоренный курс Кобола» (М., «Мир», 1974).
Грисуолд Р. и др. «Язык программирования Снобл-4» (М., «Мир», 1980).
Маурер У. «Введение в программирование на языке Лисп» (М., «Мир», 1976).
Лепин-Дмитрюков Г. Л. «Программирование на языке ПЛ/1» (М., «Советское радио», 1978).
Пейган Ф. «Практическое руководство по Алголу-68» (М., «Мир», 1979).
Левин Д. Я. «Сетл — язык программирования весьма высокого уровня» («Программирование», 1976, № 5).
Б. Хигман «Сравнительное изучение языков программирования» (М., «Мир», 1974).

---

*) Рапира, которая отовсюду взяла понемножку, воспользовалась и этой новинкой — см «Квант», 1980, № 3, ЗШП, урок 8

Конкурс машинных рисунков

Редакция журнала «Квант» и Вычислительный центр СО АН СССР объявляют конкурс на лучший рисунок, выполненный на ЭВМ с использованием систем машинной графики.

Участниками конкурса могут быть школьники и учащиеся профессионально-технических училищ.

На конкурс могут быть представлены реалистические или стилизованные рисунки, орнаменты, семейства математических кривых, изображения поверхностей и т. д. Рисунки должны быть оригинальными (повторения рисунков, публиковавшихся в нашем журнале, на конкурс не принимаются), в орнаментах и узорах математический интерес должен сочетаться с эстетическими достоинствами.

К рисунку необходимо приложить полную распечатку программы, подробный комментарий к ней, поясняющий математическую идею и порядок работы программы, подробные сведения об авторе (авторах) — фамилию, имя, отчество, номер школы и класса, полный домашний адрес.

Учащиеся, не имеющие самостоятельного выхода на ЭВМ с графопостроителем, могут присылать программы для построения рисунков с приложением примерного эскиза. Программы могут быть выполнены на Рапире, Паскале или Алголе с использованием системы Шпага (см. «Квант», 1980, № 1, с. 56) или на Фортране с использованием описываемой ниже графической системы. Объем программы — не более 100 операторов, размер рисунка — не менее 100×100 мм и не более 300×300 мм.

Тщательно проверьте программу вручную, прежде чем направлять на конкурс: ошибки в конкурсных работах исправляться не будут.

Все участники конкурса (в том числе и учащиеся Заочной школы программирования и ее филиалов) должны выслать работы не позднее 15 ноября 1981 года по адресу:
630090, Новосибирск, 90, Вычислительный центр СО АН СССР, Группа школьной информатики, на конкурс.

Желаем удачи! Ждем рисунки и программы!

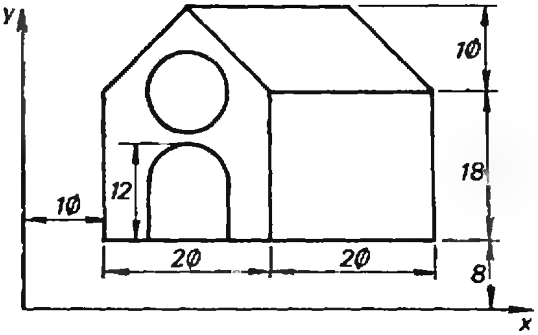
Для пишущих на Фортране

Для выхода на графическую систему из программы на Фортране надо соблюдать следующие правила:

1. В начале программы должен быть инициирующий оператор CALL SBROS, перед ее логическим завершением — оператор CALL STR.

2. Для прямолинейных перемещений пера в указываемые точки используется оператор CALL LINX (X, Y), где X, Y — координаты точки в мм; если перо при этом выключено — осуществляется холостой ход, если включено — чертится отрезок. Включать и выключать перо в нужные моменты можно операторами CALL PERO и CALL VP.

3. Для черчения отрезков «со свободными концами» используется также вызов модуля CALL OTREZ (XN, YN, XK, YK),



где параметрами являются координаты начальной и конечной точек отрезка; данный модуль сам включает перо в начальной точке отрезка и сам выключает после черчения.

4. Целую окружность можно чертить оператором CALL OKR (XC, YC, R), где XC, YC — координаты центра, R — радиус, причем перо также включается и выключается автоматически. Дугу можно начертить, записав строку CALL OKRI (XC, YC, R, ALF, DALF); здесь ALF — начальный центральный угол, DALF — угловая величина дуги со знаком, определяющим направление обхода. Угловые размеры задаются в градусах, хотя градусная мера, конечно, не ставится. После черчения дуги перо само не выключается; если надо, его можно выключить оператором CALL VP; включается перо в начале дуги автоматически; если оно было включено до обращения к данному модулю, от отработанной точки к началу дуги дополнительно чертится отрезок.

5. Для выполнения чертежа в двух или более цветах или несколькими толщинами линий пользуются оператором CALL NPERA (N), где N может принимать значения 0,1,2,3. Этот оператор сам не включает пера, а лишь запоминает, каким пером надо работать дальше. Основным пером считается перо № 0; им выполняется чертеж, если оператора смены пера нет в программе.

Уже несколько отмеченных подпрограмм позволяют чертить разнообразные изображения; нужные вычисления, логические действия, одну-две подпрограммы можете подготовить сами средствами Фортрана. Кривые линии представляются последовательностью малых отрезков; модуль LINX при этом может работать в цикле.

В целом программа не должна быть длиннее 60—100 операторов, к ней следует приложить пояснения — какие перья должны быть установлены, ожидаемый размер рисунка, начальное положение пера (оно соответствует началу координатной системы).

В качестве примера приводится программа для простейшего рисунка (конечно, такой рисунок не годится для конкурса):

```
DIMENSION X (10), Y (10)
CALL SBROS
DO 1 K=1,9
CALL LINX (X (K), Y (K))
CALL PERO
CALL VP
DATA X/20., 10., 10., 50., 50., 40.,
      20., 30., 30./, Y/36., 26, 8.,
      26., 36., 36., 26., 8./
CALL OTREZ (30., 26, 50., 26.)
CALL NPERA (1)
CALL OKR (20., 26., 5.)
CALL LINX (15., 8.)
CALL PERO
CALL OKR 1(20., 7., 5., 180., —180.)
CALL LINX (25., 8.)
CALL VP
CALL STP
END
```

Примечание. Для машин серии ЕС нули следует перечеркивать.

Список читателей...

(Начало см. на с. 28)

73, 74; *Н. Розенвайн* (Киев) 63, 66; *Л. Ростока* (Хуст) 72, 74, 77; *М. Рябчиков* (Саратов) 73—77; *А. Салтанов* (Новополоцк) 63, 66, 67, 73—77; *А. Санжур* (Киев) 66, 67; *В. Свадеба* (Ровно) 66; *А. Сидоренков* (Смоленск) 74; *В. Сидорин* (Реутов) 70; *Ю. Синюков* (ст. Селезни Тамбовской обл.) 74; *Н. Сливка* (с. Ефремовка Павлодарской обл.) 73; *А. Смирнов* (Курган) 66, 68, 72—77; *А. Сокол* (п. Черноголовка Московской обл.) 66, 69, 72—74; *О. Сомин* (Саратов) 66, 69, 72—77; *С. Стрелецкий* (Львов) 69; *Л. Стрешинский* (Донецк) 66; *Р. Тазитдинов* (Ижевск) 73; *Ю. Талденко* (Сумы) 66, 69, 72—74; *А. Терещенко* (с. Нерудсталь Днепропетровской обл.) 69, 73; *А. Тимченко* (Одесса) 72—77; *И. Тихоненко* (с. Котуркуль Кокчетавской обл.) 69, 72, 73, 76, 77; *А. Тищенко* (Днепропетровск) 66, 68, 69, 72—76; *Г. Трунов* (Москва) 74; *В. Усачев* (Ромны) 72—77; *В. Ухов* (д. Морозовка Ленинградской обл.) 66, 73, 74; *Н. Федин* (Омск) 66, 67, 69—77; *Н. Фесун* (Золотоношский р-н Черкасской обл.) 66, 69; *С. Фокин* (Верхний Уфалей) 74, 77; *О. Фонарев* (Сумгаит) 66; *М. Фридман* (Львов) 66, 69, 73, 76, 77; *А. Фролов* (Тула) 67—69, 72—77; *К. Фролов* (Москва) 66; *С. Фролов* (Москва) 70; *А. Ходарин* (п. Нововоронежский Воронежской обл.) 69; *Б. Хорец* (Ташкент) 66; *А. Цымбалюк* (Винница) 73, 74, 76; *О. Черкасов* (Алма-Ата) 74; *А. Чернышев* (Свердловск) 73; *С. Шалаберидзе* (Тбилиси) 72, 73; *А. Шевченко* (Артемовск Донецкой обл.) 69, 72, 74; *М. Шевченко* (Артемовск Донецкой обл.) 69, 72, 74; *В. Шелудько* (Днепропетровск) 69; *М. Шепетько* (Давид-Городок) 73; *Ю. Шефтель* (Киев) 73; *П. Шихалиев* (с. Беюк-Дахна Аз.ССР) 73; *М. Шокуров* (с. Ельники Морд.АССР) 73, 76, 77; *А. Шрамков* (п. Волоконовка Белгородской обл.) 73, 74; *А. Шугай* (Запорожье) 74; *А. Эрькин* (Минск) 69; *Р. Эфендиев* (Баку) 66; *Ф. Ямаев* (с. Байряки Тат.АССР) 69.

Веселая мозаика Сэма Лойда

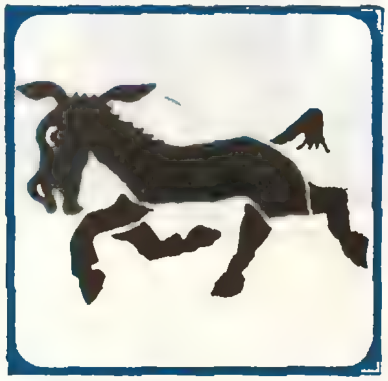


Рис. 1.

В этом году исполняется 140 лет со дня рождения и 70 лет со дня смерти прославленного мастера головоломок, изобретателя знаменитой «игры в 15», одного из родоначальников занимательной математики, классика этого жанра Сэма Лойда. В 1980 г. издательство «Мир» выпустило в свет «Математическую мозаику» Лойда — сборник его лучших математических задач и головоломок.

Публикуемая ниже статья, навеянная чтением этого нешаблонного сборника, не является рецензией в общепринятом смысле слова. Ее автор, математик-профессионал, вместо обычного обсуждения содержания, достоинств и недостатков книги предпочитает вольно пересказывать Лойда и подробно рассматривать конкретные головоломки, по ходу предлагая новые. Несмотря на многочисленные отступления от буквы задач Лойда (а может, и благодаря им), статья, как нам кажется, лучше обычной рецензии передает праздничный дух вольного изобретательства, остроСловия и веселья, характерный для книги Лойда.

Друзья дали мне «Математическую мозаику» Сэма Лойда, когда «позавчера» еще было «завтра», попросив при этом вернуть ее, когда «послезавтра» станет «позавчера»*), так что, когда «завтра» станет «сегодня», мне придется расстаться с этой захватывающей книжкой, так, видимо, и не прочитав ее целиком — а в магазинах ее уже нет! Какого числа мне дали книжку, догадайтесь сами — сообщу лишь, что оно ни *разу в году не выпадает на день недели, с которого начинается тот месяц, когда я пишу эти строки; только учтите: с того же дня начинаются и два других месяца того же года.*

Разгадав эту головоломку, вы вместе со мной подивитесь, как быстро разошлась «Математическая мозаика», выпущенная в марте 1980 года стотысячным тиражом.

Многие головоломки Лойда — похитрее этой. Попробуйте-ка, например, решить задачу № 45 про пони и белую лошадь, которую Лойд поистине окружает загадочным ореолом (рис. 1).

Скопируйте пони на бумагу, вырежьте 6 частей и расположите их так, чтобы получилась наилучшая из возможных фигура лошади. Вот и все! Однако весь мир смеялся целый год над теми гротескными фигурами, которые получались из этих 6 частей. Были проданы миллионы экземпляров этой головоломки.

Красивое (вовсе не гротескное) решение этой задачи — типичная каверза Сэма Лойда. Коварный подвох ожидает нас и в следующей остроумной миниатюре:

№ 48. Корова, коза и гусь Один датчанин с козой на веревке и гусем под мышкой повстречал молочницу, которая вела корову. Вдруг девушка испуганно вскрикнула.

— Ты чего? — спросил Ганс.

— Так ты же хотел поцеловать меня против моей воли — ответила скромница.

— Как бы я мог это сделать с этими вот строптивыми животными? — кивнул Ганс на козу и гуся.

— А что мешает тебе воткнуть посох в землю, привязать к нему козу, а гуся посадить под мое ведро? — настаивала девушка.

— Да твоя корова косится на меня и в это время непременно бы меня боднула, — оправдывался Ганс.

— О, эта глупая корова не бодается, а что если ты вдруг возьмешь и выгонишь всех троих на мое пастбище? — не унималась Кристина.

Вот здесь-то и возникает одна крайне интересная головоломка, ибо во время последовавшего затем разговора выяснилось, что коза и гусь вместе съедают столько же травы, сколько и корова. Поэтому скажите, если данное пастбище прокормит корову и козу в течение 45 дней, либо корову и гуся в течение 60 дней, либо козу и гуся в течение 90 дней, то сколько дней на нем смогут одновременно пастись корова, коза и гусь?

Если бы не веселое вступление, вряд ли мы стали бы решать такую задачу — эка невидаль: $x=y+z$ (корова съедает ежедневно столько же, сколько коза и гусь),

$$45(x+y)=60(x+z)=\\=90(y+z),$$

откуда

$$45(2y+z)=60(y+2z)=\\=90(y+z),$$

$$3(2y+z)=4(y+2z)=\\=6(y+z)\ldots$$

---

*) Эта просьба навеяна «головоломным лепетом» малышки Присиллы из задачи № 183 (читатели, у которых нет под рукой книжки Лойда, могут познакомиться с Присиллой на с. 50 в предыдущем номере «Кванта»), а всего в «Математической мозаике» 280 занимательных задач и головоломок, если не считать возникших случайно при подготовке книги к печати (речь о них пойдет особо).

Стоп!

Если $6y+3z=6y+6z$, то $z=0$, но тогда $6y=4y$; значит, и $y=0$, и $x=y+z=0$. Бедные животные не едят травы!? Но как же они тогда объедают пастбище, да еще за различное число дней?

Ерунда какая-то!

Не испытывай мы симпатии к только что так славно насмешившим нас Гансу и Кристине, мы бы, наверно, бросили их несуразных травоядных подопечных. Рассуждали мы верно — значит, в условии ошибка или опечатка!

Нет-нет! Не ошибка, не опечатка, а преднамеренный подвох насмешника Лойда.

Гусь ест траву: $z>0$. Значит, $45(x+y)=45(2y+z)<90(y+z)$ — корова и коза в течение 45 дней съедят травы меньше, чем коза и гусь за 90 дней!

Как же меньше? Ведь сказано же: «Данное пастбище прокормит корову и козу в течение 45 дней, либо козу и гуся в течение 90 дней».

Ну, и что? Едят-то не само пастбище, а траву. А откуда трава? Растет. Вот то-то и оно, что растет! И за 90 дней травы вырастет больше, чем за 45 дней!

Так что обозначайте-ка через t ежедневный прирост травы, составляйте новые уравнения и решайте их*)! А заодно определите, *сколько времени росла трава на пастбище до начала трапезы***), и, кстати уж, скажите, *чему примерно равна высота посоха, к которому на рисунке 2 привязана коза.*

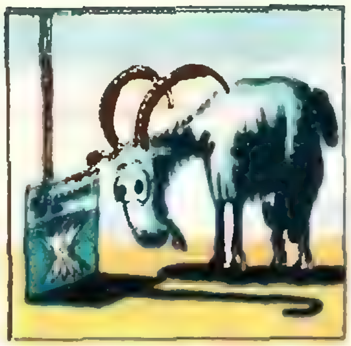


Рис. 2.

Педант рассердится: «Это не научно — и сама задача, и ваши объяснения! Следовало просто составить 4 уравнения с 3 неизвестными: $x=y+z$, $1=45(x+y)$, $1=60(x+z)$, $1=90(y+z)$, обозначив через x, y, z доли пастбища, объедаемые животными ежедневно. Задача переопределена и в связи с этим противоречива. А если нужно учитывать прирост травы, то это *должно* быть оговорено *заранее!*».

Что ответить ему? Предупредим его, что в задаче № 32 из книжки Лойда ответ — *не* 3,5 года — пусть знает об этом *заранее*. А насчет того, что «головоломки — не наука», отошлем к авторитетам: «...не все то, что не наука, уж обязательно плохо («Фейнмановские лекции по физике», том 1, с. 55).

Конечно же, головоломки — не наука (хотя именно в науке — в отличие от стандартного задачника — условия задачи обычно не раз меняются в процессе решения), это совсем другой жанр развлекательный, легкий, веселый! Лойд отнюдь и не претендует на научность, когда сообщает (в задаче № 65), где искать истоки известной истории про колумбово яйцо, или рассказывает (в задаче № 107) о нравах испанских монахинь, плененных франками.

№ 65. Задача Колумба

В XV веке страстно увлекались азартными играми. Среди них была и игра с куриными яйцами, позволяющая, видимо, найти истоки известной истории про колумбово яйцо, которая наряду с открытием Америки увековечила имя великого мореплавателя.

Два игрока по очереди выкладывают яйца одинаковых размеров на квадратную салфетку, пока на ней есть место для очередного яйца. Нельзя передвигать ранее выложенные яйца или класть яйца друг на друга. Выигрывает тот, кто положит последнее яйцо.

Найдите выигрывающую стратегию для первого игрока.

Имейте в виду — мало знать решение аналогичной задачи с монетами: форма яиц, уже породившая однажды войну между «остроголовыми» и «тупоголовыми», вносит сумятицу и в задачу Колумба.

№ 107. Монастырская задача

На каждом из двух жилых этажей старинного испанского монастыря по 8 келий, в угловых кельях по два окна, в «средних» по одному (рис. 3). Мать-настоятельница следит за тем, чтобы 1) каждая келья была занята, 2) на верхнем этаже жило вдвое больше монахинь, чем на нижнем, 3) в 6 кельях с окнами на каждую из четырех сторон здания жило ровно по 11 монахинь.

После исчезновения девяти молодых и хорошеньких монахинь, видимо во всех смыслах плененных франками, оставшиеся, чтобы не огорчать мать-настоятельницу, расселились так, что настоятельница не заметила

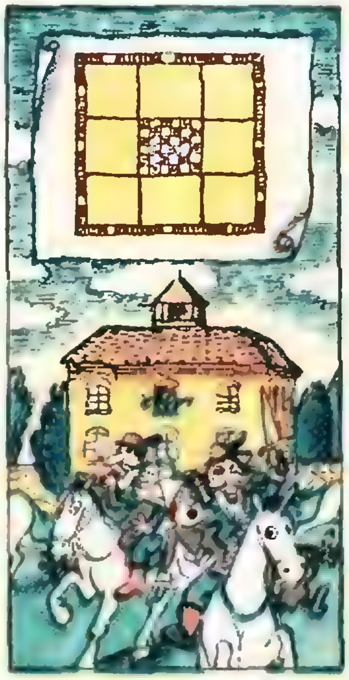


Рис. 3.

---

*) Можно обойтись и без уравнений, применив чисто арифметические рассуждения. Отметим, кстати, что некоторые задачки Лойда (в отличие от рассматриваемой) требуют находчивости, только если решать их арифметически, и несколько тускнеют при использовании языка элементарной алгебры, оставаясь, впрочем, много занимательней стандартных задач на составление уравнений.

**) У меня получилось 1/2 года, даже если Кристина все это время кормила свою корову в другом месте — так что как бы к концу пиршества не выпал снег! Впрочем, такого рода несоответствия мало смущают Лойда, у которого жене Смита 15 лет (задача № 99), а некоторые школьницы не достигли двухлетнего возраста (задача № 32).

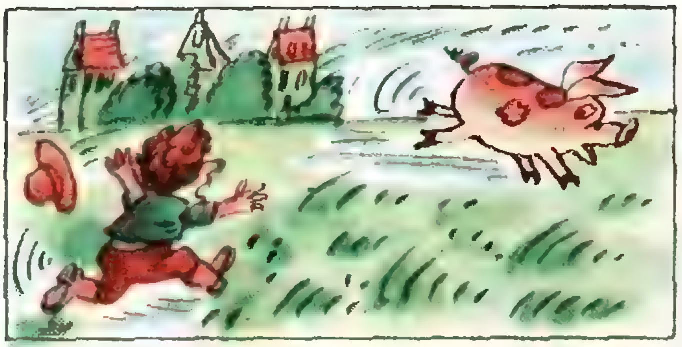


Рис. 4

перемен: ее 3 требования остались выполненными, хотя девять монахинь отсутствовало.

Сколько монахинь проживало в монастыре и как они размещались по кельям? Единственно ли решение? Постарайтесь строго обосновать ответ.

Специфика Лойда — яркие, полные остроумия тексты, не слишком связанные с существом задач, но создающие у читателя приподнятое настроение и вдохновляющие его на штурм весьма замысловатых и каверзных вопросов. «То, что познается с удовольствием и интересом,— говорит Лойд в одной из головоломок устами шута Беппо, — никогда не забывается... Учитель, заставляющий зазубривать правила, годен лишь для попугаев!»

Иногда Лойд изменяет этому принципу, сообщая рецепты для решения своих головоломок без всяких объяснений. Вот, например, задача № 145 про Тома, сына трубача. В англоязычных странах каждый с детства помнит немудреный стишок: «Том, Том — сын трубача, Украл свинью и дал стрекача...» Конец у этой истории печальный: свинью съели, а Тома побили. Лойд рассказывает нам ее начало: как происходила погоня Тома за свиньей (рис. 4).

...Том, сын трубача, решил украсть свинью. Когда он побежал за свиньей, то находился в 250 ярдах к югу от нее. И свинья, и Том побежали одновременно с постоянными скоростями (Том в 4/3 раза быстрее свиньи). Свинья бежит на восток. Вместо того чтобы бежать наперерез*), Том сгоряча бежит так, что в каждый момент движется точно на свинью. Как далеко убежит свинья, прежде чем ее удастся схватить?

Далее, в условии говорится: «Простое правило, позволяющее решать задачи такого типа, основано на элементарной арифметике, однако оно может оказаться новым для многих любителей головоломок».

Не знаю, как математика-любителя, но математика-профессионала такое заявление настораживает: обозначим через R_T и R_C расстояния, которые пробегут Том и свинья; Том бежит по довольно сложной кривой (по так называемой «линии погони»), и обещание *вычислить* R_C *(а значит, и* $R_T = \frac{4}{3}R_C$*) с помощью элементарной арифметики* вызывает недоверие.

Введем вместо числовых данных буквенные: пусть r — начальное расстояние между Томом и свиньей, v_T и v_C — их скорости и $\omega = |v_C|/|v_T|$ (в задаче $r = 250$ ярдов, $\omega = 3/4$).

Рассмотрим две вспомогательные задачи:

Пусть Том и свинья бегут по одной прямой, один раз Том *вдогонку* за свиньей, другой раз *навстречу* друг другу. Тогда (проверьте), прежде чем схватить свинью, Том пробежит соответственно расстояния $R_1 = r/(1-\omega)$ и $R_2 = r(1+\omega)$

В решении задачи № 145 Лойд без объяснений и доказательств сообщает правило: $R_T = (R_1 + R_2)/2$.

Едва заглянув на эту неправдоподобно простую формулу, большинство искушенных математиков (никогда не занимавшихся задачей о погоне) воскликнет: «Этого не может быть!», — и удивится, как редактор книги Мартин Гарднер и переводчик Ю. Н. Сударев (вообще заслуживающий самых высоких похвал) не заметили столь явной ошибки!

Самое удивительное, что правило-то... верное! Как ни странно, R_T действительно равно $r/(1-\omega^2) = (R_1 + R_2)/2$, откуда и для R_C получается столь же неправдоподобно простая формула:

$$R_C = r(\omega)/(1-\omega^2) = (R_1 - R_2)/2.$$

И все же вряд ли можно сказать, что формулы для R_C и R_T основаны на элементарной арифметике: их вывод*) требует знакомства с началами математического анализа.

Да, весьма непроста задача про Тома, сына трубача! Но вот головоломка еще труднее:

Дочке фермера Смита мисс Покахонт 24 года, ее братишке маленькому Капитану Джону 3 года. Сколько лет каждому из остальных 13 фермерских отпрысков, если все 15 детей Смита родились с интервалом в 1 год?

Поистине загадочная ситуация! Будь еще фамилия фермера Хонт, а не Смит, можно было бы заподозрить, что здесь есть какое-то сверхзамысловатое решение с игрой слов. Но нет! На с. 162 черным по белому написано, что фамилия фермера — Смит (в полном соответствии с набившей оскомину каждому американцу историей о том, как когда-то дочь вождя *индианка по имени Покахонт* полюбила некоего *капитана Джона Смита*).

На с. 162? Позвольте-позвольте, скажете вы, здесь совсем не та задача:

№ 154. Сколько лет мисс Покахонт?

15 детей фермера Смита родились с интервалом в 1 год. Покахонт, старший ребенок, в 8 раз старше Капитана Джона, самого младшего из детей. Сколько лет мисс Покахонт?

И никакой другой головоломки про мисс Покахонт, кроме № 154, у Лойда нет!

---

*) В книжке вместо «наперерез» по ошибке напечатано «на север».

*) Мы приведем его в одном из следующих номеров среди решений остальных головоломок, предлагаемых в этой заметке.

Откуда же взялась головоломка, в которой мисс Покахонт 24 года? Как вы, наверное, уже догадались, — это опечатка в ответе к задаче № 154.

Увы, это не единственная головоломка, невзначай возникшая таким способом при подготовке книги к печати. Столь же досадное недоразумение произошло и с Мэри (сестрой Энн), возраст которой Лойд просит вычислить по запутанным условиям задачи № 127:

— Видите ли, — заметил дедушка, — суммарный возраст Мэри и Энн составляет 42 года, и Мэри вдвое старше, чем была Энн, когда Мэри была вдвое моложе чем будет Энн когда Энн станет втрое старше, чем была Мэри, когда Мэри была втрое старше Энн Сколько лет Мэри?

Считаем нужным предупредить читателя, с честью выпутавшегося из этих хитросплетений: пусть не заглядывает в ответ — Мэри не 27,5 лет.

Жаль, конечно, и бедняжку Покахонт, и до слез обиженную Мэри, но их незавидная судьба — ничто в сравнении с участью великолепной Лу Диллон и странностями задачи № 215, главная из которых, разумеется, ответ к этой задаче, напечатанный на с. 324:

Лошадь пробежала следующие друг за другом четверти мили соответственно за 27 1/4, 27, 27 1/8 с, и всю милю — за 1 мин 48 1/2 с.

Чтобы вы могли оценить его, приведем и условие:

№ 215. На бегах

Однажды на бегах с участием королевы ипподрома Лу Диллон возникла довольно странная задача, оказавшаяся слишком трудной для не очень-то поднаторевших в математике судей. Первый судья засек время (81 3/8 с), понадобившееся Лу, чтобы пробежать только первые 3/4 мили и второй — время (81 1/4 с), которое Лу потратила только на последние 3/4 мили. Предположим, что первую половину мили Лу пробежала за то же время что и вторую Многие ли сумеют определить, за сколько секунд Лу пробежала всю милю?

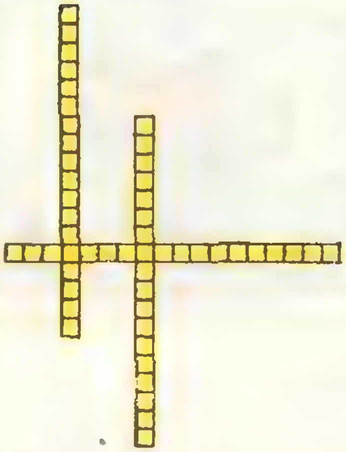


Рис. 5.

Раз уж мы заговорили о задаче № 215, решите-ка (только быстро!) следующую (почти такую же странную) задачку:

Альбом дороже карандаша на 47 копеек. На сколько дороже карандаша 2 альбома?

Номера 154, 127, 215,... Этот грустный список можно было бы продолжить. Сборник занимательных задач Лойда был опубликован его сыном уже после смерти автора. Книга пестрела неточностями и опечатками. Исправить ошибки (и сократить объем книги, выбрав лучшее) взялся Мартин Гарднер. Некоторых ошибок, проникших, к сожалению, и в русское издание, он все-таки не заметил. Поэтому тем, кто будет готовить новое издание*), мы адресуем следующую шифровку (надеясь, что ее правильно поймут — издатели головоломок должны любить головоломки):

ИВСЬПТРЕА СРТЫАЕ ОБШКИИ И ОАПТЕКЧИ И НЕ ДИЕТЛЕА НЫОХВ!

Читателям же (учитывая, что в «Математическую мозаику» не вошел ряд языковых, сугубо английских задач) мы предлагаем еще несколько головоломок — подражаний Лойду — под общим названием

КОЛОКОЛОКОЛОКОЛА

Здесь 3 слова, «случайно» написанные слитно. Вставьте между ними 2 просвета, чтобы получилась в меру осмысленная фраза. Напишите ее на 18 кубиках (16 букв и 2 просвета), положите кубики в один из вертикальных желобов на рисунке 5 и начинайте играть (не вынимая кубики из желобов и передвигая их по очереди).

Если вы правильно выбрали фразу и желоб, то можно *за 18 ходов «переписать» фразу по горизонтали, а потом — снова за 18 ходов — перенести ее во второй вертикальный желоб**).

Если игра покажется вам сложной, потренируйтесь сначала с «апельсином» (рис. 6) и «переправой» (рис. 7): *за наименьшее число ходов переправьте все кубики из вертикальных желобов в горизонтальные (не вынимая из желобов и передвигая по очереди) так, чтобы слова можно было прочесть слева направо.*

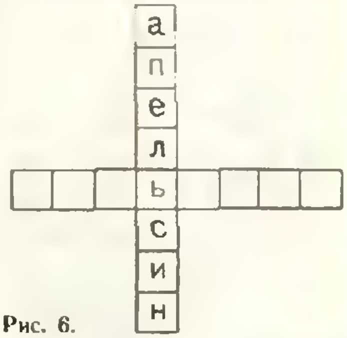


Рис. 6.

Поиграв некоторое время, вы, возможно, научитесь перегонять кубики на место за 9 и за 8 ходов соответственно (передвигая тем самым каждый кубик сразу туда, где ему надлежит остаться). Лойд сказал бы об этой игре: «Просто, как апельсин!». Именно так говаривал, бывало, этот фокусник и острослов, вынимая из шляпы очередного кролика, а то и кошку — или даже собаку!

М. Гервер

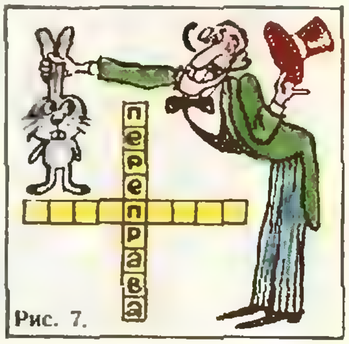


Рис. 7.

---

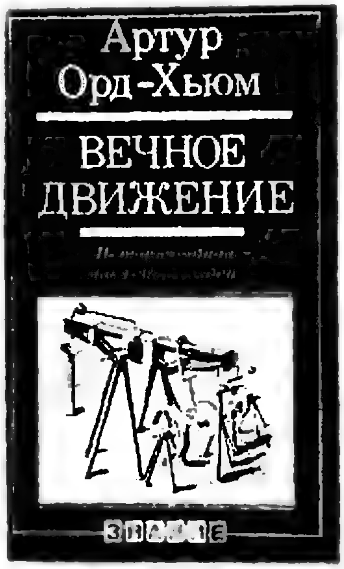
*) Можно не сомневаться — оно разойдется так же быстро, как первое. Что Лойду стотысячный тираж? Он был привычен к миллионным!

*) Предупреждаем читателя — не только Лойд любит подвохи!

История одного заблуждения

Все мы с удовольствием читаем книги о выдающихся личностях — политических деятелях и полководцах, ученых и мыслителях, писателях и художниках. Доказательством тому служит широкая популярность, которую приобрела биографическая серия «Жизнь замечательных людей», насчитывающая не одну сотню томов. Не менее интересно знакомиться с историей зарождения и развития научных концепций, узнавать о столкновении взглядов и идей. Этому тоже посвящено множество книг, в том числе книги недавно возникшей серии «Жизнь замечательных идей».

Однако мало кому довелось держать в руках книгу, повествующую об истории... научных заблуждений. А между тем на пути становления науки, совершенствования человеческих знаний таких заблуждений было не так уж мало. Взять хотя бы алхимию, астрологию, теорию всепроникающего эфира. Это и в самом деле были заблуждения, химеры, дороги, ведущие в никуда. Но можно ли утверждать, что они оказались абсолютно бесплодными? Вовсе нет. Средневековые алхимики в стремлении открыть «философский камень» заложили основы истинной науки — химии; астрологи, пытавшиеся по расположению планет предсказывать судьбы людей и целых народов, дали богатый наблюдательный материал для астрономии; а из концепции эфира родилась современная электродинамика.



Перед нами книга английского инженера и популяризатора науки Артура Орд-Хьюма*), посвященная еще одной ошибочной идее — попытке создания перпетуум мобиле, или вечного двигателя. Этой навязчивой идее, истоки которой уходят в глубокую древность, оказались подверженными тысячи людей. Нет-нет да и сейчас в комитеты по изобретениям, патентные бюро, академии наук, а чаще в редакции научно-популярных журналов поступают письма с изложением идеи нового варианта перпетуум мобиле.

«Вечное движение,— справедливо пишет автор,— проблема серьезная. Это вовсе не та явная глупость, которую некоторые изобретатели преподносят публике». История идеи вечного движения чрезвычайно поучительна хотя бы по двум причинам. Во-первых, в процессе рождения и главным образом опровержения тех или иных конкретных конструкций возникали и уточнялись многие положения механики и термодинамики, проверялись фундаментальные законы физики. Среди тех, кто своими исследованиями опровергал выдвигавшиеся принципы вечных двигателей, были Галилей и Гюйгенс, Фарадей и Карно, Больцман и Гельмгольц. Во-вторых, многие предлагавшиеся конструктивные решения вечных двигателей весьма хитроумны и нетривиальны. Читателям книги Орд-Хьюма будет полезно попытаться самим найти изъяны в описанных «вечных двигателях», доказать их неосуществимость, что, кстати, не всегда так уж легко сделать.

Обратимся к содержанию книги.

В первой главе, названной «Вечное движение и физика», излагаются законы природы, ставшие непреодолимой преградой на пути создания перпетуум мобиле. Прежде всего это закон сохранения энергии. Чтобы вечный двигатель мог работать, он должен сам себя обеспечивать энергией, вырабатывать ее в большем количестве, чем получает извне. Но это противоречит закону сохранения энергии. Еще одним общим положением, с ходу перечеркивающим любой проект вечного двигателя, является второе начало термодинамики. Любой процесс, будь то механический, электрический или химический, неизбежно сопровождается передачей тепла от более теплого тела к менее теплому. Ни в коем случае не наоборот! Нагрев трущихся тел, электрических проводов, стенок химического реактора — все это примеры проявления второго начала термодинамики. Исследования ученых, технические решения инженеров нацелены на сокращение этих потерь, но никому и в голову не придет попытаться исключить их полностью, ибо это означало бы попытку создания вечного двигателя. Сейчас это стало очевидной истиной.

По-видимому, первый вечный двигатель был описан в санскритской рукописи по астрономии «Сиддханта Сиромани» (V век нашей эры). На внешнем ободе колеса имелись два ряда отверстий, расположенных зигзагообразно на равном расстоянии друг от друга. Отверстия были заполнены ртутью и плотно закрыты. Утверждалось, что такое колесо, установленное на оси и пущенное в движение, будет вращаться бесконечно долго.

Но расцвет идеи механических вечных двигателей относится к позднему Возрождению, к XVI—XVII столетиям. Им посвящены вторая и третья главы книги. Итальянский философ, врач, астролог и алхимик Марио Антонио Зимара составил «Руководство к конструированию Машины Вечного Движения, не требующей для работы ни воды, ни грузов» — своеобразной «вечной» ветряной мельницы. Она приводилась в движение воздухом от кузнечных мехов, раздуваемых крыльями той же самой мельницы. Вообще надо отметить, что в те времена предлагалось много различных конструкций «вечных» мельниц, насосов, подъемников.

---

*) Артур Орд-Хьюм. Вечное движение (История одной навязчивой идеи). Перевод с английского. — М: Знание, 1980. — 272 с. — Цена 60 к.

В XVIII—XIX веках на смену механическим пришли вечные двигатели, в которых предлагалось использовать пар, природные магниты, а также электромагнитные явления. О них идет речь в четвертой главе книги. Пожалуй, наибольшее распространение получили различные варианты такой системы: электромотор приводит в действие генератор, который в свою очередь обеспечивает этот мотор энергией. Нет нужды доказывать, что потери на трение, нагрев проводов и замыкающих контактов сводят на нет эту идею.

И еще одно явление — капиллярность — пытались использовать изобретатели вечных двигателей. Об этом рассказывается в пятой главе. Удивительно, но теоретические предпосылки для подобного устройства сформулировал известный физик Роберт Бойль, считавший, что вечное движение в самом прямом понимании этого термина осуществляется в масштабах всей нашей Земли в виде непрерывного круговорота поднимающихся вверх и вновь стекающих вниз вод. (Он не учел такой «мелочи», что поставщиком энергии для круговорота воды является Солнце.) Высокий авторитет Бойля стимулировал рождение многих проектов перпетуум мобиле со смачиваемыми губками, то есть использующих капиллярные силы. Впрочем, Бойль был далеко не единственным ученым — настоящим ученым! — верившим в возможность реализации вечного движения. Можно назвать хотя бы замечательного математика, механика и философа Иоганна Бернулли — одного из тех, кто заложил научные основы современной гидродинамики и гидравлики. Тем непостижимее факт, что именно Бернулли выдвинул идею создания гидродинамического перпетуум мобиле.

В следующих главах читатель найдет почти детективные истории мошенников и авантюристов, погревших руки на поприще создания вечных двигателей, а в одиннадцатой главе познакомится с различными вариантами «вечных» часов, например с часами замечательного английского механика и изобретателя Джеймса Кокса, подзаводившимися от ...перепада атмосферного давления.

Завершают книгу главы, посвященные некоторым общим вопросам. Здесь рассказывается, в частности, о заявках на проекты вечных двигателей, поступивших в патентные бюро Англии, Франции, США и других стран, и постепенном прекращении приема к рассмотрению таких заявок. Так, Парижская академия наук отказалась от рассмотрения любых проектов вечных двигателей еще в 1775 году, а патентное бюро США — столетием позже. Тем не менее изобретатели вечных двигателей не исчезли и, как утверждает автор, никогда не исчезнут. Он даже одну из глав книги назвал многозначительно: «Вечность проблемы вечного движения». Орд-Хьюм говорит: «Дело в том, что сегодня те, кто, по существу, заняты проблемой поиска вечного движения, очень часто не отдают себе в этом отчета, полагая, что предметом их исследований является какой-то другой вопрос, успешное решение которого вызовет сенсацию в научном мире». Очень важно, приступая к решению той или иной научной проблемы, с самого начала четко сформулировать постановку задачи и, конечно же, досконально изучить выполненные в данной области исследования. Именно так и работают настоящие ученые, а без этого можно пополнить изрядно поредевшие ряды изобретателей вечного двигателя.

Книга Артура Орд-Хьюма написана живо, занимательно и снабжена многочисленными иллюстрациями. Она, без сомнения, не оставит равнодушным ни одного из читателей.

И. Зорич

Задачи наших читателей

1. Не пользуясь таблицами, докажите неравенство

$$\frac{1}{\log_2 \pi}+\frac{1}{\log_5 \pi}>2.$$

П. Сальников

2. Найдите все числа вида $\overline{a\underbrace{xx\ldots x}_{n}\underbrace{yy\ldots y}_{n}b}$ $(n=0,1,2,\ldots)$, являющиеся полными квадратами.

К. Крайнюков

3. Найдите

а) пять последних цифр числа 15^{1981};

б) шесть последних цифр числа 5^{1981};

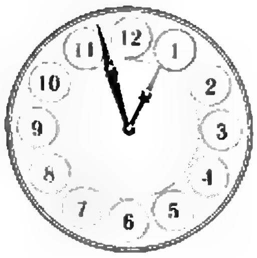
в) семь последних цифр числа 15^{1983}.

С. Манукян

4. Докажите, что если n делится на 11^{k-1}, то число $A=1\ldots1$, состоящее из $2n$ единиц, делится на 11^k.

В. Панфилов

5. Проведя три прямые, разделите циферблат часов



(см. рисунок) на четыре участка, содержащие по три числа так, чтобы суммы чисел в каждом из участков были кратны трем и образовывали арифметическую прогрессию. Сколькими способами это можно сделать?

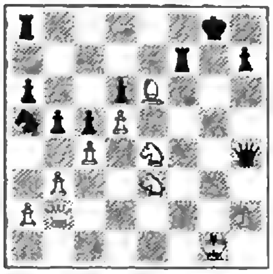
А. Пасенов

Консультирует — чемпион мира, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку — мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

Петросян — Спасский — Фишер

В 1954 году семнадцатилетним юношей Борис Спасский впервые участвовал в отборе к первенству мира и сразу дошел до турнира претендентов. Однако следующие два цикла сложились для него драматически — в первенстве СССР, являющемся зональным турниром, он оба раза проигрывал решающие партии последнего тура и выбывал из борьбы. Четвертая попытка оказалась успешнее — Спасский вышел победителем претендентских матчей. Однако его звездный час еще не настал. В матче 1966 года Петросян играл сильнее, тоньше и, несмотря на минимальный перевес в счете (12,5:11,5), уверенно сохранил корону.

В десятой партии чемпион мира провел комбинацию, вошедшую во все учебники шахматной тактики.

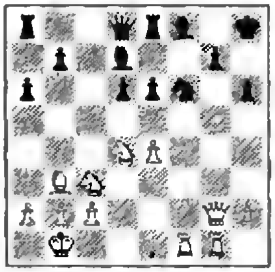


Петросян — Спасский

Хорошо известно пристрастие Петросяна жертвовать качество ради инициативы. На этот раз обе ладьи были отданы за легкие фигуры.

27. К:d6 Фg5+ 28. Крh1 Ла7 29. С:f7+Л:f7. Теперь, отыгрывая путем 30. К:f7 второе качество, белые оставались с лишней пешкой, но тогда борьба затягивалась. **30. Фh8+!!** Кажется, самый длинный ход в матчах на первенство мира! Белые жертвуют ферзя — не частый случай для соревнований столь высокого ранга. Черные немедленно сдались, так как после 30...Кр:h8 31. К:f7+ и 32. К:g5 они остаются без фигуры.

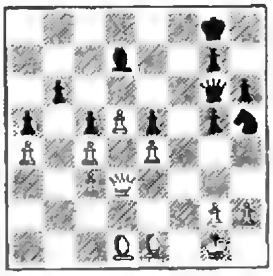
Прошло еще три года, и, наконец, пятнадцатилетняя титаническая борьба за мировую корону принесла Борису Спасскому полный успех. Обыграв Петросяна со счетом 12,5:10,5, в 1969 году он стал десятым чемпионом мира. Эффектно завершилась девятнадцатая партия матча.



Спасский — Петросян

21. е5! (освобождая место для коня) **21...de 22. Ке4!** Оба белых коня неприкосновенны: 22... ed 23. К:f6 Ле7 24. Фg6; 22...К:е4 23. Л:f8+, и в обоих случаях черный король получает мат на следующем ходу. **22... Кh5 23. Фg6! ed** (23...Кf4 24 Л:f4 ef 25. Кf3! Фb6 26. Лg5! Фd8 27. Ке5, и белые выигрывают) **24 Кg5! Черные сдались** (после 24...hg 25. Ф:h5+Крg8 26. Фf7+Крh8 27. Лf3 мат неизбежен).

В начале 70-х годов американский гроссмейстер Роберт Фишер поразил мир своими фантастическими победами — Тайманова и Ларсена в претендентских матчах он обыграл со счетом 6:0, а Петросяна — 6,5:2,5. Рождение одиннадцатого чемпиона шахматный мир воспринял как должное. Превосходство Фишера в матче 1972 года за мировую корону было ощутимо (12,5:8,5). Но справедливости ради надо отметить, что американец предпринял ряд психологических атак на своего противника и не только за шахматной доской. Это явно отразилось на игре Спасского. Приведем эпизод из пятой партии матча.



Спасский — Фишер

26...Кf4 27. Фс2? Инициатива на стороне черных, но после 27. Фb1 позиция белых была еще вполне обороноспособной. Спасский совершает грубую ошибку, позволяющую черным элегантным ударом завершить партию — **27...С:а4! Белые сдались** — после 28. Ф:а4 (28. Фb1 С:d1 29. Ф:d1 Ф:е4) 28...Ф:е4 их король не может избежать мата.

К сожалению, после этого матча поклонников древней игры ждало горькое разочарование — новый король оставил шахматы. Каковы причины этого странного поступка? Вот одна из точек зрения.

Чемпионская корона закрепила за Фишером, по его мнению, роль шахматного мессии на Земле. В результате он счел, что теперь не имеет права неудачно выступать в турнирах и вообще проиграть хотя бы одну партию. Короче говоря, чемпион взвалил на себя такой груз обязательств, что просто согнулся под ним и стал бояться шахмат — не какого-то конкретного шахматиста, а самих фигур и доски.

Телеграмма Фишера в 1975 году, накануне матча с Карповым, о том, что он отказывается от звания чемпиона мира ФИДЕ, подвела черту его царствованию.

Уравнения думают за нас

1. $F \approx -53{,}3$ Н. Знак «минус» означает, что силу надо направлять не вниз, а вверх под тем же углом к горизонту.

2. $t = 100°$ С.

3. $s = 12{,}5$ м. Указание. Прежде чем решать задачу, надо выяснить, куда (вверх или вниз) движется тело в момент времени $t = 2$ с. В этом может помочь, например, уравнение для проекции скорости: $v = v_0 - gt = -5$ м/с. Знак «минус» означает, что тело движется вниз. Следовательно, за 2 с тело успеет подняться до максимальной высоты и немного опуститься вниз.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 8)

1. Для $n = 4k$ и $n = 4k+1$ при любой расстановке знаков «+» и «—» четности левой и правой частей не совпадают.

Для $n = 4k+2$ возможна следующая расстановка знаков:

$$1+2-3-4+5+6-\ldots-(2k+1)-(2k+2)+$$
$$+(2k+3)+(2k+4)-\ldots+(4k+1)+$$
$$+(4k+2)=4k+3.$$

Для $n = 4k+3$ — следующая:

$$-1+2+3-4-5+6+\ldots+(4k+3)=4k+4.$$

2. Обозначим исследуемую сумму через S. $3S-(x+y+z)=45$ (рис. 1), то есть

$$S=15+\frac{x+y+z}{3}.$$

S принимает минимальное значение, когда $x+y+z=1+2+3=6$, и максимальное — когда $x+y+z=7+8+9=24$; таким образом, $S_{\min}=17$, $S_{\max}=23$.

Нетрудно убедиться, что S не может равняться 18. Действительно, если $S=18$, то $x+y+z=9$. Возьмем тот из четырех треугольников (со стороной 2), в который входит 9; пусть остальные числа в нем x, y и t (рис. 2). Тогда $x+y+t+9=18$, откуда $t=z$ — противоречие.

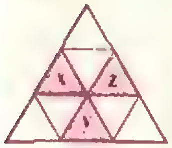


Рис. 1.

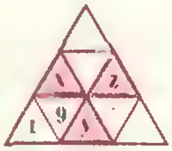


Рис. 2.

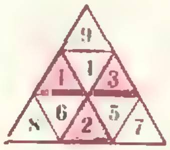


Рис. 3.

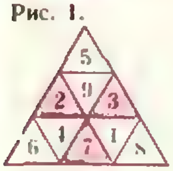


Рис. 4.

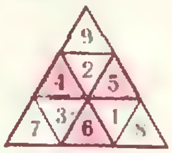


Рис. 5.

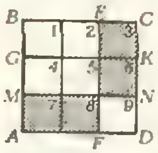


Рис. 6.

Расположения чисел, соответствующие значениям $S=17, 19$ и 20, изображены на рисунках 3—5. Расположения, соответствующие значениям $S=23$ и 21, получаются из рисунков 3 и 4 заменой каждого числа A числом $10-A$. Расположения для $S=22$, как и для $S=18$, не существует.

4. Нельзя. В самом деле, предположим, что такую раскраску выполнить можно. Выделим из нашей сетки квадрат $ABCD$ размером 3×3 и занумеруем его клетки числами 1, 2, ..., 9 (рис. 6). В прямоугольниках $MBCN$ и $ABEF$ клетки с номерами 3, 6 и 7, 8 окрашены в одинаковые два цвета. Но тогда в прямоугольнике $AGKD$ обязательно будут две клетки одного цвета: клетка с номером 6 окрашена либо так же, как клетка 7, либо так же, как клетка 8. Противоречие.

5. Карабасов больше. Представим, что все карабасы вручили своим друзьям-барабасам по визитной карточке. Обозначим число карабасов через X, а число барабасов — через Y. Теперь ясно, что карабасы раздали $9X$ карточек (каждый — девяти друзьям-барабасам), а барабасы получили всего $10Y$ карточек (каждый — от десяти друзей-карабасов). Значит, $9X=10Y$ и $X>Y$.

Номер подготовили:
А. Виленкин, А. Егоров, И. Клумова, Т. Петрова,
А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шихановнч

Номер оформили:
А. Вольфкович, Г. Кованов, Г. Красиков,
И. Кузьмина, С. Лухин, Э. Назаров, М. Сидоров,
И. Смирнова

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Т. Вайсберг

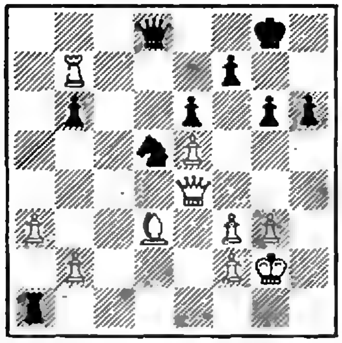
113035, Москва, Б. Ордынка 21/16
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 22.7.81.
Подписано в печать 4.09.81.
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 6,73 Т-25014
Цена 30 коп. Заказ 1786
Тираж 232 602 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

ШАХМАТНЫЙ КОНКУРС

ПЯТЬ ПОБЕД КАРПОВА

В апреле этого года состоялся Московский международный шахматный турнир. Он был примечателен в нескольких отношениях. Прежде всего, турнир отличался выдающимся составом участников: четырнадцать знаменитых гроссмейстеров, среди которых чемпион мира, два экс-чемпиона — Т. Петросян и В. Смыслов, претенденты на мировую корону прошлых и настоящих лет — Л. Портиш, Е. Геллер, Л. Полугаевский, У. Андерссон и, возможно, будущие претенденты — Ю. Балашов, А. Белявский, Г. Каспаров, Я. Тимман. Для А. Карпова соревнование являлось как бы генеральной репетицией перед матчем на первенство мира, и, естественно, он вынужден был играть сдержанно, не раскрывая раньше времени дебютные секреты (может быть, поэтому чемпион мира лишь однажды начал партию своим любимым ходом 1.e2 — e4). Однако «особые» условия не помешали Карпову одержать очередную блестящую победу, опередив ближайших соперников на полтора очка (2 — 4-е места разделили Г. Каспаров, Л. Полугаевский и В. Смыслов). И дело не только в первом призе и заметном отрыве от преследователей, а в исключительно содержательной игре чемпиона мира, который выиграл пять встреч без единого поражения, причем каждая победа представляет собой истинное произведение шахматного искусства. В первом же туре Карпов технично переиграл одного из своих тренеров Ю. Балашова, а в третьем создал маленький шедевр в партии с Е. Геллером.

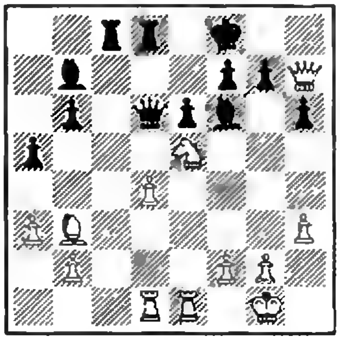


Карпов — Геллер

31.Л:f7!! Эффектная жертва ладьи. У белых почти не остается фигур на доске, и они завершают сражение малыми силами.

31...Кр:f7 32.Ф:g6+ Крf8 33.Ф:h6+. Черные сдались, так как мат неизбежен.

В отличном позиционном стиле были повергнуты гроссмейстеры А. Белявский и В. Смыслов, наконец изящно завершил чемпион мира поединок против своего постоянного конкурента в турнирах голландца Я. Тиммана.



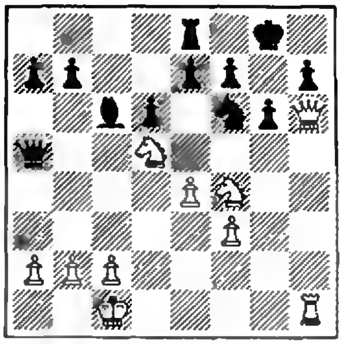
Карпов — Тимман

28.d5!! Фc7 (28...С:d5 29.Л:d5 ed 30.Кd7+ и 31.Фh8×) **29.de Л:d1 30.Кg6+!** Черные сдались, их король не может спастись от мата.

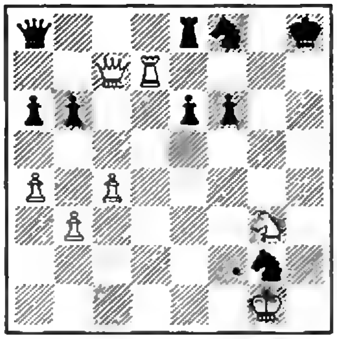
А теперь найдите сами четыре комбинации из партий А. Карпова.

* * *

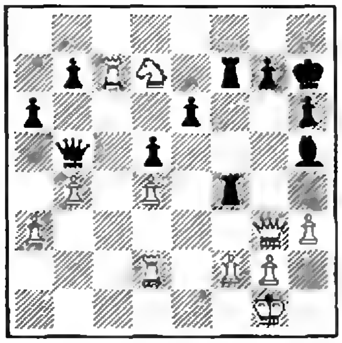
Срок отправки решений — 30 октября 1981 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс № 9 — 81»).



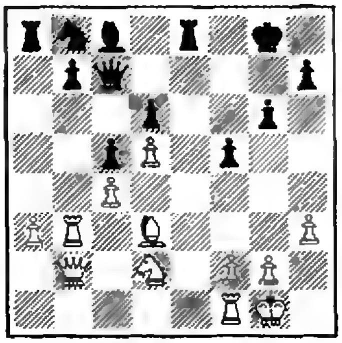
1. Белые начинают и выигрывают.



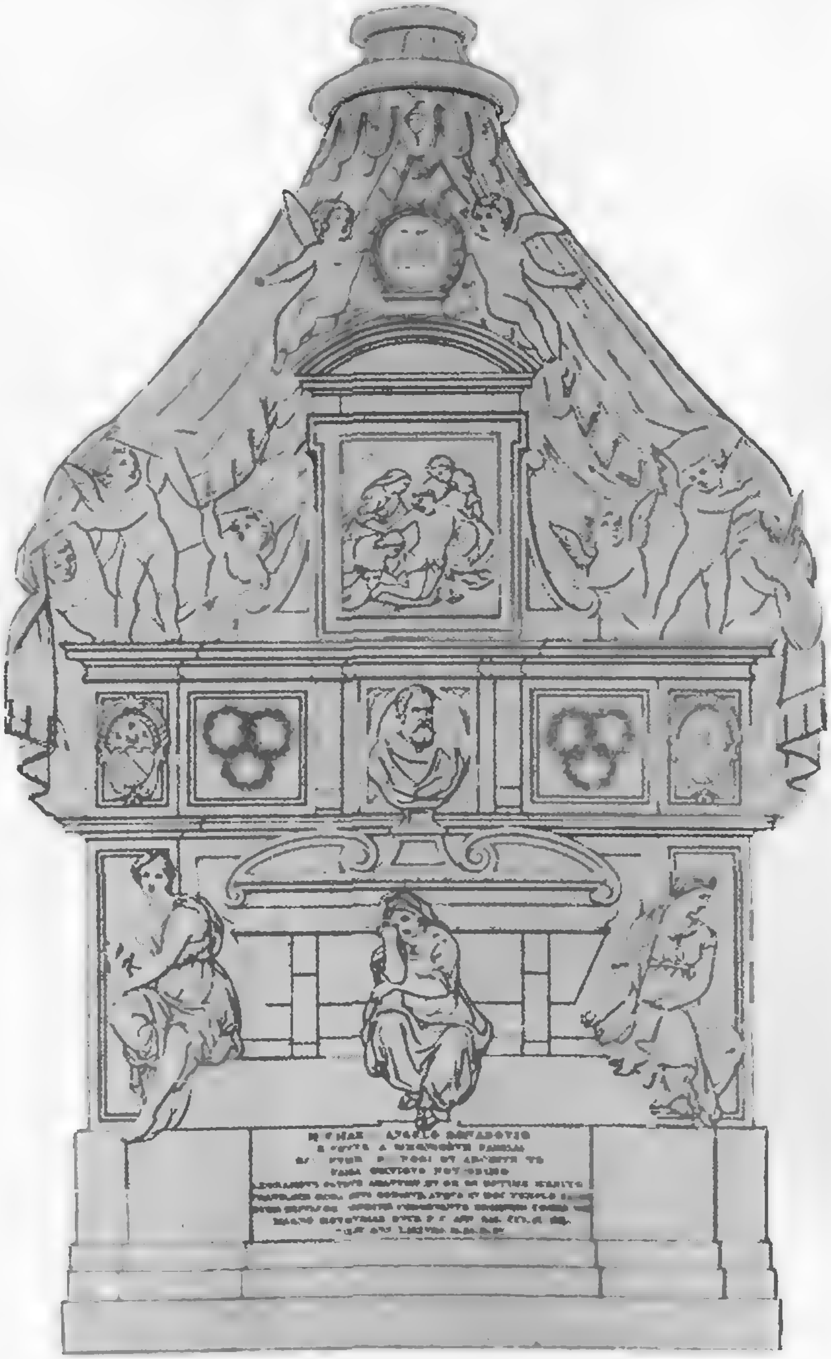
2. Белые начинают и выигрывают.



3. Белые начинают и выигрывают.

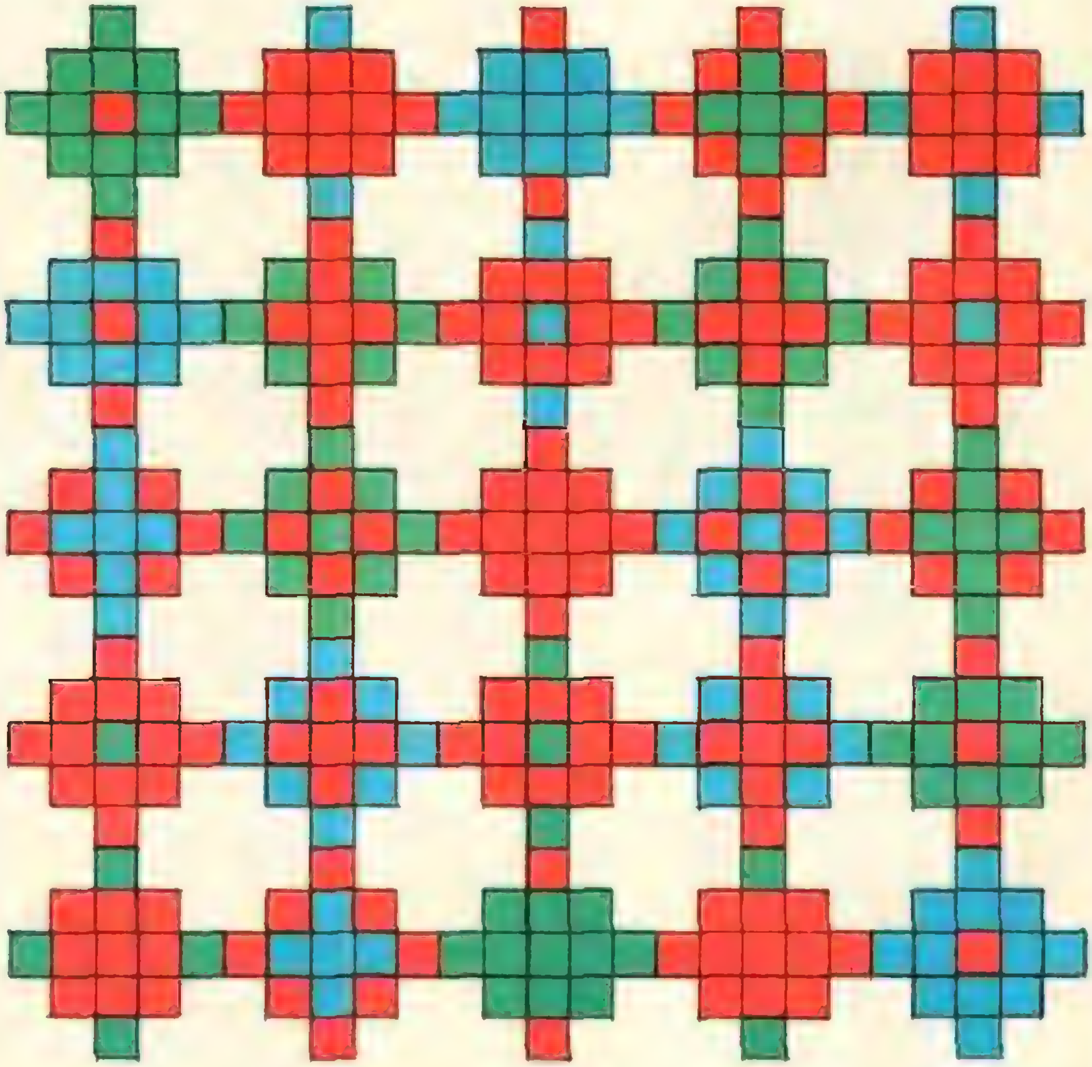


4. Белые начинают и выигрывают.



Надгробье великого живописца, ваятеля и зодчего Микеланджело заинтересовало нас не столько симметрией общего рисунка, сколько одной деталью своего декоративного убранства: зацепленными венками из лавровых, оливковых и дубовых листьев (см. статью А. Калинина «Эта удивительная вязь колец»).

Цена 30 коп.
Индекс 70465



Если в зеленые клетки изображенной здесь трехцветной мозаики вписать 0, в красные — 1, в синие — 2 и сложить числа внутри каждой тринадцатиклеточной «зубчатой» фигуры, получится магический квадрат 5×5.

А. Кривошеев

НОМЕР
10

Квант

10
1981

Основан в 1970 году

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин

Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд

В НОМЕРЕ:

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
ОРГКОМИТЕТ МОСКОВСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

Ученые обращаются к молодежи

2 *Н. Эмануэль.* Думать и искать

* * *

5 *Л. Асламазов.* Что такое СКВИД?
13 *Д. Коэн.* Метрика коня
17 *С. Филонович.* Генри Кавендиш
22 *Генри Кавендиш.* Экспериментальное определение закона электрической силы

Математический кружок

27 *В. Переяславский.* Игра «Определитель»

Задачник «Кванта»

32 Задачи М706 — М710? Ф718 — Ф722
34 Решения задач М666 — М670; Ф678 — Ф682

«Квант» для младших школьников

41 Задачи
42 *И. Юфанова.* Интервью с бароном Мюнхаузеном

По страницам школьных учебников

44 *В. Кучеров.* Геометрические аналогии

Практикум абитуриента

47 *А. Шеронов.* Криволинейное движение

Искусство программирования

51 Заочная школа программирования. Урок 15

Информация

58 Всероссийская олимпиада школьников
62 Шахматная страничка
63 Ответы, указания, решения
Новости науки *(31)*
Наша обложка *(57)*
Смесь *(50)*
Шахматный конкурс (3-я с. обложки)

*Сколько ходов
должен сделать
«конь 2-3»,
чтобы
попасть из центра
на данное поле
шахматной доски?
На этот вопрос
отвечает
пестрая раскраска
на первой странице
обложки
(подробнее см. с. 57).*

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1981

Н. Эмануэль

Думать и искать

Я буду говорить о наиболее актуальных проблемах, которые придется решать сегодняшним школьникам и студентам, о проблемах, которые «перейдут» в XXI век, о том, какие качества должны будут выковать в себе специалисты нового тысячелетия.

В многомиллионной армии Науки сегодня много специализированных отрядов, но мне хотелось бы сказать несколько слов об основных, фундаментальных науках — математике, физике, химии и биологии.

Абстрактная по форме наука — математика — все больше становится инструментом изумительно стройного и строгого описания явлений, с которыми имеют дело естественные, общественные и технические науки. Развитие науки показывает, что в ближайшем будущем роль математики возрастет настолько, что, какой бы специальностью человек ни овладел, ему понадобится для работы отличное знание современного математического аппарата.

В уходящем XX веке человечество обогатилось в области физики такими революционными открытиями, как расщепление ядер урана (в результате чего возникли атомная техника и энергетика), открытие термоядерного синтеза (связанного с огромным выделением энергии), квантовых генераторов — лазеров (нашедших широчайшие области применения), создание транзисторов (которые позволили развить современную радиоэлектронику, электронно-вычислительную технику). В XXI веке

Академик Николай Маркович Эмануэль — лауреат Ленинской премии, заместитель директора Института химической физики АН СССР, профессор Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Статья с небольшими сокращениями перепечатывается из сборника «Ленин. Наука. Молодежь», выпущенного в 1980 году издательством «Наука».

физикам предстоит решать грандиозные задачи, которые должны обеспечить будущее процветание человечества.

Современная химия развивается в неразрывной связи с физикой, математикой и биологией. К числу новых областей ее относится химия высоких энергий, которая изучает химические превращения под влиянием радиации, света, лазерного излучения, действия ударных волн, плазменные процессы. Развивается электрохимия, создаются новые электрохимические источники тока. Исключительно важное народнохозяйственное значение имеют работы в области коррозии и защиты металлов от коррозии. Создаются новые полимерные материалы — термостойкие, высокопрочные, устойчивые к воздействию химически агрессивных сред, материалы для медицинских целей. В связи с проблемой рационального использования ресурсов природного органического сырья расширяются нефтехимия, углехимия, сланцехимия, химия торфа, древесины. Особое место занимает органическая химия с ее миллионами индивидуальных химических веществ, уже нашедших применение или могущих стать нужными в дальнейшем. Химики-органики синтезируют лекарственные препараты против наиболее опасных болезней человека и животных. Реальное значение приобретают работы по синтезу искусственной пищи.

Биология длительное время считалась наукой чисто описательной. Однако глубокое проникновение в сущность биологических явлений привело к интенсивному развитию биологии живой клетки, биохимии и физиологии животных, человека и растений, генетики, биофизики, исследований процесса фотосинтеза. Исключительную привлекательность и перспективы не только для познания механизма жизненных явлений, но и для управления жизненными процессами имеет молекулярная биология. Здесь эффективно переплетаются интересы многих естественных наук.

Сейчас у нас около тысячи вузов, в которых обучаются почти 5 млн. студентов. Грандиозные цифры, которых не знает ни одна страна в мире!

Сейчас в Советском Союзе самое большое в мире число научных работников — почти 1,3 млн. человек. Промышленность нуждается в сырье, и в поисках новых источников сырья неутомимо штурмуют недра земли геологи. Стране нужны специалисты сельского хозяйства, лесного дела, технологи производства продовольственных товаров и товаров широкого потребления. Нужны экономисты, работники здравоохранения, педагоги, работники искусства и культуры и многие, многие другие специалисты. Когда перечисляешь эти специальности, на ум приходит еще одна мысль. как это замечательно, что нашей стране всегда будет нужно все больше и больше специалистов, что никогда выпускники наших вузов не узнают, что такое безработица.

Склонность к той или иной профессии у молодых людей выявляется, по моему мнению, обычно очень рано, примерно в пятом-шестом классе школы. Поэтому подчас еще в довузовский период молодой человек приобретает некоторый профессиональный кругозор, получает общее представление о будущем, о работе, успевает даже собрать библиотечку из более или менее серьезных и научно-популярных книг, собирает вырезки о любимой профессии из газет... В этом случае у него, совсем еще молодого по возрасту, появляется весьма импонирующая нам, окружающим, деловая взрослость. Особенно хорошо, когда вы уже попробовали что-то сделать своими руками — увлекались ли моделями самолетов, роботов, собирали ли радиоприемники, не боитесь электричества, знаете, как обращаться с химическими веществами... Инфантильность в возрасте, близком к совершеннолетию,— большой недостаток. То, что я назвал деловой взрослостью,— залог успешного и глубокого освоения профессии. Ведь избранной специальностью надо владеть в совершенстве, знать ее до тонкостей, уметь все делать своими руками. Когда механик на слух безошибочно определяет характер и место неисправности в машине и уверенно устраняет неполадки, это столь же красиво, изящно и эстетично, как и виртуозная игра на музыкальном инструменте.

Профессионализм — хорошее качество, которое надо всемерно в себе развивать. И еще есть одна черта, которую следует пытаться выработать в себе к уровню развития своей науки. Познавая то, что уже сформулировано, решено, легло в основу того или иного производства, конструкции, привыкайте думать о том, нельзя ли решить проблему по-другому. Пытайтесь сами находить новые решения, более эффективные, оригинальные. Изобретайте, придумывайте!

Я глубоко уверен, что можно — и должно! — развить в себе подобные черты. Оригинальное творчество должно становиться массовым. Творчески критический подход помогает также и воспитанию инициативы, что абсолютно необходимо специалисту.

В знаменитом письме к молодежи, опубликованном еще в 1935 г., великий физиолог И. П. Павлов писал о скромности. Писал очень строго, требовательно, настаивая на упорном накоплении знаний, говорил о том, что, сколько бы высоко ни оценивали ваши знания другие, всегда надо иметь мужество сказать себе: «Я невежда». Написано сурово и резко. Кстати говоря, пока человек еще молод, деловая нескромность, отсутствие самокритичности и самодовольство порой еще и не так приметны, но если он, взрослея, и дальше будет таким, вред, приносимый им обществу, может стать весьма ощутимым. Особенно, если такой человек окажется на посту руководителя.

Есть старая и общеизвестная истина — «ученик должен превзойти своего учителя». Понятие «учитель» не следует понимать в буквальном смысле слова. Учитель может и не возиться с учеником, вбивая ему в голову различные истины. Но ученик должен взять у учителя все хорошее и ценное, что у него есть, и пойти дальше, создать и развить то новое, прогрессивное, что заложено в нем самом. Тот, кого называют учителем, как правило, испытывает чувство глубокого удовлетворения, когда ученики идут дальше его самого. Только в немногих печальных случаях учитель боится роста своих учеников. И это скорее редкое исключение. Поэтому смотрите внимательно на своих преподавателей. Получайте удовольствие от того, что вы научитесь излагать мысли в их стиле, а затем, может быть, вам удастся выработать свой собственный, который, возможно, окажется более оригинальным, доходчивым, интересным. Если учитель пишет научные работы, монографии, учебники — читайте их, поймите логику его рассуждений, научитесь писать так, как он, а затем выработайте свой почерк, свой стиль изложения.

Как ни очевидны эти советы, они могут оказаться полезными, могут способствовать профессиональному росту.

В заключение хочу пожелать вам следующее: вы вступили в такой возраст, когда ценность каждого прожитого дня настолько велика, что вы не имеете права перед самим собой и перед обществом устраивать перерывы на ничегонеделание. Думайте, ищите, учитесь, творите себя и мир — ежедневно!

Л. Асламазов

Что такое СКВИД?

О сверхпроводимости в наше время знают, наверное, все. Это явление состоит в том, что при низких температурах электрическое сопротивление ряда чистых металлов и сплавов становится равным нулю и электрический ток течет без всяких потерь.

Температуры, при которых исчезает сопротивление, очень низкие — они близки к абсолютному нулю (—273°C). Для охлаждения вещества до такой температуры его помещают в особую среду — жидкий гелий. При нормальном давлении гелий становится жидким при температуре 4,2 К и не замерзает при самых низких температурах — вплоть до абсолютного нуля.

Охлаждение до температур жидкого гелия — довольно сложная задача. Вот почему столь перспективное для использования в технике явление, как сверхпроводимость, пока еще не нашло широкого практического применения. А, казалось бы, как заманчиво, например, передавать электрическую энергию на далекие расстояния по сверхпроводящим проводам — никаких потерь! Однако охлаждать провода сейчас еще довольно дорого. И хотя уже созданы сверхпроводящие линии передач длиной в несколько километров, а также сверхпроводящие моторы и генераторы и даже сверхскоростные поезда на так называемой магнитной подушке (где тоже используется сверхпроводимость) — такие установки в серийное производство все еще не запущены.

В лабораториях всего мира физики и химики ищут вещества, которые будут сверхпроводящими при не слишком низких температурах (например, чтобы для их охлаждения можно было использовать сравнительно дешевый и доступный жидкий воздух). В этом направлении уже достигнут значительный прогресс — с каждым годом открывают все более и более «высокотемпературные» сверхпроводники. Но даже сегодняшний рекордсмен — сплав ниобия с германием Nb_3Ge — становится сверхпроводником лишь при температуре 22,4 К.

И тем не менее уже сейчас сверхпроводимость «работает». В ряде случаев возможности сверхпроводимости столь уникальны, что приходится мириться с затратами на охлаждение. Так, сверхпроводящие магниты широко используются для создания сильных магнитных полей (в несколько десятков тесла); сверхпроводимость же применяют для измерения очень слабых магнитных полей (с точностью до 10^{-18} Тл). На основе сверхпроводимости действуют чувствительнейшие вольтметры, детекторы и усилители электромагнитного излучения. Существует целая область электроники — криоэлектроника (от греческого слова «криос» — холод), основанная на использовании явления сверхпроводимости.

О некоторых практических применениях сверхпроводимости будет рассказано в этой статье. Однако рассказ придется начать издалека. Давайте прежде познакомимся с одним красивым физическим явлением, лежащим в основе устройства многих сверхпроводящих приборов.

Квантование магнитного потока

Как известно, в микромире — мире молекул, атомов, элементарных частиц — существуют свои особые законы. Например, там многие физические величины могут принимать только определенные дискретные значения — как говорят физики, величины квантуются. (Для описания микромира создана специальная наука — квантовая механика.) В больших коллективах частиц — макроскопических телах — квантовые эффекты обычно перестают быть заметными, поскольку из-за хаотического теплового движения происходит усреднение величины по большому числу ее различных значений и квантовые скачки «замазываются».

А что будет, если тело охладить до очень низких температур? Оказывается, в таком случае квантование может проявляться и в макроскопических масштабах. Пример тому дает замечательное явление — квантование магнитного потока в сверхпроводнике.

Что такое магнитный поток Φ, знают все, кто изучал явление электромагнитной индукции:

$$\Phi = BS,$$

где B — модуль вектора магнитной индукции, а S — площадь поверхности, охватываемой контуром (для простоты будем считать, что индукция направлена по нормали к поверхности). Однако для многих будет открытием, что магнитный поток, создаваемый сверхпроводящим током, текущим, например, по кольцу, может принимать только определенные дискретные значения. Попробуем хотя бы упрощенно понять это явление.

Движение сверхпроводящих электронов в кольце (рис. 1) похоже на движение электронов в атоме: электроны в кольце как бы движутся по гигантским орбитам радиуса R без всяких столкновений. Поэтому естественно предположить, что их движение подчиняется тем же правилам квантования, что и движение электронов в атоме. Согласно постулату Бора, в атоме только определенные орбиты электронов являются стационарными, устойчивыми. Они отбираются с помощью следующего правила квантования: произведение модуля импульса электрона mv на радиус орбиты R (величина mvR называется моментом импульса электрона) может принимать только дискретные значения, то есть

$$mvR = n\hbar.$$

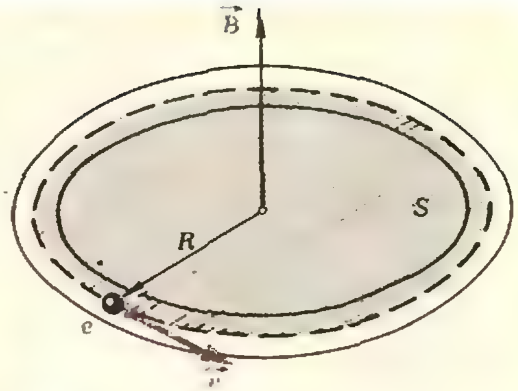


Рис. 1.

Здесь n — целое положительное число, а величина $\hbar$, определяющая наименьшее возможное изменение (квант) момента импульса,— постоянная Планка*). Оказывается, квантование всех физических величин определяется именно этой универсальной постоянной. Она очень мала:

$$\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж} \cdot \text{с},$$

поэтому квантовые эффекты проявляются, либо когда значения физических величин сами малы (в микромире), либо когда имеется много микрочастиц, движущихся совершенно одинаково. В последнем случае говорят о макроскопических квантовых явлениях, к которым и относится квантование магнитного потока в кольце со сверхпроводящим током.

Найдем величину кванта магнитного потока. Магнитный поток Φ через кольцо связан с током I соотношением

$$\Phi = LI,$$

где L — индуктивность кольца. Ток I можно выразить через скорость электронов v и их число N. Действительно, за время $t = 2\pi R/v$ электроны совершают полный оборот; следовательно, за это время через любое поперечное сечение кольца пройдут все электроны, переносящие заряд $q = eN$ (где e — заряд одного электрона). Поэтому ток в кольце

$$I = \frac{q}{t} = \frac{eNv}{2\pi R}.$$

Еще одно соотношение, связывающее

---

*) Постоянной Планка называют также константу $h = 2\pi\hbar = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

величины v, N и I, можно получить, приравняв кинетическую энергию сверхпроводящих электронов к энергии кольца с током (см. «Приложение» на с. 12):

$$N\frac{mv^2}{2}=\frac{1}{2}LI^2.$$

Теперь выражение для магнитного потока можно представить в виде

$$\Phi=LI=\frac{LI^2}{2}\,\frac{2}{I}=N\frac{mv^2}{2}\,\frac{4\pi R}{eNv}=\frac{2\pi}{e}\,mvR,$$

откуда следует, что магнитный поток пропорционален моменту импульса электронов. Но, согласно правилу квантования Бора, момент импульса может принимать только дискретные значения, поэтому и магнитный поток через кольцо, по которому течет сверхпроводящий ток, тоже квантуется:

$$mvR=n\hbar \ \text{ и } \ \Phi=\frac{2\pi}{e}\,n\hbar.$$

Квант магнитного потока, который можно найти из предыдущей формулы, конечно, очень малая величина ($\sim10^{-15}$ Вб), но тем не менее современные приборы позволяют наблюдать квантование магнитного потока. Такой опыт был проделан американскими учеными Дивером и Фейрбенком в 1961 году, только вместо кольца они использовали полую сверхпроводящую трубку, по которой циркулировали круговые сверхпроводящие токи. В опыте было обнаружено, что магнитный поток через площадь поперечного сечения трубки менялся действительно скачкообразно, однако величина кванта потока оказалась вдвое меньше приведенной выше. Объяснение этому дает современная теория сверхпроводимости. Дело в том, что в сверхпроводящем состоянии электроны объединяются в пары и именно движением пар, имеющих заряд $2e$, создается сверхпроводящий ток. Поэтому правильное значение Φ_0 кванта магнитного потока получается, если в формулу квантования потока подставить удвоенный заряд электрона:

$$\Phi_0=\frac{2\pi\hbar}{2e}=2{,}07\cdot10^{-15}\,\text{Вб}.$$

Вот так нашлась двойка, потерянная не только нами, но и английским ученым Лондоном, который теоретически предсказал квантование магнитного потока еще в 1950 году — задолго до того, как была понята природа сверхпроводящего состояния.

Хочется подчеркнуть, что приведенный здесь вывод квантования магнитного потока, хотя и отражает правильно физическую сущность этого явления, слишком упрощенный. Даже удивительно, что таким образом можно получить правильное значение кванта магнитного потока. В действительности сверхпроводимость — сложное квантовое явление. Тем, кто хочет в нем разобраться по-настоящему, предстоит долгий путь от школьной физики до современной теории твердого тела — путь, на который потребуется много лет упорного, но увлекательного труда.

Эффект Джозефсона

Разберем еще одно сверхпроводящее квантовое явление, которое послужило основой для создания целого ряда уникальных измерительных приборов. Речь пойдет об эффекте Джозефсона, открытом сравнительно недавно — в 1962 году, но за который Джозефсону, английскому ученому, теоретически предсказавшему этот эффект, уже присуждена Нобелевская премия.

Представьте себе, что на стеклянную пластинку (как говорят, на подложку) нанесли пленку сверхпроводника (обычно ее получают, напыляя металл в вакууме). Затем ее окислили, создав на поверхности слой диэлектрика (окисла) толщиной всего в несколько ангстрем*). И снова покрыли пленкой сверхпроводника. В результате получился так называемый сэндвич (в буквальном смысле этим английским словом называют два куска хлеба с сыром или другим чем-нибудь вкусным между ними). В сэндвичах и наблюдается эффект Джозефсона (для удобства измерений обычно сэндвич делают в виде креста, как показано на рисунке 2).

---

*) 1 ангстрем = 1 Å = 10^{-10} м.

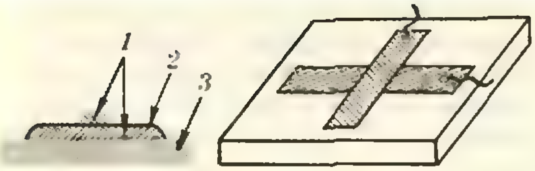


Рис. 2. *1* — **металлические пленки;** *2* — **слой диэлектрика;** *3* — **подложка.**

Давайте вначале обсудим случай, когда металлические пленки находятся в нормальном (не сверхпроводящем) состоянии. Могут ли электроны из одной металлической пленки (рис. 3,*а*) переходить в другую? Казалось бы, нет — им мешает слой диэлектрика. Для того чтобы выйти из металла, электрон должен обладать энергией, большей чем работа выхода, а при низких температурах электронов с такой энергией практически нет. На рисунке 3,*б* приведен график зависимости потенциальной энергии электрона W от координаты x (ось X перпендикулярна к плоскости сэндвича). В металле электрон движется свободно, и его потенциальная энергия равна нулю. Для выхода в диэлектрик надо совершить работу выхода $W_в$, которая больше, чем кинетическая, а значит и полная, энергия электрона $W_э$*). Поэтому говорят, что электроны в металлических пленках разделяет потенциальный барьер, высота которого равна $W_в - W_э$.

Если бы электроны подчинялись законам классической механики, то такой барьер для них был бы непреодолим. Но электроны — микрочастицы, а в микромире действуют особые законы, которые позволяют многое, недоступное большим телам. Человеку, например, с такой энергией на горку не взобраться, а вот электрон может пройти сквозь нее! Он как бы роет под горкой туннель и проникает, даже если его энергии не хватает, чтобы взобраться на горку. Конечно, не следует все это понимать буквально. Туннельный эффект (так называют это явление) объясняется волновыми свойствами микрочастиц, и по-настоящему в нем можно разобраться, только изучив квантовую механику. Но факт остается фактом: с некоторой вероятностью электроны могут проникать через диэлектрик из одной металлической пленки в другую. Эта вероятность тем больше, чем меньше высота $W_в - W$, барьера и чем меньше его ширина a.

Итак, тонкая пленка диэлектрика оказывается проницаемой для электронов — через нее может течь так называемый туннельный ток. Однако суммарный туннельный ток равен нулю: сколько электронов переходит из нижней металлической пленки в верхнюю, столько же в среднем переходит, наоборот, из верхней пленки в нижнюю.

Как же сделать туннельный ток отличным от нуля? Для этого надо нарушить симметрию, например — присоединить металлические пленки к источнику тока с напряжением U (рис. 4,*а*). Тогда пленки будут играть роль обкладок конденсатора, а в слое диэлектрика возникнет электрическое поле с напряженностью $E = U/a$. Работа по перемещению заряда e на расстояние x вдоль направления поля равна $A = Fx = eEx = eUx/a$, и поэтому график потенциальной энергии электрона приобретает вид, показанный на рисунке 4,*б*. Как видно, электронам из верхней пленки ($x > a$) преодолеть барьер

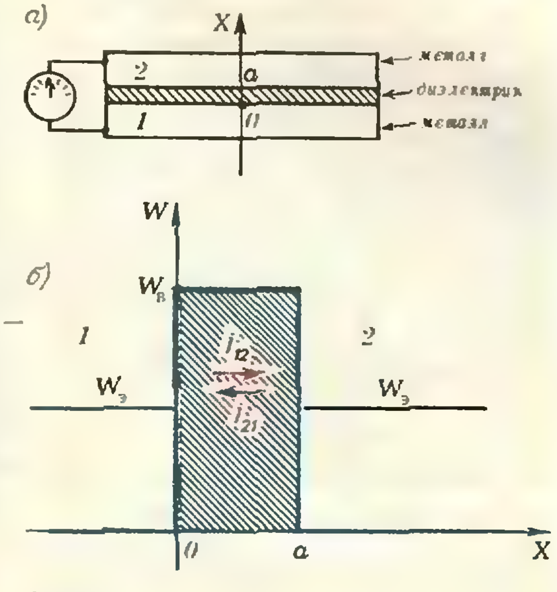


Рис. 3.

---

*) Аналогично, для того чтобы вырвать молекулу из жидкости, надо, как известно, совершить работу испарения.

легче, чем электронам из нижней пленки ($x<0$), которым надо подскочить на более высокий уровень. В результате даже при малых напряжениях источника возникнет туннельный ток.

Туннельные контакты из нормальных металлов используются в некоторых приборах, но в этой статье речь идет о практическом применении сверхпроводимости. Поэтому сделаем следующий шаг и представим себе, что металлические пленки, разделенные тонким слоем диэлектрика, находятся в сверхпроводящем состоянии. Как будет вести себя туннельный сверхпроводящий контакт? Оказывается, сверхпроводимость приводит к совсем неожиданным результатам.

Как уже говорилось, электроны из верхней пленки имеют избыточную энергию eU по сравнению с электронами нижней пленки. Эту энергию они приобретают, ускоряясь электрическим полем в слое диэлектрика, через который туннелируют. Оказавшись в нижней пленке, они должны сбросить лишнюю энергию и перейти в равновесное состояние. Если бы пленка находилась в нормальном состоянии, то осуществить это было бы легко — достаточно нескольких столкновений с кристаллической решеткой металла и лишняя энергия электронов в конечном счете переходит в тепло. Но пленка находится в сверхпроводящем состоянии, и передать энергию решетке электроны не в состоянии! Вот и остается только электронам излучить эту энергию в виде кванта электромагнитного излучения с энергией $\hbar\omega$. Поэтому частота излучения ω связана с приложенным напряжением U простым соотношением

$$\hbar\omega = 2eU.$$

Вы заметили, что справа написан удвоенный заряд электрона — надо помнить, что туннелируют не отдельные электроны, а сверхпроводящие пары.

Вот какой удивительный эффект был предсказан Джозефсоном: постоянное напряжение, приложенное к сверхпроводящему туннельному контакту (его называют также джозефсоновским элементом), приводит к генерации электромагнитного излучения. Экспериментально этот эффект впервые был обнаружен в Харьковском физико-техническом институте низких температур учеными И. М. Дмитриенко, В. М. Свистуновым и И. К. Янсоном в 1965 году.

Первое, что приходит в голову, если говорить о практическом использовании эффекта Джозефсона, — это создание генератора электромагнитного излучения. Но в действительности все не так просто: излучение довольно трудно вывести из узкой щели между сверхпроводящими пленками, где оно генерируется (именно поэтому экспериментальное обнаружение эффекта Джозефсона было непростой задачей), да и мощность излучения очень мала. Поэтому сейчас джозефсоновские элементы используются в основном в качестве детекторов электромагнитного излучения, но зато самых чувствительных в некоторых диапазонах частот.

Такое применение основано на явлении резонанса между внешними электромагнитными колебаниями (в регистрируемой волне) и собственными колебаниями, возникающими в джозефсоновском элементе при приложении к нему постоянного напряжения. Собственно говоря, резонанс лежит в основе работы многих приемников: волну удается «поймать», когда ее частота совпадает с часто-

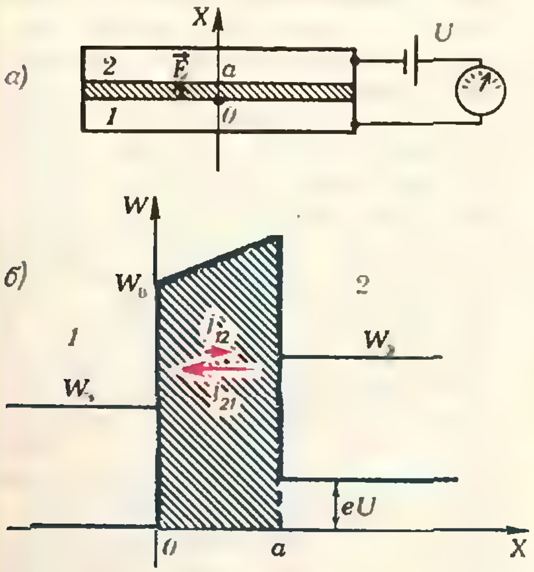


Рис. 4.

той приемного колебательного контура. В качестве приемного контура удобно использовать джозефсоновский элемент: частоту его собственных колебаний легко подстраивать (изменяя напряжение), а острота резонанса, определяющая чувствительность приемника, оказывается очень высокой. По такому принципу уже созданы самые чувствительные приемники электромагнитного излучения, которые используются для исследования излучения Вселенной.

Квантовый магнитометр

Эффект Джозефсона в сочетании с явлением квантования магнитного потока послужили основой для создания целого семейства сверхчувствительных измерительных приборов. Они называются «сверхпроводящие квантовые интерференционные приборы» или «СКВИДы» (по сочетанию первых букв соответствующих английских слов **Superconducting Quantum Interference Devices***). Об одном из них — квантовом магнитометре (приборе для измерения слабых магнитных полей) — будет рассказано в этой главе.

Простейший квантовый магнитометр состоит из сверхпроводящего кольца, в цепь которого включен джозефсоновский элемент (рис. 5). Как вы уже знаете, для того чтобы возник ток в нормальном туннельном контакте, к нему надо приложить хотя бы небольшое напряжение. А вот в сверхпроводящем туннельном контакте это не обязательно. Если в кольце создать сверхпроводящий ток, то он сможет течь и через джозефсоновский элемент: сверхпроводящие пары будут туннелировать через тонкий слой диэлектрика. Такое явление называют стационарным (постоянным во времени) эффектом Джозефсона, в отличие от нестационарного эффекта, сопровождаемого излучением (о нем было рассказано в предыдущей главе). Существует, однако, максимально допустимое для контакта значение сверхпроводящего тока (его называют критическим током контакта $I_к$. При токе, большем критического, сверхпроводимость в контакте разрушается и на нем обязательно появляется напряжение (эффект Джозефсона становится нестационарным).

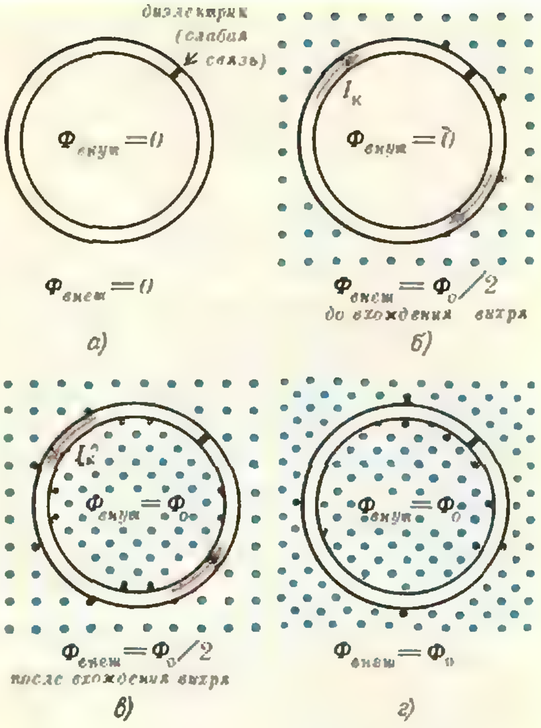


Рис. 5.

Итак, при включении в сверхпроводящий контур джозефсоновского элемента не происходит полного разрушения сверхпроводимости, но в контуре появляется место, в котором сверхпроводимость ослаблена (как говорят, возникает слабая связь). Именно на этом основано использование такого контура для точного измерения магнитных полей. Постараемся понять, как это делается.

Если бы контур был полностью сверхпроводящим (не содержал слабой связи), то магнитный поток через его площадь был бы строго постоянным. Действительно, согласно закону электромагнитной индукции, всякое изменение внешнего магнитного поля приводит к возникновению ЭДС индукции $\mathcal{E}_i=-\Delta\Phi_{внеш}/\Delta t$, а значит — к изменению тока в контуре. Но изменяющийся ток в свою очередь порождает ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_{is} = -L\Delta I/\Delta t$. Поскольку падение напряжения в сверхпроводящем контуре равно нулю (сопротивление равно нулю), алгебраическая сумма этих ЭДС тоже равна нулю:

---

*) Любопытно, что если в полном русском названии заменить слово «приборы» на слово «детекторы» (а это только уточнит название, укажет на использование этих приборов как регистраторов), то сокращенное название будет звучать и по-русски и по-английски одинаково.

$$\mathcal{E}_i + \mathcal{E}_{is} = 0,$$

или

$$\frac{\Delta\Phi_{\text{внеш}}}{\Delta t} + L\frac{\Delta I}{\Delta t} = 0.$$

Отсюда следует, что при изменении внешнего магнитного потока сверхпроводящий ток в контуре меняется так, чтобы изменение магнитного потока, создаваемого током, компенсировало изменение внешнего потока (правило Ленца). При этом полный магнитный поток через контур остается постоянным: $\Phi = \text{const}$. Изменить его, не переводя контур в нормальное состояние, нельзя (говорят, что в сверхпроводящем контуре магнитный поток «заморожен»).

А что произойдет, если сверхпроводящий контур содержит слабую связь? Оказывается, что магнитный поток через такой контур может меняться — через слабую связь в контур проникают кванты потока (как вы уже знаете, магнитный поток сверхпроводящего тока квантуется — он равен целому числу квантов потока Φ_0).

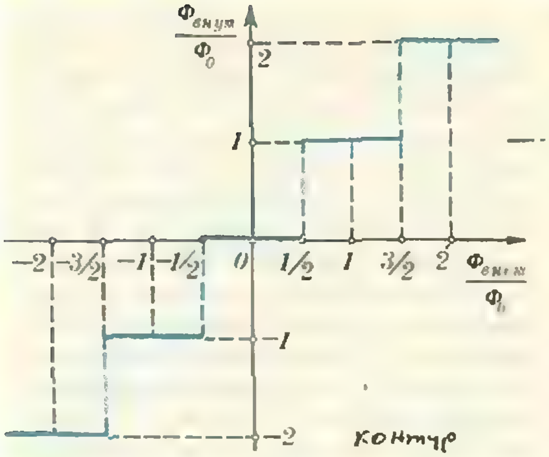
Давайте проследим, как меняются магнитный поток внутри сверхпроводящего кольца со слабой связью и величина тока в кольце при изменении внешнего магнитного поля. Пусть вначале внешнее поле и ток в контуре равны нулю (рис. 5,*а*). Тогда поток внутри контура тоже равен нулю. Будем увеличивать внешнее поле — в контуре появится сверхпроводящий ток, магнитный поток которого в точности компенсирует внешний поток. Так будет продолжаться до тех пор, пока ток в контуре не достигнет критического значения $I_к$ (рис. 5,*б*). Предположим для определенности, что в этот момент внешнее поле создает поток, равный половине кванта: $\Phi_0/2$*). Как только ток станет равным $I_к$, сверхпроводимость в месте слабой связи разрушится, и в контур войдет квант потока Φ_0 (рис. 5,*в*). При этом отношении $\Phi_{\text{внут}}/\Phi_0$ скачком увеличится на единицу (как говорят, сверхпроводящий контур перейдет в новое квантовое состояние). А что произойдет с током? Его величина останется прежней, но направление изменится на противоположное. Действительно, если до вхождения кванта потока Φ_0 ток $I_к$ полностью экранировал внешний поток $\Phi_0/2$, то после вхождения он должен усиливать внешний поток $\Phi_0/2$ до значения Φ_0. Поэтому в момент вхождения кванта потока направление тока скачком меняется на противоположное.

При дальнейшем увеличении внешнего поля ток в кольце начнет уменьшаться, сверхпроводимость в кольце восстановится и поток внутри кольца будет оставаться равным Φ_0. Ток в контуре обратится в нуль, когда внешний поток также станет равным Φ_0 (рис. 5, *г*), а затем он начнет течь в обратном направлении (опять экранировка!). Наконец, при значении внешнего потока $3\Phi_0/2$ ток опять станет равным $I_к$, сверхпроводимость разрушится, войдет следующий квант потока и т. д.

Графики зависимости магнитного потока $\Phi_{\text{внут}}$ внутри кольца и тока I в нем от величин внешнего потока $\Phi_{\text{внеш}}$ показаны на рисунке 6 (оба потока измеряются в естественных единицах — квантах потока Φ_0). Ступенчатый характер зависимости позволяет «чувствовать» отдельные кванты потока, хотя величина их очень мала (порядка 10^{-15} Вб). Нетрудно понять почему. Магнитный поток внутри сверхпроводящего контура изменяется хотя и на малую величину $\Delta\Phi = \Phi_0$, но скачком, то есть за очень короткий промежуток времени Δt. Так что скорость изменения магнитного потока $\Delta\Phi/\Delta t$ при таком скачкообразном характере изменения потока оказывается очень большой. Ее можно измерить, например, по величине ЭДС индукции, наводимой в специальной измерительной катушке прибора. В этом и состоит принцип работы квантового магнитометра.

---

*) Критический ток зависит от многих причин, в частности — от толщины слоя диэлектрика. Меняя ее, всегда можно добиться того, чтобы создаваемый этим током магнитный поток, а значит и внешний магнитный поток, был равен $\Phi_0/2$. Это упрощает рассмотрение, но не меняет существа дела.



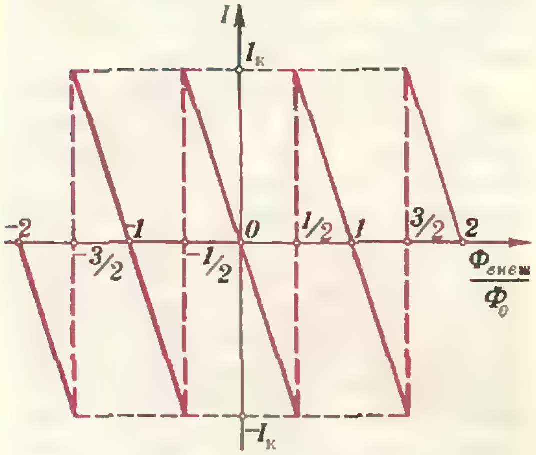


Рис. 6.

Устройство реального квантового магнитометра в действительности много сложнее. Так, обычно используют не одну, а несколько слабых связей, включенных параллельно, — своеобразная интерференция сверхпроводящих токов приводит к повышению точности измерений (поэтому такие приборы и называются интерференционными). Чувствительный элемент прибора индуктивно связывают с катушкой колебательного контура, где скачки потока преобразуются в импульсы напряжения, которые затем усиливаются. Но рассказ обо всех этих тонкостях выходит за рамки данной статьи.

Заметим, что в наши дни сверхчувствительные магнитометры, измеряющие магнитные поля с точностью до 10^{-15} Тл, — это уже промышленная продукция, находящая широкое применение в измерительной технике. Недалек, например, тот день когда магнитокардиограммы*), снимаемые с помощью СКВИДов, принципиально изменят существующие возможности для диагностики сердечных заболеваний.

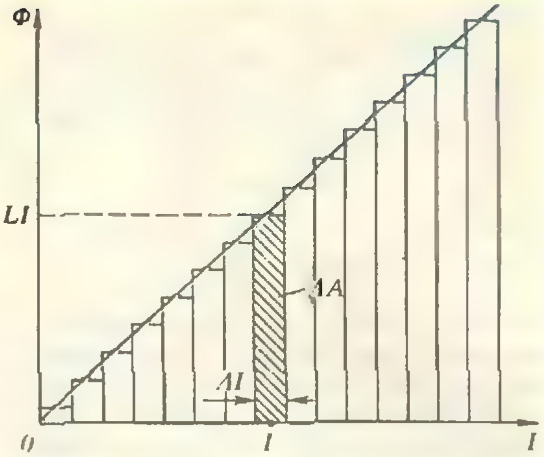


Рис. 7.

Приложение

Формулу для энергии кольца с током можно получить, например, так. Представим себе, что сверхпроводящее кольцо подключается к источнику тока с ЭДС $\mathcal{E}$. В кольце появится ток, который будет все время нарастать. При этом скорость изменения тока $\Delta I/\Delta t$ должна быть такой, чтобы ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_{is} = -L\Delta I/\Delta t$ компенсировала внешнюю ЭДС $\mathcal{E}$ (сопротивление сверхпроводника, а следовательно, и падение напряжения на нем равны нулю):

$$\mathcal{E}_{is} = -\mathcal{E}.$$

При прохождении по цепи заряда $\Delta Q = I\Delta t$ источник совершает работу

$$\Delta A = \mathcal{E}\Delta Q = L\frac{\Delta I}{\Delta t}I\Delta t = LI\Delta I.$$

Произведение LI — это магнитный поток Φ через площадь кольца. Для того чтобы нагляднее представить полученный результат, нарисуем график зависимости Φ от I (рис. 7). Как видно из рисунка, элементарная работа ΔA равна площади заштрихованного прямоугольника. Полная работа A при изменении тока от 0 до I_0 равна сумме площадей прямоугольников с высотами, равными соответствующим значениям магнитного потока, то есть площади треугольника со сторонами I_0 и LI_0:

$$A = \frac{1}{2}(LI_0)I_0 = \frac{1}{2}LI_0^2.$$

Эта работа как раз и равна энергии тока в кольце. Разумеется, полученное выражение не зависит от того, какой ток течет в кольце — сверхпроводящий или нормальный.

---

*) Оказывается, при работе сердца возникают очень слабые магнитные поля — порядка 10^{-11} Тл. Их регистрацию и называют в медицине снятием магнитокардиограммы.

Д. Коэн

Метрика коня

Нас здесь будут интересовать ходы коня на шахматной доске, которую мы вначале будем предполагать бесконечной. Обозначим клетки доски парами целых чисел (координатами центра клетки — см. рис. 1). *Ход коня*, находящегося в начале координат (0;0), — это переход в одну из 8 клеток с координатами (±1; ±2), (±2; ±1). Если же конь находится в клетке $(x;\ y)$, то один ход переводит его в одну из клеток $(x\pm1;\ y\pm2)$, $(x\pm2;\ y\pm1)$.

Определим *расстояние* от клетки P до клетки Q как минимальное число ходов коня, необходимое для того, чтобы перейти из P в Q. Обозначим это число через $\varrho(P,\ Q)$. Например, расстояние от начала $O(0;0)$ до клетки $E(1;0)$ равно расстоянию от начала до клетки $F(3;6)$ — оба они равны 3. Функция ϱ, определенная на множестве пар $(P,\ Q)$ клеток, обладает *тремя основными свойствами* расстояния*):

$$\varrho(P,\ Q)>0,\ \text{при}\ P\neq Q;\ \varrho(P,\ P)=0;$$
$$\varrho(P,\ Q)=\varrho(Q,\ P);\qquad \text{(II)}$$
$$\varrho(P,\ R)\leqslant\varrho(P,\ Q)+\varrho(Q,\ R).\ \text{(III)}$$

Первые два свойства очевидны, а третье — его называют *неравенством треугольника* — следует из того, что может найтись путь из P в R, не проходящей через Q и более короткий, чем любой путь из P в R, проходящий через Q.

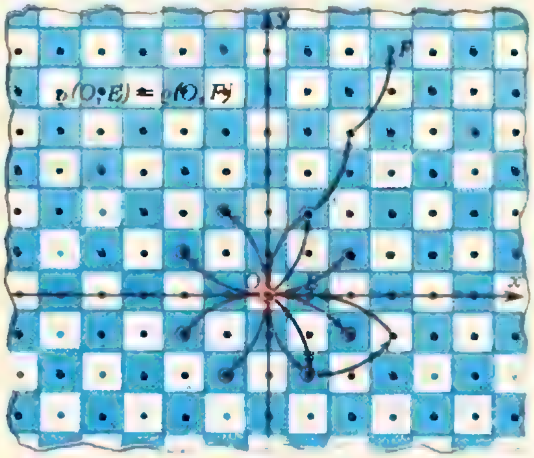


Рис. 1.

Это расстояние — *метрика коня* — порождает весьма необычную «геометрию». В ней можно определить понятие отрезка $[AB]$**) как множество клеток M таких, что $\varrho(A,\ M)+\lambda(M,\ B)=\varrho(A,\ B)$, но отрезки получаются весьма уродливыми (два отрезка могут пересекаться в нескольких клетках). Можно определить и *окружности* радиуса r, которые выглядят несколько более прилично (по крайней мере, при $r\geqslant5$).

А пока отметим следующее очевидное свойство функции ϱ:

$$\varrho((x;\ y),\ (x';\ y'))=$$
$$=\varrho((0;\ 0),\ (x'-x;\ y''-y)).\ (*)$$

оно позволяет вместо функции ϱ от пар клеток изучать функцию от одной клетки — расстояние от начала:

$$d(P)=\varrho(O,\ P).$$

Проставим в каждой клетке P значение функции $d(P)$. Вообразим, что мы это сделали на листке кальки. Тогда свойство (*) означает, что, если мы параллельно сдвинем кальку, совместив начало O с точкой P, на кальке над точкой Q будет написано $\varrho(P,\ Q)$.

На рисунке 2 проставлены все значения $d(P)$, меньшие или равные 4. Рисунок подсказывает следую-

---

Автор — американский математик — написал эту статью для «Кванта» по-английски. Перевод под редакцией А. Сосинского.

*) См. «Геометрия 6—8», п. 4 — *прим. ред.*

**) См. «Геометрия 6—8», пп. 5—6 — *прим. ред.*

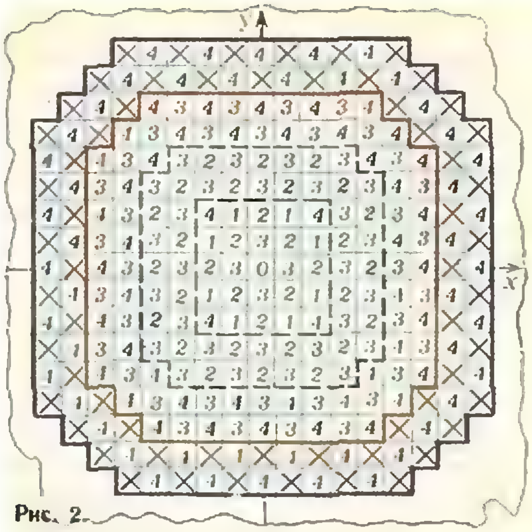


Рис. 2.

щие свойства функции d:

$$d((a;\ b))=d((b;\ a)), \qquad (1)$$

$$d((a;\ b))=d((|a|;\ |b|)), \qquad (2)$$

числа $d((a;\ b))$ и $a+b$
имеют одинаковую четность, (3)
которые, очевидно, следуют из определения.

Заметим далее, что на рисунке 2 внутри красной линии стоят числа 0, 1, 2, 3, 4, изрядно перепутанные, хотя и симметрично расположенные (из-за свойств (1) и (2)). В поясе между красной и синей линиями стоят только четверки и значок × (на самом деле $\times=5$). В следующем таком поясе будут стоять только 5 и 6, в следующем — 6 и 7 и т. д. (рис. 3). На рисунке 4 изображена только первая четверть ($x,\ y\geqslant 0$). На этом рисунке также показан участок *n-го пояса*, в котором стоят только числа n и $n+1$.

Грубо говоря, n-й пояс имеет форму границы квадрата (со стороной длины $4n+1$) со срезанными углами (отрезаны равнобедренные прямоугольные треугольники с боковой стороной длины $n-1$). Пояс составлен из горизонтальных и вертикальных *полос* толщины 2 и четырех *диагональных участков* в виде лесенки; один из них выделен на рисунке цветом.

Таким образом, если отвлечься от путаницы, существующей вблизи начала отсчета, геометрическая картина метрики коня прояснилась. Однако этого нам мало: мы хотим научиться находить $d((a;\ b))$ чисто аналитически — по числам a и b. Короче, нам нужна

Формула расстояния $d((a;\ b))$

В силу свойств (1) и (2) достаточно вычислить $d((a;\ b))$ в случае, когда $0\leqslant a\leqslant b$. Кроме того, чтобы избежать путаницы, существующей около начала отсчета, мы будем предполагать, что $a+b\geqslant 6$. Рассмотрим два случая в зависимости от того, лежит ли клетка $P(a;\ b)$ в горизонтальной полосе или на диагональном участке.*)

Первый случай: клетка $P(a;\ b)$ лежит в горизонтальной полосе n-го пояса, то есть $2a\leqslant b$. При фиксированном $d=d((a;\ b))$ у точки P имеются 4 разные возмож-

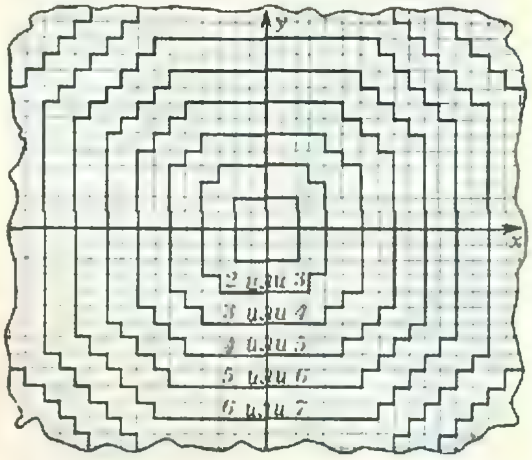


Рис. 3.

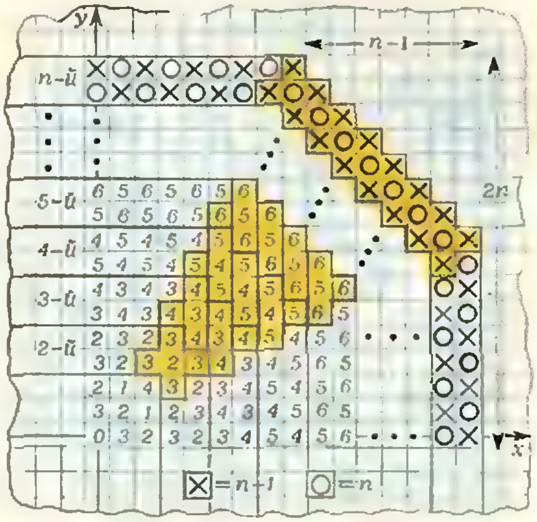


Рис. 4.

---

*) Мы предлагаем доказательство, несколько отличающееся от авторского (прим. ред.)

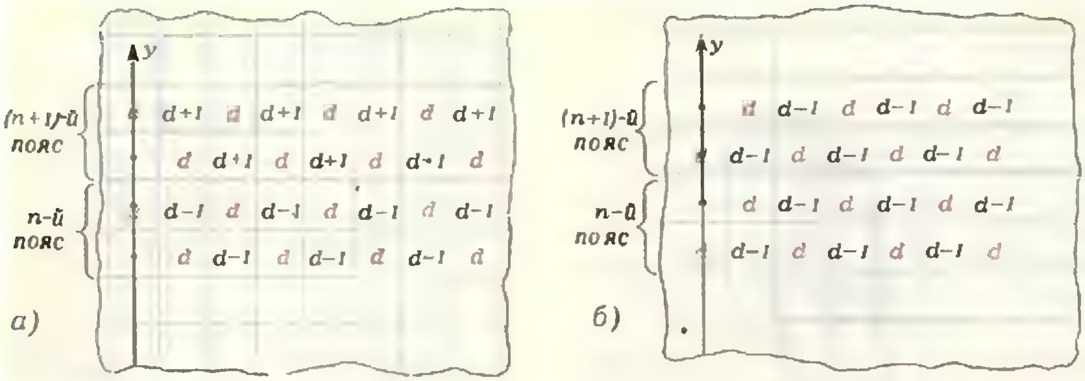


Рис. 5. На рисунке а) изображен случай, когда d нечетно, а на рисунке б) число d четно.

ности в зависимости от ее уровня по вертикали (рис. 5). На самом верхнем уровне точка P достигается минимальной цепочкой из d ходов, увеличивающих вторую координату на 2; на следующем уровне — цепочкой из $d-1$ ходов этого типа и одним ходом, увеличивающим вторую координату на 1; на следующем уровне требуется $d-2$ и 2 хода этих типов; на нижнем уровне — соответственно $d-3$ и 3. В этих случаях высота b равняется $2d$, $2(d-1)+1=2d-1$, $2(d-2)+2=2d-2$, $2(d-3)+3=2d-3$ соответственно. Отсюда можно было бы выразить d через b, но b — целое, и мы не можем записать ответ, не зная четности b! Как быть?

Оказывается, правильный ответ дает одно из чисел $[(b+1)/2]$ или $[(b+1)/2]+1$ (здесь квадратные скобки обозначают целую часть), а именно то, чья четность совпадает с четностью числа $a+b$ (см. свойство (3)). Читатель легко проверит это, воспользовавшись рисунком 5 и подписью к нему.

Второй случай: клетка $P(a;\, b)$ лежит на диагональном участке n-го пояса, то есть $2a>b$. Легко видеть, что в любую точку диагонального участка первой четверти n-го пояса можно добраться минимальной последовательностью ходов коня так, чтобы на каждом ходе сумма координат увеличивалась ровно на 3 (то есть ходами $(a;\, b)\to(a+1;\, b+2)$ и $(a;\, b)\to(a+2;\, b+1)$). Поэтому $a+b=3n$ или $a+b=3(n+1)$, откуда $d((a;\, b))=[(a+b+1)/3]$ или $d((a;\, b))=[(a+b+1)/3]+1$. Какое именно из этих двух чисел можно взять, ясно из соображений четности (см. (3)).

Подведем итог нашего исследования функции $d((a;\, b))$. *При условиях $0\leqslant a\leqslant b$ и $a+b\geqslant 6$ число $d((a;\, b))$ имеет ту же четность, что $a+b$, равняется $[(b+1)/2]$ или $[(b+1)/2]+1$ в случае $2a\leqslant b$, $[(a+b+1)/3]$ или $[(a+b+1)/3]+1$ в случае $2a>b$.*

На самом деле эти формулы дают верный ответ и при $a+b<6$ всюду, кроме клеток $(0;\, 1)$ и $(2;\, 2)$, где они дают 1 и 2 соответственно, вместо правильных 3 и 4 (см. рис. 2).

Метрика коня на прямоугольной доске

Ограничим теперь нашу бесконечную шахматную доску: будем рассматривать ходы коня на прямоугольной доске $a\times b$ $(a\leqslant b)$. При $a=1$ рассматривать нечего («Товарищ гроссмейстер, так конь не ходит!»), при $a=2$ все очень просто. Более содержательные случаи $a=3$ и $a=4$ мы оставим читателю, а сами перейдем к случаю $5\leqslant a\leqslant b$. Оказывается,

При $5\leqslant a\leqslant b$ существует последовательность ходов коня длины $d((a;\, b))$ внутри прямоугольника со сторонами $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$, соединяющая точки $(0;\, 0)$ и $(a;\, b)$, и этот путь самый короткий.

Действительно, начнем с точки в n-м поясе и сделаем один ход в сторону начала. Тогда мы останемся внутри прямоугольника и попадем в $(n-1)$-ый пояс. Продолжая этот процесс, мы доберемся до четвертого пояса. Далее остается проверить справедливость нашего утверждения для клеток четвертого пояса. Этот перебор мы оставляем читателю.

Метрика коня на квадратной доске

Рассмотрим теперь квадратную доску $n\times n$, скажем, ограниченную прямыми $x=0$, $x=n-1$, $y=0$, $y=n-1$. Назовем *диаметром* этой доски наибольшее расстояние (в смысле метрики коня) между ее клетками. Вновь оставляя случай малых размеров читателю, мы рассмотрим случай $n\geqslant 5$. Из предыдущего легко видеть, что диаметром будет расстояние от клетки $(0;\ 0)$ до одной из клеток $(n-1;\ n-1)$ или $(n-1;\ n-2)$. Пользуясь этим замечанием и ранее полученной формулой расстояния, покажем, что

Диаметр шахматной доски $n\times n$ равен числу $2n/3$, округленному до ближайшего целого.

Действительно, по формуле расстояния $d((n-1;\ n-1))$ равняется $[(2n-1)/3]$ или $[(2n-1)/3]+1$ (именно, тому из этих чисел, которое четно), а $d((n-1;\ n-2))$ равняется $[(2n-2)/3]$ или $[(2n-2)/3]+1$ (нечетному). Рассмотрим три случая в зависимости от остатка от деления числа n на 3.

Первый случай: $n=3k$. Тогда

$$[(2n-1)/3]=[(2n-2)/3]=2k-1,$$

так что расстояние до $(n-1;\ n-1)$ равно $2k$, а до $(n-1;\ n-2)$ равно $2k-1$. Диаметр равен $2a$, что есть $2n/3$ без всякого округления.

Второй случай: $n=3k+1$. Тогда

$$[(2n-1)/3]=[(2n-2)/3]=2k,$$

так что расстояния до $(n-1;\ n-1)$ и $(n-1;\ n-2)$ соответственно равны $2k$ и $2k+1$. Диаметр равен $2k+1$, то есть округленному числу $2n/3$.

Третий случай: $n=3k+2$. Тогда

$$[(2n-1)/3]=2k+1,\qquad [(2n-2)/3]=2k,$$

так что интересующие нас расстояния соответственно равны $2k+2$ и $2k+1$. Значит, диаметр равен $2k+2$, то есть снова округленному числу $2n/3$.

Заметьте, что наибольшее расстояние реализуется в этом случае клетками, не лежащими на главной диагонали.

Другие формулы

Функция $d((a;\ b))$ уже исследовалась раньше, и для нее были получены другие (более сложные) аналитические выражения (при $a+b\geqslant 8$, $0\leqslant a\leqslant b$). М. Голдберг (США) нашел

$$d((a;\ b))=\begin{cases} b-a-2[(b-2a)/4] & \text{при } 2a\leqslant b,\\ b-a+[(8a-4b+2)/3]-\\ \quad -[(4a-2b)/3] & \text{при } 2a>b,\end{cases}$$

а Д. Цветкович и С. Симич (Югославия) нашли

$$d((a;\ b))=\begin{cases} a+b-2\left[\frac{b}{2}\right]-\left[\frac{a-[b/2]}{2}\right] & \text{при } 2a\leqslant b,\\ a+b-2\left[\frac{a+b}{3}\right] & \text{при } 2a>b.\end{cases}$$

Можно показать, что эти формулы эквивалентны нашим, но интереснее попытаться угадать, какими рассуждениями пришли к ним их авторы.

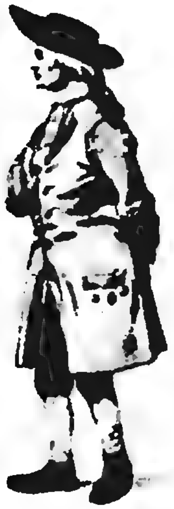
В заключение предлагаем читателю такую задачу: *найти площадь круга радиуса r, то есть число клеток $(a;\ b)$, для которых $d((a;\ b))\leqslant r$.*

Турнир имени М. В. Ломоносова

По уточненным данным в этом году турнир (см. «Квант», 1981, № 8, с. 51) состоится в Москве 25 октября в 10.00 в помещении следующих вузов: МАИ, МАТИ, МГПИ, МИИГАиК, МИНХиГП, МИСИ, МИСиС; приглашаются школьники 6—9 классов.

С. Филонович

Генри Кавендиш



В этом году исполняется 250 лет со дня рождения Генри Кавендиша. С именем Кавендиша в истории науки связано множество открытий, о которых человечество узнало много лет спустя после того, как они были сделаны. Личность этого человека, посвятившего всю жизнь естествознанию, многие годы привлекает внимание физиков, историков науки, психологов.

Генри Кавендиш, принадлежавший к знатному роду герцогов Девонширских, родился 10 октября 1731 года в Ницце, где по совету врачей в то время жила его мать. Она вообще не отличалась крепким здоровьем, а рождение детей окончательно расшатало его, и леди Кавендиш умерла вскоре после рождения второго сына, когда ее первенцу Генри было около двух лет. В 11 лет мальчика отправили в одну из лучших частных школ в Лондоне, а в 1749 году он поступил в Кембриджский университет, который оставил в 1753 году, так и не получив ученой степени. Высказывалось предположение, что это обстоятельство было связано с болезненной застенчивостью Кавендиша и его страхом перед экзаменом.

После ухода из университета Генри некоторое время путешествовал вместе с младшим братом по Европе, а затем поселился в доме отца в Лондоне. Об отце Кавендиша, сэре Чарльзе, следует сказать особо. Знатный, хотя и не очень богатый человек, он более всего на свете интересовался естествознанием. Сэр Чарльз в течение многих лет был членом Лондонского Королевского общества, а некоторое время даже его вице-президентом. Научные интересы его относились к модной в то время области электричества. Известный американский естествоиспытатель Б. Франклин писал о Кавендише-отце: «Хотелось бы, чтобы такой уважаемый ученый больше сообщал миру о множестве проводимых им с большой тщательностью экспериментов». Не исключено, что отец и сын Кавендиши некоторые опыты ставили совместно.

Итак, интерес Генри к естественным наукам родился под влиянием занятий отца. Однако, судя по сохранившимся записям, большинство важнейших опытов Генри провел самостоятельно.

Каково же место Кавендиша в науке второй половины XVIII века? Какие проблемы его интересовали?

Круг научных интересов Кавендиша столь широк, что больше всего к нему подходит определение «естествоиспытатель». При жизни он прославился как химик. За пионерские исследования газов Кавендиша иногда называют «отцом пневматической химии». Он впервые определил природу водорода как особого газа, подтвердил, что воздух есть смесь кислорода и азота, что вода образуется из воздуха и водорода. Его интерес к химии и электрическим явлениям привел к открытию того факта, что при действии электрической искры на влажный воздух образуется азотная кислота. При проведении одного из своих электрохимических опытов Кавендиш, пропуская электрическую искру через смесь воздуха с кислородом в присутствии едкого кали, заметил, что после образования азотной кислоты, взаимодействующей с едким кали, и удаления избытка кислорода получается незначительный остаток (1/120 начального объема газа), на который не действуют никакие средства. Это открытие было надолго забыто, о нем вспомнили лишь в конце XIX века, после открытия инертных газов.

Исследования Кавендиша по химии тематически совпадали с работами многих других ученых того времени: Лавуазье, Уатта, Пристли. Однако исследовательский метод Кавендиша был оригинальным: он характеризуется явно выраженным стремлением к точному количественному эксперименту. Кавендиш, например, не только доказал существование водорода, но и провел расчеты, найдя, что этот газ в 11 раз легче воздуха*). Применяя специально усовершенствованный им прибор — эвдиометр, ученый исследовал объемные соотношения между воздухом, водородом и водой, образованной при взрыве смеси.

Бытует мнение, что ученый провел всю жизнь за опытами, совершенно не публикуя их результаты. Это несколько преувеличенное представление. Действительно, Кавендиш, по не очень ясным причинам, редко публиковал свои научные результаты. Зачастую публикации делались значительно позднее проведения опытов, и это приводило к острым приоритетным спорам. Тем не менее можно насчитать более десятка его работ по физике и химии, опубликованных в журнале «Philosophical Transactions», издававшемся Лондонским Королевским обществом. Кавендиш был членом общества с 1760 года и играл активную роль в работе ряда его комиссий. Он принимал участие в заседаниях и традиционных обедах членов общества, помогал Дж. Бэнксу в его деятельности на посту президента. Правда, современники утверждают, что Кавендиш неохотно вступал в разговоры и тем более в споры, стесняясь, по-видимому, своего высокого и резкого голоса. Выдающийся английский физик и химик Дэви писал о Кавендише, что его основной страстью было бескорыстное служение истине и что известность и слава отпугивали ученого.

Кроме химии Кавендиш интересовался геологией. Он совершил несколько поездок по Англии с целью изучения геологических и минералогических особенностей разных районов. Во время этих путешествий ученый знакомился с некоторыми производственными процессами, усовершенствование которых требовало знания физики и химии.

Кавендиш общался с крупнейшими английскими учеными своего времени: Пристли, Дэви, Уаттом, Юнгом. Активная исследовательская работа ученого продолжалась практически до самой смерти, последовавшей после непродолжительной болезни 24 февраля 1810 года. Последняя работа Кавендиша (1809 г.) была посвящена исследованию астрономических инструментов.

Широкую известность при жизни Кавендиша приобрела его работа по определению средней плотности Земли, опубликованная в 1798 году. В наши дни эксперимент, описанный в ней, известен как «опыт Кавендиша». Вопрос об определении плотности Земли возник в связи с тем, что расчет сжатия Земли, обусловленного вращением, выполненный в предположении о ее постоянной плотности, не согласовывался с данными геофизических наблюдений. Интересно, что еще Ньютон высказал предположение, что плотность внутренних слоев Земли может в шесть раз превышать плотность воды. Попытки привести расчет в согласие с опытом не удавались. Требовалось провести точный эксперимент. До Кавендиша плотность Земли пытались определить путем наблюдения отклонения свинцового бруска от вертикали под действием притяжения горы. Однако этот метод таил в себе так много источников ошибок, что Кавендиш решил от него отказаться. Для измерений ученый использовал прибор, доставшийся ему от английского физика Джона Митчелла. Справедливости ради нужно сказать, что Кавендиш значительно усовершенствовал устройство прибора.

---

*) В действительности водород в 14,3 раза легче воздуха.

Цель опыта состояла в определении периода крутильных колебаний посеребренной медной нити, к которой прикреплен стержень с двумя легкими шарами на концах (см. рисунок). Период колебаний зависит от взаимодействия этих шаров с большими шарами, которое определяется законом всемирного тяготения. Точные измерения периода колебаний дают возможность вычислить гравитационную постоянную G. После этого, зная величины среднего радиуса $R_{\text{З}}$ Земли и ускорения свободного падения g (эти данные получают из геофизических измерений), можно рассчитать среднюю плотность Земли D. (Действительно, $g=GM/R_{\text{З}}^2$, где $M={}^4/_3\pi R_{\text{З}}^3 D$ — масса Земли; отсюда $D=3g/4\pi G R_{\text{З}}$.)

Для истории науки наибольшую ценность представляло, конечно, не определение геофизической постоянной D, а возможность вычисления по данным «земных» измерений фундаментальной константы G. Поэтому в литературе часто пишут об опытах Кавендиша как об экспериментах по определению G.

Кавендиш проявил большое экспериментальное искусство, сконструировав установку так, что расстояние между большими и малыми шарами могло регулироваться удаленным наблюдателем; это уменьшало влияние побочных факторов на результаты опытов. Применение зрительной трубы позволило проводить очень точные (до 1/20 дюйма*)) отсчеты смещений шаров. Для исключения случайных погрешностей ученый разработал специальную процедуру измерений, которая многократно повторялась. Вот что пишет об этом сам Кавендиш:

«Я определял последовательно проходимые три крайние точки колебания, брал среднее между первой

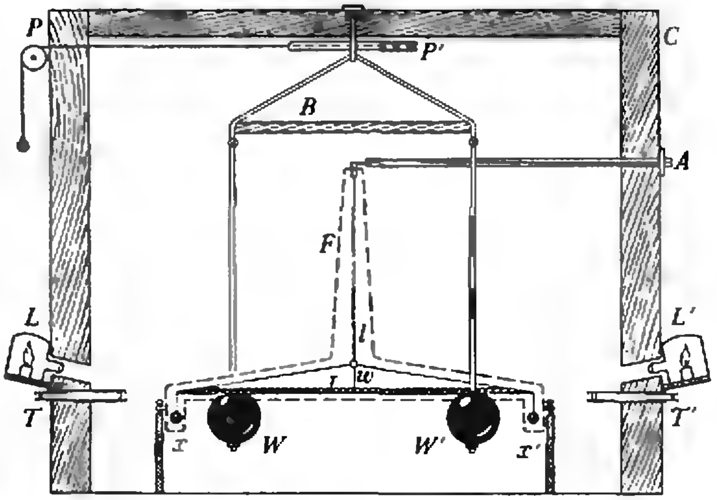
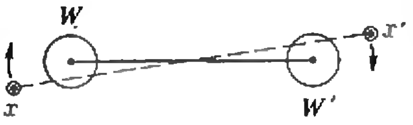


Схема установки Кавендиша для определения средней плотности Земли.

Крутильные весы помещены во внешний кожух *C*, предохраняющий их от потоков воздуха, создаваемых движениями экспериментатора; *PP'* — тяга, с помощью которой вращается стержень *B* и перемещаются массивные свинцовые шары *W* и *W'*; пунктиром показан кожух *F*, защищающий крутильный подвес от воздушных потоков, вызываемых колебаниями температуры; *A* — передача для установки крутильного подвеса; *l* — закручивающаяся нить; *r* — стержень, стабилизируемый двумя нитями *w*, на концах которых закреплены малые свинцовые шары *x* и *x'*; *L*, *L'* — лампы; *T*, *T'* — зрительные трубы. Диаметры больших шаров 12 дюймов, малых — 2 дюйма. Расстояние между центрами больших шаров — 73,3 дюйма, длина нити *l* — 39,25 дюйма.



Вид на систему шаров сверху. Стрелками показано направление движения малых шаров *x* и *x'*.

---

*) 1 дюйм = 2,54 см.

Здание Кавендишской лаборатории (фотография конца 90-х годов прошлого века). В разные годы в лаборатории работали многие выдающиеся физики, внесшие большой вклад в развитие современной науки. Среди них — лауреаты Нобелевской премии Дж. Рэлей, Дж. Дж. Томсон, Э. Резерфорд, Г. и Л. Брэгги, Ч. Вильсон, Дж. Чедвик, Дж. П. Томсон, Н. Ф. Мотт, П. Л. Капица.

и третьей точками, считая его крайней точкой отклонения в одном направлении, а затем определял точку покоя [точку равновесия стержня — *С. Ф.*] как среднее между найденной путем расчета и второй крайней точками». И далее: «Я определял две крайние точки колебания, а также моменты времени, в которые конец стержня проходил через две заданные точки, находящиеся между крайними, стараясь, чтобы эти две точки находились по разные стороны от точки покоя и не слишком далеко от нее. Затем я определял точку покоя и, составляя пропорцию, находил моменты времени, в которые стержень проходил через нее. После нескольких колебаний я повторял эту процедуру и, деля промежуток времени между прохождениями весов через точку покоя на число колебаний, находил время одного колебания».

Для определения средней плотности Земли Кавендиш провел семнадцать серий измерений. Рассчитанное по данным этих измерений среднее значение отношения плотности Земли (средней плотности Земли) к плотности воды оказалось равным 5,48.

Эксперименты ученого были высоко оценены современниками. В 1820 году выдающийся французский механик и математик Лаплас писал: «Скрупулезно изучив прибор Кавендиша и все эксперименты, выполненные с точностью и проницательностью, которые характерны для этого выдающегося физика, я не смог выдвинуть ни одного возражения против данной им величины средней плотности Земли 5,48».

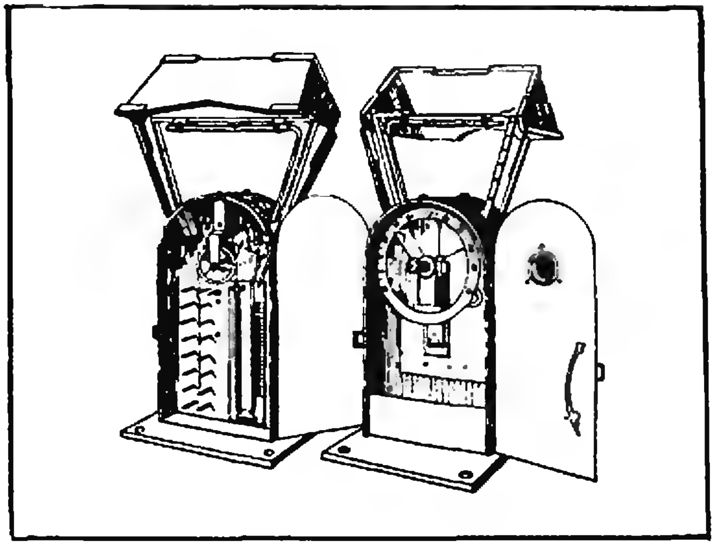
В наши дни среднее значение плотности Земли принимается равным 5,517 г/см^3. Отметим, что модернизированные крутильные весы Кавендиша используются для физических измерений и в наши дни.

Перечисленными экспериментами и открытиями наследие Кавендиша не исчерпывается. Значительные результаты получил Кавендиш при исследовании тепловых явлений. Он составил таблицу значений теплоемкостей различных веществ, исследовал процессы плавления и обнаружил существование скрытой теплоты плавления. Очень интересны опыты Кавендиша, поставленные для исследования электрических и магнитных явлений. Часть из них стала известна лишь после публикации трудов Кавендиша по электричеству, осуществленной выдающимся английским физиком Максвеллом. Интересна история этой публикации. В 1861 году канцлером Кембриджского университета был избран Уильям Кавендиш, герцог Девонширский, когда-то сам закончивший этот университет и проявлявший способности к математике. В 1870 году он выразил желание, чтобы при университете была построена физическая лаборатория, и создан денежный фонд для финансирования строительства. В 1871 году была учреждена Кавендишская кафедра, на которую по рекомендации таких видных английских физиков, как Стокс, Рэлей, У. Томсон, пригласили Максвелла. Он принял это предложение и активно занялся строительством лаборатории. Через три года строительство было завершено. На церемонии открытия Кавендишской лаборатории, сыгравшей выдающуюся роль в становлении и развитии современной физики, герцог вручил Максвеллу рукописи Кавендиша, хранившиеся в архиве семьи. Максвелл согласился их просмотреть. Уже первое знакомство с наследием Кавендиша поразило его. Он писал одному из друзей: «В своих рукописях он [Кавендиш — *С. Ф.*] обнаруживает знакомство с законами параллельного и последовательного соединения проводников... Он провел весьма обширные исследования в области проводимости соляных растворов в трубах, которые можно уподобить проволокам из разных металлов. Создается впечатление, что он достоин еще больших почестей, так как превзошел Ома задолго до того, как были открыты постоянные токи. Его измерения емкости заставят нас попотеть в Кавендишской лаборатории, прежде чем мы достигнем точки, где он остановился...».

В течение последних пяти лет жизни Максвелл с исключительным вниманием занимался подготовкой к изданию рукописей Кавендиша с описанием исследований по электричеству. Труды Кавендиша увидели свет в 1879 году, за несколько месяцев до смерти Максвелла.

Что же нового узнал научный мир о работах Кавендиша? Простое перечисление результатов говорит о многом: он впервые четко определил понятие емкости и использовал емкость шара заданных размеров как эталонную; исследовал зависимость проводимости водных растворов соли от ее концентрации и температуры раствора; за 14 лет до работ Кулона установил зависимость силы электрического отталкивания и притяжения от расстояния; задолго до Ома предсказал законы постоянного тока.

И все эти результаты оставались неопубликованными!



Почти для каждого своего эксперимента Кавендиш конструировал специальный измерительный прибор. И при этом его интересовали не только точность измерений, но и удобства пользования прибором.
Для опытов по исследованию тепловых свойств веществ он создал весьма точный термометр. Внешне этот прибор Кавендиша почти не отличается от современных очень точных (прецизионных) термометров.

После издания трудов ученого некоторые его опыты были поставлены заново. Оказалось, что в подавляющем большинстве случаев результаты Кавендиша весьма точны.

Интерес к научному наследию ученого не ослабевал. В 1927 году по инициативе Кембриджского университета было предпринято новое издание работ Кавендиша, в которое были включены и ранее неопубликованные работы. И вновь ученый мир пришел в восхищение: многолетние (1782—1809 гг.) измерения характеристик магнитного поля Земли дали в руки геофизиков неоценимый материал о «магнитной истории» Земли. Оказалось, что Кавендиш высказывал идею о сохранении энергии, рассматривал величину, соответствующую потенциальной энергии. И вновь, в который раз, были высказаны сожаления о том, что научные результаты Кавендиша оставались неизвестными более ста лет. Сожалеть приходится не только о забвении результатов, но и о том, что современникам не были известны проблемы, интересовавшие Кавендиша. Зачастую они составляли целую научную программу, разрабатывавшуюся в течение XIX столетия. Примером может служить перечень проблем из области магнетизма: изучение постоянных и «меняющихся» магнитов; влияние тепла на магнитные свойства тел; зависимость «силы» магнитов от сечения; упругий изгиб намагниченных игл в магнитном поле Земли; ошибки при изучении земного магнетизма, обусловленные этим изгибом.

Итак, восхищение и недоумение — чувства, возникающие при знакомстве с научным творчеством Генри Кавендиша. И, несмотря на то, что многие его результаты были получены заново другими учеными, по праву считающимися авторами открытий, ценность трудов Кавендиша непреходяща. И, прежде всего, она в научной глубине, с которой Кавендиш продумывал свои опыты, и в той скрупулезной тщательности, с которой он их выполнял. Именно эти требования являются основными в современной экспериментальной физике.

Генри Кавендиш

Экспериментальное определение закона электрической силы

С творчеством выдающегося ученого лучше всего знакомиться, читая его труды. Отмечая юбилей Кавендиша, мы публикуем сокращенный перевод его работы, посвященной установлению зависимости сил электрического притяжения и отталкивания от расстояния. Начало работы Кавендиша над проблемами электричества относится, по-видимому, к 1771 году. Полученные им результаты представляют собой весьма полное и, главное, точное решение поставленной задачи. В своих исследованиях ученый более чем на десятилетие опередил Кулона, опубликовавшего результаты своих опытов в 1785 году. Интересно, что Кавендиш сумел ответить на поставленный вопрос, несмотря на то, что придерживался неправильных представлений о природе электричества. Он полагал, что существует некая электрическая жидкость, избыток которой проявляется в положительной электризации тела, а недостаток — в отрицательной. Для облегчения понимания физического смысла опытов Кавендиша в переводе некоторые устаревшие термины заменены соответствующими современными выражениями; там, где это необходимо, дан подстрочный комментарий.

Предлагаемая вниманию читателей работа Кавендиша написана, по-видимому, между 1771 и 1775 годами. Однако она впервые была опубликована (на английском языке) лишь в 1879 году, в подготовленном Максвеллом собрании трудов Кавендиша.

Целью следующего эксперимента был ответ на вопрос: когда полый шар электризуется, заряжается ли малый шар, вложенный в первый и соединенный с ним каким-либо проводником? Таким образом можно найти закон электрического притяжения и отталкивания.

Я взял шар диаметром 12,1 дюйма, укрепил его на твердом стеклянном стержне, проходившем через центр шара как ось, и покрыл стержень сургучом, чтобы сделать его менее проводящим электричество. Затем я вложил этот шар между двумя полыми картонными полусферами

Перевод и подготовка публикации выполнены С. Филоновичем.

диаметром 13,3 дюйма и толщиной около 1/20 дюйма так, что вряд ли в каком-нибудь месте между шаром и внутренней поверхностью полусфер расстояние было меньше, чем 4/10 дюйма. Полусферы были сложены друг с другом так, что образовывали полую сферу, а их края соприкасались возможно теснее. В каждой из них были сделаны вырезы, чтобы получились отверстия для выхода наружу стеклянного стержня.

Таким образом, я получил внутренний шар, окруженный полым шаром. Между ними не было связи, по которой электричество могло бы переходить от одного к другому.

Затем с помощью провода, проходившего через одну из полусфер и касавшегося внутреннего шара, я создал связь между ними. К концу провода был прикреплен кусок шелковой нити, посредством которой я при желании мог вытаскивать провод наружу.

Вслед за этим я наэлектризовал полусферы с помощью провода, соединенного с положительной обкладкой лейденской банки, затем отдернул его и мгновенно вытащил наружу провод, соединявший внутренний и внешний шары. Провод, вынутый при помощи шелковой нити, не мог разрядить ни шар, ни полусферу. Затем я разделил полусферы, следя за тем, чтобы они не коснулись внутреннего шара, и приложил к шару пару маленьких пробковых шариков, подвешенных на тонких льняных нитях, чтобы увидеть, наэлектризовался ли внутренний шар.

Для большей уверенности в результатах опыта я использовал еще другую аппаратуру. В принципе она была сложнее, чем нужно, однако эксперимент этот был для меня настолько важен, что я хотел провести его предельно аккуратно.

ABCD и *AbcD* — две деревянные рамки одинаковых размеров и форм, связанные петлями в точках *A* и *D* так, что каждая рамка может двигаться вокруг горизонтальной оси *AD*; *H* — одна из полусфер, прикрепленная к рамке *ABCD* с помощью четырех стеклянных стержней *Mm*, *Nn*, *Pp* и *Rr*, покрытых сургучом; *h* — другая полусфера, прикрепленная таким же образом к рамке *AbcD*; *G* — внутренний шар, закрепленный на горизонтальном стержне *Ss* (деревянная рамка, с помощью которой удерживается стержень *Ss*, и петли в точках *A* и *D* на рисунке не показаны, дабы избежать его усложнения); *Tt* — обернутая станиолем*) (в точке *x*) стеклянная палочка, которой касаются шара; со станиоля свешиваются пробковые шарики.

Благодаря действию различных пружин одно движение руки приводило к следующим последовательным действиям: удалялся провод, с помощью которого наэлектризовывались полусферы, вытаскивался провод, соединявший полусферы и внутренний шар, полусферы разъединялись и к внутреннему шару подносилась палочка *Tt*. Кроме того, было предусмотрено, что электричество, находившееся на полусферах и проводе, посредством которого они заряжались, удалялось немедленно после разъединения полусфер; в противном случае действие этого электричества могло заставить пробковые шарики разойтись, даже если бы внутренний шар не был наэлектризован.

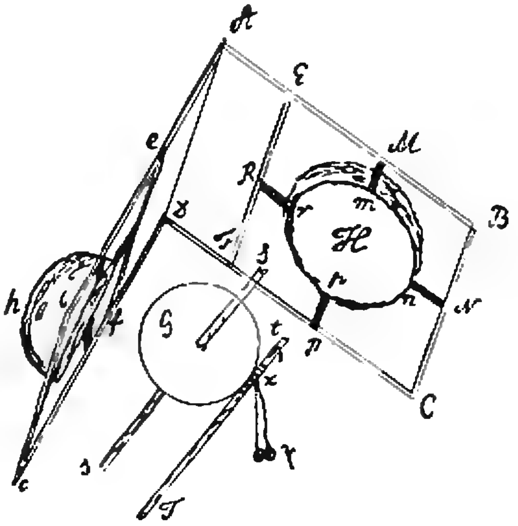


Рисунок из рукописи Кавендиша со схемой опыта по определению закона электрического притяжения и отталкивания.

---

*) Станиоль — оловянная фольга.

Внутренний шар и полусферы я покрыл станиолем, чтобы сделать их хорошими проводниками электричества.

При проведении экспериментов лейденская банка, покрытая станиолем, соединялась с проводом, через который наэлектризовывались полусферы; этот провод располагался так, чтобы не касаться полусфер до тех пор, пока банка не зарядится в должной степени. Затем провод приводился в соприкосновение с полусферами в течение двух-трех секунд, отдергивался и полусферы разводились, как было описано выше.

К первичному проводнику, через который заряжалась лейденская банка, присоединялся электрометр и полусферы всегда заряжались одинаково.

Соображения, по которым я использовал банку, состоят в следующем. Без нее было бы трудно как установить, до какой степени наэлектризовались полусферы, так и удержать электричество одинаковой силы*) в течение секунды или двух; я опасался, что если провод будет лежать на полусферах во время электризации банки, то электричество сможет постепенно растекаться само по себе по стеклянным стержням, которые удерживают шар и полусферы, а это вносило бы некоторые ошибки в результаты опыта.

Результат экспериментов, которые я повторял несколько раз, был всегда один и тот же: я не заметил расхождения шариков или каких-либо признаков электричества.

Чтобы иметь возможность чувствовать меньшее количество электричества, я проводил опыт и другим способом. Перед тем как полусферы наэлектризовались, я электризовал пробковые шарики положительно, заставляя их расходиться примерно на дюйм. Тогда вслед за разведением полусфер и приведением станиоля *x* в контакт с шаром электричество пробковых шариков, естественно, передавалось шару; однако они продолжали расходиться, хотя и едва заметно. Затем я практически так же повторял опыт, но предварительно электризовал шарики отрицательно, причем в той же самой степени, что и в первом случае. После приведения в контакт с шаром они расходились так же, как и при положительной электризации.

Необходимо отметить, что, если бы шар имел дополнительный положительный заряд, пробковые шарики должны были бы расходиться сильнее при их предварительной положительной электризации, чем при сообщении им отрицательного заряда.

С помощью этого приема может быть замечена малая электризация шара. Когда шарики уже получили достаточное для их расхождения количество электричества, дальнейшее увеличение их расхождения будет вызвано количеством электрической жидкости*), в несколько раз меньшим чем то, которым первоначально обладали шарики. Ясно, что этот способ проведения опыта неверен, если полусферы не электризуются примерно одинаково при положительной и отрицательной электризации шариков. Это условие проверялось с помощью электрометра.

Для того чтобы определить, сколь малое количество электричества на внутреннем шаре может быть обнаружено в этом опыте, я удалил полусферы с их рамками, а шар и пробковые шарики оставил на месте. Затем взял кусок стекла, покрытый станиолем, как лейденская банка; об этом куске стекла я знал, что на нем находится не более 1/59 части электричества, сосредоточенного на положительной обкладке лейденской банки**), с помощью которой электризовались полусферы.

Вслед за этим я наэлектризовал эту стеклянную пластинку до той же степени (это показал электрометр), до какой была заряжена банка в первом опыте, отделил ее от первичного проводника и сообщил ее электричество лейденской банке, которая до этого момента не была наэлектризована вовсе. Таким образом, в этом опыте банка получала только 1/60 часть электрической жидкости, сообщавшейся ей в первом опыте.

---

*) То есть одинаковые заряды.

*) Выражение «количество электрической жидкости» эквивалентно современному термину «величина заряда».

**) Отметим, что Кавендиш независимо от других ученых ввел понятие электрической емкости. В качестве эталонной емкости он использовал шар определенных размеров; единицей емкости, использовавшейся Кавендишем, был «дюйм электричества», то есть емкость имела, как и в современной системе единиц CGSE, размерность длины. В данном случае Кавендиш имеет в виду, что конденсатор из куска стекла, обклеенного станиолем, имеет емкость, составляющую 1/59 часть емкости лейденской банки.

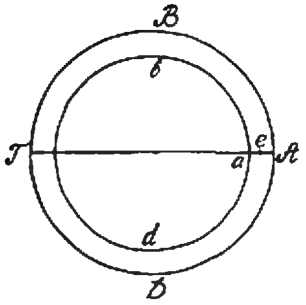
Потом с помощью банки я наэлектризовал шар тем же способом, каким ранее заряжал полусферы, и сразу же, после того как был убран соединительный проводник, приблизил к шару пробковые шарики. Оказалось, что при использовании предварительно наэлектризованных пробковых шариков заряд шара проявлялся очень отчетливо, поскольку шарики раздвигались значительно сильнее, когда они были заранее наэлектризованы положительно, чем при предварительной отрицательной электризации. Однако, если шарики заранее не заряжать, электричества на шаре оказывается недостаточно для их раздвижения.

Ясно, что количество электрической жидкости, сообщенной шару в этом опыте, было менее 1/60 части жидкости, которая передавалась полусферам в предшествующих экспериментах.

Таким образом, оказывается, что если шар диаметром 12,1 дюйма вложен в полый шар диаметром 13,3 дюйма, соединен с ним каким-либо проводником и вся система наэлектризована положительно, то количество электрической жидкости, скапливающееся на внутреннем шаре, во всяком случае меньше 1/60 части жидкости, находящейся на внешней сфере, и никакие детали эксперимента не дают оснований думать, что внутренний шар вообще наэлектризован.

Отсюда следует, что электрическое отталкивание (и притяжение) должно быть обратно пропорционально квадрату расстояния, и когда шар наэлектризован положительно, электрическая жидкость сосредоточена целиком на его поверхности.

Оценим, насколько зависимость электрического притяжения и отталкивания от расстояния может отличаться от обратной пропорциональности квадрату расстояния, чтобы это отличие еще не проявлялось в экспериментах. Пусть *AT* проходит через диаметры двух концентрических сфер *ABD* и *abd* и *Aa* делится пополам точкой *e*. *Ae* в эксперименте приближенно равнялось 0,35 дюйма, *Te* — 13,1 дюйма. Если электрическое отталкивание (и притяжение) обратно пропорционально расстоянию в степени 2+1/50, то можно показать, что сила, с которой электрическая жидкость на *ABD* отталкивает частицу [заряженную — *С. Ф.*], находящуюся в точке *e*, по направлению к центру, относится к силе, с которой то же количество жидкости, собранное в центре, будет отталкивать частицу в противоположном направлении, как 1:57*).



Однако, поскольку закон отталкивания только слегка отличается от обратной пропорциональности квадрату расстояния, жидкость на внутреннем шаре будет отталкивать частицу в точке *e* примерно с той же силой, как если бы вся жидкость находилась в центре. Поэтому, если бы жидкость на внутреннем шаре составляла 1/57 часть жидкости на *ABD*, частица находилась бы в равновесии. Поскольку *e* находится посередине между *A* и *a*, имеются веские основания думать, что все сказанное относится к жидкости всего проводника *Aa*.

Таким образом, мы можем заключить, что электрическое притяжение (и отталкивание) должно быть обратно пропорционально расстоянию в степени, лежащей между 2—1/50 и

---

*) Это утверждение доказывается Кавендишем в специальном математическом приложении, опущенном при переводе.

$2+1/50$, и нет оснований полагать, что закон отличается от закона обратных квадратов.

Примечание переводчика

В 1878 году по инициативе Максвелла опыт Кавендиша был повторен в слегка измененном виде в Кавендишской лаборатории. Результат опыта состоял в том, что поправка α в законе взаимодействия $F \sim r^{-(2+\alpha)}$, где F — сила взаимодействия, а r — расстояние, не может превышать $1/21600$.

Комментарий к работе Г. Кавендиша

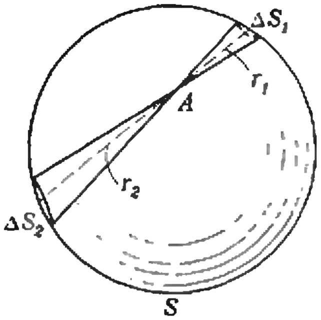
Метод, примененный Кавендишем для определения зависимости силы взаимодействия между электрическими зарядами от расстояния, основывается на том факте, что если электрическое поле внутри равномерно заряженной сферы равно нулю, то сила взаимодействия обратно пропорциональна квадрату расстояния между зарядами. Докажем это.

Рассмотрим произвольную точку A внутри равномерно заряженной сферы S (см. рисунок). Образуем мысленно узкий конус с вершиной в точке A. Конус вырежет на поверхности сферы небольшой участок площадью ΔS_1. Другой конус, симметричный первому относительно точки A, вырежет на поверхности сферы площадку площадью ΔS_2. Пусть расстояния от A до соответствующих площадок равны r_1 и r_2. Поскольку углы между осью конусов и нормалями к площадкам равны,

$$\frac{\Delta S_1}{\Delta S_2}=\frac{r_1^2}{r_2^2}.$$

Предположим теперь, что силы взаимодействия между зарядами центральны и напряженность поля, создаваемого зарядом q в некоторой точке пространства, обратно пропорциональна n-й степени расстояния от точки до заряда, то есть

$$E = k\frac{q}{r^n}, \text{ где } k = \text{const}.$$



Поскольку сфера заряжена равномерно, заряд, сосредоточенный на площадке площадью ΔS, пропорционален этой площади. Следовательно, отношение модулей напряженности поля, создаваемых в точке A зарядами, находящимися на площадках ΔS_1 и ΔS_2, равно

$$\frac{\Delta E_1}{\Delta E_2}=\frac{\Delta S_1 r_2^n}{\Delta S_2 r_1^n}.$$

Векторы $\Delta\vec{E}_1$ и $\Delta\vec{E}_2$ направлены в противоположные стороны и могут либо полностью, либо частично компенсировать друг друга. Чтобы определить напряженность в точке A, создаваемую всеми зарядами на сфере, необходимо рассмотреть все возможные ориентации конуса. Ясно, что результирующая напряженность может быть равной нулю лишь при условии $\Delta\vec{E}_1=-\Delta\vec{E}_2$. Последнее возможно только в том случае, когда $n=2$, что и требовалось доказать.

Следует подчеркнуть, что идея опыта, поставленного Кавендишем, принадлежит не ему, а другому английскому ученому XVIII века Джозефу Пристли, который, однако, сам опыта не поставил.

Несмотря на блестящее экспериментальное искусство Кавендиша, его опыты имели все же один существенный недостаток: из них нельзя было получить зависимость силы взаимодействия от величины зарядов или, на языке Кавендиша, «от количества электрической жидкости». В законченном виде закон взаимодействия неподвижных электрических зарядов установил в 1785 году французский физик Шарль Огюстен Кулон, использовавший для этого крутильные весы и методику, сходную с той, которую применил Кавендиш для определения средней плотности Земли. Поэтому основной закон электростатики справедливо называют законом Кулона.

С. Филонович

В. Переяславский

Игра «Определитель»

Два варианта одной игры

В 1978 году «Квант», рассказывая о IX празднике юных математиков в Батуми (см. № 10), предложил своим читателям придумать выигрышную стратегию для следующей игры:

Играют двое. Они по очереди вписывают в таблицу 3×3 числа от 1 до 9 (каждое число должно быть использовано). Когда таблица заполнена, подсчитывают две суммы: сумму S_1 произведений по столбцам и сумму S_2 произведений по строкам. Если $S_1 > S_2$, выигрывает начинавший игру; если $S_1 < S_2$ — выигрывает второй игрок.

В 1971 году эта игра в несколько другой форме была популярна среди студентов механико-математического факультета МГУ (а узнали они о ней от студентов Пермского университета). Называлась эта игра «Определитель» и выглядела так:

Играют двое. Они по очереди вписывают в таблицу 3×3 числа от 1 до 9 (каждое число должно быть использовано). Когда таблица заполнена, подсчитывают ее ***определитель*** *d. Если $d > 0$, выигрывает начинавший игру; если $d < 0$ — выигрывает второй игрок.*

Тут, конечно, мы должны объяснить вам, что *определителем таблицы T* (рис. 1) называется число

$$d = x_1x_5x_9 + x_2x_6x_7 + x_3x_4x_8 - x_3x_5x_7 - x_1x_6x_8 - x_2x_4x_9.$$

В том, что эти две игры по существу совпадают, мы предлагаем вам убедиться самостоятельно. Дальше мы будем рассматривать вариант, предложенный в «Кванте».

Полезное соображение

Все игры условно можно разделить на простые и сложные. *Простые* игры — это те, которые имеют

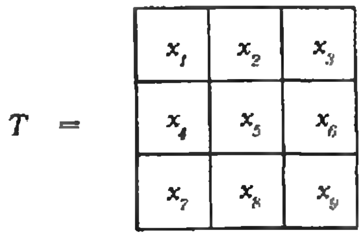


Рис. 1.

несложные выигрывающие стратегии, *сложные* — все остальные. Повидимому, игра «Определитель» является сложной. Сложность — непременное условие популярности игры. Например, в шахматы и в крестики-нолики на бесконечном листе клетчатой бумаги все играют с увлечением, а в крестики-нолики на доске «3×3» — разве что младшие школьники.

Решим задачу, которая поможет нам играть в «Определитель»: *найдем наименьшее и наибольшее значения суммы* $S=x_1x_2x_3+x_4x_5x_6+x_7x_8x_9$ (x_1, x_2,..., x_9 — числа от 1 до 9).

Для нахождения наименьшего значения применим к трем ее слагаемым неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом («Квант», 1980, № 3, с. 23):

$$\frac{x_1x_2x_3+x_4x_5x_6+x_7x_8x_9}{3}\geqslant\sqrt[3]{x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_9}=$$

$$=\sqrt[3]{9!}=\sqrt[3]{70\cdot72^2}>71.$$

Отсюда $S>213$ и, поскольку S — целое число, $S\geqslant214$. Но $2\cdot5\cdot7+$ $+1\cdot8\cdot9+3\cdot4\cdot6=70+72+72=$ $=214$; значит, искомое наименьшее значение равно 214.

Для нахождения наибольшего значения нашей суммы воспользуемся следующей леммой (докажите ее!): *если числа* a, b, c, d *положительны,* $ab=cd$ *и* $|a-b|>|c-d|$, *то* $a+b>c+d$.

Образуем новую сумму S' так: последнее слагаемое $x_7x_8x_9$ оставим без изменения, первое слагаемое $x'_1x'_2x'_3$ составим из трех самых маленьких чисел множества $\{x_1, x_2, ..., x_6\}$, а второе слагаемое $x'_4x'_5x'_6$ — из остальных чисел этого множества. Тогда по лемме $S\leqslant S'$, причем знак равенства будет лишь в том случае, когда каждое из чисел x_1, x_2, x_3 больше (или меньше) каждого из чисел x_4, x_5, x_6. Отсюда получаем, что значение суммы S будет наибольшим, если все сомножители первого слагаемого меньше всех сомножителей второго слагаемого, а те в свою очередь меньше всех сомножителей третьего слагаемого. Таким образом, искомое наибольшее значение равно $1\cdot2\cdot3+$ $+4\cdot5\cdot6+7\cdot8\cdot9=6+120+504=$ $=630$.

Подведем итог: сумма S принимает наименьшее значение, когда ее слагаемые максимально близки (и равны, следовательно, примерно 71), наибольшее значение — когда они максимально различны. Отсюда практический совет играющему: стремись к тому, чтобы слагаемые противника были примерно одинаковы (и равны 71), а собственные слагаемые — максимально различны!

Стратегия «71» для первого игрока

Допустим, что после вашего первого хода противник написал свое число в одном столбце или в одной строке с вашим числом. Тогда мы предлагаем вам следующую стратегию «71»:

Определим для каждой заполненной строки и каждого заполненного столбца таблицы число

$$m=\begin{cases}\Pi/71, & \text{если } \Pi\geqslant72,\\ 71/\Pi, & \text{если } \Pi\leqslant71,\end{cases}$$

где Π — произведение чисел, написанных в данной строке или данном столбце.

Очередным ходом начинающий игрок должен дополнять строку или столбец по следующему правилу: если он дополняет строку, то — числом, дающим минимально возможное значение m для этой строки (чтобы произведение было как можно ближе к 71), а если — столбец, то — числом, дающим максимально возможное значение m для этого столбца (чтобы произведение как можно больше отличалось от 71).

Поясним сказанное примером. Для удобства изложения занумеруем клетки нашей таблицы (рис. 2) и будем записывать партию строчкой из девяти чисел с индексами, где индекс обозначает номер клетки,

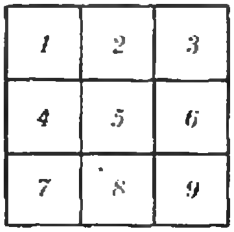


Рис. 2.

	3	
	5	

Рис. 3, а.

	1	
	3	4
	5	

Рис. 3, б.

1	x_2	x_3
2	x_5	x_6
4	x_8	x_9

Рис. 4.

3	6	5
4		
7		

Рис. 5.

в которую на соответствующем ходе вписано данное число. Убедимся, что в партии $3_5 5_8 1_2 4_6 6_4 7_7 2_9 8_1 9_3$ начинавший игру пользовался стратегией «71» (на первый ход стратегия ограничений не накладывает).

После первых двух ходов (рис. 3, *а*) первый игрок по стратегии должен поставить в клетку № 2 число, дающее максимально возможное m. В данном случае максимум m может дать либо ход 1_2, при котором произведение чисел второго столбца равно 15, либо ход 9_2, дающий произведение 135. Так как $71/15 > 135/71$, в клетку № 2 нужно поставить 1, что и было сделано.

После хода 4_6 (рис. 3,*б*) в клетку № 4 нужно поставить число, дающее минимум m, а именно 6_4, и т. д.

Два частных случая

1. *Если у играющего есть произведение $1\times2\times3$, или $1\times2\times4$, или $6\times8\times9$, или $7\times8\times9$, то он выигрывает независимо от того, как в таблице расположены остальные числа.*

Докажем, например, что, когда в таблице есть столбец из чисел 1, 2, 4, начинающий выигрывает. Если, скажем, таблица выглядит так, как на рисунке 4, то

$$\frac{x_2x_5x_8+x_3x_6x_9}{2} \geqslant \sqrt{x_2x_5x_8x_3x_6x_9} = \sqrt{3\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9} > 212.$$

Значит, $S_1 \geqslant 1\cdot2\cdot4+425=433$.

С другой стороны, значение суммы S_2 максимально, когда числа x_2 и x_3 меньше, чем x_5 и x_6, а x_5 и x_6 меньше, чем x_8 и x_9. Таким образом, $S_2 \leqslant 1\cdot3\cdot5+2\cdot6\cdot7+4\cdot8\cdot9=387$, то есть $S_1 > S_2$, что и утверждалось.

2. Иногда при игре удается использовать идею «цугцванга» — отсутствия разумных ходов у противника. Например, в ситуации, изображенной на рисунке 5, начинающий при любом ходе второго игрока может (и должен) поставить числа 1, 2 в один столбец, а 8, 9 — в другой. Просчитав разные варианты, легко проверить, что это обеспечит начинающему выигрыш.

Попытка перебора

На первый взгляд игра «Определитель» кажется не очень сложной: соперники делают всего девять ходов и для каждого хода есть не более девяти вариантов — просчитаем все варианты и выберем нужный. Беда в том, что различных партий чересчур много.

В самом деле, для первого хода есть 81 вариант (одно из девяти чисел в одну из девяти клеток); для второго хода — 64 варианта и т. д. (рис. 6) — всего $9^2\cdot8^2\cdot7^2\cdot\ldots2^2\cdot1^2=(9!)^2\approx1{,}3\cdot10^{11}$ различных партий. Разумеется, определить результат игры таким перебором невозможно даже с помощью ЭВМ.

Правда, этот перебор слишком «груб», а оценка слишком завышена: ведь наша игра имеет симметрию. Например, все первые ходы в разные клетки одним и тем же числом равноправны; поэтому нужно рассматривать не 81, а только 9 вариантов первого хода. Восемь остающихся для второго хода клеток можно разделить на три класса так, что ходы одним и тем же числом в клетки одного класса будут равноправны (на рисунке 7 клетки разных классов закрашены в разные цвета); поэтому нужно рассматривать не 64, а $8\cdot3=24$ варианта второго хода. Так нам удается снизить верхнюю оценку числа партий до числа $9\cdot24\cdot7^2\cdot6^2\cdot\ldots\cdot2^2\cdot1^2\approx$

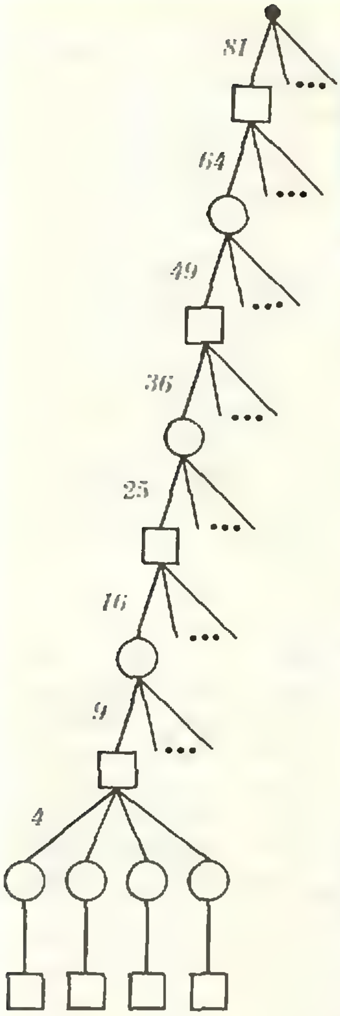


Рис. 6.

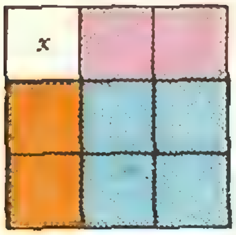


Рис. 7.

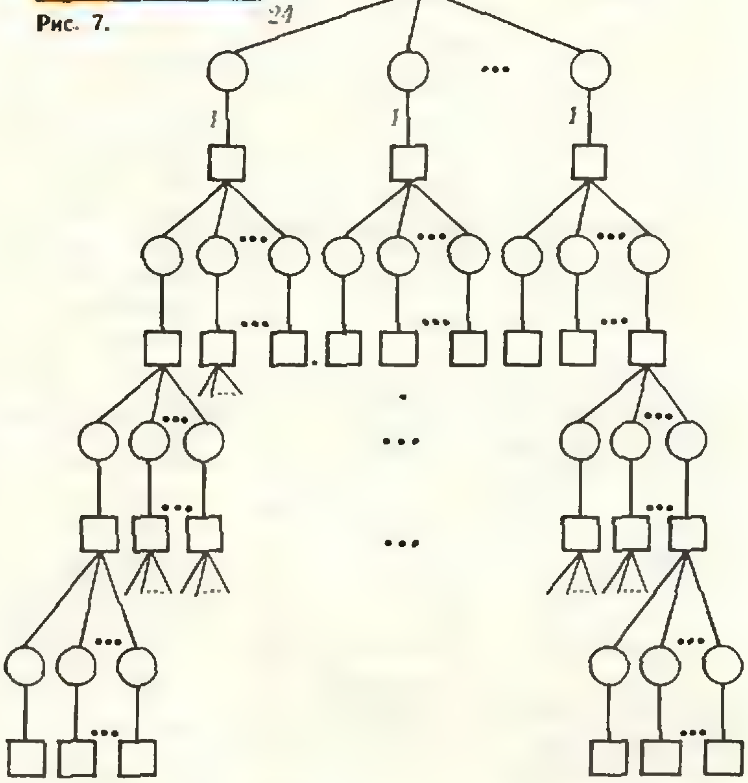


Рис. 8.

$\approx 5 \cdot 10^9$, которое, однако, по-прежнему очень велико. Нужна новая идея, сокращающая перебор вариантов. Такая идея нашлась.

Чем может помочь мудрец?

Предположим, что появился мудрец, утверждающий, что, начиная игру, он добьется победы, и пусть этот мудрец настолько добр, что в одинаковых позициях делает одинаковые ходы. Сколько партий нужно сыграть с мудрецом, чтобы проверить, что он на самом деле умеет выигрывать?

Мудрец все партии начинает одинаково; мы же должны попробовать играть с ним все 24 варианта второго хода. В каждой позиции второго хода мудрец однозначно делает третий ход; мы же перебираем все 36 вариантов четвертого хода и т. д. (рис. 8). Всего нужно сыграть $24 \cdot 6^2 \cdot 4^2 \cdot 2^2 = 55296$ партий, проверяющих мудреца.

Поиграв с мудрецом в течение месяца, можно убедиться в его беспроигрышности или доказать обратное. Можно составить и отладить программу на ЭВМ, проверяющую мудреца, что, правда, займет по времени тот же самый месяц, зато этой же программой можно проверять теперь на «выигрышность» любую стратегию.

Итак, проверяющая программа есть, но где же мудрец? Пришлось автору научиться играть и, используя уже высказанные соображения и стратегии, постепенно исправляя ходы, не обеспечивающие выигрыша для начинающего (они обнаруживались с помощью проверяющей программы), «превратиться» в такого мудреца. Удалось доказать, что если играют два мудреца, то выигрывает начинающий; точнее, было доказано, что начинающий началом 7_1 имеет возможность выиграть при любых ответах противника. Был составлен своеобразный «справочник», в котором на все вторые и четвертые ходы противника указаны выигрывающие третьи и пятые ходы.

Заключение

Проверка стратегии «71» на «выигрышность» показала, что, при первом ходе 7_1, на все вторые ходы, *при которых стратегия действует,* за исключением трех, она дает такой третий ход, что при любом четвертом ходе, за исключением девяти, стратегия «71» приводит к выигрышу. Исключительные случаи перечислены в таблице. Выигрывающий ход в таких случаях все-таки существует (см. таблицу), но он расходится с рекомендацией стратегии «71».

Позиция	Выигрывающий пятый ход
$7_1 3_4 1_7 2_8$	4_2
$7_1 3_4 1_7 4_8$	8_9
$7_1 3_4 1_7 2_5$	9_9
$7_1 3_4 1_7 4_5$	2_3
$7_1 3_4 1_7 5_5$	6_8
$7_1 3_4 1_7 8_9$	9_9
$7_1 6_2 2_3 9_6$	8_9
$7_1 8_2 1_3 2_5$	3_9
$7_1 8_2 1_3 2_4$	3_9

Укажем, кроме того, выигрывающие третьи ходы для тех случаев, когда стратегия «71» не действует:

$7_1 1_5 2_2$; $7_1 2_5 1_2$; $7_1 3_5 1_2$; $7_1 4_5 1_2$;
$7_1 5_5 6_9$; $7_1 6_5 5_9$; $7_1 8_5 9_9$; $7_1 9_5 8_9$.

Что будет в случае, когда первый ход — не семерка, пока не выяснено. Неясно также, каков максимальный выигрыш $\Delta = S_1 - S_2$ начинающего (при точной игре двух партнеров) и существует ли вообще простая выигрывающая стратегия.

Новости науки

Органический сверхпроводник

Как известно, явление сверхпроводимости заключается в полном исчезновении электрического сопротивления при температуре ниже некоторой критической $T_к$, называемой температурой сверхпроводящего перехода. Практически все существующие сейчас сверхпроводники являются металлами или их сплавами с $T_к$, не превышающими 25К. Иными словами, сейчас нет материалов, которые были бы сверхпроводниками при температуре выше 25К.

Необходимость работать при очень низких температурах сильно ограничивает применение сверхпроводников. В связи с этим большой интерес как с экспериментальной, так и с теоретической точки зрения вызывает изучение возможности создания сверхпроводника с высоким значением $T_к$. Около двадцати лет назад были высказаны соображения о возможности существенного повышения $T_к$ для некоторого типа органических соединений, в которых электроны движутся вдоль отдельных стопок органических молекул, а переходы электронов на соседние стопки затруднены. Однако до сих пор все попытки получить органический сверхпроводник не приводили к успеху, и лишь недавно группе датских исследователей удалось впервые синтезировать органический сверхпроводник. Полученное ими соединение носит довольно сложное название — ди-(тетраметил-тетраселенфтор) тетраоксихлорат и обозначается по первым буквам входящих в него атомов и радикалов — $(TMTSF)_2ClO_4$. Переход в сверхпроводящее состояние происходит при нормальном давлении и температуре $T_к = 1{,}2 \div 1{,}4$ К. Температура сверхпроводящего перехода первого органического сверхпроводника, как видно, довольно низкая. Важность этого открытия — в указании на принципиальную возможность создания органического сверхпроводника (не содержащего ни одного атома металла!). В органических соединениях замена того или иного радикала или ввод в них других молекул приводит к созданию большого числа новых соединений с самыми разнообразными свойствами. Именно это обстоятельство и обуславливает практическую важность получения органических сверхпроводников. Можно поэтому надеяться, что целенаправленные исследования в данной области приведут к синтезу органических сверхпроводников с высокими $T_к$. Важность такого открытия просто трудно переоценить.

А. Буздин

задачник кванта

Задачи

М706 — М710; Ф718 — Ф722

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 декабря 1981 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 10—81» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М706, М707» или «Ф718». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

М706. Из центра каждой из двух данных окружностей проведены касательные к другой окружности. Докажите, что хорды, соединяющие точки пересечения касательных с окружностями (на рисунке 1 эти хорды показаны красным цветом), имеют одинаковые длины.

А. Савин

М707. Каждый из учеников класса занимается не более чем в двух кружках, причем для любой пары учеников существует кружок, в котором они занимаются вместе. Докажите, что найдется кружок, где занимаются не менее 2/3 учеников этого класса.

А. Сидоренко

М708. На сторонах выпуклого четырехугольника площади S вне его построены квадраты, центры которых служат вершинами нового четырехугольника площади S_1. Докажите, что

а) $S_1 \geqslant 2S$;

б) $S_1 = 2S$ в том и только в том случае, когда диагонали исходного четырехугольника равны по длине и взаимно перпендикулярны.

П. Гусятников

М709. Пол комнаты, имеющий форму правильного шестиугольника со стороной 10, заполнен плитками, имеющими форму ромба со стороной 1 и острым углом 60°. Разрешается вынуть три плитки, составляющие правильный шестиугольник со стороной 1, и заменить их расположение другим (рис. 2). Докажите, что

а) из любого расположения плиток такими операциями можно получить любое другое;

б) это можно сделать не более чем за 1000 операций;

в) из расположения плиток рисунка 3, *а* нельзя получить расположение рисунка 3, *б* менее чем за 1000 операций.

А. Смирнов

М710. Существует ли последовательность различных натуральных чисел a_1, a_2, a_3..., ни один из членов которой не равен сумме нескольких других, такая что (при всех $n = 1, 2, \ldots$)

а) $a_n < 2(\sqrt{3})^n$; б) $a_n < 10(1,5)^n$; в) $a_n \leqslant n^{10}$;

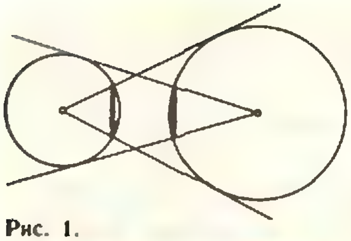


Рис. 1.

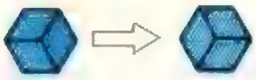


Рис. 2.

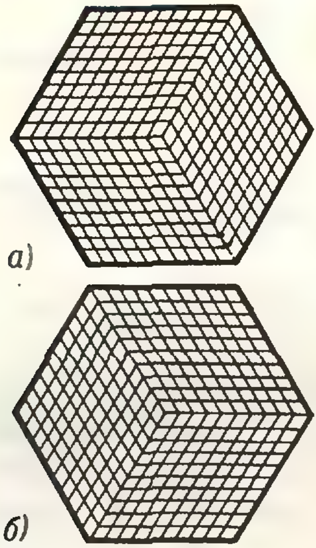


Рис. 3.

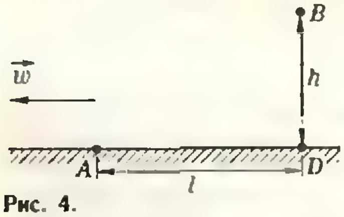


Рис. 4.

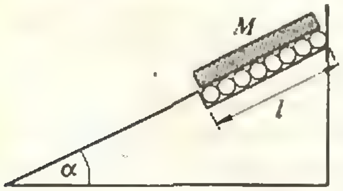


Рис. 5.

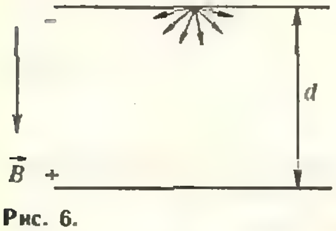


Рис. 6.

г) $a_n \leqslant 1000n^{7/2}$; д) $a_n \leqslant 1000n^{3/2}$?

С. Конягин

Ф718. На берегу реки, скорость течения которой равна w, в точке A находится мальчик. Он может бежать по берегу со скоростью v и плыть по реке со скоростью u (относительно воды), причем $u<w$. Определить, на каком расстоянии x от точки A находится та точка C берега, откуда мальчик должен начать плыть, чтобы добраться до бакена B за наименьшее время. Расстояние BD от бакена до берега равно h, расстояние AD равно l (рис. 4).

С. Кротов

Ф719. Маленькому тяжелому шарику массы m, имеющему заряд q, сообщают начальную скорость v_0, направленную вертикально вверх. Шарик находится в однородном горизонтальном электростатическом поле, напряженность которого равна E. Пренебрегая сопротивлением воздуха и зависимостью ускорения свободного падения g от высоты, определить минимальную скорость шарика в процессе его движения.

Б. Буховцев

Ф720. Однородный брус массы M длины l начинает двигаться вниз по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Начальный участок длины l наклонной плоскости занят близко расположенными катками в виде трубок массы m и радиуса $r \ll l$ (рис. 5), которые вращаются без трения в подшипниках. Остальной участок наклонной плоскости гладкий. Найти зависимость ускорения груза от перемещения вдоль плоскости.

А. Стасенко

Ф721. Равномерно заряженный по поверхности лист из диэлектрика, имеющий форму равнобедренного прямоугольного треугольника, сложили пополам. При этом была совершена работа A против сил электростатического поля. Какую работу надо совершить, чтобы сложить пополам полученный треугольник?

О. Савченко

Ф722. Плоский конденсатор находится в магнитном поле, которое перпендикулярно плоскости пластин (рис. 6). Расстояние между пластинами d, вектор магнитной индукции $\vec{B}$. Внутри конденсатора около отрицательно заряженной пластины расположен источник медленных электронов, испускающий электроны в разных направлениях. При каком напряжении между пластинами электроны будут фокусироваться на положительно заряженной пластине? От чего зависит размер «пятна»?

А. Трубачев

Решения задач

M666 — M670; Ф678 — Ф682

M666. *Докажите, что наименьшее общее кратное n натуральных чисел $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ не меньше na_1.*

Пусть наименьшее общее кратное чисел $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ равно A. Тогда, очевидно, $\frac{A}{a_1} > \frac{A}{a_2} > \ldots > \frac{A}{a_n}$ — натуральные числа. Поэтому $\frac{A}{a_1} \geqslant n$, откуда $A \geqslant na_1$.

Эта оценка является точной. В самом деле, если $a_1 = \frac{n!}{n}$, $a_2 = \frac{n!}{n-1}$, …, $a_n = n!$, то $A = n! = n \cdot a_1$.

А. Разборов

◆

M667. *Постройте треугольник ABC, если заданы его наименьший угол A и отрезки длины $d = |AB| - |BC|$ и $e = |AC| - |BC|$.*

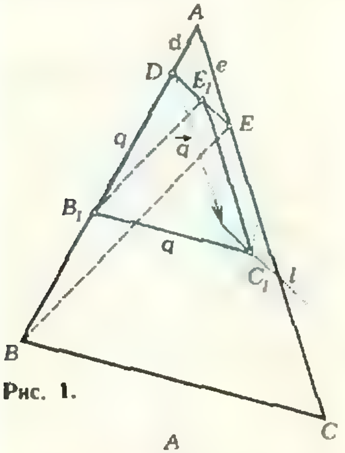


Рис. 1.

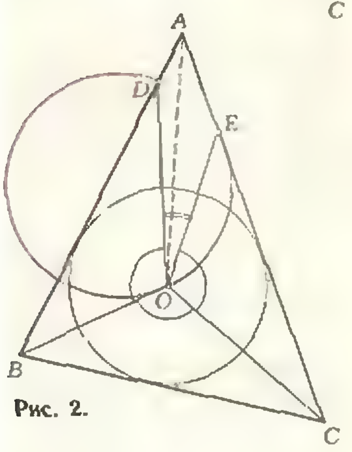


Рис. 2.

На сторонах данного угла $\hat{A}$ отложим данные нам отрезки AD длины d и AE длины e. Теперь нужно на этих сторонах (за точками D и E) найти такие точки B и C, что $|BD| = |BC| = |CE|$.

Чтобы это сделать, построим вначале фигуру, гомотетичную искомому четырехугольнику $BCED$. Для этого (рис. 1) отложим на прямой AD (на луче, не содержащем A) отрезок DB_1 любой длины q, затем параллельно перенесем луч $[DE)$ на вектор $\vec{q}$ той же длины q, направленный параллельно $[AE)$, после чего на полученном луче l отметим точку C_1, для которой $|B_1C_1| = q$. Очевидно, четырехугольник $B_1C_1E_1D$ подобен искомому четырехугольнику $BCED$. Проведя теперь через точку E прямую, параллельную B_1E_1, найдем точку B; проведя затем через точку B прямую, параллельную B_1C_1, найдем точку C. (Легко видеть, что все построения всегда выполнимы, причем единственным образом.)

Вот еще одно решение — не использующее метод подобия. Если O — центр окружности, вписанной в искомый треугольник ABC, то треугольники BOD, BOC и COE конгруэнтны (рис. 2). Все углы, отмеченные при вершине O, равны $90° + A/2$. Поэтому $\widehat{DOE} = 90° - 3\hat{A}/2$ (эта величина положительна при $A < 60°$). Теперь можно построить точку O как пересечение биссектрисы угла A и дуги сегмента с концами D, E, вмещающего вписанный угол величины $90° - 3A/2$ (красная дуга на рисунке 2). Затем, проведя под нужными углами к отрезкам DO и EO лучи OB и OC, находим две вершины треугольника ABC.

Наконец, задачу можно решить и вычислением: длина искомого отрезка $x = |BD| = |BC| = |CE|$ находится из квадратного уравнения

$$x^2 = (x+d)^2 + (x+e)^2 - 2(x+d)(x+e)\cos A,$$

после чего искомый отрезок можно построить (исходя из d, e и A) циркулем и линейкой, комбинируя известные методы построения по данным отрезкам длины p и q и углу α отрезков длины $p \cos \alpha$, $p \pm q$, $\sqrt{pq}$, $\sqrt{p^2 \pm q^2}$. Интересно, что отрицательный корень этого уравнения также имеет геометрический смысл: он определяет положение еще одной пары точек $B_2 \in [DA)$, $C_2 \in [EA)$, для которых $|B_2D| = |B_2C_2| = |C_2E|$.

Н. Васильев

◆

M668. *Последовательность (x_i) определяется условиями*
$x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$,
$x_{n+1} = x_{n-2} + 2x_{n-1}$.
Докажите, что для любого

Пусть m — любое натуральное число. Вместо последовательности (x_i) рассмотрим последовательность $(\bar{x}_i)$ остатков от деления x_i на m.

Из определения последовательности (x_i) следует, что по любым трем числам $\bar{x}_i$, $\bar{x}_{i+1}$ и $\bar{x}_{i+2}$ можно однозначно *натурального m найдутся два соседних члена этой последовательности, каждый из которых делится на m.*

определить не только $\bar{x}_{i+3}$, но и $\bar{x}_{i-1}$, поскольку $\bar{x}_{i-1}=\overline{x_{i+2}-2x_i}$. Мы можем поэтому продолжить последовательность $(\bar{x}_i)$ влево, то есть определить x_0, $\bar{x}_{-1}$, $\bar{x}_{-2}$,...

Заметим теперь, что бесконечная в обе стороны последовательность (x_i) периодична.

В самом деле, поскольку число членов последовательности бесконечно, а количество троек из набора чисел $\{0, 1, 2, ..., m-1\}$ не больше m^3, найдутся две совпадающие тройки $\bar{x}_i$, $\bar{x}_{i+1}$, $\bar{x}_{i+2}$ и x_{i+T}, x_{i+T+1}, $\bar{x}_{i+T+2}$. Но так как числа первой тройки однозначно определяются по числам второй тройки, то вообще при любом k будут верны равенства $\bar{x}_{k+T}=\bar{x}_k$, $\bar{x}_{k+T+1}=\bar{x}_{k+1}$, $\bar{x}_{k+T+2}=\bar{x}_{k+2}$ (T — период последовательности).

Поскольку $\bar{x}_0=\overline{x_3-2x_1}=0$, $\bar{x}_{-1}=\overline{x_2-2x_0}=0$, $\bar{x}_{lT-1}=0$ и $\bar{x}_{lT}=0$ при любом l. Мы доказали тем самым, что существует бесконечно много пар соседних членов последовательности (x_i), каждый из которых делится на m.

Интересно отметить связь последовательности (x_i) с *последовательностью Фибоначчи* (f_i): $f_1=1$, $f_2=2$, ..., $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$ при $n\geqslant 1$. Последовательность Фибоначчи также может быть продолжена влево: $f_{n-1}=f_{n+1}-f_n$, так что $f_0=1$, $f_{-1}=0$ и т. д. Нетрудно проверить, что $x_i=f_{i-2}+(-1)^{i-1}$. Таким образом, для любого натурального m в последовательности $(f_i+(-1)^{i-1})$ существует бесконечно много пар соседних членов, делящихся на m. В то же время любые два соседних числа Фибоначчи взаимно просты*.

Г. Козлов

◆

М669. *Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Докажите, что*

а) отрезок, соединяющий середины дуг AB и CD, перпендикулярен отрезку, соединяющему середины дуг BC и AD;

б) центры окружностей, вписанных в треугольники ABC, BCD, CDA и DAB, являются вершинами прямоугольника.

а) Поскольку $\widehat{NMP}=\frac{1}{4}(\overset{\smile}{BC}+\overset{\smile}{CD})=\frac{1}{2}\hat{A}$, $\widehat{MNQ}=\frac{1}{4}(\overset{\smile}{AB}+\overset{\smile}{AD})=\frac{1}{2}\hat{C}$ (рис. 1), $\widehat{NMP}+\widehat{MNQ}=\frac{1}{2}(\hat{A}+\hat{C})=90°$, откуда следует утверждение а).

б) Очевидно, $O_1=[AN]\cap[CM]$, $O_2=[BP]\cap[DN]$, $O_3=[AP]\cap[CQ]$, $O_4=[BQ]\cap[DM]$ — центры окружностей, вписанных соответственно в треугольники ABC, BCD, CDA и DAB (рис. 2).

Треугольники BMN и MO_1N конгруэнтны, так что $|BN|=|NO_1|$. Аналогично, $|CN|=|NO_2|$. Но $|BN|=|CN|$; следовательно, треугольник O_1NO_2 — равнобедренный, в котором $[NQ]$ является биссектрисой. Поэтому $[NQ]\perp[O_1O_2]$; значит, $[O_1O_2]\parallel[MP]$.

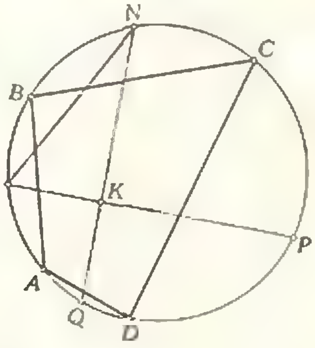


Рис. 1.

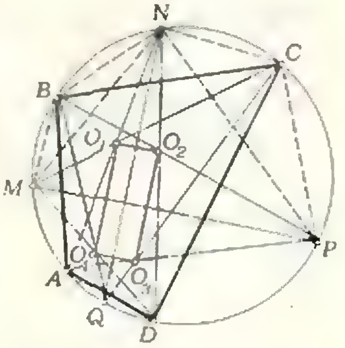


Рис. 2.

Аналогично доказывается, что $[O_3O_4]\parallel[MP]$ и $[O_1O_4]\parallel[NQ]\parallel[O_2O_3]$. Таким образом, четырехугольник $O_1O_2O_3O_4$ — прямоугольник.

И. Герман,
К. Малхасян

---

* (Об интересных свойствах делимости чисел Фибоначчи см. в книге Н. Н. Воробьева «Числа Фибоначчи» (Серия «Популярные лекции по математике», М., «Наука», 1978).

М670. *а) Дано несколько точек, некоторые пары которых соединены линиями (точки таких пар называются соседями). Число соседей у каждой точки нечетно. В начальный момент все точки раскрашены в два цвета — красный и синий. Затем каждую минуту происходит одновременное перекрашивание точек по следующему правилу: каждая точка, у которой большинство соседей имеет отличный от нее цвет, меняет свой цвет; в противном случае ее цвет сохраняется. Докажите, что наступит момент, начиная с которого у некоторых точек цвет не будет меняться, а у некоторых будет меняться каждую минуту.*

б) Останется ли это утверждение верным, если не предполагать, что у каждой точки число соседей нечетно?

Представим себе, что данная система точек X_1, $X_2, \ldots$, X_n (рис. 1, *а*) «удвоилась»: каждая точка X_i превратилась в две точки: X_i' и X_i''. Расположим эти два комплекта точек так, как показано на рисунке 2, *а*: один под другим. При этом каждая линия, соединяющая пару соседей X_i и X_j в исходной системе, превращается в два наклонных отрезка, соединяющих точки X_i' с X_j'' и X_i'' с X_j'.

Будем считать, что в четные моменты времени перекрашиваются (по прежнему правилу) лишь точки верхнего ряда, в нечетные моменты времени — лишь точки нижнего ряда.

Легко видеть, что если на исходных точках возникает последовательность раскрасок P_0, P_1, P_2, $P_3, \ldots$ (рис. 1, *а* — *г*), то на «удвоенной» системе возникает последовательность раскрасок $\binom{P_0}{P_0}$, $\binom{P_0}{P_1}$, $\binom{P_2}{P_1}$, $\binom{P_2}{P_3}$, $\binom{P_4}{P_3}$, $\binom{P_4}{P_5}$ и т. д.

Докажем, что с некоторого момента t перекрашивания в «удвоенной» системе прекратятся, то есть во все моменты времени, начиная с t, раскраска «удвоенной» системы приобретет вид $\binom{P_t}{P_{t-1}}$ или $\binom{P_{t-1}}{P_t}$. Для исходной системы это будет означать, что ее последовательность раскрасок, начиная с некоторого момента, примет вид $\ldots, P_{t-1}, P_t, P_{t-1}, P_t, \ldots$ (рис. 3), а именно это и требуется доказать в задаче.

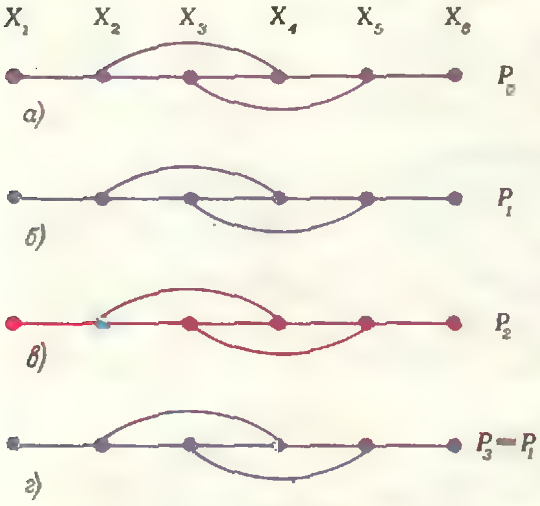


Рис. 1.

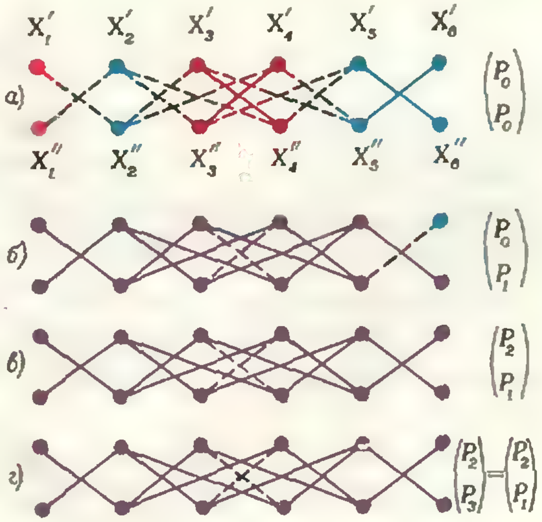


Рис. 2.

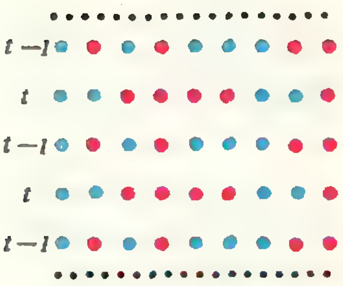


Рис. 3.

Назовем отрезок $X_i'X_i''$, соединяющий точки удвоенной системы, *пестрым ребром*, если его концы X_i' и X_i'' разного цвета. Покажем, что если в очередной момент хотя бы одна точка перекрашивается, то число пестрых ребер уменьшается.

Рассмотрим, для определенности, четный момент времени (точки нижнего ряда не перекрашиваются). Посмотрим на группу ребер с концом X_i'. Если в данный момент точка X_i' не перекрашивается, то число пестрых ребер в этой группе остается прежним; если же X_i' меняет цвет, то, поскольку она приобретает цвет большинства своих соседей, число пестрых ребер в этой группе, а следовательно, и их общее число уменьшаются.

Поскольку количество пестрых ребер не может уменьшаться бесконечно, с некоторого момента перекрашивания в удвоенной системе прекратятся. Если при этом оба ряда удвоенной системы точек окажутся раскрашенными одинаково, то точки исходной системы перекрашиваться перестанут; если же верхний и нижний ряды удвоенной системы окажутся раскрашенными по-разному, то в исходной системе будут чередоваться две раскраски.

б) Утверждение задачи останется верным. Для доказательства достаточно присоединить к ребрам удвоенной системы вертикальные отрезки $X_i'X_i''$, причем только для таких номеров i, что точки исходной системы имеют четное число соседей, после чего дословно повторить проведенные рассуждения.

О. Козлов

◆

Ф678. *Артиллерийское орудие стреляет из-под укрытия, наклоненного под углом α к горизонту (рис. 1). Орудие находится в точке A на расстоянии l от основания укрытия (точка B). Начальная скорость снаряда равна $|\vec{v}_0|$. Считая, что траектория снаряда лежит в плоскости рисунка, определить максимальную дальность полета.*

Из всех возможных траекторий снаряда выберем ту, которая касается укрытия. Рассмотрим движение снаряда в системе координат, оси которой направлены так, как показано на рисунке 2. В этой системе «горизонтальная» (вдоль оси OX) проекция начальной скорости снаряда равна $v_{0x}=v_0\cos(\varphi-\alpha)$, а «вертикальная» (вдоль оси OY) проекция равна $v_{0y}=v_0\sin(\varphi-\alpha)$, где φ — угол, который составляет с горизонтом вектор начальной скорости снаряда.

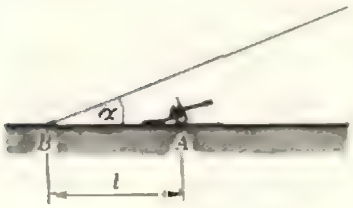


Рис. 1.

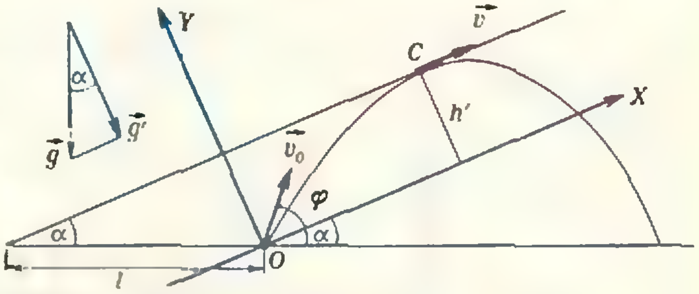


Рис. 2.

Точка C, в которой траектория снаряда касается укрытия, определяет максимальную высоту h' поднятия снаряда над «горизонтом», равную, как видно из рисунка 2, $l\sin\alpha$. В этой точке проекция полной скорости $\vec{v}$ снаряда на ось OY равна нулю и

$$h'=v_{0y}^2/2g',$$

где $g'=g\cos\alpha$ — «ускорение свободного падения» в системе XOY (проекция вектора $\vec{g}$ на «вертикаль» OY). Таким образом,

$$v_{0y}^2=2g'h' \Rightarrow v_0^2\sin^2(\varphi-\alpha)=2(g\cos\alpha)(l\sin\alpha).$$

Отсюда, в частности, вытекает, что если по условию задачи

$$2gl\sin\alpha\cdot\cos\alpha=gl\sin 2\alpha>v_0^2,$$

то ни одна из траекторий снаряда не коснется укрытия и максимальная дальность полета L_{max} будет у снаряда, пущенного под углом $\varphi=\pi/4$ к горизонту; при этом $l_{max}=v_0^2/g$.

Если по условию задачи выполняется соотношение

$$v_0^2>gl\sin 2\alpha,$$

то для того, чтобы траектория касалась укрытия, снаряд должен быть пущен под углом

$$\varphi_{кас}=\alpha+\arcsin\frac{\sqrt{gl\sin 2\alpha}}{v_0}.$$

Если при этом по условию задачи выполняется неравенство

$$\frac{v_0^2}{v_0^2+2gl}<\sin 2\alpha,$$

что в свою очередь означает, что $\varphi_{кас}>\pi/4$ (покажите!), то угол вылета снаряда с максимальной дальностью полета $\varphi_н=\pi/4$ и $L_{max}=v_0^2/g$. Если же по условию задачи выполняется обратное неравенство

$$\frac{v_0^2}{v_0^2+2gl}>\sin 2\alpha,$$

что в свою очередь означает, что $\varphi_{кас}<\pi/4$, то

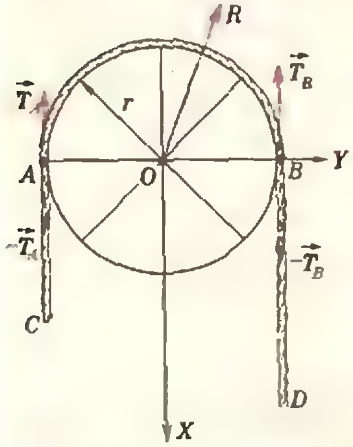
$$\varphi_в=\varphi_{кас}=\alpha+\arcsin\frac{\sqrt{gl\sin 2\alpha}}{v_0},$$

$$L_{\max} = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\varphi_0 = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\left(\alpha + \arcsin\frac{\sqrt{gl\sin 2\alpha}}{v_0}\right).$$

С. Кротов

◆

Ф679. *Нерастяжимая шероховатая веревка линейной плотности ρ и длины L перекинута через блок так, что длина одного из свисающих концов равна l $(l < L/2)$. Блок, надетый на горизонтальную ось, представляет собой тонкий обруч массы m и радиуса r на легких спицах (см. рисунок). Систему удерживают в состоянии покоя и затем отпускают. Найти силу давления на ось в первый момент времени. Трение между осью и блоком мало.*



На систему блок + веревка действуют три силы: сила $\vec R$ реакции в оси блока и силы тяжести $m\vec g$ и $M\vec g$ ($M = \rho L$ — масса веревки). Согласно третьему закону Ньютона, сила $\vec N$ давления на ось блока равна по абсолютной величине $|\vec R|$. Найдем $|\vec R|$.

Запишем уравнение движения центра масс системы в проекциях на оси OX и OY (см. рисунок):

$$\begin{aligned}(M+m)g - R_x &= (M+m)A_x,\\ R_y &= (M+m)A_y\end{aligned} \qquad (*)$$

(A_x и A_y — проекции ускорения центра масс). Так как веревка нерастяжима и не проскальзывает по блоку, ускорения всех точек веревки и блока в первый момент времени будут равны по абсолютной величине (начальная скорость системы равна нулю, и точки веревки, лежащие на обруче, еще не приобрели центростремительной составляющей ускорения).

Ускорение $\vec A$ центра масс системы связано с ускорениями $\vec a_i$ всех ее i точек соотношением

$$M\vec A = \sum_i m_i\vec a_i,$$

где M — масса системы, m_i — масса ее i-й точки. Запишем для нашей системы это соотношение в проекциях на оси OX и OY.

В проекции на оси OX

$$-M_{AC}a + M_{BD}a = (M+m)A_x,$$

так как суммарный вклад всех произведений $M_{i(AB)}\vec a_i$ (от точек веревки, лежащих на участке AB) и $m_i\vec a_i$ (от точек обруча) в проекциях на ось OX равен нулю: это ясно из соображений симметрии. В проекцию же на ось OY вносят вклад только произведения $M_{i(AB)}\vec a_i$. Чтобы найти проекцию на ось OY вектора $\sum\limits_i M_{i(AB)}\vec a_i$, мы должны просуммировать векторы $M_{i(AB)}\vec a_i$ с учетом того, что в каждой точке ускорение направлено по касательной к обручу (напомним, что начальная скорость равна нулю). Такое суммирование (проведите его самостоятельно) приведет нас к следующему результату:

$$\frac{2}{\pi}M_{AB}a = (M+m)A_y.$$

Подставим полученные выражения для $(M+m)A_x$ и $(M+m)A_y$ в $(*)$ и найдем R_x и R_y:

$$R_x = (M+m)(g - A_x) = (M+m)\left(g - \frac{M_{BD} - M_{AC}}{M+m}a\right),$$

$$R_y = \frac{2}{\pi}M_{AB}a.$$

Для определения ускорения a запишем уравнения движения отдельных частей системы:

$$\begin{gathered}M_{BD}g - T_B = M_{BD}a,\\ T_A - M_{AC}g = M_{AC}a,\\ T_B - T_A = (M_{AB} + m)a,\end{gathered}$$

где $\vec T_A$ и $\vec T_B$ — силы натяжения веревки в точках A и B (см. рисунок). (Чтобы получить последнее уравнение, рассмотрите движение отдельных маленьких частей веревки на участке AB и обруча.) Из этих уравнений находим

$$a = \frac{M_{BD} - M_{AC}}{M+m}g.$$

Таким образом,

$$R_x = (M+m)\left(g - \frac{(M_{BD} - M_{AC})^2}{(M+m)^2}g\right).$$

$$R_y = \frac{2}{\pi} M_{AB} \frac{M_{BD} - M_{AC}}{M+m} g.$$

Следовательно, проекции силы $\vec{N}$ давления на ось в первый момент времени равны

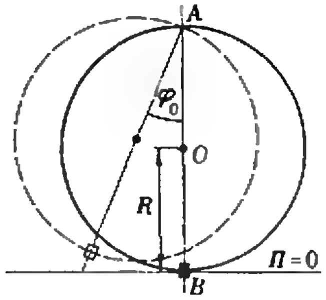
$$-N_x = (\varrho L + m) \left(1 - \frac{(L - \pi r - 2l)^2 \varrho^2}{(L\varrho + m)^2} \right) g,$$

$$-N_y = 2r\varrho \frac{(L - \pi r - 2l)\varrho}{L\varrho + m} g.$$

М. Эфроимский

◆

Ф680. *Тонкий обруч радиуса R может вращаться вокруг горизонтального стержня A, параллельного оси обруча (см. рисунок). На обруч надета небольшая шайба B массы m, которая может перемещаться по обручу без трения. Обруч вместе с шайбой как целое отклоняют от положения равновесия на угол φ_0 и отпускают. Определить зависимость силы взаимодействия шайбы и обруча от угла φ, образуемого радиус-вектором OA с вертикалью.*



Рассмотрим движение двух систем:

система I — шайба, подвешенная на нити длины $2R$ (математический маятник); масса шайбы m;

система II — обруч радиуса R с закрепленной на нем в нижней точке шайбой массы m.

Отклоним обе системы от положения равновесия на один и тот же угол φ_0 и отпустим. В силу закона сохранения энергии системы будут совершать колебания с одинаковыми амплитудами. Сравним скорости, которыми будут обладать шайбы (на нити и на обруче) при угле отклонения от вертикали, равном φ.

Из закона сохранения энергии для системы I —

$$mg \cdot 2R(1 - \cos\varphi_0) = mg \cdot 2R(1 - \cos\varphi) + \frac{mv^2}{2},$$

для системы II —

$$mg \cdot 2R(1 - \cos\varphi_0) + Mg(R + R(1 - \cos\varphi_0)) = mg \cdot 2R(1 - \cos\varphi) + Mg(R + R(1 - \cos\varphi)) + \frac{m(v')^2}{2} + 2\frac{M\left(\frac{v'}{2}\right)^2}{2}$$

(M — масса обруча, v' — скорость шайбы, $v'/2$ — скорость центра обруча, $2M\left(\frac{v'}{2}\right)^2/2$ — кинетическая энергия обруча) находим

$$v^2 = 4Rg(\cos\varphi - \cos\varphi_0),$$
$$(v')^2 = 4Rg(\cos\varphi - \cos\varphi_0).$$

Мы видим, что $v = v'$. Следовательно, в рассматриваемых системах совпадают траектории движения шайб и мгновенные скорости шайб (отсюда, кстати, вытекает синхронность колебаний систем I и II). Таким образом, и мгновенные ускорения шайб одинаковы. Поэтому по абсолютной величине мгновенное значение силы взаимодействия обруча и закрепленной на нем шайбы будет в точности равно соответствующему мгновенному значению силы натяжения нити $T(\varphi)$ математического маятника длины $2R$. Найдем $T(\varphi)$.

Запишем уравнение движения шайбы на нити:

$$T(\varphi) - mg\cos\varphi = \frac{mv^2}{2R}.$$

Подставив полученное ранее значение v^2, найдем $T(\varphi)$:

$$T(\varphi) = mg(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0).$$

Таким образом, сила, действующая со стороны обруча на закрепленную на нем шайбу, в любой момент времени направлена к центру обруча. А это означает, что если мы выводим данную в задаче систему из положения равновесия, то при дальнейшем движении шайба будет все время покоиться относительно обруча независимо от того, закреплена она на нем или нет. Поэтому сила взаимодействия шайбы и обруча равна

$$N(\varphi) = mg(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0).$$

Д. Белов

Ф681. *Омметр состоит из миллиамперметра, рассчитанного на максимальный ток $I_0 = 1$ мА, источника тока и добавочного резистора, регулировкой сопротивления которого омметр устанавливается на нулевую отметку при замкнутых накоротко выводах (нуль омметра находится в правом конце шкалы).*

Схему собирают из батареи для карманного фонарика с ЭДС $\mathscr{E} = 4{,}5$ В, резистора с неизвестным сопротивлением и омметра. Когда омметр включают последовательно, он показывает 0 Ом. Когда его включают параллельно батарее, он показывает бесконечно большое сопротивление.

Определите величину неизвестного сопротивления резистора и напряжения на батарее и на омметре.

Для того чтобы найти неизвестное сопротивление R_x, достаточно знать результат первого измерения (при последовательно включенном омметре). Если омметр показывает нуль, то напряжение на его зажимах равно нулю, а ток в цепи равен $I = I_0 = 1$ мА. Следовательно, неизвестное сопротивление резистора равно

$$R_x = U/I_0 = 4{,}5 \text{ кОм}.$$

(Батарейка для карманного фонарика рассчитана на ток ~200÷300 мА; значит, при токе 1 мА падением напряжения на ее внутреннем сопротивлении можно пренебречь.)

По результатам второго измерения (бесконечно большое сопротивление) видно, что ток через омметр не течет и суммарное напряжение в цепи батарейка — омметр равно нулю. Значит, напряжение на источнике тока в омметре равно напряжению на зажимах батарейки и равно $\mathscr{E} = 4{,}5$ В.

З. Рафаилов

◆

Ф682. *Зеркало антенны радиолокатора, работающего на волне $\lambda = 0{,}3$ м, представляет собой параболоид вращения с «выходным» диаметром $d = 6$ м, в фокусе которого (глубоко внутри параболоида) расположен точечный излучатель энергии. Эта же антенна используется для приема отраженного от самолета сигнала. Мощность излучателя $P_и = 2 \cdot 10^5$ Вт. Минимальная мощность сигнала на входе антенны, необходимая для нормальной работы, $P_{\min} = 1 \cdot 10^{-13}$ Вт. Оцените максимальную дальность обнаружения локатором самолета, площадь отражающей поверхности которого $S = 5$ м². Считать, что мощность отраженного сигнала в $n = 10$ раз меньше мощности падающего сигнала и отражение происходит равномерно во все стороны.*

Для увеличения предельной дальности работы радиолокатора увеличивают мощность передатчика, разрабатывают приемные устройства высокой чувствительности, применяют антенны с очень высокой направленностью.

Чем определяется направленность антенны?

Согласно законам геометрической оптики, точечный источник, помещенный в фокусе параболоида, дает после отражения параллельный пучок лучей (угол расходимости пучка равен нулю). В этом случае освещенность объекта, попавшего в луч, не зависит от расстояния до отражателя.

На самом деле угол расходимости пучка не равен нулю и определяется дифракцией.

Для приближенного расчета угла расходимости пучка удобно воспользоваться такой моделью: плоская электромагнитная волна (какая получилась бы при отражателе очень больших размеров) падает на непрозрачный экран, в котором проделано круглое отверстие диаметра d (d — диаметр зеркала). Будем приближенно считать, что направление на первый минимум в этом случае соответствует углу

$$\alpha = \lambda/d.$$

В нашем случае угол α довольно мал, что позволяет упростить дальнейший расчет. На очень большом расстоянии L от зеркала радиус «освещенного» пятна $r = \alpha L$, и на самолет с площадью поверхности S попадает мощность $P_c = P_и \cdot S/\pi r^2$ (мы приближенно принимаем, что освещенность в пределах всего пятна одна и та же). По условию задачи отраженный от самолета сигнал равномерно распределяется во все стороны. Мощность сигнала $P_{пр}$, попадающего обратно на антенну, равна

$$P_{пр} = P_c \cdot n \frac{\pi d^2/4}{4\pi L^2} = P_и \frac{nSd^4}{16\pi\lambda^2 L^4}.$$

Максимальная дальность $L_{\max}$ соответствует пороговой чувствительности приемника. Из условия $P_{пр} = P_{\min}$ находим

$$L_{\max} = \sqrt{\frac{P_и}{P_{\min}} \cdot \frac{nSd^4}{16\pi\lambda^2}} \approx 1{,}3 \cdot 10^5 \text{ м} = 130 \text{ км}.$$

А. Зильберман

КВАНТ для младших школьников

Задачи

1. В кружочках с номерами 1, 2, ..., 5 (см. рисунок) находятся камушки (по одному в каждом кружочке); в кружочках с номерами 7, 8, ..., 11 — ракушки (также по одной в каждом кружочке). Камушкам и ракушкам разрешается перемещаться вдоль линий на соседний свободный кружочек и перепрыгивать (вдоль линий) через любого соседа на свободный кружочек (вначале свободен кружочек с номером 6). Можно ли добиться того, чтобы камушки и ракушки поменялись местами?

2. Докажите неравенство

ДВА×ШЕСТЬ<ДВАДЦАТЬ.

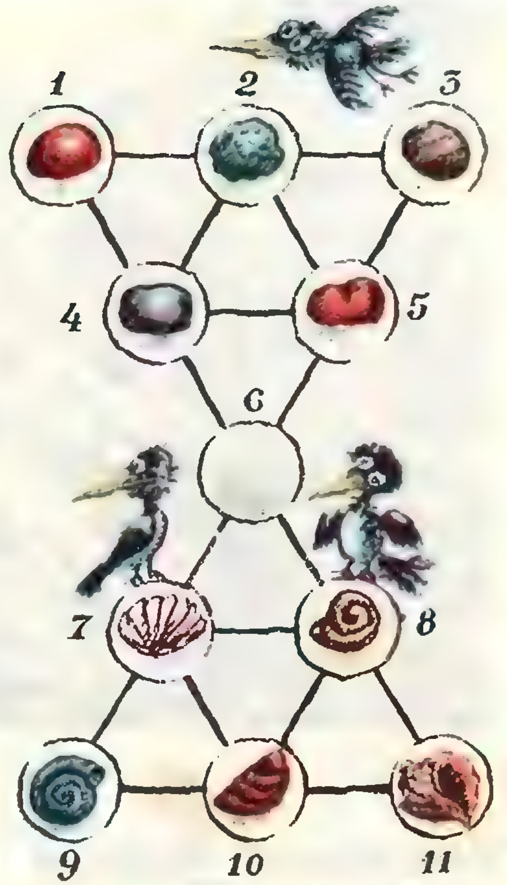
(Здесь каждая буква обозначает цифру, причем разным буквам соответствуют разные цифры, одинаковым — одинаковые.)

3. 15 монет расположены в узлах клетчатой бумаги так, как показано на рисунке (в узле № 2 монеты нет!). Монета может переместиться в свободный узел, перепрыгнув вдоль линий сетки через свою соседку, которая при этом удаляется. Можно ли, сделав 14 ходов, добиться того, чтобы осталась одна монета?

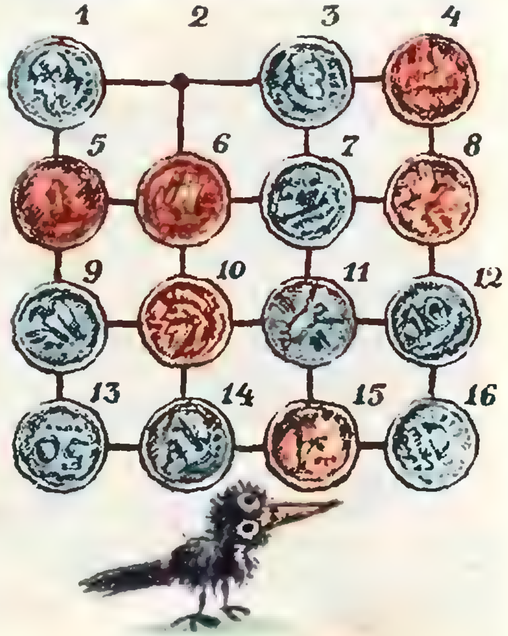
4. Можно ли все десять цифр расставить по окружности так, чтобы сумма любых трех из них, идущих подряд, не превышала а) 13, б) 14, в) 15?

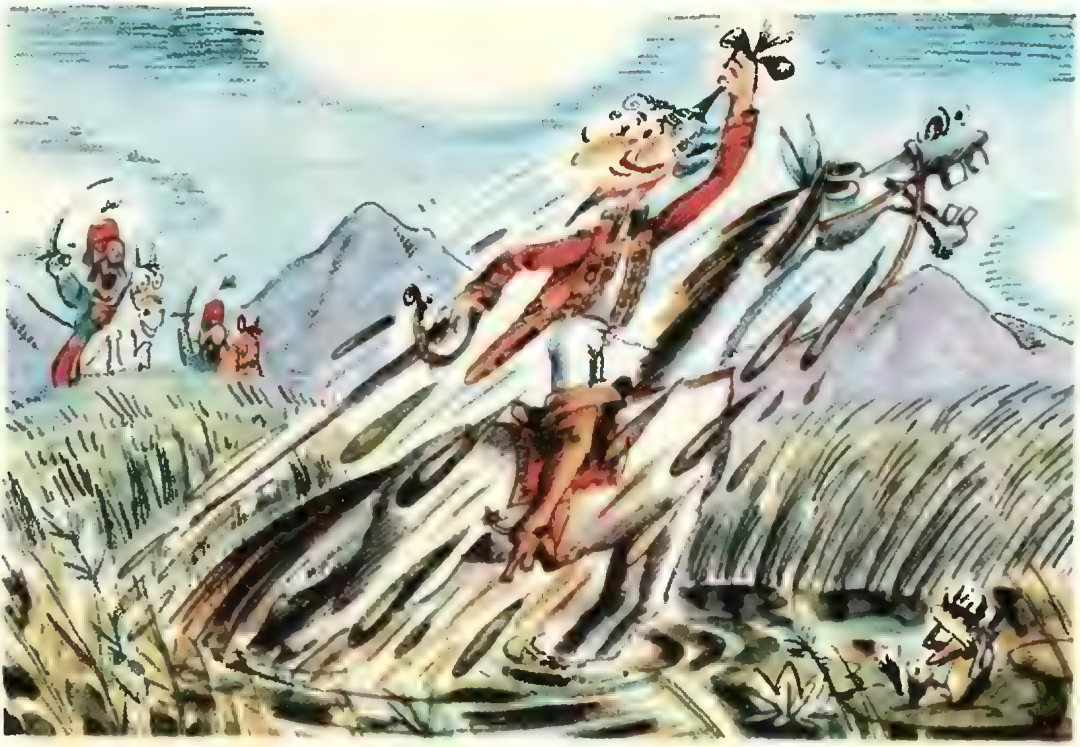
5. Существует ли целое число, произведение цифр которого равно 528?

Эти задачи нам предложили
Ф. Бартенев и А. Савин



ДВА×ШЕСТЬ<ДВАДЦАТЬ





И. Юфанова

Интервью с бароном Мюнхаузеном

— Уважаемый барон! Наш первый вопрос касается Вашего рассказа «За волосы». Действительно ли утверждение о том, что человек способен сам себя поднять за волосы, следует считать Вашим главным физическим открытием?

Барон: — Полагаю, что нет. Умение поднимать себя за волосы — это не самое главное, совсем не физическое и, собственно, не открытие.

— Вы, по своему обыкновению, шутите?

Барон: — Нисколько.

— Чтобы ввести в курс дела наших читателей, не расскажете ли Вы еще раз, как это случилось?

Барон: — С превеликим удовольствием.

> Это было во время войны с турками. Вообще во время этой войны со мною было много приключений.
>
> Однажды, спасаясь от турок, попробовал я перепрыгнуть болото верхом на коне. Но конь не допрыгнул до берега, и мы с разбегу шлепнулись в жидкую грязь.
>
> Шлепнулись — и стали тонуть. Спасенья не было.
>
> Болото с ужасной быстротой засасывало нас глубже и глубже. Вот уже все туловище моего коня скрылось в зловонной грязи, и вот уже и моя голова стала погружаться в болото, и оттуда торчит лишь косичка моего парика.
>
> Что было делать? Мы непременно погибли бы, если бы не удивительная сила моих рук. Я страшный силач. Схватив себя за эту косичку, я изо всех сил дернул вверх и без большого труда вытащил из болота и себя, и своего коня, которого крепко сжал обеими ногами, как щипцами.

Но позвольте и мне у Вас спросить. Почему Вы называете это физическим открытием?

— Прежде всего потому, что это противоречит известным физическим законам. И потом — никто, кроме Вас, этого никогда не проделывал.

Барон: — Вы не правы. Разве примерно не так поступает велосипедист, въезжая на тротуар с проезжей части дороги? В тот момент, когда переднее колесо подходит к кромке тротуара, он подтягивает руль к себе. При этом передняя часть велосипеда приподнимается, и велосипедист без толчка въезжает на тротуар.

— Просим читателей принять участие в нашей беседе и ответить на такой вопрос:

Почему барон не мог сам себя вытащить из болота, а каждый велосипедист, подтягивая к себе руль, приподнимает не только себя, но и свой велосипед?

— И еще один Ваш рассказ — «Меткий выстрел» — заинтересовал нас с точки зрения законов физики.

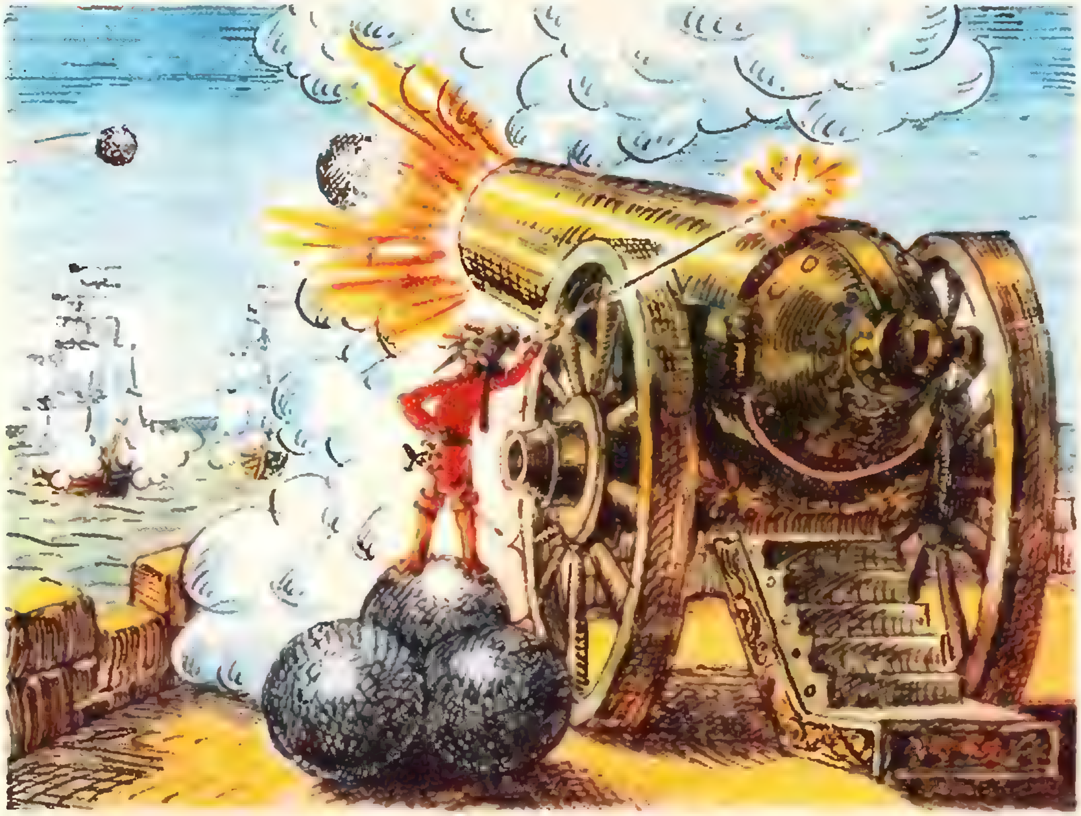
Барон: — Честно говоря, я не думал о физике и ее законах, когда развлекал друзей воспоминаниями о своих приключениях. Находчивость — вот главное в жизни. Впрочем, как Вам угодно.

> Испанцы осаждали тогда английскую крепость Гибралтар. Я пробрался к осажденным. Стоя на стене Гибралтара, я увидел сквозь подзорную трубу, что испанцы направляют дуло своей пушки как раз в то место, где стояли мы.
>
> Ни минуты не медля, я приказал, чтобы на это самое место была поставлена огромная пушка.
>
> Чуть только пушку подкатили ко мне, я направил ее дуло прямо в дуло неприятельской пушки.
>
> Обе пушки грянули в один и тот же миг.
>
> Случилось то, что я ожидал: в намеченной мною точке два ядра — наше и неприятельское — столкнулись с ужасающей силой, и неприятельское ядро полетело назад.
>
> Вы понимаете: оно полетело назад к испанцам.
>
> Наше ядро тоже не доставило им удовольствия: оно попало в их военный корабль и пустило его ко дну.

— Благодарю Вас, барон. Трудно поверить во что-нибудь подобное. Чтобы оба ядра после удара стали двигаться в одну сторону?

Придется вновь обратиться за помощью к нашим читателям:

Правдоподобен ли этот рассказ барона Мюнхаузена?



В. Кучеров

Геометрические аналогии

Изучая геометрию, вы, наверное, заметили, что некоторые свойства треугольника и тетраэдра похожи, а многие геометрические понятия, связанные с треугольником, имеют пространственные аналоги. Например: сторона треугольника — грань тетраэдра, длина стороны — площадь грани, вписанная окружность — вписанная сфера, описанная окружность — описанная сфера, площадь — объем, биссектриса угла — биссектор двугранного угла и т. п.

Эта аналогия — не только внешняя. Многие теоремы о треугольниках, если заменить в их формулировках планиметрические термины соответствующими стереометрическими и соответствующим образом «подправить» формулировки, превращаются в теоремы о тетраэдрах. Несколько таких теорем мы и рассмотрим.

Теорема 1. *Биссектриса CD внутреннего угла треугольника ABC делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные его сторонам AC и BC.*

Доказательство. Примем сначала за основание треугольников ADC и DBC (рис. 1) отрезки AC и BC соответственно. Точка D равноудалена от сторон угла ACB, поэтому

$$\frac{S_{ADC}}{S_{BDC}}=\frac{|AC|}{|BC|}.$$

Теперь примем за основания этих же треугольников отрезки AD и DB. Ясно, что

$$\frac{S_{ADC}}{S_{BDC}}=\frac{|AD|}{|BD|}.$$

Следовательно,

$$\frac{|AD|}{|BD|}=\frac{|AC|}{|BC|}.$$

Напомним, что *биссектором* двугранного угла называется полуплоскость, делящая его на два равных по величине двугранных угла. Биссектор двугранного угла является множеством точек, равноудаленных от его граней («Геометрия 9—10», с. 100, задача 422). Докажем свойство биссектора двугранного угла тетраэдра, аналогичное свойству биссектрисы угла треугольника («Геометрия 9—10», с. 176, задача 310).

Теорема 2. *Биссектор двугранного угла тетраэдра делит противолежащее ребро в отношении, равном отношению площадей граней, образующих этот двугранный угол.*

Доказательство. Пусть ADM — сечение тетраэдра $ABCD$ биссектором двугранного угла с ребром AD (рис. 2). Объемы тетраэдров $ACMD$ и $ABMD$ обозначим через V_1 и V_2 соответственно.

Так как точка M одинаково удалена от граней ADC и ADB,

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{S_{ADC}}{S_{ADB}}.$$

С другой стороны, легко видеть, что

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{S_{DMC}}{S_{DMB}}=\frac{|MC|}{|MB|}.$$

Поэтому $\frac{S_{ADC}}{S_{ADB}}=\frac{|MC|}{|MB|}$, что и требовалось доказать.

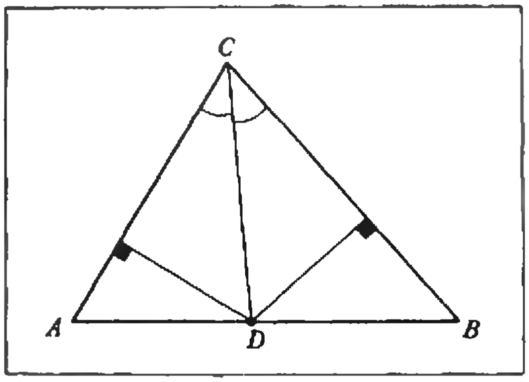


Рис. 1.

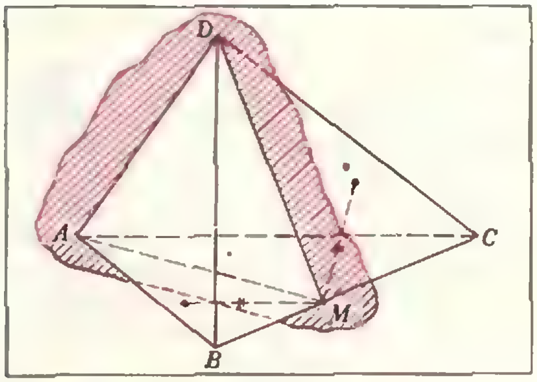


Рис. 2.

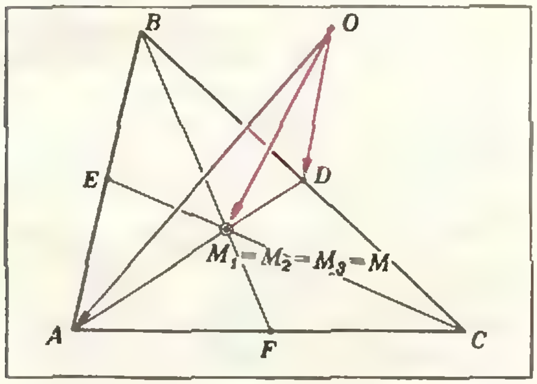


Рис. 3.

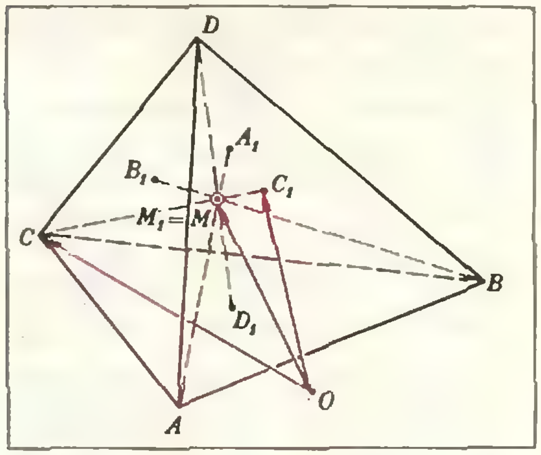


Рис. 4.

Попутно замечаем, что $\frac{S_{ADC}}{S_{ADB}} = \frac{S_{DMC}}{S_{DMB}}$, что еще раз подчеркивает аналогичность теорем 1 и 2.

Для дальнейшего нам потребуется следующее утверждение: *если $M \in [AB]$ и $|AM|:|MB| = m:n$, то для произвольной точки O пространства*

$$\overrightarrow{OM} = \frac{n}{m+n}\cdot\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\cdot\overrightarrow{OB} \qquad (1)$$

(убедитесь в этом!).

Мы применим (1) к доказательству теоремы о точке пересечения медиан треугольника («Геометрия 6—8», задача 638) и аналогичной ей теоремы для тетраэдра («Геометрия 9—10», с. 176, задача 314).

Теорема 3. *Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2:1, считая от вершины.*

Доказательство. Пусть M_1 — точка медианы AD треугольника ABC такая, что $|AM_1|:|M_1D| = 2:1$, а O — произвольная точка пространства (рис. 3).

В силу (1) имеем $\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. Поэтому $\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

Если M_2 и M_3 — точки, делящие медианы CE и BF в отношении 2:1, считая от вершины, то, аналогично, $\overrightarrow{OM_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, $\overrightarrow{OM_3} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. Таким образом, $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_3}$, и, следовательно, точки M_1, M_2 и M_3 совпадают. Теорема доказана.

Отметим, что попутно получено известное соотношение: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, где M — *центроид* (точка пересечения медиан) треугольника, а O — произвольная точка пространства.

Назовем *медианой тетраэдра* отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с центроидом противолежащей грани. Оказывается, для медиан тетраэдра справедлива теорема, аналогичная теореме 3.

Теорема 4. *Четыре медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 3:1, считая от вершины.*

Доказательство. Пусть M_1 — точка медианы CC_1 тетраэдра $ABCD$ такая, что $|CM_1|:|M_1C_1| = 3:1$ (рис. 4). Пусть O — произвольная точка пространства. По формуле (1) $\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OC_1}$. Кроме того, $\overrightarrow{OC_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD})$, так

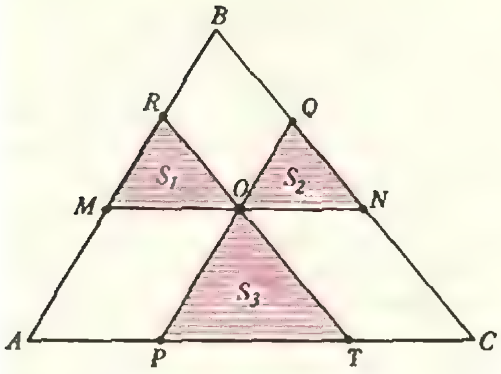


Рис. 5.

как C_1 — центроид треугольника ABD. Поэтому $\vec{OM}_1 = 1/4\vec{OC} + 3/4 \cdot 1/3(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OD}) = 1/4(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$. Точно такие же выражения получим для точек M_2, M_3 и M_4, делящих медианы тетраэдра AA_1, BB_1 и DD_1 в отношении 3:1 соответственно. Следовательно, $\vec{OM}_2 = \vec{OM}_3 = \vec{OM}_4 = 1/4(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$, и поэтому точки M_1, M_2, M_3 и M_4 совпадают.

Точка M пересечения медиан тетраэдра называется его *центроидом*. Отметим, что для произвольной точки O пространства справедливо равенство $\vec{OM} = \frac{1}{4}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$.

В заключение рассмотрим одну интересную теорему планиметрии и попытаемся найти аналогичную ей теорему стереометрии.

Теорема 5. *Через произвольную точку O, взятую внутри треугольника ABC, проведены прямые, параллельные его сторонам. Если S_1, S_2, S_3 — площади образовавшихся при этом треугольников* (рис. 5), *а S — площадь данного треугольника, то*

$$\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}.$$

Доказательство. Образовавшиеся треугольники подобны треугольнику ABC, поэтому

$$\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} = \frac{|MR|}{|AB|}, \quad \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = \frac{|OQ|}{|AB|}, \quad \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{|OP|}{|AB|}.$$

Складывая эти равенства, получим

$$\frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{|MR| + |OQ| + |OP|}{|AB|} = \frac{|MR| + |BR| + |MA|}{|AB|} = 1,$$

откуда

$$\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}.$$

Сформулируем теперь аналогичную теорему в пространстве.

Теорема 6. *Через произвольную точку, взятую внутри тетраэдра, проведены четыре плоскости, параллельные граням тетраэдра. Если V_1, V_2, V_3, V_4 — объемы образовавшихся при этом тетраэдров, а V — объем данного тетраэдра, то*

$$\sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{V_1} + \sqrt[3]{V_2} + \sqrt[3]{V_3} + \sqrt[3]{V_4}.$$

Для доказательства этой теоремы, которое мы предоставляем читателю, следует воспользоваться тем, что тетраэдры, о которых идет речь в условии, подобны исходному, а также тем, что объемы подобных многогранников относятся как кубы длин их ребер.

Предлагаемые ниже задачи объединены в пары. В каждой паре пункт а) — некоторая теорема планиметрии, а пункт б) — ее пространственный аналог.

Упражнения

1. а) Докажите, что площадь треугольника, описанного около окружности, вычисляется по формуле $S = \frac{1}{2} P \cdot r$, где r — радиус этой окружности, P — периметр треугольника.

б) Докажите, что объем тетраэдра, описанного около сферы, вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3} S \cdot r$, где r — радиус этой сферы, S — полная поверхность тетраэдра.

2. а) В треугольник вписана окружность радиуса r. Докажите, что $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}$, где h_1, h_2, h_3 — высоты треугольника.

б) В тетраэдр вписана сфера радиуса r. Докажите, что $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}$, где h_1, h_2, h_3, h_4 — высоты тетраэдра.

3. а) Через центр правильного треугольника проведена прямая, параллельная основанию. На этой прямой внутри треугольника взята произвольная точка O. Докажите, что расстояние от точки O до основания треугольника равно среднему арифметическому расстояний от точки O до боковых сторон треугольника.

б) Через центр правильного тетраэдра проведена плоскость, параллельная основанию. На этой плоскости внутри тетраэдра взята произвольная точка O. Докажите, что расстояние от точки O до основания тетраэдра есть среднее арифметическое расстояний от точки O до боковых граней тетраэдра.

А. Шеронов

Криволинейное движение

Движение тел по криволинейным траекториям часто встречается в природе и технике. Это, например, движение спутников и метеоритов в поле тяжести Земли или планет и комет в поле тяжести Солнца, движение заряженных частиц в ускорителях или деталей различных механизмов.

Напомним основные закономерности, справедливые для криволинейного движения. Как известно, скорость тела всегда направлена по касательной к его траектории и при движении может изменяться и по модулю, и по направлению. Вектор ускорения тела не совпадает по направлению со скоростью, а составляет с ней некоторый угол. Часто бывает удобнее говорить не о самом ускорении, а о двух его проекциях. Одна из них, так называемая тангенциальная (или касательная) проекция a_τ — это проекция на направление скорости (то есть на направление касательной к траектории). Эта проекция характеризует изменение модуля скорости. Другая, так называемая нормальная (или центростремительная) проекция $a_н$ — это проекция на направление, перпендикулярное к вектору скорости. Она характеризует изменение направления скорости. В частности, при равномерном движении тела по окружности ускорение имеет лишь одну проекцию — нормальную к скорости и изменяющую лишь ее направление. Модуль этой проекции равен квадрату модуля скорости, деленному на радиус окружности: $a_н = v^2/R$.

Небольшой участок любой криволинейной траектории всегда можно представить как часть некоторой окружности; радиус соответствующей окружности называют радиусом кривизны траектории в данном месте. Поэтому выражение $a_н = v^2/R$ можно использовать для определения радиуса кривизны траектории R.

Наконец, для тела, движущегося по криволинейной траектории, так же как и для тела, движущегося прямолинейно, справедлив второй закон Ньютона: векторная сумма всех действующих на тело сил равна массе тела, умноженной на вектор его ускорения.

Рассмотрим несколько конкретных задач на криволинейное движение тел.

Задача 1. *С поверхности земли брошено тело с начальной скоростью $\vec{v}_0$ под углом α_0 к горизонту. Найдите зависимость тангенциальной и нормальной проекций ускорения тела от его высоты подъема. Сопротивление воздуха можно не учитывать.*

После броска на тело действует только одна сила — сила притяжения к Земле, поэтому в любой точке траектории ускорение $\vec{a}$ тела равно ускорению свободного падения $\vec{g}$ (рис. 1). Тангенциальная и нормальная проекции ускорения равны, соответственно,

$$a_\tau = g \sin \alpha \text{ и } a_н = g \cos \alpha.$$

Здесь α — угол, который состав-

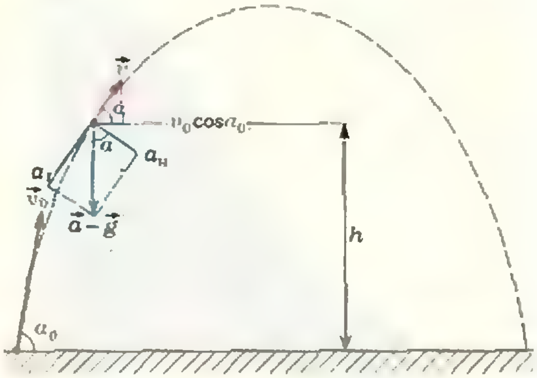


Рис. 1.

ляет с горизонтом скорость $\vec{v}$ тела на высоте h.

Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2}=\frac{mv^2}{2}+mgh$$

и найдем выражение для модуля v скорости тела:

$$v=(v_0^2-2gh)^{1/2}.$$

Во время движения проекция скорости на горизонтальное направление остается постоянной и равной $v_0\cos\alpha_0$. Тогда (см. рис. 1)

$$a_н=g\cos\alpha=gv_0\cos\alpha_0\cdot v^{-1}=$$
$$=gv_0\cos\alpha_0\cdot(v_0^2-2gh)^{-1/2}$$

и

$$a_т=g\sin\alpha=g(1-\cos^2\alpha)^{1/2}=$$
$$=g(v_0^2\sin^2\alpha_0-2gh)^{1/2}(v_0^2-2gh)^{-1/2}.$$

В полученные формулы можно ввести максимальную высоту подъема тела $h_{\max}=v_0^2\sin^2\alpha_0/2g$:

$$a_н=g\cos\alpha_0\cdot h_{\max}^{1/2}(h_{\max}-h\sin^2\alpha_0)^{-1/2}$$

и

$$a_т=g\sin\alpha_0\cdot(h_{\max}-h)^{1/2}(h_{\max}-$$
$$-h\sin^2\alpha_0)^{-1/2}.$$

Задача 2. *Конечный участок BC горы разгона на лыжном трамплине представляет собой дугу окружности радиусом $R=15$ м (рис. 2). Полная высота горы $H=50$ м. Найдите модуль ускорения лыжника в точке C, если угол $\alpha=30°$. Считайте, что лыжник спускается с горы без начальной скорости; трением пренебрегите.*

При движении по горе разгона на лыжника действуют две силы. Это — сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз, и сила реакции опоры $\vec{N}$, направленная, в отсутствие трения, по радиусу кривизны траектории, в нашем случае — по радиусу CO. Равнодействующая этих сил сообщает лыжнику искомое ускорение $\vec{a}$:

$$m\vec{a}=m\vec{g}+\vec{N}.$$

По теореме косинусов для треугольника сил имеем (см. рис. 2)

$$(ma)^2=(mg)^2+N^2-2mgN\cos\alpha.$$

Пусть $\vec{v}$ — скорость лыжника в точке C. Нормальная проекция ускорения $a_н=v^2/R$ создается соответствующими проекциями сил $m\vec{g}$ и $\vec{N}$:

$$mv^2/R=N-mg\cos\alpha.$$

Исключая N из последних двух уравнений, получим

$$a^2=g^2\sin^2\alpha+(v^2/R)^2.$$

Подставим сюда значение модуля v скорости лыжника из закона сохранения энергии

$$mv^2/2=mg(H-R(1-\cos\alpha))$$

и найдем модуль ускорения лыжника:

$$a=(g^2\sin^2\alpha+(v^2/R)^2)^{1/2}=$$
$$=g(\sin^2\alpha+4(H/R-1+\cos\alpha)^2)^{1/2}\approx$$
$$\approx 65\ м/с^2.$$

Это же значение можно получить из несколько других рассуждений. При движении по дуге окружности нормальная проекция ускорения равна $a_н=v^2/R$, а тангенциальная проекция, создаваемая только соответствующей проекцией силы тяжести, равна $a_т=g\sin\alpha$. Тогда модуль ускорения равен

$$a=(a_н^2+a_т^2)^{1/2}=(g^2\sin^2\alpha+$$
$$+(v^2/R)^2)^{1/2}.$$

Задача 3. *Небольшое тело, находящееся на полусфере, начинает скользить по ней без трения (рис. 3). Определите координаты точки, в которой тело достигнет горизонтальной плоскости.*

Некоторое время после начала движения тело будет скользить по полусфере, а потом, оторвавшись от нее, будет двигаться как тело, брошенное под углом к горизонту.

Введем систему координат XOY, как указано на рисунке 3. Сначала найдем координаты x_0 и y_0 точки отрыва тела от полусферы, а также модуль и направление скорости $\vec{v}_0$ в мо-

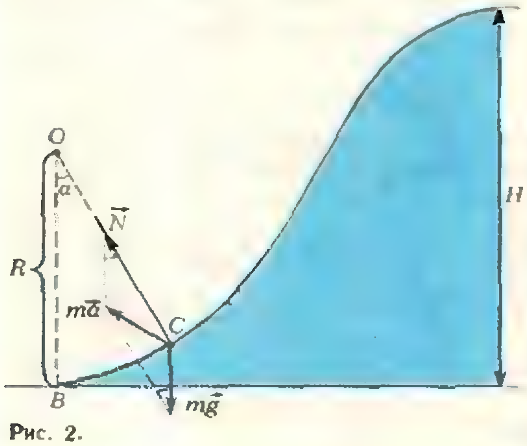


Рис. 2.

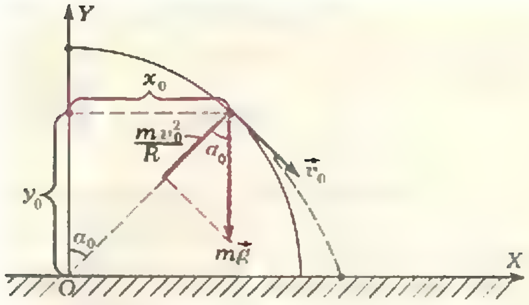


Рис. 3.

мент отрыва. Движение тела по полусфере происходит под действием двух сил — силы тяжести $m\vec{g}$ и силы нормальной (так как отсутствует трение) реакции $\vec{N}$. В момент отрыва сила реакции обращается в нуль, так что нормальное ускорение $a_н = v_0^2/R$ телу сообщается только соответствующей проекцией силы тяжести:

$$mv_0^2/R = mg\cos\alpha_0.$$

Решая это уравнение совместно с уравнением, выражающим закон сохранения энергии:

$$mv_0^2/2 = mgR(1-\cos\alpha_0),$$

найдем

$$\cos\alpha_0 = 2/3,\ v_0 = (2gR/3)^{1/2}.$$

Координаты точки отрыва равны, соответственно,

$$y_0 = R\cos\alpha_0 = 2R/3,$$

$$x_0 = (R^2 - y_0^2)^{1/2} = R(1-\cos^2\alpha_0)^{1/2} = \sqrt{5}\,R/3.$$

Теперь запишем уравнения движения тела после отрыва от полусферы:

$$x = x_0 + v_0\cos\alpha_0\cdot t,$$

$$y = y_0 - v_0\sin\alpha_0\cdot t - gt^2/2.$$

Очевидно, что в момент достижения горизонтальной плоскости координата y становится равной нулю: $y=0$. Координату x найдем из соответствующего уравнения движения, подставив туда значения начальных условий (x_0, v_0 и $\cos\alpha_0$), а также время полета до удара, полученное из условия $y=0$:

$$x \approx 1{,}12R.$$

Задача 4. *По горизонтальной поверхности с постоянной скоростью $\vec{v}_0$ катится без проскальзывания колесо радиусом R. На ободе колеса находится материальная точка массой m. Определите модуль и направление силы реакции, действующей на точку, а также радиус кривизны ее траектории в зависимости от положения точки на ободе.*

Пусть мгновенное положение материальной точки на ободе колеса характеризуется углом α (рис. 4). С точки зрения наблюдателя в неподвижной системе координат (например, связанной с землей) точка участвует в двух движениях — в поступательном движении вместе с колесом с постоянной горизонтальной скоростью $\vec{v}_0$ и во вращательном движении вокруг центра колеса с угловой скоростью v_0/R.

Воспользуемся тем, что в различных инерциальных системах координат ускорения тела одинаковы. Рассмотрим систему координат, движущуюся вместе с центром колеса со скоростью $\vec{v}_0$. В этой системе материальная точка равномерно движется по окружности. Нормальное ускорение $\vec{a}_н$ ($a_н = v_0^2/R$) ей сообщают две силы — сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции $\vec{N}$. По теореме косинусов из треугольника сил имеем (см. рис. 4)

$$N^2 = (mg)^2 + (mv_0^2/R)^2 - 2(mg)(mv_0^2/R)\cos\alpha,$$

откуда

$$N = ((mg)^2 + (mv_0^2/R)^2 - 2(mg)(mv_0^2/R)\cos\alpha)^{1/2}.$$

Направление силы $\vec{N}$, определяемое углом φ, можно найти из того же треугольника по теореме синусов:

$$N/\sin\alpha = mg/\sin\varphi,$$

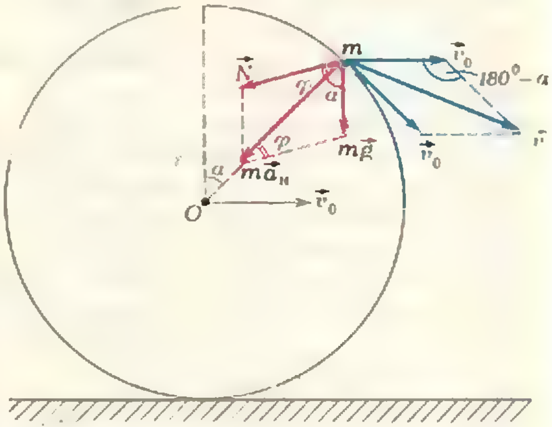


Рис. 4.

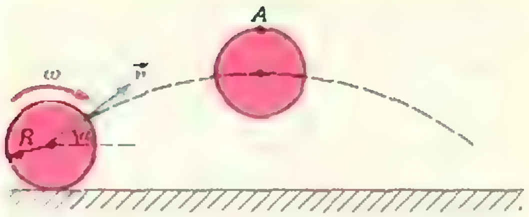


Рис. 5.

$$\varphi = \arcsin mg/N \sin \alpha.$$

Найдем теперь радиус кривизны траектории точки. Как мы уже говорили, в неподвижной системе координат скорость точки $\vec{v}$ складывается из скоростей ее поступательного и вращательного движений (см. рис. 4). По теореме косинусов квадрат модуля скорости равен

$$v^2 = v_0^2 + v_0^2 - 2v_0^2 \cos(180° - \alpha) = 2v_0^2(1 + \cos\alpha).$$

Проекция ускорения точки на направление, перпендикулярное к скорости, равна

$$a_\perp = (v_0^2/R) \cos \alpha/2.$$

Тогда радиус кривизны траектории точки равен

$$\varrho = v^2/a_\perp = 4R \cos \alpha/2.$$

Упражнения

1. Небольшое тело соскальзывает без трения с поверхности полусферы (см. задачу 3). Определите направление, под которым тело отскочит от горизонтальной плоскости, и максимальную высоту его подъема после отскока. Удар тела о плоскость считайте абсолютно упругим.

2. Диск радиусом R, закрученный около своей оси с угловой скоростью ω, бросают со скоростью $\vec{v}$ под углом α к горизонту (рис. 5). Определите радиус кривизны траектории точки A диска в момент его максимального подъема. Плоскость диска все время остается вертикальной.

3. Автомобиль массой $m = 10^3$ кг начинает двигаться с постоянной тангенциальной проекцией ускорения $a_\tau = 1$ м/с^2 по шоссе в виде дуги окружности радиусом $R = 100$ м. Какую максимальную скорость он наберет до начала проскальзывания колес по асфальту, если коэффициент трения скольжения равен $\mu = 0{,}3$? Какую мощность должен развить к этому моменту двигатель автомобиля?

Задача для исследования

Рассмотрим такую задачу: *Плоскость замощена конгруэнтными прямоугольниками, не имеющими общих внутренних точек, причем любой из них можно совместить с любым другим таким перемещением плоскости, что все остальные прямоугольники совмещаются. Чему может равняться число k соседей каждого прямоугольника (то есть число прямоугольников, имеющих с данным хотя бы одну общую точку)? Сколько различных типов таких замощений существует для каждого k?*

Подумайте над ее решением и... ее формулировкой (второй вопрос сформулирован несколько нечетко; прежде чем на него отвечать, нужно уточнить смысл выражения «различных типов») и напишите нам. Наиболее интересные ответы будут опубликованы.

В. Сапич.
В. Чванов

Задачи наших читателей

1. Из точек A и B прямолинейной дороги одновременно трогаются с места два автомобиля и движутся с одним и тем же постоянным ускорением $\vec{a}$. В некоторой точке C дороги начинается участок, покрытый ледяной коркой (где трение отсутствует). Каково расстояние от точки B до точки C, если известно, что первый автомобиль, стартовавший из точки A, догнал второй автомобиль через промежуток времени τ после прохождения первым точки C?

Г. Левин

2. Как вы думаете, в каком случае вода закипит быстрее: если стакан с опущенным в него электрокипятильником поставить на батарею или на подоконник? Казалось бы — в первом, поскольку воздух над батареей теплее, чем над подоконником. Однако опыт дает противоположный результат. Эффект невелик (около 10%), но достоверен. Чем он может быть вызван?

Л. Ашкинази

3. Замечательный русский физик П. Н. Лебедев доказал, что свет при взаимодействии с веществом оказывает на него давление. Какую массу может уравновесить луч лазера мощностью N?

А. Королевский

Заочная школа программирования

В этом номере мы начинаем третий, последний учебный год в Заочной школе программирования. Уроки этого года посвящаются главным образом языку программирования Паскаль.

Все работы должны быть оформлены в соответствии с правилами, указанными в журнале «Квант» № 9 за 1980 год.

Школьники, проживающие в прибалтийских республиках, в Архангельской, Вологодской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской и Псковской областях, в Карельской и Коми АССР, направляют свои работы по адресу: 190000, Ленинград, ул. Герцена, 67, ЛИАП, кафедра ЭВМ, Северо-западный филиал Заочной школы программирования.

Школьники, проживающие в Кировской, Оренбургской, Пермской, Свердловской и Челябинской областях, в Башкирской и Удмуртской АССР, пишут по адресу: 620219, Свердловск, ул. К. Либкнехта, 9, Пединститут, кафедра вычислительной математики и программирования, Уральский филиал Заочной школы программирования.

Школьники из Астраханской, Волгоградской, Горьковской, Куйбышевской, Саратовской и Ульяновской областей, Марийской, Мордовской, Татарской и Чувашской АССР направляют свои работы по адресу: 420008, Казань, ул. Ленина, 18, Университет, факультет вычислительной математики и кибернетики, Поволжский филиал Заочной школы программирования.

Школьники, проживающие в Белгородской, Брянской, Владимирской, Воронежской, Ивановской, Калининской, Костромской, Курской, Липецкой, Орловской, Пензенской, Рязанской, Смоленской, Тамбовской, Тульской и Ярославской областях, пишут по адресу: 241036, Брянск, Бежицкая ул., 14, Пединститут, кафедра матанализа, Центральный филиал Заочной школы программирования.

Школьники, проживающие в Казахской ССР и республиках Средней Азии, направляют свои работы по адресу: 642000, Северо-Казахстанская область, г. Петропавловск, ул. Пушкина, 86, Пединститут, кафедра алгебры и геометрии, Казахстанский филиал Заочной школы программирования.

Жители остальной территории СССР и зарубежные читатели направляют работы по прежнему адресу: 630090, Новосибирск, пр. Науки, 6, ВЦ СОАН СССР, отдел информатики, Заочная школа программирования.

Урок 15: Основные понятия языка Паскаль

В этом учебном году на уроках Заочной школы мы будем изучать новый язык программирования — Паскаль. Язык назван в честь французского математика и физика XVII века Блеза Паскаля, сконструировавшего в 1642 году первую счетную машину. Автор этого языка — профессор Высшей технической школы в Цюрихе Никлаус Вирт. Он поставил перед собой задачу создать язык, содержащий небольшое число основных понятий и удобный для обучения программированию на ЭВМ и решения практических производственных задач. Сейчас Паскаль — один из распространенных языков программирования. Во многих вычислительных центрах действуют трансляторы с Паскаля. В частности, существует транслятор с этого языка и на самой распространенной в нашей стране серии машин — ЕС ЭВМ.

Прежде чем читать дальше, советуем вам повторить основные понятия программирования, с которыми вы познакомились при изучении языка Рапира («Квант», 1980, №№ 1—3).

Языки Робик и Рапира, с которыми вы знакомы, — диалоговые языки, в которых каждое предписание набирается на терминале отдельно и может быть исполнено немедленно. Программа на Паскале записывается в память ЭВМ полностью и только после этого может быть исполнена. Каждая программа на Паскале представляет собой процедуру, которую называют *основной процедурой*. Как и всякая процедура, программа на Паскале имеет имя, а ее предписания называют *операторами*.

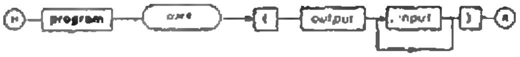
Текст любой программы на Паскале состоит из нескольких разделов:

1. **Заголовок программы**
2. Раздел описания меток
3. Раздел описания констант
4. Раздел описания типов данных
5. **Раздел описания переменных**
6. Раздел описания функций и процедур
7. **Раздел операторов**

Три раздела, выделенные жирным шрифтом, являются обязательными для любой программы. Наличие остальных разделов в программе необязательно. О назначении и правилах записи каждого раздела мы расскажем по мере изучения языка. Каждый раздел программы начинается со своего ключевого слова. Разделы отделяются друг от друга точкой с запятой (;). Ключевые слова — английские. В конце каждого урока мы будем приводить словарик — список ключевых слов, впервые встретившихся в данном уроке. Советуем вам выписывать все ключевые слова (вместе с переводом) в отдельную тетрадь. Мы будем выделять ключевые слова жирным шрифтом*); при оформлении ваших работ их следует подчеркивать прямой чертой. Для удобства чтения имена в программах мы будем выделять курсивом, а вы должны их подчеркивать волнистой линией.

Заголовок программы

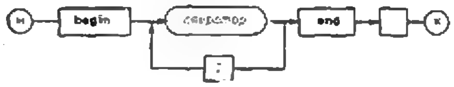
Его синтаксическая диаграмма имеет вид:



Именем программы и, вообще, именем в Паскале может быть любая последовательность букв и цифр, начинающаяся с буквы. Имена различаются по первым восьми символам. Слово *output*, указанное в заголовке программы, сообщает машине о том, что в программе предусмотрена печать результатов, а слово *input* — о том, что некоторым величинам будут присвоены значения во время использования программы (об этой возможности будет сказано ниже).

Раздел операторов

Раздел операторов — основной раздел программы. Его синтаксическая диаграмма имеет вид:



Раздел состоит из последовательности операторов, заключенных между ключевыми словами **begin** и **end**, называемыми в дальнейшем *операторными скобками*. Друг от друга операторы отделяются точкой с запятой (;). В конце программы ставится точка (.). В одной строке можно записать любое количество операторов.

Выражения

В языке Паскаль используются следующие знаки арифметических операций (такие же, как в Рапире):

+ сложение,
— вычитание,
* умножение,
/ деление.

Операция «возведение в степень» в языке не предусмотрена. Зато в Паскале есть еще две арифметические операции, применимые к целым числам:

div — целочисленное деление (вычисляется частное от деления двух натуральных чисел),

mod — вычисление остатка от целочисленного деления*)

При этом, как обычно, учитывается наличие скобок. Напомним, что при

---

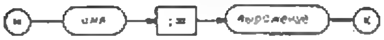
*) Иногда в печатных изданиях их выделяют *курсивом*.

*) Например, 25 **div** 6=4, а 25 **mod** 6=1.

записи выражения в языках программирования для указания порядка действий можно использовать только круглые скобки.

Оператор присваивания

Оператор присваивания описывается следующей диаграммой:



Например, $x:=3;$ читается так: «имени x присвоить значение 3» (обратите внимание, что, по сравнению с Рапирой, имя и выражение поменялись местами!).

Вычисление значения выражения $z=\frac{x^2+y^2}{xy}$ при $x=3$, $y=5$ может быть выполнено с помощью следующей последовательности операторов:

```
x:=3; y;=5;
z:=(x*x+y*y)/(x*y);
```

Процедуры печати

Для печати в Паскале есть две процедуры *writeln* *) и *write*. Каждая из них может иметь любое количество параметров. В результате исполнения этих процедур значения всех параметров будут отпечатаны на одной строке. Разница между этими процедурами состоит в следующем: после выполнения процедуры *writeln* происходит переход на новую строчку (как в процедуре ПЕЧАТЬ в языке Рапира), а после выполнения процедуры *write* переход на новую строчку не происходит и печать по последующим процедурам печати *writeln* или *write* будет происходить на той же строчке. При вызове процедуры *writeln* без параметров происходит переход на новую строчку, то есть теперь вызов любой из процедур печати обеспечит печать с новой строчки.

Например, результатом выполнения последовательности операторов

```
a:=3; b:=6;
write ('A=', a,'         B=', b);
write ('  ВСЕ'); writeln;
```

будет строка $A=3$ $B=6$ $ВСЕ$, а результатом последовательности операторов

```
a:=3; b:=6;
writeln ('A=', a, '         B=', b);
write ('ВСЕ'); writeln;
```

будет печать двух строк

```
A=3  B=6
ВСЕ
```

Обратите внимание на то, что в обоих примерах в конце последовательности процедур печати стоит *writeln*. Это не случайно: процедура *writeln* всегда завершает формирование печатаемой строки и выводит ее на печатающее устройство. Без этой процедуры в нашем примере последнее ВСЕ может оказаться ненапечатанным.

Данные. Процедуры ввода

Как уже отмечалось, программа на Паскале начинает исполняться только после того, как будет целиком введена в память ЭВМ. А как быть, если некоторым именам нужно присвоить значения во время исполнения программы? В Рапире для этого была предусмотрена процедура ВВОД (см. «Квант», 1980, № 7), с помощью которой необходимые значения можно было задать во время диалога. В Паскале возможность такого диалога отсутствует. Поэтому нужно заранее, до начала исполнения программы, «заготовить» все данные (числа, тексты,...), которые необходимы для ее работы. Но где записать эти данные и как машина узнает, каким именам нужно присвоить те или иные значения? В большинстве языков программирования, в том числе и в Паскале, данные записывают, как правило, после программы в так называемом *списке данных*, а в самой программе используют специальный оператор, с помощью которого необходимые данные будут прочитаны и присвоены нужным именам.

В Паскале вместо процедуры ВВОД применяют процедуры *read* и *readln**). Каждая из них может иметь любое число параметров, которые обязательно должны быть именами. Механизм работы обеих процедур следующий: первое значение, указанное в списках данных, «считывается» и присваивается первому имени, записанному в списке параметров процедуры, затем будет «прочитано» и присвоено второму имени следующее значение и т. д., пока всем именам не будут присвоены значения. Понятно, что количество данных должно соответствовать числу имен, указанных при вызове процедур ввода (или, по крайней мере, не быть меньше). В одной программе может быть записано несколько вызовов процедур *read* и *readln*. В этом случае список данных должен содержать данные, необходимые для успешной работы всех процедур ввода.

---

*) *writeln* — «слияние» двух английских слов *write* и *line*.

*) *readln* — «слияние» двух английских слов *read* и *line*.

Разница между работой процедур *read* и *readln* состоит в следующем: после выполнения процедуры *read* значение следующего данного считывается с этой же строчки, а после выполнения процедуры *readln* — с новой строки. (Сравните с работой процедур *write* и *writeln*!) Например, если в программе записано *read* (*a*, *b*, *c*), а список данных состоит из чисел 5,7 и 13, то при исполнении программы будут выполнены присваивания: $a:=5$; $b:=7$; $c:=13$. Числовые данные в списке данных отделяются друг от друга только пробелами. При подготовке программ к вводу в память машины список данных отделяют от основного текста программы записью специальной строки. Мы условимся отделять список данных от текста программы горизонтальной чертой.

Рассмотрим пример. Пусть в память машины нужно ввести три цифры *a1*, *a2*, *a3*, являющиеся последовательными цифрами десятичной записи некоторого числа, и записать последовательность операторов для нахождения и печати этого числа.

```
begin
    read (a1, a2, a3);
    x:=100*a1+10*a2+a3;
    writeln ('X=', x)
end.
------------------------------
507
```

В результате исполнения этой последовательности операторов будет отпечатано X=507.

Описания

При изучении языка Робик мы говорили о том, что каждому имени, используемому в программе, отводится блок памяти ЭВМ. При этом возникают вопросы: когда происходит это распределение памяти? Сколько места нужно отвести для хранения значений различных имен? Как ЭВМ узнает, какие значения (например, числа или тексты) может принимать то или иное имя?

При написании программ на некоторых языках программирования (например, на Робике или на Рапире) ЭВМ сама «отвечает» на эти вопросы. Для этого ей нужно, например, просмотреть весь текст программы и проследить, какие значения может принимать каждое из имен и изменяются ли эти значения во время выполнения программы. При таком анализе программы требуются дополнительное время и место в памяти.

В большинстве языков программирования, в том числе и в Паскале, информация об этих и некоторых других свойствах величин задается в специальных разделах программы, в ее *описаниях*. Все имена, используемые в программе, обязательно должны быть перечислены в одном из разделов описаний (см. структуру программы на стр. 52).

Используемые в программе величины разделяются на *переменные* и *константы*. Переменная величина может в ходе выполнения программы принимать любое из допустимого множества значений. Употреблять значение переменной величины в текущий момент времени можно, обратившись к ней по имени.

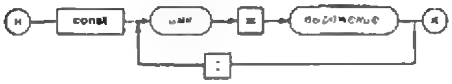
Константы — это неизменяемые величины. Различают две категории констант. Одна из них не предусматривает никакого дополнительного описания: константа определяется своим изображением. Например, 5 — это числовая константа, которая, будучи употребленной в любом месте программы, представляет число пять; *'голубой'* — это текстовая константа; далее мы еще познакомимся с константами иной природы.

Другая категория констант — это так называемые *именованные константы*. Любой константе можно дать имя, и тогда в программе употребление этого имени будет обозначать обращение к константе. Если, например, величина 3.1415926 названа именем *пи*, то программист имеет право писать

$$l := 2*пи*r$$

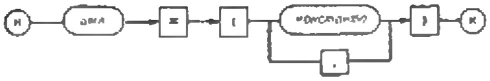
где *l* и *r* — переменные, а *пи* — именованная константа. Соответствие между именованными константами и их именами устанавливается в разделе описания констант.

Раздел описания констант может быть описан диаграммой:

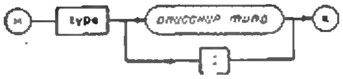


Важнейшим свойством имени в Паскале является понятие типа. *Тип* задает некоторое упорядоченное множество значений и набор допустимых операций над этими значениями.

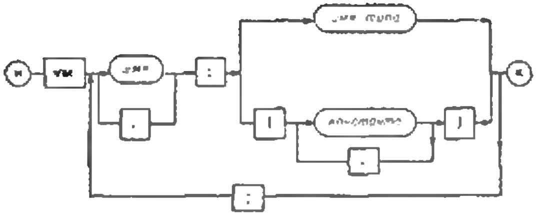
Описание скалярного типа задается диаграммой:



Сам же раздел описания типов данных можно задать диаграммой:



Диаграмма, описывающая раздел описания переменных, имеет вид:



Здесь **const, type, var** — ключевые слова разделов описания констант, типов и переменных соответственно.

Теперь возникают два вопроса: как правильно задать типы данных в программе и каким удобным образом можно представить данные каждого типа в памяти машины?

Все типы данных можно разбить на два больших класса — *скалярные* и *структурные*. Если значения переменных данного типа состоят из отдельных компонент (как, например, множества и кортежи в Рапире), то такой тип называется структурным, в противном случае — скалярным.

На этом уроке мы будем рассматривать только скалярные типы данных. Описанию структурных типов данных будут посвящены следующие уроки.

Например, раздел описания типов данных в программе может быть таким:

цвет = (*красный, желтый, зеленый, голубой*);
фигура = (*треугольник, прямоугольник, круг*);

Здесь *красный, круг,...* — константы, определяемые своим представлением.

Опишем теперь переменную *x* типа ***цвет*** и переменную ***a*** типа ***фигура***.

x:*цвет*; *a*:*фигура*;

Это означает, что переменная *x* может принимать одно из значений *красный, желтый, зеленый, голубой*, а переменная *a* — одно из значений *треугольник, прямоугольник, круг*. Заметим, что имя типа можно не указывать, если объединить описание переменных и определение типа, то есть мы могли переменные *x* и *a* описать так:

x: (*красный, желтый, зеленый, голубой*);
a: (*треугольник, прямоугольник, круг*);

Однако, если таких описаний несколько (например, в разных процедурах), то лучше все-таки описать тип и дать ему имя.

Описанные таким образом типы не должны содержать одинаковых констант.

Кроме типов, описываемых в программе, существуют *стандартные ти-*

пы, которые считаются заданными для каждой программы.

В Паскале существует четыре стандартных скалярных типа: **boolean** (логический), **integer** (целый), **char** (литерный), **real** (действительный).

Тип boolean

Тип **boolean** содержит две константы *true* и *false* и может быть определен так:

boolean = (*true*, *false*);

Для этого типа определены логические операции AND (И), OR (ИЛИ) и NOT (НЕ). Используя их, можно записывать логические выражения. Значением логического выражения может быть одна из двух констант *true* или *false*.

Пусть $a=3$, $b=2$, тогда значением арифметического выражения $5*(a*2-b)/4$ будет число 5, а значением логического выражения $b+a>2$ будет *true*.

В одном выражении могут использоваться различные арифметические и логические операции. В этом случае нужно договориться о порядке выполнения операций. В Паскале установлен следующий приоритет выполнения операций: наивысший приоритет имеет операция NOT; затем выполняются *операции типа умножения* (*, /, AND, div, mod), а низший приоритет имеют *операции типа сложения* (+, —, OR).

Тип integer

Этот тип представляет упорядоченное множество целых чисел. К переменным этого типа применимы операции +, —, *, **div** и **mod**.

Тип char

Этот тип обозначает конечное упорядоченное множество литер (символов). Набор литер, которые разрешено использовать в языке Паскаль, содержит все *буквы* латинского и русского алфавитов, 10 десятичных арабских *цифр*, и некоторое количество *специальных литер* (например, знаки операций).

При записи константы типа **char** литеру заключают в апострофы. Например, если переменной c типа **char** нужно присвоить знак вопроса, то это присваивание записывается так: $c:=$'?';

Тип real

Этот тип представляет множество действительных чисел*). К элементам этого типа применимы все рассмотренные выше арифметические операции, кроме операций **div** и **mod**.

(Хотя в математическом смысле целые числа являются подмножеством действительных чисел, типы **real** и **integer** в языке Паскаль рассматриваются как непересекающиеся типы. Число 2 принадлежит типу **integer**, а число 2.0 — типу **real**. Но это не означает, что если b — переменная типа **real**, то недопустимо присваивание $b:=2$; в этом случае будет выполнено так называемое *преобразование типов* и переменной b будет присвоено значение 2.0. Наоборот поступать нельзя!)

Отрезок типа

Если заранее известно, что значения некоторых переменных изменяются в пределах некоторого отрезка типа a, то при определении типа этих переменных можно явно указать границы этого отрезка. Такой тип называют *отрезком типа a* и определяют так: *b=мин.. макс; мин* и *макс* — константы типа a, задающие границы b.

Например, последовательность описаний

класс=1..10;

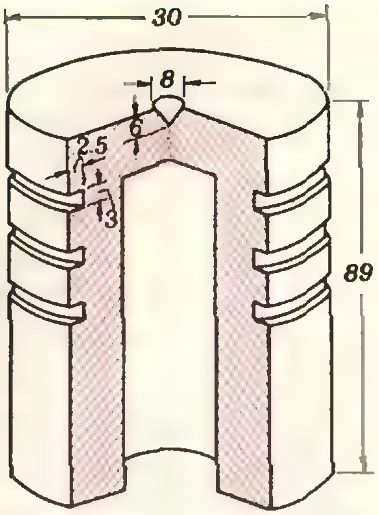
ном:класс;

означает, что *класс* — отрезок типа **integer**, состоящий из конечного множества целых чисел, то есть класс=(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10), а *ном* — переменная, принимающая одно из этих значений.

Отрезок можно «вырезать» из любого скалярного типа, кроме **real**. Рассмотрим упражнение. *Дано натуральное число n. Составить программу для нахождения суммы остатков, которые получаются при делении числа n на 2,3 и 5.* Ре-

---

*) В машине действительные числа представляются в виде конечных десятичных дробей.



зультат напечатать. Число n вводится.

```
program остатки (output, input);
var n, сумма: integer;
begin
read(n);
сумма: = n mod 2 + n mod 3 +
+ n mod 5;
writeln ('СУММА = ', сумма)
```

Задание 15.1. Натуральные числа удовлетворяющие рекуррентному соотношению $\phi_{n+1}=\phi_n+\phi_{n-1}$ с $\phi_0=0$ и $\phi_1=1$, называются числами Фибоначчи[*]: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Написать программу, которая получает по значениям двух соседних чисел ф1 и ф2 следующие три числа — ф3, ф4, ф5. Отпечатать все пять чисел — два исходных и три результата. Числа ф1 и ф2 вводятся.

Что отпечатает программа, если исходные числа — 8 и 13?

Задание 15.2. На рисунке 8 показан в разрезе поршень — полый цилиндр с тремя кольцевыми канавками и коническим углублением на торцевой поверхности. Размеры поршня показаны на рисунке. Составить программу для вычисления объема этой детали. Объем цилиндра может быть найден по формуле $v_ц=\pi R^2 h$, а объем конуса — $v_к=\frac{1}{3}\pi R^2 h$, где R — радиус основания, а h — высота цилиндра и конуса. Предусмотреть ввод значений R и h.

Словарик

program	программа
begin	начало
end	конец
const	константа
var	переменная
type	тип
boolean	логический
integer	целый
char	литера (знак)
real	действительный
false	ложь
true	истина
AND	и
OR	или
NOT	не

Н. Юнерман

---

[*] Подробнее смотри, например, Н. Н. Воробьев «Числа Фибоначчи» (Серия «Популярные лекции по математике», М., «Наука», 1978) или «Квант», 1979, № 5, с. 53

Наша обложка

Как расположены на бесконечной шахматной доске поля, в которые «конь 2-3» может попасть из данного «центрального» поля O за n ходов ($n=1, 2, 3, \ldots$)? («Конь 2-3» делает ход буквой Г на 2 поля в одном направлении и на 3 — в перпендикулярном.) Назовем минимальное число ходов, за которое может попасть этот конь из O на поле X, *расстоянием* от O до X. На первой странице обложки поля, находящиеся на расстоянии n от центра O, раскрашены в разные цвета (см. рисунок).

●	●	●	●	●	●	◙
1	2	3	4	5	6	7

Вы можете проверить рисунок на обложке, последовательно отметив на большом листе клетчатой бумаги клетки, в которые «конь 2-3» может попасть из центральной клетки за 1 ход, затем — за 2 хода, за 3 хода и т. д. Вы убедитесь, что для «коня 2-3» картина получается значительно более сложной, чем для обычного «коня 1-2» (о «расстоянии» для такого коня рассказано в статье Д. Кова, опубликованной в этом номере): лишь к седьмому ходу заполняются «внутренние дыры», и становится возможным проследить общую закономерность, которая будет сохраняться при следующих ходах. Попробуйте ответить на такие вопросы. Сколько клеток находится на расстоянии n от O для $n \geqslant 8$ (для $n \leqslant 7$ вы можете составить табличку, пользуясь обложкой, и для $n \geqslant 8$ — написать общую формулу)? Каково расстояние (в метрике «коня 2-3») между клетками (0;0) и (x; y) (при $x<12$ и $y<12$ это можно выяснить по обложке)?

Всероссийская олимпиада школьников

По сложившейся традиции Всероссийская олимпиада школьников по математике и физике проводится в четыре этапа: первый этап — школьные олимпиады; второй — районные, городские; третий — республиканские (АССР), краевые, областные; четвертый — зональные олимпиады.

В этом году заключительный, четвертый этап олимпиады проходил в дни весенних школьных каникул в четырех городах РСФСР: в Куйбышеве, Рязани, Новосибирске и Орджоникидзе.

Школьники, занявшие I—III места, награждались дипломами и памятными призами, а занявшие IV место — грамотами. Оригинальные решения отдельных задач отмечались специальными призами. Министерство просвещения РСФСР наградило также грамотами учителей, подготовивших победителей и призеров олимпиады.

Ниже приводятся задачи по математике и физике заключительного этапа и фамилии призеров Всероссийской олимпиады.

Математика

8 класс

1. Докажите, что число $(1+\sqrt{2})^{1981}$ представляется в виде $a+b\sqrt{2}$, где a и b — взаимно простые целые числа.

2. Дан треугольник ABC. На продолжениях сторон AB, CB и медианы MB за точку B взяты соответственно точки K, L, N так, что

$$|BK|=3|AB|,\quad |BL|=5|CB|,\quad |BN|=4|MB|.$$

Найдите отношение площадей треугольников ABC и KLN.

3. Последовательность (a_n) задана рекуррентным способом: $a_1=m$, $a_{n+1}=a_n+2^{a_n}$, $n\geqslant 1$, m — данное натуральное число. Докажите, что среди членов этой последовательности найдется бесконечно много чисел, делящихся на 3.

4. Коэффициенты a, b, c уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0$ по модулю не превосходят числа 1980. Может ли это уравнение иметь корень, больший 1981?

5. Два правильных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ (вершины указаны против часовой стрелки) расположены на плоскости так, что $\overrightarrow{AB_1}=2\overrightarrow{BA_1}$. Точка D — середина отрезка AB_1. Найдите углы треугольника CDC_1.

9 класс

1. Можно ли в таблицу $n\times n$ клеток записать числа 1, -1 и 0 так, чтобы все суммы — в каждом столбце, в каждой строке и на каждой из двух диагоналей — были различны?

2. Два квадрата $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ (вершины перечислены против часовой стрелки) расположены на плоскости так, что $\overrightarrow{AA_1}=2\overrightarrow{BD_1}$. Точка E—середина отрезка AA_1. Найдите углы треугольника CEC_1.

3. В девятиугольной пирамиде боковые ребра и диагонали основания окрашены: некоторые — в красный цвет, остальные — в синий. Докажите, что среди этих отрезков можно указать три, которые образуют треугольник и окрашены в один цвет*).

4. Две последовательности (a_n) и (b_n) заданы рекуррентным способом: $a_1=a>0$,

$$b_1=b>0,\quad a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\quad b_{n+1}=\sqrt{\frac{a_n^2+b_n^2}{2}},$$

$n\geqslant 1$. Докажите, что при любом n справедливо неравенство

$$|b_{n+1}-a_{n+1}|<\frac{|b-a|}{2^n}.$$

5. Найдите все 200-значные числа, начинающиеся с 99 девяток и являющиеся полными квадратами.

10 класс

1. Можно ли по кругу расставить цифры от 0 до 9 так, чтобы сумма любых трех рядом стоящих цифр не превосходила: а) 14, б) 15?

2. Последовательность (a_n) задана рекуррентным способом: $a_1=1$, $a_2=1$, $a_{n+2}=a_{n+1}+\frac{a_n}{2^n}$, $n\geqslant 1$. Докажите, что при всех n выполнено неравенство $a_n<3$.

3. Найдите все решения $(x;\ y;\ z)$ системы уравнений:

$$\begin{cases}\cos x+\cos y+\cos z=\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\\ \sin x+\sin y+\sin z=\dfrac{3}{2}.\end{cases}$$

4. На прямой даны точки A, B и C, причем точка B лежит между A и C. На отрезках AB, BC и AC, как на диаметрах, построены полуокружности, лежащие по одну сторону от этой прямой. Перпендикуляр к (AC), проведенный через точку B, пересекает бóльшую полуокружность в точке D. Докажите, что общая касательная двух меньших полуокружностей, отличная от (BD), параллельна ка-

---

*) Эта задача опубликована в Задачнике «Кванта» под номером М687 а).

сательной к большей полуокружности, проведенной через точку D.

5. Дан тетраэдр $ABCD$ объема V. Точка K — центр тяжести грани ABC. На продолжениях отрезков AD, BD, CD и KD за точку D взяты соответственно точки L, M, N и P так, что $|DL|=2|AD|$, $|DM|=2|BD|$, $|DN|=3|CD|$, $|DP|=|KD|$. Вычислите объем тетраэдра $LMNP$.

Физика

Теоретический тур

8 класс

1. Пункты A и B находятся на одной горизонтали на склоне горы с уклоном α на расстоянии l друг от друга (рис. 1). Автомобиль, стартующий из A, должен достичь пункта B, двигаясь по прямой AB. Найдите минимальное время, за которое это можно сделать. Коэффициент трения между колесами и грунтом $\mu > \operatorname{tg}\alpha$. Считайте, что тяжесть автомобиля равномерно распределена между колесами и все колеса — ведущие.

2. На клине, образующем угол α с горизонтальной плоскостью, лежит грузик A, связанный нерастяжимой нитью с точкой B на вертикальной плоскости (рис. 2). Клин начинает двигаться вправо с постоянным ускорением $\vec{a}$. Какова траектория грузика? Как он движется по этой траектории?

3. Из трех резисторов с сопротивлениями R_1, R_2 и R_3 собрали схему, изображенную на рисунке 3. Если на вход $1-1'$ подать напряжение $U_0=1{,}5$ В, а к клеммам $2-2'$ подключить амперметр, он покажет силу тока $I=60$ мА. Если же вместо амперметра к клеммам $2-2'$ подключить вольтметр, он покажет напряжение $U=1$ В. Если напряжение U_0 подать на клеммы $2-2'$, а вольтметр подключить к клеммам $1-1'$, он снова покажет $U=1$ В. Определите величины сопротивлений резисторов. Сопротивление амперметра считайте очень малым, а вольтметра — очень большим по сравнению с сопротивлениями резисторов.

4. См. задачу **Ф718** в Задачнике «Кванта».

9 класс

1. Транспортер (рис. 4) поднимает песок, который равномерно высыпается на ленту из бункера со скоростью подачи μ (кг/с). Длина транспортера l, угол наклона α, радиус ведущего колеса R. При каком минимальном вращающем моменте двигателя транспортер еще сможет равномерно подавать песок наверх? Какова при этом скорость движения ленты? Считайте, что начальная скорость песчинок равна нулю, а длина их проскальзывания по ленте достаточно мала, так что у верхнего края транспортера песчинки неподвижны относительно ленты.

2. См. задачу **Ф719** в Задачнике «Кванта».

3. Ящик, в котором находится идеальный одноатомный газ, мгновенно приводят в движение со скоростью $\vec{v}$. Найдите изменение температуры газа. Масса атома газа m_0. Теплоемкостью и теплопроводностью ящика можно пренебречь.

4. На горизонтальной поверхности покоится маленькая шайба массой M (рис. 5). На нее со скоростью $\vec{v}_0$ налетает другая шайба массой m. В результате удара шайба m останавливается, а шайба M достигает высоты h_1 наклонной плоскости. Во втором опыте шайбы поменяли местами: на покоящуюся шайбу m со скоростью $\vec{v}_0$ налетает шайба M. Найдите отношение высот h_2/h_1, где h_2 — высота, на которую поднимается шайба m во втором опыте. Удар центральный; трение на горизонтальном участке и на наклонной плоскости отсутствует; отношение масс шайб $M/m=3$.

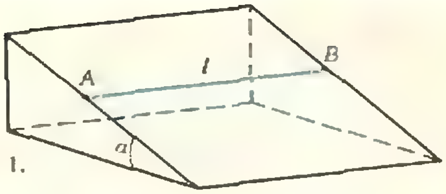


Рис. 1.

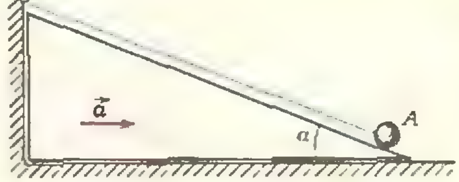


Рис. 2.

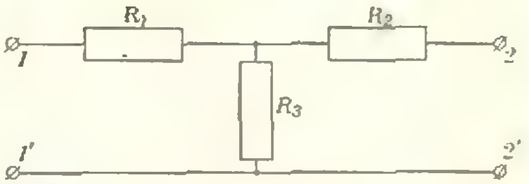


Рис. 3.

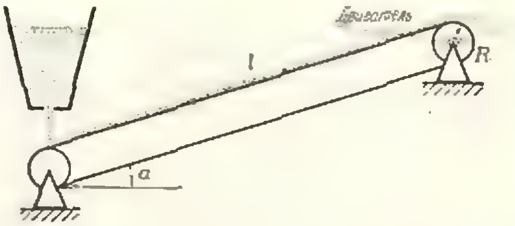


Рис. 4.

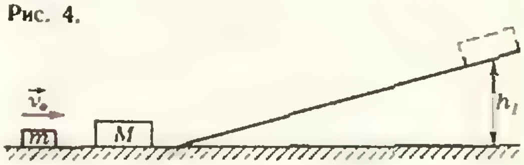


Рис. 5.

10 класс

1. Идеальный газ, взятый в количестве ν молей, является рабочим веществом тепловой машины. При работе машины газ меняет свое состояние, совершая круговой процесс (цикл) $1-2-3-1$, представленный на TV-диаграмме (рис. 6). Процессы $1-2$ и $2-3$ изображены на графике отрезками прямых ($2-3$ — изохора), а процесс $3-1$ — выра-

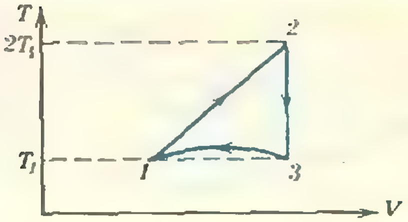


Рис. 6.

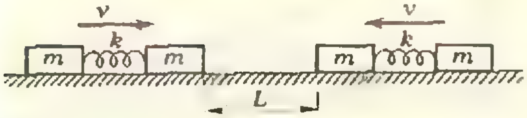


Рис. 7.

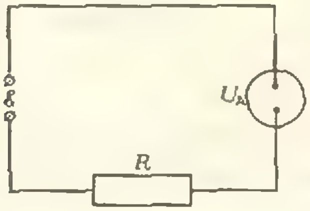


Рис. 8.

жением $T=0{,}5T_1(3-BV)BV$, где B — неизвестная постоянная величина, а T_1 — заданная и отмеченная на одной из осей диаграммы абсолютная температура. Найдите работу, совершенную газом за один цикл.

2. См. задачу **Ф720** в Задачнике «Кванта».

3. Две системы, каждая из которых состоит из двух одинаковых тел массой m, связанных пружинкой жесткостью k, движутся навстречу друг другу с одинаковыми по модулю и постоянными скоростями v (рис. 7). В некоторый момент расстояние между сталкивающимися телами равно L. Определите время, через которое расстояние между теми же телами снова будет равно L. Удар абсолютно упругий.

4. Известно, что один из видов самостоятельного разряда в газах — электрическая дуга — имеет падающую вольтамперную характеристику. Иными словами, напряжение между электродами горящей дуги тем меньше, чем больше сила тока: $U_д=a+b/i$. Последовательно с дуговой лампой в цепь источника тока с ЭДС $\mathcal{E}=200$ В включили «балластный» резистор сопротивлением R, назначение которого — стабилизировать горение лампы (рис. 8). Пренебрегая внутренним сопротивлением источника и сопротивлением проводов, найдите все значения R, при которых дуговая лампа устойчиво горит, выделяя не менее половины всей мощности, затрачиваемой источником. Считайте заданными постоянные значения $a=55$ В и $b=50$ В·А.

Экспериментальный тур

8 класс

1. Определите плотность стекла, из которого изготовлена банка из-под майонеза.

Оборудование: майонезная банка, мензурка объемом $V\approx250$ мм^3, стеклянный сосуд, полоска из мягкого металла размером 2×20 см, сосуд с водой (водопроводный кран).

2. Определите удельную теплоту парообразования воды. Удельную теплоемкость воды считайте известной.

Оборудование: тонкостенный металлический сосуд, электроплитка (горелка), кусочек льда неизвестной массы, часы.

9 класс

1. Определите коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора. Оцените погрешности измерений при различных способах выполнения работы.

Оборудование: капиллярная трубка, сосуд с водой, сосуд с мыльным раствором, манометр в виде U-образной трубки, груша для накачивания воздуха, стеклянный тройник, штатив с муфтой и лапкой, линейка.

2. Определите работу, которую необходимо совершить, чтобы оттянуть тетиву лука на 5 см. Сделайте из линейки и ниток лук с тетивой, имеющей длину 40 см. Определите работу, необходимую для оттягивания тетивы этого лука на 5 см. Проделайте те же измерения при длине тетивы 37 см. Объясните полученные результаты.

Оборудование: две ученические деревянные линейки длиной 40 см, на концах одной из них просверлены отверстия, суровая нить длиной 0,5 м, два динамометра Бакушинского, штатив лабораторный с лапкой, миллиметровая бумага размером 20×25 см.

10 класс

1. Определите плотность стеклянной палочки.

Оборудование: стеклянная палочка, сосуд большого диаметра с водой, линейка.

2. Постройте график зависимости мощности, выделяемой на внешнем сопротивлении, от величины этого сопротивления. Объясните полученные результаты.

Оборудование: источник постоянного тока, два амперметра, вольтметр, реостат, набор проводов, ключ.

Результаты решения задач по физике приведены в следующей таблице:

Класс	Общее кол-во участников	Число участников, успешно справившихся с задачей					
		Теоретический тур				Экспериментальный тур	
		1	2	3	4	1	2
8	72	7	8	18	0	43	49
9	82	15	33	49	12	28	25
10	94	53	56	40	28	50	52

О. Овчинников,
С. Резниченко

Призеры Всероссийской олимпиады школьников

Математика

Дипломы I степени

по 8 классам получили:

Кудинов О. (Заринск, с. ш. № 2),
Николаев А. (Уфа, с. ш. № 114),
Орлов Д. (Владимир, с. ш. № 8),
Стаховский В. (п. Капустин Яр Астраханской обл., с. ш. № 231);

по 9 классам —

Забегаева У. (Тула, с. ш. № 36),
Мазуров О. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Матвеев К. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Матюшов С. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Никонов А. (Кировград, с. ш. № 2),
Спивак А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ);

по 10 классам —

Алексеев В. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Анкудинов А. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Екишев Ю. (Сыктывкар, с. ш. № 1),
Кагарманов А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Матвеев А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Мухамедшин А. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ).

Дипломы II степени

по 8 классам получили:

Аверин А. (Челябинск, с. ш. № 127),
Буриченко В. (Новокузнецк, с. ш. № 49),
Романов В. (Тула, с. ш. № 36),
Семенов А. (Саратов, с. ш. № 13);

по 9 классам —

Галкин И. (Горький, с. ш. № 36),
Закиров А. (Бийск, с. ш. № 25),
Короткин Д. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Самборский С. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ);

по 10 классам —

Гапонова М. (Горький, с. ш. № 40),
Колпаков И. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Овчинников П. (Вязники, с. ш. № 11),
Фомин Д. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Хомич С. (Ангарск, с. ш. № 10),
Чанышев А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ).

Дипломы III степени

по 8 классам получили:

Викторов В. (Рязань, с. ш. № 45),
Шебзухов З. (Нальчик, с. ш. № 2),
Шляхтов А. (Ульяновск, с. ш. № 51),
Шмелев Е. (п. Надежный Якутской АССР, с. ш. № 19)

по 9 классам —

Белостоцкий В. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Бравый Е. (Пермь, с. ш. № 102),
Зубова М. (Томск, с. ш. № 55),
Савкин А. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Ходоровский В. (п. Нововоронежский Воронежской обл., с. ш. № 1);

по 10 классам —

Аралкин А. (Новокузнецк, с. ш. № 11),
Горшкова Е. (Пермь, с. ш. № 25),
Гринчук М. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Прохоров Ю. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Рабинович Б. (Тула, с. ш. № 36),
Фролов А. (Ярославль, с. ш. № 33).

Физика

Дипломы I степени

по 8 классам получили:

Кудя А. (п. Таловая Воронежской обл., с. ш. № 51),
Малышев В. (Иркутск, с. ш. № 21),
Хромушин С. (Арзамас, с. ш. № 2),
Шмаков М. (п. Менделеево Московской обл., с. ш. № 2);

по 9 классам —

Баталов С. (Арзамас, с. ш. № 2),
Качаев И. (Красноярск, с. ш. № 10),
Малышев В. (Волгоград, с. ш. № 131),
Позняков П. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Ухов В. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ);

по 10 классам —

Габдуллин Р. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Смирнов А. (Курган, с. ш. № 28),
Темиргалиев Т. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Фролов А. (Тула, с. ш. № 36).

Дипломы II степени

по 8 классам получили:

Гребнев И. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Ивойлов И. (Казань, с. ш. № 131),
Макеев И. (Ангарск, с. ш. № 10),
Чеканов С. (Саратов, с. ш. № 13);

по 9 классам —

Ивлев В. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Пронин Д. (Горький, с. ш. № 36),
Султанов А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Цветков П. (Подольск, с. ш. № 6);

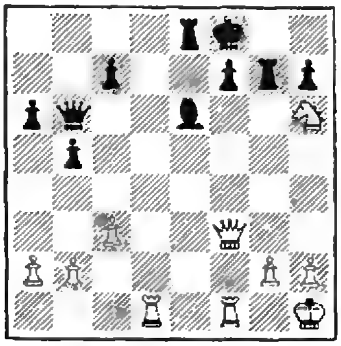
по 10 классам —

Козелов А. (Апатиты, с. ш. № 2),
Осодоев А. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Путин А. (Клинцы, с. ш. № 2),
Седышкин В. (Свердловск, с. ш. № 9).

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку — мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

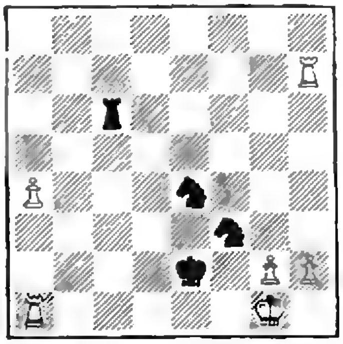
Это было в Багио

Любители шахмат, наверное, хорошо помнят перипетии этого напряженного марафона, длившегося около трех месяцев. Двадцать девятый матч на первенство мира Карпов — Корчной проходил без ограничения числа партий до шести побед. После 27-й партии счет результативных встреч стал 5:2 в пользу чемпиона мира, и, казалось, дело подошло к концу. Однако мысль о близком финише расслабила А. Карпова, к тому же начало сказываться огромное чисто физическое утомление. И вот, когда до окончательной победы оставался всего один шаг, случилось непредвиденное. Корчной заиграл раскованно и отчаянными усилиями сравнял счет — 5:5! За четыре партии Карпов потерял то, что завоевал в двадцати семи! Было от чего сокрушаться. Но все же чемпион мира сумел сбросить с себя груз обидных промахов и в 32-й партии дал решительный бой сопернику. Получив подавляющую позицию, он не торопился, помня, что желание побыстрее реализовать перевес не раз подводило его в этом матче. Победа в решающей встрече позволила Анатолию Карпову сохранить звание чемпиона мира. Вот несколько наиболее ярких эпизодов матча в Багио.



Это позиция из восьмой партии, в которой Карпов играл белыми. Чемпиону мира удается изящно завершить атаку на неприятельского короля. **26. Лd7! Лb8** (после 26...С : d7 следовал «задачный» мат: 27. Ф : f7+! Л : f7 28. Л : f7×) **27. К : f7 С : d7** (промежуточное 27...Сg4 парировалось «тихим» ходом 28. Фf4) **28. Кd8+!** Черные сдались, так как на любое отступление их короля следует 29. Фf8×.

Второй раз претендент признал свое поражение за ход до мата в 17-й партии.

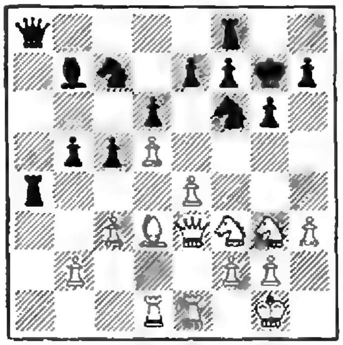


Последний ход Карпова 39...Кf3+ доставил чемпиону мира немало радостей. Во-первых, Корчной немедленно сдался ввиду неизбежного мата: 40. Крh1 Кf2×; 40 gf Лg6+ 41. Крh1 Кf2×. А, во-вторых, администрация отеля, где жил победитель, преподнесла ему шахматный торт с изображением этой позиции!

Всего в матчах за мировую корону было сыграно более 600 партий, но, пожалуй, самая ответственная из них — последняя... Приводим 32-й поединок матча в Багио, решивший исход сражения.

Карпов — Корчной
Защита Уфимцева

1. е4 d6 2. d4 Кf6 3. Кс3 g6 4. Кf3 Сg7 5. Се2 0—0 6. 0—0 с5 7. d5 Ка6 8. Сf4 Кс7 9. а4 b6 10. Ле1 Сb7 11. Сс4 Кh5? (следовало играть 11...Фd7, черные теряют время, и это приводит их к серьезным затруднениям) **12. Сg5 Кf6 13. Фd3 а6 14. Лаd1 Лb8 15. h3 Кd7 16. Фе3 Са8 17. Сh6 b5 18. С:g7 Кр:g7 19. Сf1 Кf6 20. аb аb 21. Ке2 Сb7 22. Кg3 Ла8 23. с3 Ла4 24. Сd3 Фа8** (позиция была еще достаточно острой, отступление ферзя в угол доски ставит Корчного в критическое положение).



25. е5! Кинжальный удар, подкрепленный соответствующими аргументами: 25...Кf:d5 26. Кh5+! gh (26...Крh8 27. Фh6 Лg8 28. Кg5) 27. Фg5+ Крh8 28. Фf5 с матом. **25...de 26. Ф:е5 Кс:d5 27. С:b5 Ла7 28. Кh4 Сс8 29. Се2 Се6 30. с4 Кb4 31. Ф:с5 Фb8 32. Сf1 Лс8 33. Фg5 Крh8 34. Лd2 Кс6 35. Фh6 Лg8 36. Кf3 Фf8 37. Фе3 Крg7** (теперь сопротивление черных становится бесполезным, затянуть борьбу могло 37...Лb7) **38. Кg5 Сd7 39. b4 Фа8 40. b5 Ка5 41. b6.**

Поговорка «Все пути ведут в Рим» как нельзя лучше подходит к этой позиции. Корчной записал ход 41...Лb7, но на следующий день его секундант известил о сдаче партии и матча.

Тридцатый матч за шахматную корону должен пройти по той же системе, что и предыдущий,— чемпионом мира будет объявлен тот из партнеров, кто первым одержит шесть побед.

Криволинейное движение

1. $\beta = \arccos\left(v_0 \cos \alpha_0 / (2gR)^{1/2}\right) = 2/9$; $h_{\max} = 23R/27$.
2. $\varrho = (v \cos \alpha \mp \omega R)^2/(g + \omega^2 R)$ (знак «+» в числителе соответствует закручиванию диска по часовой стрелке, а знак «—» — против часовой стрелки).
3. $v_{\max} \approx 17$ м/с; $P \approx 17$ кВт.

Всероссийская олимпиада школьников

Математика

8 класс

2. Отношение площадей равно 1.
3. На три делятся все члены последовательности с номерами $3k - m + 1$ ($k \in \mathbf{N}$, $k > \frac{m}{3}$), если m — четное число, и с номерами $\frac{3k - m + 2}{2}$ ($k \in \mathbf{N}$, k нечетно, $k > \frac{m}{3}$) в противном случае.
4. Не может.
5. 30°, 30°, 120°.

9 класс

1. Нельзя.
2. 45°, 45°, 90°.
5. Существуют пять таких чисел: $(10^{100} - 1)^2$, $(10^{100} - 2)^2$, $(10^{100} - 3)^2$, $(10^{100} - 4)^2$, $(10^{100} - 5)^2$.

10 класс

1. а) Нельзя; б) можно, например 0, 9, 5, 1, 8, 3, 4, 2, 7, 6.
3. $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $y = \frac{\pi}{6} + 2\pi l$, $z = \frac{\pi}{6} + 2\pi m$ ($k, l, m \in \mathbf{Z}$).
5. $\frac{20}{3} V$.

Физика

Теоретический тур

8 класс

1. $l_{\min} = \sqrt{\dfrac{2l}{g \cos \alpha \sqrt{\mu^2 - \operatorname{tg}^2 \alpha}}}$.
2. См. решение задачи Ф693 из Задачника «Кванта», которое будет опубликовано позже.
3. $R_1 = R_2 = 10$ Ом; $R_3 = 2R_1 = 20$ Ом.

9 класс

1. $M_{\min} = 2\mu R \sqrt{gl \sin \alpha}$; $v = \sqrt{gl \sin \alpha}$.
3. $\Delta T = \frac{m_0 v^2}{3k}$, где k — постоянная Больцмана.
4. $h_2/h_1 = (M/m)^2 = 9$.

10 класс

1. $A = 0{,}25 \nu R T_1$. Указание. См. рис. 1, на котором заданный цикл изображен в координатах p, V.

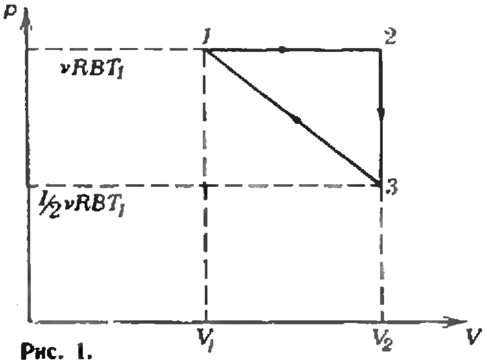


Рис. 1.

3. См. решение задачи Ф702 из Задачника «Кванта», которое будет опубликовано позже.
4. $\frac{\mathcal{E}(\mathcal{E} - 2a)}{4b} < R < \frac{(\mathcal{E} - a)^2}{4b}$, или 90 Ом $< R <$ 105,1 Ом.

Вспомогательные отрезки и углы

(см. «Квант» № 9)

1. $\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$.
2. $\frac{n}{4\pi} \cdot \dfrac{(1 + 2\cos\alpha)\sin\frac{\pi}{n}}{\cos^2\frac{\pi}{4}}$. Указание. Плоский угол при вершине пирамиды равен $\frac{\pi}{n}$. Приняв апофему пирамиды равной x, находим $V_{\text{пир}}$ и $V_{\text{ш}}$ и составляем их отношение.
3. $\operatorname{arcctg}\sqrt{2\sqrt{1 + \frac{64\pi^2 a^2}{27}} - 2}$.
4. $\frac{7}{25}$.
5. $\frac{a^3}{3} \cdot \dfrac{\operatorname{ctg}^3 \frac{\alpha}{2}}{3\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}$.
6. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6} \cdot \dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{-\cos\alpha}}$.
7. $\dfrac{Q\sqrt{Q \sin 2\alpha}}{3 \operatorname{ctg} \beta (1 + \sin \alpha)}$.
8. $S \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin \alpha \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}$.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 9)

1. ДВА = 426.
2. Пусть в первом мешке a, во втором — b, в третьем — c и в четвертом — d кг муки. Тогда

$$\begin{cases} a + b + c > 60, \\ a + b + d < 50, \\ a + c + d < 40, \\ b + c + d < 30. \end{cases}$$

Вычитая из первого неравенства поочередно второе, третье и четвертое, получаем $c - d > 10$, $b - d > 20$, $a - d > 30$, откуда $c > 10$, $b > 20$, $a > 30$, $a + b > 50$ и, значит, $d = 0$. Следовательно, $c > 10$, $b > 20$, $a > 30$ и $a + b <$

192	18	240
198	150	102
60	282	108

Рис. 2.

$\leqslant 50$, $a+c\leqslant 40$, $b+c\leqslant 30$. Отсюда $a=30$, $b=20$, $c=10$.

3. См. рис. 2.

Задачи наших читателей

(см. «Квант» № 9, с. 62)

2. 16, 1156, 111556, ...;
   49, 4489, 444889, ...

3. а) 59375; б) 703125; в) 0859375.

Указание.

а) $15^{1981}=15^{247\cdot 8+5}=15^5((15^{247}-1)(15^{247}+1)(15^{247\cdot 2}+1)(15^{247\cdot 4}+1)+1)=10^5\times A+15^5$.

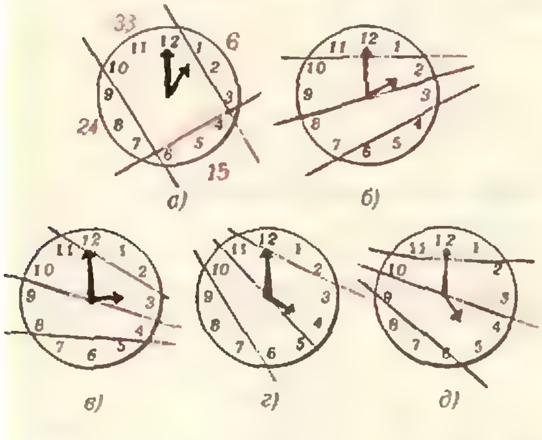
б) $5^{1981}=5^{123\cdot 16+\text{[illegible]}}=5^{13}((5^{123}-1)(5^{123}+1)(5^{123\cdot 2}+1)(5^{123\cdot 4}+1)(5^{123\cdot 8}+1)+1)=10^6\cdot B+5^{13}$.

в) $15^{1983}=15^{247\cdot 8+7}=10^7\cdot C+15^7$.

4. Доказательство — индукцией по k. При $k=1$ утверждение тривиально. Пусть оно верно для всех показателей степени, меньших k. Пусть $n=11^{k-1}\cdot m$, тогда

$$A=\underbrace{11\ldots1}_{2\cdot 11^{k-1}\cdot m}=\underbrace{11\ldots1}_{2\cdot 11^{k-2}\cdot m}\cdot B,\text{ где}$$

$B=\underbrace{100\ldots0}_{2\cdot 11^{k-2}\cdot m-1}10\ldots0\;10\ldots01\ldots1$ — число, состоящее из одиннадцати единиц, стоящих на нечетных местах, и нулей между ними (в количестве $2\cdot 11^{k-2}\cdot m-1$ штук). Число B делится на 11 (докажите это!), а число $\underbrace{11\ldots1}_{2\cdot 11^{k-2}\cdot m}$ делится на 11^{k-1} по предположению индукции. Значит, A делится на 11^k.



а) б) в) г) д)

Рис. 3.

5. См. рис. 3. Получаются прогрессии 6, 15, 24, 33 и 15, 18, 21, 24 (четыре случая).

Шахматный конкурс

(см. «Квант» № 8)

1. 1. **Са3!** (отвлечение ферзи) **1...Ф:а3** (1...Фе8 2.Фс7+Крg8 3. Се7 Кg4 4.Фd7 Фа8 5. Сd8) **2. Кh5+!** (теперь отвлекается пешка «g») **2...gh** (после 2...Крh6 3. К:f6 вечного шаха у черных нет) **3. Фg5+ Крf8 4. Ф:f6+ Крg8 5. е7! Фс1+ 6. Крf2 Фс2+ 7. Крg3 Фd3+ 8. Крh4 Фе4+ 9. Кр:h5 Фе2+ 10. Крh4 Фе4+ 11. g4! Фе1+ 12. Крh5. Черные сдались.**

2. **1. Сf6+! еf 2. f4 Лh8+ 3. Крg7 Л:h5 4. а4 Лg5+ 5. Крh8!** (5. Крh7? Крh5 с выигрышем) **5...Лg6 6. Крh7 Крh5 7. Крh8 Лh6+ 8. Крg7 Лg6+ 9. Крh8 Крh6 пат.**

3. Вместо того чтобы взять ладью на h1, Таль сыграл **1. gf!! Л:d1+ 2. К:d1!! Ф:d2 3. fg!!** Эти три блестящих хода белых и являются разгадкой позиции. Черные сдались, так как, несмотря на большой материальный перевес, они беспомощны против прорвавшейся в их лагерь пешки g7.

4. **1. Фа8+** (1. К:f7 позволяет черным объявить вечный шах ферзем по полям d1, f3, h5) **1...Крg7** (1...Кре7 2.Ф:а7+ и т. д.) **2. С:е5+!** (тема завлечения, ничего не дает немедленная жертва ферзя 2. Фh8+ из-за 2...Крg6!) **2...Ф:е5 3. Фh8+ Кр:h8 4. К:f7+** и 5. К:е5, оставаясь с лишним конем.

5. После напрашивающегося 1...Ф:с5 2. Сg2 положение белых безопасно. Решает промежуточное **1...Лd2!** Партия закончилась следующим образом **2. Кd3** (2. Фе3 Кс4! 3. Фf4 Ф:е5 проигрывает фигуру) **2...Л:е2 3. С:е2 Кс4 4. Сf1 Фс6 5. Сс1 С:е4 6. Кс5 Сd5** и белые сдались.

6. **1. С:h6! gh** (1...Крg8 2. С:g7! С:g7 3. f6) **2. Фе3 Сg7 3. f6! Лh8 4. Лf1!** (4. fg Кр:g7 не так ясно) **4...Фb5** (4...Сf8 5. Фе4+ Крg8 6. Лg3+; 4...Крg8 5. Фg3 Лh7 6. Л:h6!) **5. Фf3! Лс4 6. Фf5+. Черные сдались.**

Номер подготовили:
А. Виленкин, А. Егоров, И. Клумова, Т. Петрова,
А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
А. Ким, Т. Кольченко, Н. Кузьмина, Э. Назаров,
А. Прокофьев, М. Сидоров, И. Смирнова

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

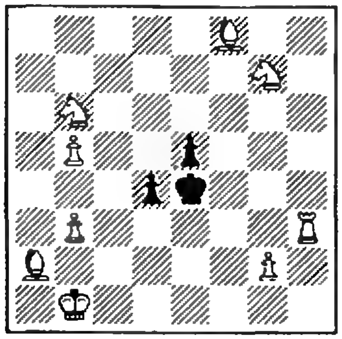
Корректор О. Кривенко

113035, Москва, Б. Ордынка 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 22.8.81
Подписано в печать 2.9.81
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16 Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 6,63 Т-27701
Цена 30 коп. Заказ 2016
Тираж 232 684 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

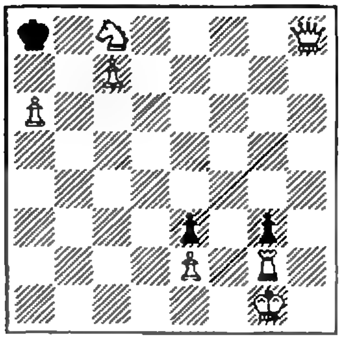
ШАХМАТНЫЙ КОНКУРС

До сих пор в шахматном конкурсе «Кванта» предлагались комбинации выдающихся гроссмейстеров На этот раз авторами задач являются читатели журнала — в основном, конечно, школьники



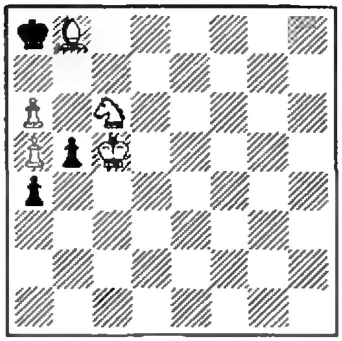
Г. Жуков. Мат в 3 хода.

Автор задачи в этом году закончил школу, но свою задачу он прислал еще в прошлом году, будучи девятиклассником (Гена живет в г. Шумерле). Позиция несколько грубовата (слишком много фигур обрушилось на бедного черного короля), но зато вступление в трехходовке весьма эффектно: **1.Kd5!** (мешая неприятельскому королю улизнуть через поле f4) **1...Kp:d5 2.Лh4! d3** (2...e4, 3.Лh5×) **3.b4×** — вот и пригодился слон на a2, притаившийся в засаде. Не меняет дела и 1...d3 2.Лh4+Kp.d5 3.b4×.



А. Бекорюков. Мат в 3 хода.

Москвичу Алеше Бекорюкову, самому юному автору предлагаемых позиций, всего 10 лет Решает **1.Лh2!!** gh+2Kpf1! (сначала белые избавились от своей ладьи, а теперь приглашают пешку пройти в ферзи) 2...h1Ф+ 3.Ф:h1×, 1...g2 2.Лh1! ghФ+ 3.Ф:h1×.

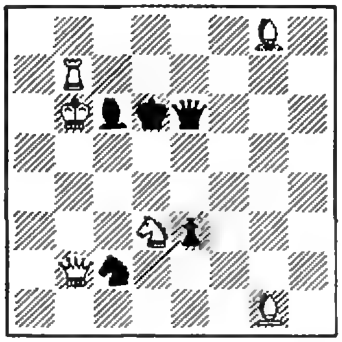


В. Леонов. Мат в 2 хода.

Нетрудно доказать, что последний ход черных мог быть только b7—b5, поэтому решает **1.a5:b6** (на проходе) **a3 2.b7**×

Эта задача ученика 7-го класса 370-й московской школы является, как вы видите, ретроаналитической (требуется изучение предшествующей игры). Сказывается, что он воспитанник международного мастера по шахматной композиции Э. Погосянца

Олег Моложавцев в 14 лет придумал целую серию красивых задач, из которой мы выбрали две. Секрет одной раскрывается, а другую вам предлагается решить самим.

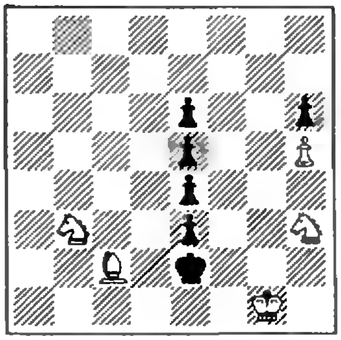


О. Моложавцев. Мат в 3 хода.

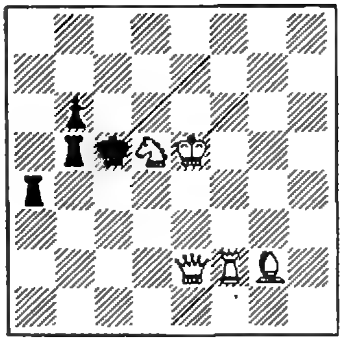
1.Фf6! Ф:f6 2.Ch2+ Фe5 3.C:e5×; 1...Kd4 2.Ф:d4+ Фd5 3.Ch2×; 1...Kpd5 2.C:e6+! Kpe4 3.Kc5×.

Осталось сделать замечание по поводу еще двух конкурсных задач. Трехходовка принадлежит студенту московского техникума электронных приборов С. Пелагимову, а задача на кооперативный мат — учителю математику С. Абрамяну.

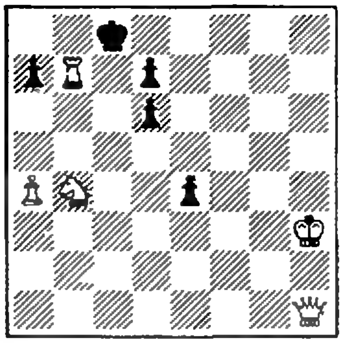
Срок отправки решений — 30 ноября 1981 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс № 10—81»).



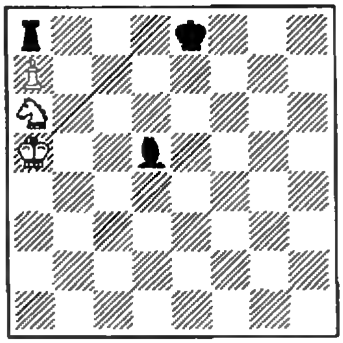
1. В. Леонов. Белые начинают и дают мат в 6 ходов.



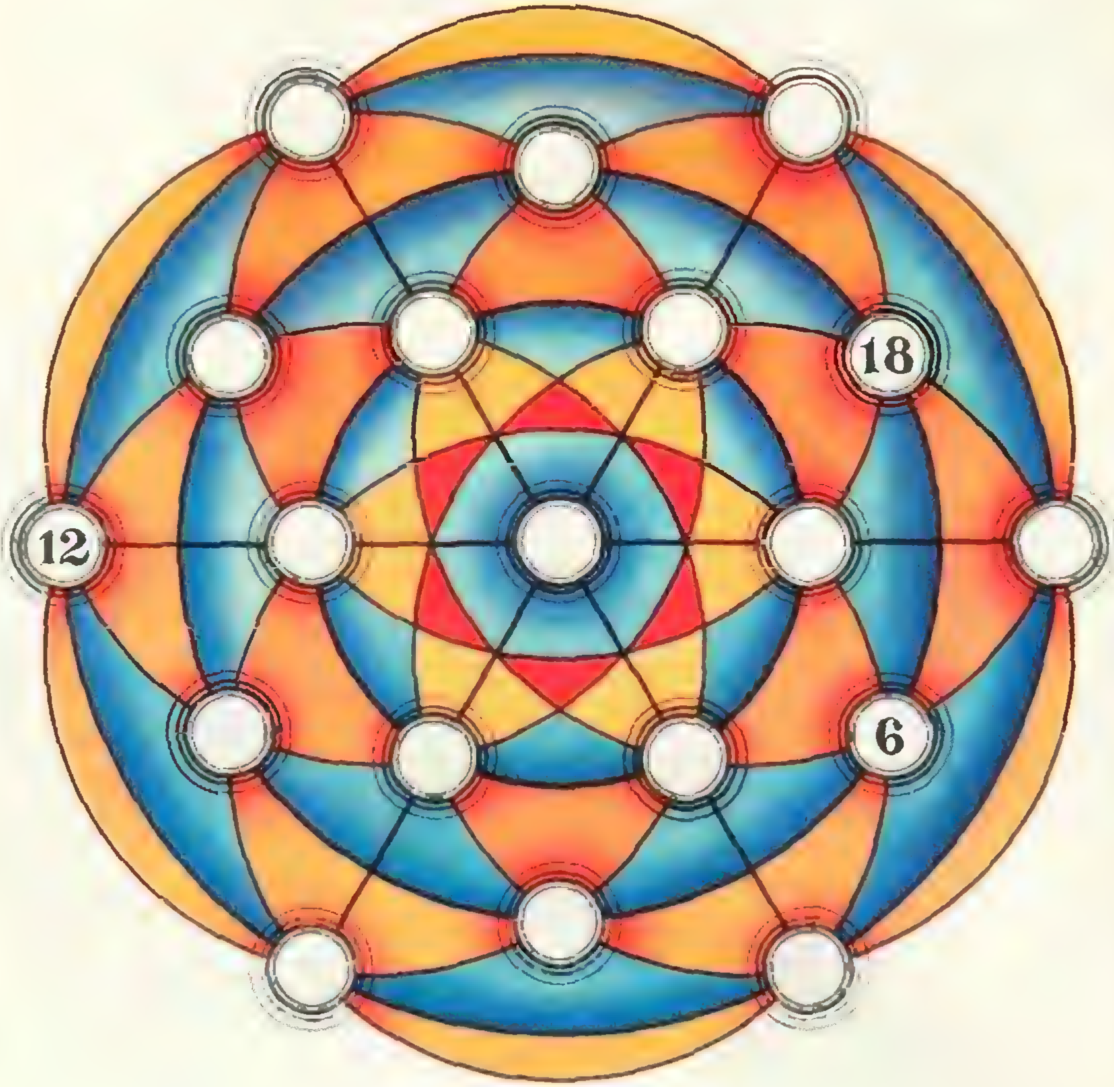
2. О. Моложавцев. Белые начинают и дают мат в 4 хода.



3. С. Пелагимов. Белые начинают и дают мат в 3 хода.



4. С. Абрамян. Черные начинают и получают кооперативный мат в 2 хода.



ДВАДЦАТОЕ — ЛИШНЕЕ

В шестнадцати свободных кружках расставьте числа от 1 до 20, за исключением 6, 12, 18 и еще одного числа, так чтобы суммы чисел, расположенных на каждой из девяти указанных окружностей и каждом из трех указанных диаметров, были одинаковыми.

А. Медяник

Цена 30 коп.
Индекс 70465

К НАШИМ ЧИТАТЕЛЯМ

Продолжается подписка на 1982 год на научно-популярный физико-математический журнал «Квант».

«Квант» адресован всем школьникам 6—10 классов, которые любят математику и физику, любят решать задачи и хотят в будущем серьезно заниматься точными науками. Наш журнал полезен и тем школьникам, интерес которых к точным наукам еще дремлет.

На страницах нашего журнала публикуются статьи обзорного характера, рассказывающие о достижениях науки и о проблемах, еще ожидающих своего решения; рассказы об ученых, о том, как рождаются научные открытия.

В журнале читатель найдет много задач. Среди них — задачи различных олимпиад и просто интересные задачи, а также головоломки, кроссворды, чайнворды, ребусы.

Раздел «Лаборатория «Кванта» рассказывает о поучительных экспериментах, которые можно осуществить в домашних условиях.

Какие вопросы и задачи могут ожидать абитуриента на вступительных экзаменах? Ответы на эти и многие другие вопросы, с которыми приходится сталкиваться при поступлении в вузы, читатель найдет в разделе «Практикум абитуриента».

В статьях раздела «По страницам школьных учебников» разбираются наиболее сложные и важные вопросы математики, представленные в школьных программах.

Значительное место в журнале занимает информация о работе научных обществ учащихся, летних школах, конкурсах и смотрах научного творчества школьников.

В каждом номере имеется раздел «Квант» для младших школьников», в котором наряду с занимательными задачами публикуются и статьи, доступные учащимся 6—7 классов.

Журнал постоянно помещает рецензии на научно-популярные книги по физике, математике, астрономии и космонавтике.

●

«Квант» распространяется только по подписке и не поступает в розничную продажу. Подписка на наш журнал принимается в течение всего года.

●

Наш индекс в каталоге «Союзпечати» 70465 Цена отдельного номера 40 копеек.

НОМЕР
11

КВАНТ

11

1981

Основан в 1970 году

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Главный редактор
академик Кикоин И. К.

Первый заместитель
главного редактора
академик Колмогоров А. Н.

Заместители
главного редактора:
Данилычева М. Н.
Лешковцев В. А.
Соловьев Ю. П.

Редакционная коллегия:
Асламазов Л. Г.
Башмаков М. И.
Белонучкин В. Е.
Болтянский В. Г.
Боровой А. А.
Брук Ю. М.
Вавилов В. В.
Васильев Н. Б.
Воронин С. И.
Гнеденко Б. В.
Гутенмахер В. Л.
Долбилин Н. П.
Дубровский В. Н.
Земляков А. Н.
Зильберман А. Р.
Климанов А. И.
Козел С. М.
Кротов С. С.
Кудрявцев Л. Д.
Михайлов А. А.
Никишин Е. М.
Новиков С. П.
Потапов М. К.
Разумовский В. Г.
Родина Н. А.
Розов Н. Х.
Савин А. П.
Смородинский Я. А.
Сосинский А. Б.
Уроев В. М.
Фабрикант В. А.

Редакционный совет:
Балдин А. М.
Беляев С. Т.
Буховцев Б. Б.
Велихов Е. П.
Верченко И. Я.
Воздвиженский Б. В.
Глушков В. М.
Дорофеев Г. В.
Ермолаева Н. А.
Ершов А. П.
Зубов В. Г.
Иванов Ю. Б.
Канторович Л. В.
Капица П. Л.
Кириллин В. А.
Коткин Г. Л.
Логунов А. А.
Можаев В. В.
Орлов В. А.
Кузьмин Р. Н.
Патрикеева Н. А.
Парышкин А. В.
Сагдеев Р. З.
Соболев С. Л.
Стасенко А. Л.
Сурин И. К.
Сурков Е. Л.
Фаддеев Л. Д.
Фирсов В. В.
Яковлев Г. Н.

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ

В НОМЕРЕ:

Ученые обращаются к молодежи

2 *П. Капица.* Профессор и студент

* * *

6 *Б. Вертгейм.* Игры с квадратичными функциями

11 *Я. Смородинский.* Джеймс Клерк Максвелл (к 150-летию со дня рождения)

Лаборатория «Кванта»

18 *А. Боровой, Ю. Климов.* Маятник Максвелла

Задачник «Кванта»

21 Задачи М711 — М715; Ф723 — Ф727

23 Решения задач М671 — М674; Ф683 — Ф687

28 *В. Гальперин, Г. Гальперин.* Освещение плоскости прожекторами

«Квант» для младших школьников

31 Задачи

32 *Р. Рубинов.* По следам теоремы Пифагора

Практикум абитуриента

36 *С. Коршунов.* Закон Дальтона

Искусство программирования

40 Заочная школа программирования. Урок 16

XV Всесоюзная олимпиада школьников

44 *В. Вавилов, А. Земляков.* Олимпиада по математике

50 *Т. Петрова, Л. Чернова.* Олимпиада по физике

54 Призеры XV Всесоюзной олимпиады школьников

Рецензии, библиография

56 *А. Егоров, И. Клумова.* Новые книги

58 **Шахматная страничка**

59 **Ответы, указания, решения**

Анкета (39)

Смесь (10, 39)

Шахматный конкурс (3 с. обложки)

На первой странице обложки воспроизведена гравюра голландского художника М. Эшера: причудливые замки, башни и скалы, вырастая друг из друга, образуют два пересекающихся тетраэдра, по-видимому символизирующих единство природы и архитектуры.

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1981

П. Капица

Профессор и студент

Наш традиционный вечер, где собираются окончившие Московский физико-технический институт и те, кто предполагает его окончить, разделяется на две части. Первая часть называется торжественной и посвящена жизни и деятельности нашего института. Во втором отделении мы смотрим нашу замечательную самодеятельность, встречаемся со старыми друзьями и веселимся. Мне приходится принимать участие в первой части этой программы, которая менее привлекательна, чем вторая, но следует помнить, товарищи, что хороший обед всегда состоит из сытного жаркого и только после него сладкое блюдо доставляет нам удовольствие, и вот этим жарким нельзя пренебрегать, надо относиться к нему со всей серьезностью. Конечно, для меня как повара не такая это легкая задача — сделать вам вкусное жаркое за 15—20 минут, которые даются на выступление, и поговорить о наших делах так, чтобы это было серьезно и чтобы вы не заснули. У нас есть, однако, целый ряд вопросов, связанных с работой нашего института, которые должны заинтересовать всех нас. Вот об этих вопросах мне и хотелось бы с вами поговорить.

Всем вам хорошо известно, что физтех был создан около двадцати лет назад. Основная идея создания этого института была проста и очевидна. Наука развивалась чрезвычайно быстро как у нас в Советском Союзе, так и в других странах; создавалось много научных институтов, эти институты притягивали к себе лучших научных работников, и вся «большая наука» сосредоточивалась в этих институтах. Вузы были обескровлены: они теряли преподавательский состав, профессуру, а также оборудование, на котором обучались студенты. Поэтому студенты не имели возможности еще в вузе приступить к научной работе, и они должны были переучиваться в других институтах перед тем, как подойти к научной работе.

Академик Петр Леонидович Капица — дважды Герой Социалистического Труда, лауреат Нобелевской и Государственных премий, директор Института физических проблем им. С. И. Вавилова Академии наук СССР.

Статья, представляющая собой выступление П. Л. Капицы на вечере выпускников Московского физико-технического института в 1963 году, перепечатывается с небольшими сокращениями из сборника «Ленин. Наука. Молодежь», выпущенного в 1980 году издательством «Наука».

Такой разрыв между вузами и научными институтами оказался чрезвычайно вредным для подготовки кадров, поэтому надо было этот разрыв ликвидировать. Для этого и был создан Московский физико-технический институт, в котором обучение студентов тесно связано с научной работой; они учатся на самом совершенном оборудовании, их обучают молодые ученые, которые активно работают в науке, и, наконец, физтеховцы имеют возможность приступить к научной деятельности со второго-третьего курса. Таким образом, все те недостатки в организации нашей науки, которые связаны с ее быстрым ростом, были в значительной мере ликвидированы.

Успех этой системы несомненный. Учебных заведений, работающих по тому же принципу, как и МФТИ, который готовит молодых ученых, становится все больше и больше в Советском Союзе. Однако как ни успешно работает такая система в продолжение этих лет, в ней есть еще существенные недостатки, с которыми надо бороться и которые надо выправлять, и наша задача — поставить диагноз этих недостатков, искать способы их ликвидировать.

Первый выпуск МФТИ настолько сейчас подрос, что ректором нашего института стал товарищ Белоцерковский, старый наш физтеховец. Благодаря тому, что он успешно проходил свой курс у нас и хорошо понимает дух и значение системы преподавания и обучения в физтехе, с ним чрезвычайно приятно и легко работать, и мы с ним часто обсуждаем те мероприятия, которые необходимы для улучшения нашей работы.

Мы замечаем, что у нас еще есть все-таки большие пробелы в нашей профессуре, нам не всегда удается привлекать к обучению молодежи лучших профессоров. И есть еще один недостаток, о котором я скажу. Институт не выполняет еще все те функции, которые он мог бы выполнять. Вот об этих функциях я тоже хочу поговорить. Что касается подбора профессуры, то, как вы знаете, у нас есть и хорошие профессора, есть и средние и даже встречаются ниже среднего. Тут ничего не поделаешь. Так всегда будет.

Самое, пожалуй, тяжелое то, что у нас недостаточно хорошо обеспечено преподавание основных дисциплин. В прежние времена чтение курсов основных предметов в высших учебных заведениях — общая физика, химия, математика, механика — возлагалось на самых крупных ученых, и считалось исключительно почетным делом вести такие курсы. Теперь это изменилось, трудно сказать, почему. Потому что с точки зрения воспитания молодежи очень важно, конечно, чтобы основа знаний давалась крупными учеными, которые закладывали бы фундамент, сообщали молодежи то, что нужно для построения здания. Если фундамент будет недостаточно надежным, то и все здание будет некрепко стоять на ногах.

Как поправить дело, как обеспечить, чтобы в вузе читали курс лучшие профессора, лучшие преподаватели, лучшие ученые? Казалось бы, можно было бы использовать современную технику, скажем, сделать кинофильм, в котором лектор, самый крупный ученый в данной области (или даже группа ученых), будет рассказывать студентам физику, или химию, или математику.

Конечно, это привлечет лучших профессоров к преподаванию студентам. Но посмотрим, что из этого получится на самом деле. Может быть, администрация института и будет приветствовать такое начинание: сократится число штатных единиц и не будет необходимости привлекать и подыскивать преподавательские кадры. С точки зрения министерства — те же самые удобства. Сделав один фильм, они смогут сократить штаты и снизить расходы по вузам. Некоторые студенты были бы рады, поскольку все-таки в темных киноаудиториях комфортабельнее спать, чем в светлых.

И все же такая система, конечно, нелепа. Вы представьте себе, что в институте вместо профессуры стоят одни киноаппараты и ходят только студенты и киномеханики. Это будет исключительно скучное и темное заведение, к которому вы не будете относиться, как к своей альма матер. Не в этом, однако, дело. Говорят, студенты рано или поздно как-нибудь к этому приспособятся, как-нибудь это переживут. Гораздо хуже отнесутся к этому изменению сами преподаватели. Дело в том, что совершенно забывают о другой функции высшего учебного заведения — учить не только студентов, но учить и самих профессоров и преподавателей.

Хороший ученый, когда преподает, всегда учится сам. Во-первых, он проверяет свои знания, потому что, только ясно объяснив другому человеку, можешь быть уверен, что сам понимаешь вопрос. Во-вторых, когда ищешь форму ясного описания того или иного вопроса, часто приходят новые идеи. В-третьих, те, часто нелепые, вопросы, которые задают студенты после лекций, исключительно стимулируют мысль и заставляют с совершенно новой точки зрения взглянуть на то явление, к которому подходили стандартно, и это тоже помогает творчески мыслить.

И наконец, студенты лучше знают, шире знают вопросы физики, чем преподаватель. Преподаватель, как специалист, подходит узко, у него нет широкого подхода. У студентов гораздо шире подход. И когда студент беседует с преподавателем, преподаватель очень много узнает от студента.

Вот почему молодым ученым необходимо заниматься преподавательской деятельностью. Хороший вуз — это тот вуз, который дает возможность развиваться талантам преподавателей так же просто, как и талантам их учеников.

Чтобы показать, что это не общие фразы, я вам приведу целый ряд примеров того, как преподавательская деятельность приводила к большим открытиям. Примеры эти настолько разительны, что они, мне кажется, вполне подтверждают эту идею.

Один из самых классических примеров хорошо известен — это Д. И. Менделеев и его периодическая система. Менделеев искал, каким способом легче объяснить студентам свойства элементов, чтобы эти свойства могли восприниматься по определенной системе. Он распределял элементы по карточкам, складывал эти карточки в разном порядке и, наконец, нашел, что карточки, разложенные в виде периодической таблицы, представляют собой закономерную систему. 1 марта 1869 г. таблица была напечатана отдельным изданием и немногим позже вошла как приложение во второй выпуск «Основ химии». Таким образом, периодическая система элементов в основе своей возникла из педагогической деятельности Менделеева как профессора Петербургского университета.

Второй случай, немного более ранний, относится к математике. В начале XIX в. русское правительство решило, что все чиновники должны иметь среднее образование. Те чиновники, которые не имели аттестата зрелости, должны были его получить. Чтобы облегчить им это, были созданы курсы, которые готовили к экзаменам на аттестат зрелости. Одним из преподавателей геометрии таких курсов был Н. И. Лобачевский. Ему было тогда 24—25 лет. Он был очень молод, и он объяснял престарелым чиновникам принципы евклидовой геометрии. И они никак не могли понять, откуда берется аксиома о непересекаемости двух параллельных линий.

Лобачевский долго бился над тем, чтобы дать подходящее объяснение, но убедился, что такого объяснения не существует. Он понял, что можно построить такую геометрию, при которой линии всегда пересекаются. Так была создана его неевклидова геометрия. Таким образом, он нашел новую область математики, которой, как вы знаете, суждено было сыграть фундаментальную роль в современной физике.

Могу привести еще пример, о котором мне рассказал известный физик Дебай. Дебай был преподавателем, профессором в Цюрихе. У него был ученик, тоже преподаватель, Шредингер, тогда еще совсем неизвестный молодой человек. Дебай познакомился с работой де Бройля, в которой де Бройль, выдвинувший, как вы знаете, гипотезу о существовании волновой структуры электрона, показал, что при известных условиях интерференции можно заменить движение электрона волновым движением. Идея эквивалентности волнового движения и квантовых процессов, волнового движения и корпускулярного была воспринята целым рядом физиков весьма отрицательно. Отрицательно отнесся к ней и Шредингер. Когда Дебай попросил его рассказать молодежи о работах де Бройля, Шредингер сначала отказался. Потом, когда Дебай, пользуясь своим положением профессора, снова предложил ему это сделать, Шредингер согласился и начал искать, как можно было бы объяснить идеи де Бройля в наиболее полной и точной математической форме. И когда он рассказал о работах де Бройля в том представлении, какое он считал наиболее точным, Дебай ему сказал: «Послушайте, ведь вы же нашли новый замечательный вид уравнения, который является фундаментальным в современной физике!». Таким образом, в результате педагогической деятельности было найдено и волновое уравнение — основное уравнение современной физики.

Подобных примеров можно было бы привести еще много, но мне кажется совершенно очевидным, что если учебная деятельность плодотворна в таких серьезных фундаментальных вопросах, то она, несомненно, плодотворна и в более простых вещах, она часто оказывает плодотворное влияние на современную науку и на современных ученых. Поэтому высшие учебные заведения нужно рассматривать не только как заведения, в которых готовят молодых ученых, но и как место, где развиваются научные таланты и уже сформировавшиеся ученые. Учебные заведения должны быть так организованы, чтобы эта возможность была широко предоставлена преподавательскому персоналу.

У нас это не всегда признается. До сих пор, например, в университетах и других высших учебных заведениях считается разумным, чтобы часть персонала занималась научной деятельностью, а часть персонала — педагогической. Как раз в высших учебных заведениях должна быть такая система, чтобы она основывалась на ученых, которые небольшую часть своего времени занимаются педагогической деятельностью. Только тогда учебное заведение будет выполнять все свои функции — учить студентов и учить преподавательский персонал.

Поэтому замена профессоров киноаппаратами совершенно нелепа, она бы сделала невозможной вторую часть деятельности высшего учебного заведения, которая, несомненно, в ближайшем будущем будет развиваться и на которую мы обратим внимание. Должны обращать большое внимание.

Я вам рассказал об этом потому, что всем вам, молодым ученым, в ближайшее время предстоит покинуть физтех и в том или ином качестве работать в научно-исследовательских институтах. Если вы хотите продолжать расти как ученые, не стареть и совершенствовать свои знания, вам необходимо не терять контакта со следующим подрастающим поколением, учить это подрастающее поколение и учиться у него, развивать свои знания. Если вы оторветесь от обучения молодежи, вы сразу начнете стареть и сразу начнете отставать от науки.

Вот этот маленький завет я вам хочу передать от себя, так как считаю его очень важным.

Б. Вертгейм

Игры с квадратичными функциями

Можно ли изучать математику играя? Оказывается, можно, так как в математике есть много задач, описывающих «игровые ситуации».

Мы займемся играми, связанными с поиском наибольших и наименьших значений функций. Искусство такого поиска важно во многих задачах экономики, военного дела, биологии, спорта,..

Решающие десять одиннадцатиметровых

Мы — на футбольном поле. Игрок A и вратарь B готовятся к серии из 10 одиннадцатиметровых ударов. Игрок бьет вправо или влево; вратарь, пытаясь угадать направление удара, готовится к прыжку влево или вправо от себя. Их мастерство отражено в таблице *): если игрок бьет вправо (это его стратегия № 1), а вратарь готовится к прыжку влево от себя (это стратегия № 1 для B), то в среднем в воротах будет 7 мячей из 10; если же B готовился к прыжку вправо, то влетают все 10 мячей и т. д.

A \ B	1	2
1	7	10
2	9	6

Оба игрока будут чередовать свой выбор случайным образом. Если каждый из них выбирает каждую из своих стратегий примерно в половине случаев (как говорят, с вероятностью 1/2), то в среднем будет забито $(7+10+9+6):4=8$ мячей.

Если же A будет применять свою первую стратегию с вероятностью 0,6 (в 60% случаев), а вторую — с вероятностью 0,4 (в 40% случаев),

---

*) В теории игр и в экономике подобные таблицы называются *платежными матрицами*.

а вратарь — свою первую стратегию с вероятностью 0,8, а вторую — с вероятностью 0,2, то в среднем будет забито $(7 \cdot 0{,}6+9 \cdot 0{,}4)\times \times 0{,}8+(10 \cdot 0{,}6+6 \cdot 0{,}4) \cdot 0{,}2=7{,}92$ мяча, что меньше 8. Конечно, говорить о том, что в данной конкретной серии будет забито 7,92 мяча бессмысленно. Здесь имеется в виду, что при многократном повторении серий, удовлетворяющих поставленным условиям, среднее количество забитых мячей (отношение общего количества мячей к числу серий) будет близко к числу 7,92.

Пусть вообще A выбирает свои первую и вторую стратегии с вероятностями x и $1-x$ $(0<x<1)$, а B — с вероятностями y и $1-y$ $(0<y<1)$. В этом случае говорят, что числа x и y определяют *смешанные стратегии* игроков. Тогда среднее число забитых мячей равно

$$m=(7x+9(1-x))y+(10x+6(1-x)) \times (1-y)=-6xy+4x+3y+6. \quad (*)$$

Естественно возникает вопрос: каковы наилучшие значения x для A, y — для B? Наилучшее значение x^* для A, разумеется, должно гарантировать минимальное число нереализованных пенальти (в среднем), независимо от тактики вратаря. Наилучшее же значение y^* для B должно гарантировать минимальное количество забитых мячей (в среднем), независимо от стратегии игрока, бьющего пенальти.

Оказывается (вы в этом убедитесь, решив упражнение 1), $x^*=1/2$, $y^*=2/3$; в этом случае будет забито (в среднем) $m^*=8$ мячей. Легко проверить (обязательно сделайте это!), что если хотя бы один из играющих будет придерживаться указанной «наилучшей» стратегии, то независимо от стратегии другого будет забито именно $m^*=8$ мячей (в среднем). Если же один из игроков отклонится от указанной стратегии, то он уже не может ничего гарантировать — результат будет зависеть от действий противника.

Так, если вратарь будет одинаково часто прыгать вправо и влево (то есть $y=1/2$), а игрок все время бить в правый угол $(x=0)$, то будет забито в среднем меньше мячей $(m=7{,}5)$. Но если игрок A похитрее, он будет всегда бить в левый угол $(x=1)$ и тогда станет забивать чаще $(m=8{,}5)$.

А теперь отдохнем от футбола, от вероятностей и займемся «просто» функциями, причем без ограничений на x и y — это облегчит первые шаги.

Выигрыш, проигрыш, ничья

Пусть двое игроков играют в такую игру: A выбирает действительное число x, B — число y, причем каждый делает свой выбор, не зная выбора противника. Оба числа сообщаются судье, после чего по заранее известному игрокам правилу подсчитывается выигрыш первого $v=f(x, y)$, равный проигрышу второго; точнее говоря, при $v>0$ A выигрывает у B величину v, при $v<0$ A проигрывает B величину $|v|$; если же $v=0$, то в игре — ничья; символ $f(x, y)$ означает, что v — это заданная функция двух переменных (x, y).

Пусть, например, правило подсчета выигрыша в игре таково:

$$v=y^2-x^2. \quad (1)$$

Попробуйте сыграть несколько раз по правилу (1). После нескольких «партий» игроки заметят, что каждому из них лучше выбирать нулевые значения: при $x=y=0$ получается ничья, причем ни одному из игроков невыгодно отклоняться от этого выбора, даже зная выбор противника.

Действительно, поскольку при $x=0$ $v=y^2$, наилучший ответ игрока B — это выбор $y=0$. Аналогично, при $y=0$ $v=-x^2$ и наилучший ход A — это $x=0$.

Теперь уже ясно, что играть с *платежной функцией* $v=y^2-x^2$ не интересно: ничья обеспечена как тому, так и другому игроку. Труднее и интереснее играть со следующей платежной функцией:

$$v=y^2-x^2+8x-10y+9. \quad (2)$$

Существуют ли в этом случае такие числа x и y, которые можно рекомендовать игрокам и от которых им будет «накладно» отклоняться?

Простой ключ к игре (2) дает разложение

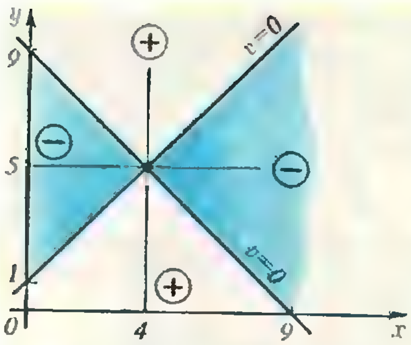


Рис. 1.

$$v=(9-x-y)(x-y+1).$$

Составив систему уравнений

$$\begin{cases} 9-x-y=0, \\ x-y+1=0, \end{cases}$$

имеющую единственное решение $x^*=4$, $y^*=5$, заключаем, что игра (2) имеет ничейный исход $v^*=v(x^*, y^*)=0$ при $x=x^*=4$, $y=y^*=5$.

Геометрическое объяснение здесь таково (рис. 1): пара чисел $(x^*; y^*)\in R^2$ определяется точкой пересечения прямых, соответствующих уравнениям системы; если точка с координатами $(x; y)$ лежит на одной из них, то $v=0$; для точек, лежащих внутри углов, образованных нашими прямыми, величина v имеет знак, указанный на рисунке. Этот рисунок дополняют следующие вычисления и рассуждения: если $x=4$, то $v=(5-y)^2\geqslant 0$; $v_{\min}=0$ при $y=5$ (в точках вертикали $x=4$ всегда $v\geqslant 0$); если $y=5$, то $v=-(x-4)^2\leqslant 0$; $v_{\max}=0$ при $x=4$ (вдоль горизонтали $y=5$ имеем $v\leqslant 0$).

Таким образом, если A выберет $x=4$, то игрок B при любом выборе, кроме $y=5$, проигрывает. Аналогично, если A выбирает $x\neq 4$, игрок B выигрывает взяв $y=5$.

Итак, у первого игрока есть ход, сделав который он заведомо не проиграет. Такой же ход есть и у второго игрока. Поэтому в этой игре тот, кто рискнет сыграть не «по теории», тот и проигрывает (если, конечно, и его противник не идет на риск отказа от теории).

Приведем для примера результаты пяти партий нашей игры (в каждой тройке первое число — это x, второе — y, третье — v): (0,0,9), (0,7,—12), (4,7,4), (4,5,0), (5,5,—1).

Изучение этих партий подсказывает еще один путь решения (к сожалению, не всегда пригодный). Попробуем рассуждать за первого игрока: «Если B выберет $y=y_0$, то тогда получается квадратный трехчлен

$$v(x, y_0)=(9-y_0-x)(x-y_0+1)$$

относительно x, который я должен сделать как можно большим, выбрав подходящее x; но у этого трехчлена максимум при $x=4$, поэтому я хожу $x=4$!». Рассуждая аналогично, второй игрок обеспечит себе минимальный проигрыш при $y=5$ (при любом ходе $x=x_0$ первого).

Седловая точка и решение игры

Мы видели, что в игре с функцией (2) каждый игрок может гарантировать себя от проигрыша, так как удалось найти такую пару чисел (4:5), что $f(4,5)=0$ и для всех остальных x и y значения функции f удовлетворяют неравенствам

$$f(x, 5)\leqslant f(4, 5)\leqslant f(4, y).$$

Отсюда видно, что первый игрок выбирая $x=4$, во всяком случае, не проигрывает (это вытекает из последнего неравенства), как не проигрывает и второй, выбирая $y=5$.

Дадим общие определения.

Определение седловой точки. Пусть задана функция f, определенная на некотором множестве G точек плоскости. Точка $(x^*; y^*)\in G$ называется *седловой точкой* функции f или *точкой равновесия*, если при $(x, y^*)\in G$, $(x^*, y)\in G$,

$$f(x, y^*)\leqslant f(x^*, y^*)\leqslant f(x^*, y)$$

Из этих неравенств следует, что

$$\max_x f(x, y^*)=f(x^*, y^*)=\min_y f(x^*, y)$$

(в левой части берется максимум по переменной x при фиксированном $y=y^*$, в правой части — минимум по y при фиксированном $x=x^*$).

В теории игр седловую точку $(x^*; y^*)$ часто называют *решением* игры (*с платежной функцией* $v=f(x, y)$), число $v^*=f(x^*, y^*)$ называют *ценой* игры, а числа x^*, y^* — *оптимальными стратегиями* первого и второго игроков соответственно.

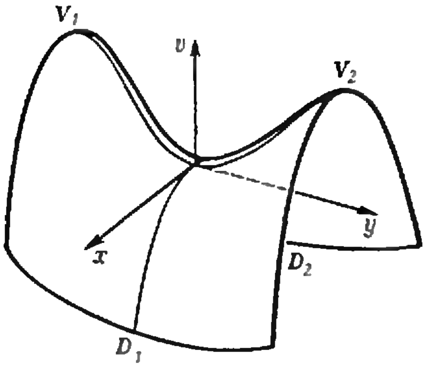


Рис. 2.

Туристы и альпинисты

Туристы, желая пройти из долины D_1 в долину D_2, идут через перевал (седловину) — при этом максимальная высота на пути из D_1 в D_2 (рис. 2) оказывается минимальной по сравнению со всеми близкими маршрутами, не проходящими через седло. Альпинисты, желая совершить траверс от вершины V_1 к вершине V_2, проходят то же седло по другой причине — чтобы не «терять высоту», то есть чтобы была максимально возможной минимальная высота на пути от V_1 к V_2.

Рисунок 1 похож на карту, где высота перевала принята за нуль, а x и y — это долгота и широта. Будем рассматривать прямые, параллельные осям, как возможные пути для туристов и альпинистов. Подобно маршрутам в горах, основные прямые рисунка 1 ($y=5$ и $x=4$) выделены тем, что

$$f(x^*, y^*) = \min_y \max_x f(x, y) = \max_x \min_y f(x, y),$$

и это очень полезно при анализе игр. Здесь $\max\limits_x f(x, y)$ — наибольшее значение f при заданном y и переменном x, то есть это наихудший исход для B при выбранном значении y; очевидно, это величина минимальна при $y=5$. Истолкуйте аналогично выбор $x=4$ для игрока A.

Рассмотрим теперь игру с платежной функцией $v=x^2-y^2$, у которой нет седловой точки (убедитесь в этом). Анализ игры с подобной функцией сильно осложняется. В данном примере противники будут заинтересованы выбирать самые большие числа, какие им доступны. Если ввести ограничения на переменные x и y вида $|x| \leqslant a, |y| \leqslant b$, что нередко встречается на практике, появятся 4 седловые точки: $x^* = \pm a$, $y^* = \pm b$, $(v^* = a^2 - b^2)$.

Однако при такого рода ограничениях седловая точка может и не появиться (см. упр. 3).

Решение игр с квадратичной платежной функцией

Итог нашим теоретическим рассмотрениям подводит следующая

Теорема. *Пусть дана игра с платежной функцией*

$$v = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2px + 2qy + r.$$

Эта функция имеет седловую точку, а игра — решение в следующих семи случаях и только в них:

1) $a<0$, $c>0$;
2) $a<0$, $c=0\neq b$;
3) $a<0$, $c=b=q=0$;
4) $a=0\neq b$, $c>0$;
5) $a=b=p=0$, $c>0$;
6) $a=c=0$, $b\neq 0$;
7) $a=b=c=p=q=0$.

Седловая точка является решением системы уравнений

$$\begin{cases} ax+by+p=0, \\ bx+cy+q=0. \end{cases} \qquad (3)$$

Это решение (x^*, y^*) *во всех этих случаях, кроме* 3), 5), 7), *единственно.*

Мы оставляем доказательство теоремы, сводящееся к перебору случаев, читателю: разбор предыдущих конкретных примеров поможет ему.

Упражнения

1. а) Рассмотрите игру с платежной функцией $m=6+4x+3y(1-2x)$ и найдите значение x, при котором m не зависит от y, а также значение y, при котором m не зависит от x. Дает ли эта пара значений решение игры?

б) Решите игру, заменив число 9 на 8 в платежной матрице одиннадцатиметровых ударов.

2. Найдите решения и цены игр со следующими платежными функциями:

а) $v=-x^2+6xy+y^2-10x-10y+15$;

б) $v=(x+y-a)(y-x-b)$;

в) $v=10\ln x-x^2+2xy+y^2+10x-8y-40$, $x>0$;

г) $v=k(\sqrt{x}-\sqrt{y})+\sqrt{a-x}-\sqrt{b-y}$;

д) $v=k(-x^2+2pxy+y^2)-x_0^2-2px_0y+y_0^2$, где $x_0=a-x$, $y_0=b-x$;

е) $v=-x^2-xy+6y^2+\frac{y^4}{8}$.

3. Есть ли точки равновесия в следующих играх «с ограничениями»: а) $v=x^2+y^2$; б) $v=(x-y)^2$; в) $v=x^2+xy+y^2$, причем во всех трех случаях $|x|<a$, $|y|<b$.

4. Как изменяются утверждения теоремы при дополнительном условии $x>a$?

5. Рассмотрите следующие игры с платежной матрицей 2×2 вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *). Игрок A выбирает строки, а B — столбцы — а решение надо найти для смешанных стратегий (x, y) и функции типа (1) при $0<x$, $y<1$ в следующих случаях:

а) «Прятки» или «поиск»: $a=d=-1$, $b=c=1$. Игрок A прячется в одном из двух мест, а B ищет его там же. Тот, кто достигает своей цели, получает, а другой — теряет очко (монету).

б) «Защита и нападение»: $a=d=c+1$, $b=1$, где $c>1$ задано, например, $c=3$. Отряд во главе с A отвечает за 2 склада с горючим (во втором его в c раз больше, чем в первом). Сил у A хватит лишь для защиты одного склада. Отряд B может атаковать лишь один из этих складов. Если их выборы совпадут, то все остается целым, если нет — незащищенный склад горит. Найти решение и цену игры и истолковать результаты.

в) «Случай на пляже»: $a=d=-\frac{b+c}{2}$, $b>c>0$. Например, $b=30$, $c=10$. К туристу A подходит незнакомец B и предлагает такую игру: оба разом показывают одну из сторон — монеты. Если у A «орел», у B — «решка», то A выигрывает 30 монет; если у A — «решка», у B — «орел», то выигрыш A равен 10; если же выборы совпадут, то «для справедливости», как говорит B, турист заплатит ему 20 монет. Действительно ли, эта игра справедливая и честная и в среднем никто не будет в проигрыше?

г) $a=7$, $b=2$, $c=1$, $d=2$.

6. Для игр с платежной матрицей 2×2 доказать существование седловой точки у платежной функции вида (1).

Указание. Система (3) применима не всегда из-за ограничений на x и y, поэтому удобней построить графики прямых линий $v=\varphi_1(x)=ax+c(1-x)$, $v=\varphi_2(x)=bx+d(1-x)$ и найти x, исследуя задачу на «максимин» определить

$$\max_{x\in[0,1]}\ \min_{i=1,2}\{\varphi_i(x)\}.$$

Применить этот способ в играх упражнения 5.

7. (Задача для юных программистов.) Для проведения серии из N игр с заданной функцией составить программу на языке Рапира или на другом алгоритмическом языке ($N=5$ или 10); в очередной партии судья вводит в ЭВМ выбранные значения x и y, и, после подсчета, на печать выводится выигрыш игрока в этой партии и накопленный его выигрыш за все партии игры с начала данной серии.

8. Доказать, что если цена игры с квадратичной функцией существует, то она единственна, хотя седловых точек может быть более одной.

9. Число — элемент матрицы — на пересечении i-й строки и j-го столбца часто обозначают a_{ij} — это краткая запись для $a(i, j)$, функции двух целочисленных аргументов. Элемент матрицы называется *седловым*, если он наименьший в своей строке и наибольший в столбце. Если такой элемент существует, то он равен цене игры, а номера его строк и столбцов дают решение игры «в чистых стратегиях». Верно и обратное (докажите). У каких матриц из упражнений 1 и 5 есть седловые элементы?

---

*) Число a — это выигрыш игрока A (проигрыш B), если оба применяют свои первые стратегии, и т. д. (сравните с таблицей для игры с вратарем): здесь также игры повторяются много раз

Задачи наших читателей

1. Так называемый ударный трансформатор Гюйгенса представляет собой желоб, в котором лежат n тел. Их массы $m_1, m_2, \ldots, m_n$ связаны условием $m_i/m_{i+1}=k>1$. Если первое тело начинает двигаться со скоростью v_1, то после всех соударений (соударения абсолютно упругие) последнее тело покидает желоб со скоростью $v_n \gg v_1$ (исторически это один из первых способов получения больших скоростей). Найдите выражения для отношения v_n/v_1 и для коэффициента полезного действия КПД$=(m_n/m_1)(v_n/v_1)^2$ как функции k и n. Покажите, что при заданном v_n/v_1 существует такое k, при котором КПД максимален.

Л. Ашкинази

2. Широко распространенные спиртовые термометры обладают весьма существенным недостатком: если их использовать для измерения температуры воздуха на улице, где они освещаются солнечными лучами, термометры довольно быстро (в течение одного-двух лет) начинают давать заниженные показания. Причиной тому является уменьшение количества спирта, связанное с испарением спирта с поверхности окрашенного столбика и конденсацией паров в верхней части трубки термометра. Можно ли восстановить такой термометр и тем самым увеличить срок его службы?

Г. Гальперин

3. Две комнаты разделены звуконепроницаемой перегородкой, в которой имеется дырка в виде квадрата со стороной 2 см. Ширина перегородки 2м, высота комнат тоже 2 м. Оцените, во сколько раз ухудшились бы звукоизоляционные параметры, если бы обивка перегородки была вдобавок не идеальной, а пропускала бы одну сотую часть звуковой мощности.

М. Виксман

Я. Смородинский

Джеймс Клерк Максвелл

(к 150 летию со дня рождения)

Жизнь Максвелла, наверное самого крупного физика прошлого века, представляется как переплетение занимательных историй. Каждая из историй оказала глубокое влияние на наши представления о природе.

Если мы сейчас говорим о физическом поле (электромагнитном, гравитационном или еще каком-нибудь), то смысл в это понятие вложил Максвелл. Молекулярная (или статистическая) физика приобрела четкий смысл после работ Максвелла. Первая теоретическая работа по кибернетике «О губернаторе» (так Максвелл называет регулятор машины) принадлежит Максвеллу. Теория цвета существенным образом связана с его работами. Одна из очень старых задач о природе колец Сатурна была решена Максвеллом.

История о кольцах Сатурна — самая простая. С нее мы и начнем.

В 1609 году Галилей сделал первый телескоп, усовершенствовав голландскую зрительную трубу, которую он увидел в Венеции. Построив трубу (он назвал ее «перспективой»), Галилей посмотрел в нее на небо. То, что он там увидел, его потрясло. У Юпитера оказались четыре Луны, на Луне открылись горы, а на Солнце нашлись пятна. Но самым удивительным был вид Сатурна — с обоих боков планеты были видны отростки. Через некоторое время отростки исчезли, и их природу Галилей не смог разгадать. Лишь в 1659 году Гюйгенс понял, что Сатурн окружен кольцами.

Прошло еще 100 лет. Астрономы стали думать: почему кольца не падают на Сатурн, почему они не разрушаются под действием собственной тяжести?

В конце XVIII века этой задачей занялся Лаплас. Вывод, к которому он пришел, был малоутешителен: для того чтобы кольца вращались вокруг Сатурна как твердые сплошные конструкции и при этом не разрушались, плотность материала колец должна быть очень большой.

Теоретические представления оказывались недостаточными для описания новых наблюдений. В 1855 году в Кембридже был объявлен конкурс (премия Адамса*)) решений загадки колец Сатурна. Максвелл, который в это время занимал кафедру в Абердине (на севере Шотландии), занялся систематическим изучением этой проблемы. Он последовательно исследовал три случая: 1) — кольца жидкие; 2) — кольца твердые; 3) — кольца состоят из отдельных кусков.

Выводы, к которым пришел Максвелл, следующие. Плотные кольца, даже если они удовлетворяют условию Лапласа, будут разрушаться из-за волн, распространяющихся вдоль окружности кольца. Никакая жесткая или деформирующаяся структура (жидкие кольца) не может стабильно вращаться вокруг Сатурна.

Единственной возможностью остается кольцо, состоящее из отдельных сравнительно небольших кусков, каждый из которых обращается с первой космической (сатурнианской) скоростью — по орбите спутника, как бы мы сейчас сказали.

Это и было решением задачи. Премия Адамса была присуждена Максвеллу.

«Work, finish, publish» (работай, закончи, публикуй) — таков был девиз Максвелла. В 1855 году он приступил к работе над проблемой колец Сатурна, а в 1859 году полное исследование задачи было опубликовано в Кембридже.

Как было сказано, разные истории из жизни Максвелла переплетаются между собой. Размышляя над поведением колец Сатурна, Максвелл понял, что необходимо развить теорию систем, сотоящих из большого числа взаимодействующих частиц. Описывать такие системы, решая уравнения Ньютона,— задача безнадежная. Надо уметь вычислять средние, статистические свойства такого рода систем. С этой задачей он справился не сразу. Но он очень скоро понял и то, что она связана не только с кольцами Сатурна (к которым он после опубликования в 1859 году своей работы больше не возвращался), но и с кинематической теорией газа, которой тогда занимались самые крупные физики. К этим работам Максвелла мы еще вернемся, а сейчас посмотрим, что делал он в начале своей жизни.

Максвелл родился 13 июня 1831 года в главном городе Шотландии Эдинбурге. В Эдинбурге он кончил гимназию и здесь же сделал свою первую работу об овалах, которая была напечатана в трудах Эдинбургской академии*). Закончив Университет в Эдинбурге, Максвелл переехал в 1850 году в Кембридж. Здесь он заканчивает Тринити-Колледж и преподает в этом же колледже. Затем он принимает предложение занять кафедру в Абердине (Шотландия) в Маришал-Колледже.

В это время Максвелл был увлечен задачей о цвете. И эта история началась с великого открытия, сделанного Ньютоном. Ньютон обнаружил, что белый свет от Солнца разлагается призмой в цветной спектр и что полученный спектр можно собрать в белый свет.

Долгое время после Ньютона природа цвета оставалась непонятной. Вопрос состоял в том, надо ли искать объяснение цвета в свойствах излучения, или цвет есть физическое свойство самого предмета, такое же как, скажем, масса тела, или цвет связан лишь с ощущением.

Свои опыты со светом и выводы, к которым он пришел, Максвелл изложил в популярной статье «О цветовом зрении». Был один неожиданный «выход» из опытов Максвелла. В этих опытах ему помогала его жена — дочь принципала колледжа в Абердине Катерина Мария Дьюар. Обнаружилось, что помощница неправильно регистрирует цвета. Это дало повод к новым опытам и к созданию первой теории цветной слепоты.

---

*) Д. К. Адамс (1819—1892) — астроном из Кембриджа, доказавший существование планеты за Ураном (Нептуна) на основании математического анализа движения Урана.

*) Перевод этой первой работы Максвелла был напечатан в «Кванте» № 12 за 1979 г.

В истории с цветовым зрением ярко прослеживаются характерные черты научного метода Максвелла. Почти все его исследования содержали обязательные этапы: создание наглядной геометрической модели и привлечение простых аналогий.

Стоит привести слова Максвелла о том, что значит физическая аналогия, что значит построить модель: задача состоит в том, чтобы «найти физическую аналогию, которая помогла бы мышлению охватить результаты прежних исследований, однако без подчинения какой-либо теории, основанной на физических принципах той науки, откуда была заимствована аналогия, чтобы не отвлечься от самого предмета исследования, разбирая аналитические тонкости, и не очутиться за границей истины из-за понравившейся гипотезы».

Такая формула, полная одних предостережений, сработала полностью в поисках решения главной проблемы Максвелла — теории электромагнитного поля. Именно Максвеллу удалось увидеть в работах Фарадея то, что никто кроме него увидеть не смог. В силовых линиях Фарадея он увидел новый физический объект — поле. Но для этого надо было пройти через тяжелый этап исследований — этап примитивной модели.

Опять история начинается с работ великого физика. Фарадей предположил, что действие на расстоянии между зарядами и токами передается с помощью силовых линий, связывающих между собой разноименные заряды (электрические линии) или кольцами окружающих токи (магнитные линии). Эти линии стремятся сжаться вдоль своей длины (притяжение) и оттолкнуться от своих соседей. Движением таких линий Фарадею удавалось объяснить результаты огромного количества своих и чужих опытов.

Максвеллу очень нравилась идея Фарадея: наглядная картинка упругих нитей оказывалась удачной аналогией. Необходимо было найти математический аппарат для описания такой механической модели. Максвелл вспоминает работу Томсона (в будущем лорда Кельвина) о том, как похожи между собой уравнение для потенциала силы тяжести и уравнение распределения тепла. И то, и другое явления можно описывать с помощью системы поверхностей, на которых постоянны потенциал или температура. Так, температура в пространстве вокруг нагретого шарика падает по тому же закону, что и потенциал поля тяжести массивного шарика.

Исходя из подобной аналогии, Максвелл начинает с описания электрического и магнитного полей с помощью систем линий, пронизывающих каждую точку пространства и указывающих направления действия сил. Для того чтобы описать и величину сил, Максвелл делает еще один шаг, который надо, как в шахматной партии, обозначить знаком ««!!». Он заменяет силовые линии трубками, а чтобы сделать трубки упругими, предполагает, что по ним течет жидкость.

Представление об электрических и магнитных жидкостях было не новым. Так, еще до Фарадея пытались описывать явления, происходящие с зарядами и магнитами. Но никто не пытался относиться к ним как к объектам, достойным математического описания, и никто не сочетал их с силовыми линиями Фарадея. Фарадей понял, что в присутствии полей тело переходит в некое «электрическое состояние» (так он представлял себе действие поля). Максвелл попытался найти математические законы, описывающие это состояние. В первой своей работе по электромагнетизму «О фарадеевых силовых линиях» (сделана она была в 1855—1856 годах, а опубликована в 1861 году) он еще с грустью пишет: «...я сохраняю надежду при внимательном изучении свойств упругих тел и движения вязких жидкостей найти такой метод, который позволил бы дать и для электрического состояния некоторый механический образ, способный вести к общим заключениям». Следующую работу «О физических линиях сил» он публикует в 1861—1862 годах. В этой работе механическая модель электромагнитного поля доведена почти до абсурда (с сегодняшней точки зрения) — здесь и вращающиеся частицы, выстроенные в ряды, и вихри в среде, и многое другое. С непостижимым искусством Максвелл извлекает из модели лишь то, что нужно для будущей теории, никак не используя конкретные свойства механизмов, которыми он наполнил пространство (в этом и заключается смысл предостережений, о которых он писал). В следующей работе, в 1864 году, все вспомогательные предметы исчезают, как по мановению волшебной палочки, исчезают бесследно. Работа называется «Динамическая теория электрического поля», и в ней есть такие слова.

«Та теория, которую я предлагаю, может быть названа теорией электромагнитного поля, потому что она имеет дело с пространством, окружающим электрические и магнитные тела, и она может быть названа также динамической теорией, поскольку она допускает, что в этом пространстве имеется материя, находящаяся в движении, посредством которой и производятся наблюдаемые электромагнитные явления. Электромагнитное поле — это та часть пространства, которая содержит в себе и окружает тела, находящиеся в электрическом или магнитном состоянии».

Электродинамика практически была построена. Окончательно она была оформлена в знаменитом двухтомном «Трактате об электричестве и магнетизме», вышедшем в 1873 году.

Только первая из работ по электродинамике была сделана в Абердине. В 1860 году из-за реорганизации Университета (два колледжа были слиты в один) Максвелл был вынужден покинуть Абердин. Он принял приглашение и занял кафедру в Королевском Колледже в Лондоне, где оставался пять лет, после чего до 1871 года не занимался педагогической деятельностью.

Принимая кафедру в Лондоне, Максвелл обратился к студентам со вступительной лекцией, в которой он рассказал о том, как переплетаются между собой отдельные области физики и как важно, чтобы учения о теплоте и об электричестве достигли той же степени завершенности, какой достигла механика.

«В нашей стране, — говорил Максвелл, — натуральной философией называют собрание наук, состоящих из двух основных групп (классический труд Ньютона назывался «Математические начала натуральной философии» — *Я. С.*). Первая группа включает механику и охватывает общую теорию движения и равновесия, а также приложения принципов механики к исследованию явлений природы.

Вторую группу принято называть физикой. Сейчас в нее включают изучение света, теплоты, электричества и магнетизма и всех таких явлений, которые мы связываем с более общими принципами, хотя и не можем пока свести их к простому результату известных механических действий.»

Глубина проникновения в законы природы у Максвелла была поразительна. В 1868 году он публикует работу «О методе прямого сравнения электростатической и электромагнитной сил; с замечанием об электромагнитной теории света».

Рассуждения в этой работе воспринимаются сейчас как вполне современные. Если не стремиться к тому, чтобы передать их совсем точно, то идею Максвелла можно изложить просто.

Взаимодействие электрических зарядов проявляет себя двумя разными способами. Два неподвижных заряда действуют друг на друга по закону Кулона. С другой стороны, ток в проводнике, который есть не что иное, как поток зарядов, создает магнитное поле. Это магнитное поле может действовать на другой проводник с током. В результате, как хорошо известно, два прямолинейных проводника с токами, текущими параллельно друг другу, притягиваются. Так как проводники не заряжены, электрических сил между ними нет.

Максвелл со своей женой Кэтрин Дьюар (Шотландия, около 1875 года).

Формулы, описывающие взаимодействие зарядов и токов, были известны давно. Два заряда q_1 и q_2 на расстоянии r друг от друга взаимодействуют по закону Кулона:

$$F_q = k\frac{q_1 q_2}{r^2},$$

где k — постоянный коэффициент (равный в СИ $9 \cdot 10^9\ \frac{\text{Нм}^2}{\text{Кл}}$). Сила, с которой действует прямолинейный ток I_1, на параллельный ему ток I_2, текущий по отрезку проводника длины l, находящемуся на расстоянии r, равна

$$F_l = a\frac{2I_1I_2}{r}\,l,$$

где a — постоянный коэффициент (равный в СИ $10^{-7}\ \frac{\text{Нс}^2}{\text{Кл}^2}$).

Во времена Максвелла физики пользовались двумя системами единиц для измерения электрических величин. Единицу для заряда выбирали так, чтобы два заряда $q_1 = q_2 = 1$ отталкивались на расстоянии $r = 1$ (1 см) с силой $F_q = 1$ (1 дина $= 10^{-5}$Н). Такая система называлась электрической (будем обозначать ее Е). В другой системе единица тока выбиралась так, чтобы два тока $I_1 = I_2 = 1$ притягивались на расстоянии $r = 1$ (1см) с силой (на единицу длины проводника) $F_l = 2$ (2 дины). Эта система называлась электромагнитной (будем обозначать ее М). В системе Е $k = 1$, в системе М $a = 1$. Нетрудно понять, что нельзя придумать такую систему единиц, в которой одновременно выполнялись бы оба условия ($k = 1$, $a = 1$). Законы взаимодействия токов и неподвижных зарядов разные, и их нельзя изменить выбором системы единиц.

Но ток I и заряд q могут быть связаны друг с другом. Ток равен заряду, проходящему через сечение проводника за единицу времени. В системе Е величина q^2 имеет размерность $[F][L^2]$ ($[L]$ — размерность расстояния). Квадрат тока I^2 в этой системе будет иметь размерность $[F][L^2][T^{-2}]$ $[T]$ — размерность времени). В системе же М размерность I^2 — $[P][\frac{1}{a}]$. Из последних двух соотношений ясно, что коэффициент a в формуле для $F_м$ — размерный и размерность его — $[L^{-2}T^2]$. Иными словами, величина $\frac{1}{a}$ имеет размерность квадрата скорости (с этих замечаний и начал свою работу Максвелл).

Для того чтобы соразмерить численные значения единиц заряда в системах Е и М, можно, например, зарядить два конденсатора зарядами $q_1 = q_2 = 1$ ($q = 1$ — в системе Е; на опыте можно взять любой известный заряд) и разрядить эти конденсаторы через два параллельных прямолинейных проводника, измерив время разряда (это дает возможность определить ток). Величина силы взаимодействия между проводниками, очевидно, определяет, во сколько раз заряд $q_Е = 1$ в системе Е меньше заряда $q_М = 1$ в системе М.

Отношение $q_Е : q_М$ измерили еще в 1856 году Вебер и Кольрауш, получив $(3{,}107 \cdot 10^8$ м/с$)^2$ — величину, близкую к квадрату скорости света. Случайно ли это совпадение? Если нет, то какова связь между соотношением единиц $q_Е$ и $q_М$ и скоростью света? На эти вопросы до Максвелла ответа не было.

Для Максвелла это совпадение не могло быть случайным: он увидел в нем подтверждение электромагнитной природы света. Еще в 1862 году в работе «О физических линиях сил» он написал: «...мы едва ли можем отказаться от вывода, что свет состоит из поперечных колебаний той же самой среды, которая является причиной электрических и магнитных явлений». Это замечание оказалось необычайно глубоким.

В СИ в формуле для F_1

$$a=\frac{k}{c^2}=\frac{9\cdot 10^9}{9\cdot 10^{16}}\,\frac{\text{Нм}^2/\text{Кл}^2}{\text{м}^2/\text{с}^2}=10^{-7}\;\frac{\text{Нс}^2}{\text{Кл}^2},$$

как и было написано выше.

Теория электричества и магнетизма Максвелла долго считалась одной из самых трудных физических теорий. Его современникам она казалась не менее трудной, чем квантовая механика — физикам нашего века. Главная трудность состояла в том, что Максвеллу нужен был носитель поля — эфир.

Следуя Фарадею, Максвелл считал, что пространство, окружающее заряд или ток, обладает свойствами, отличными от свойств пустого пространства, пространства без вещества. Но, как и всем физикам прошлого века, ему было очевидно, что у пустого пространства нет свойств, тем более пустое пространство не может изменять свои свойства. Поэтому физики считали, что пространство заполнено некой субстанцией — эфиром, свойства которого отличаются от свойств известных веществ*). Эфир изменялся под действием тока, колебания эфира лежали в основе распространения света. Размышляя над свойствами эфира, Максвелл обсуждал возможность измерения влияния движения Земли на скорость света (в 1881 году опыт был поставлен Майкельсоном). Эфир долго держался в физике. Только Эйнштейн понял окончательно, что электромагнитное поле не нуждается ни в каком особом материальном носителе, что оно само обладает свойствами, характерными для материи, — у него есть энергия, импульс.

Так закончилась еще одна история. Теория Максвелла до сих пор не обнаружила никаких пределов применимости. Когда Эйнштейн построил теорию относительности, уравнения Максвелла вошли в нее в почти неизмененном виде, в то время как уравнения механики Ньютона оказались лишь приближенными. Уравнения Максвелла вобрали в себя поправки, происходящие от квантовой механики. Они описывают явления, происходящие и в масштабах Вселенной (расстояния $\sim 10^{28}$ см), и в микромире (расстояния $\sim 10^{-16}$ см).

Нам осталось рассказать еще о кинетической теории. Остальные истории мы оставим в стороне. Мы не будем рассказывать о математических работах Максвелла, о работах по механике и оптике. Существуют еще и стихи Максвелла, серьезные и смешные — он любил шутить. Мы оставим без внимания работу о движении оси вращения Земли и разные другие «мелочи», которые могли бы сами по себе обеспечить известность.

Итак, об истории с кинетической теорией. Физики давно пытались вывести формулы, описывающие давление газа на стенки сосуда. Оказалось, что это сделать не так просто. Со времени Бернулли для описания давления газа на стенки сосуда использовали модель, в которой частицы газа не сталкивались между собой, а летели от стенки к стенке с одной и той же (по величине) скоростью, не изменяя ее даже при ударе о стенку. Это, конечно, не отвечало реальному положению вещей. В середине XIX века Клаузиус стал рассматривать взаимные столкновения молекул. Он ввел понятие длины пробега λ — расстояния, пролетаемого молекулами между двумя столкновениями. Эту величину Клаузиус считал некоторой постоянной характеристикой газа. Столкновения молекул происходят часто, и молекула не может летать по всему сосуду, а остается как бы запертой в небольшом объеме, размер которого примерно λ^3. При таком

---

*) Об эфире говорили как о пятой субстанции, «квинтэссенции», в дополнение к четырем субстанциям, известным древним,— воздуху, воде, земле, огню.

Фамильный дом Максвеллов в юго-западной Шотландии.

описании газа становилось не очень ясным, каким образом «запертые» вдалеке от стенки молекулы могут оказывать давление на стенку — передавать стенке свое количество движения.

Максвелл постарался исправить столь несовершенную модель газа. Прежде всего он рассмотрел задачу о распределении молекул по скоростям. После этого он показал, что в газе при столкновениях происходит передача количества движения от молекулы к молекуле, совсем так, как передается жезл в эстафете. Хотя сами молкулы и не уходят, как правило, далеко от своего местопребывания (как не уходит бегун со своего этапа), при столкновениях возникает поток количества движения, который и достигает стенок. Так же происходит и перенос тепла в неравномерно нагретом газе или выравнивание концентрации смеси — процесс диффузии. Теория процессов переноса — очень важная работа Максвелла, оказавшая большое влияние на развитие кинетической теории газа.

Для подробных расчетов свойств газа Максвелл предположил, что между молекулами действуют силы, которые убывают как пятая степень расстояния между молекулами. Такая сравнительно простая модель позволила Максвеллу рассчитать (конечно, не очень точно) многие характеристики газа.

Максвелл довел умение пользоваться моделями до совершенства. И он всегда говорил, что «аналогия должна помогать воображению, но не заменять физическое явление».

В 1860 году Максвелл публикует работу «Иллюстрации к динамической теории газов», в которой дает формулу для распределения скоростей молекул. Это — знаменитая формула «распределения Максвелла, занимающая центральное место в молекулярной физике. Главное, что понял Максвелл, состояло в том, что в таких системах, как газ, распределение частиц по скоростям (или, точнее, по величине кинетической энергии) зависит только от температуры. Разбирая вопрос о столкновениях молекул, Максвелл показал, что трение в газах не зависит от давления. Этот вывод был воспринят с большим недоверием, и Максвелл вместе со своей женой проверил его на опыте.

Кинетической теорией Максвелл занимался до конца своих дней. Он умер 5 ноября 1879 года в возрасте 48 лет. Последние годы он провел в Кембридже, был первым руководителем знаменитой Кавендишской лаборатории, названной так в честь английского физика XVIII века Кавендиша, которого Максвелл высоко ценил и собрание трудов которого он подготовил к изданию.

Жизнь Максвелла — пример устремленного движения к победе, жизнь, прожитая под девизом «Work, finish, publish».

А. Боровой, Ю. Климов

Маятник Максвелла

«Важным разделом наших обязанностей является постановка иллюстративных опытов, поощрение других к постановке их и развитие всевозможными способами освещаемых ими идей. Чем проще материалы иллюстративного опыта и чем более они привычны учащемуся, тем глубже он поймет идею, которую должен иллюстрировать этот опыт. Воспитательная ценность таких опытов часто обратно пропорциональна сложности приборов.»

Эти слова Джеймса Клерка Максвелла — великого английского физика, стопятидесятилетие со дня рождения которого отмечается в этом году, как бы специально предназначены для Лаборатории «Кванта». В данной статье мы хотим обратиться к прибору, носящему его имя, — к так называемому маятнику Максвелла. Несложный в изготовлении, он часто демонстрируется на лекциях по механике и позволяет выявить ряд интересных закономерностей движения твердого тела.

Посмотрите на фотографию такого маятника (рис. 1). Это диск, насаженный на ось, к которой привязаны две нити (их верхние концы закреплены). Закрутите нити вокруг оси — диск поднимется. Теперь отпустите маятник — и он начинает совершать периодическое движение: сначала диск опускается, нити раскручиваются, диск вращается все быстрее и быстрее; дойдя до нижней точки и продолжая по инерции вращаться, диск меняет направление своего движения и поднимается вверх, нити накручиваются на ось, движение диска замедляется; в самой верхней точке маятник на мгновение останавливается и снова начинает свое движение вниз и т. д.

Сразу хотим предупредить читателей, что маятник будет колебаться устойчиво и достаточно долго, если соблюсти несколько условий. Сам диск должен быть относительно тяжелым ($m>100$ г) и большим (диаметром 5—8 см), ось — тонкой (диаметром 4—5 мм) и «невесомой», и нити — прочными и достаточно длинными ($\sim$0,5 м). Обратите внимание на то, чтобы диск находился строго посередине оси и был перпендикулярен к ней, и нити имели одинаковые длины.

Для изучения закономерностей движения маятника нам понадобят-

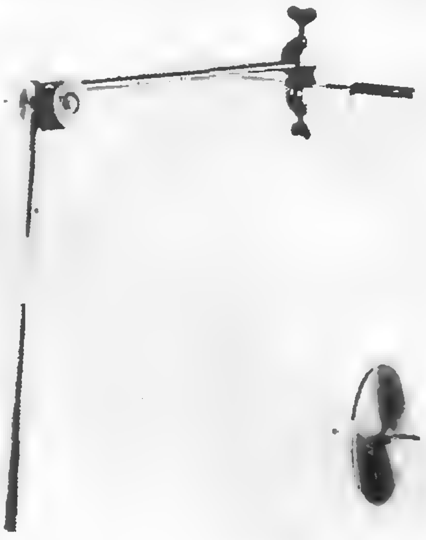


Рис. 1.

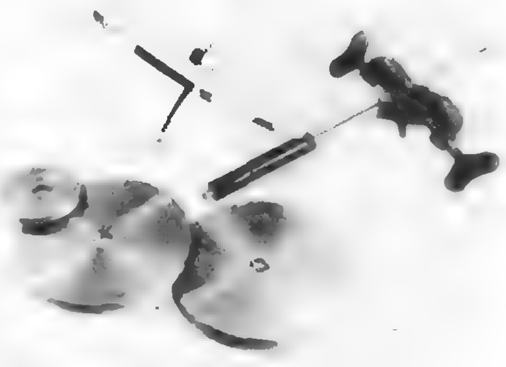


Рис. 2.

ся часы с секундной стрелкой (конечно, лучше — секундомер) и набор дисков — одного и того же радиуса, но разной толщины (массы), а также различных радиусов, но одной толщины. Диски удобно сделать съемными; один из способов их закрепления на оси показан на фотографии на рисунке 2.

Итак, начнем наши эксперименты. Наблюдения за колебаниями различных маятников дают первый результат — период колебаний, то есть полное время спуска и подъема маятника, не зависит от массы диска, а зависит от его радиуса, причем зависимость эта — почти прямая пропорциональная.

Далее, легко видеть, что с течением времени колебания довольно заметно затухают, причем чем меньше становится их амплитуда (максимальная высота подъема) и чем меньше скорость вращения диска, тем менее устойчиво ведет себя маятник. Интересно также проделать такой эксперимент: задавая некоторые возмущения (то есть выводя маятник из устойчивого состояния), проследить за их затуханием при движении маятника. Если, например, в момент запуска слегка повернуть диск в горизонтальной плоскости, то при своем падении он довольно быстро вернется к относительно устойчивому положению. Но если же отклонить маятник в плоскости его вращения, то практически до самого конца движения сохраняются оба колебания: вверх-вниз и в плоскости вращения.

Постараемся теперь объяснить часть наших экспериментальных результатов. Для простоты рассуждений предположим, что вся масса рассматриваемого диска сосредоточена на его поверхности, то есть что маятник — не диск, а обруч.

Обозначим радиус обруча через R, а радиус оси — через r (рис. 3). Рассмотрим маятник в тот момент, когда он опустился на расстояние h от верхнего положения. Каждая точка обруча, например точка A, одновременно участвует в двух движениях: в поступательном движении вместе с осью O вниз со скоростью $\vec{v}_0 = \vec{v}_{\text{пост}}$ и вращательном со скоростью $\vec{v}_{\text{вр}}$:

$$|\vec{v}_A| = |\vec{v}_{\text{вр}} + \vec{v}_{\text{пост}}|.$$

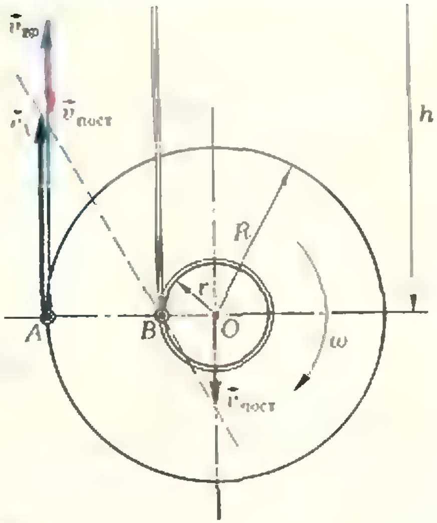


Рис. 3.

Нить разматывается без проскальзывания, и это означает, что мгновенная скорость точки B равна нулю. Поэтому движение маятника можно представить и как ряд последовательных поворотов вокруг мгновенного центра вращения B. Тогда справедливо равенство

$$\frac{v_O}{v_A} = \frac{r}{R-r}, \text{ или } \frac{v_{\text{пост}}}{v_{\text{вр}} - v_{\text{пост}}} = \frac{r}{R-r} \qquad (1)$$

(буквой v мы обозначили модуль той или иной скорости). Отсюда

$$\frac{v_{\text{пост}}}{v_{\text{вр}}} = \frac{r}{R}.$$

Теперь воспользуемся законом сохранения энергии:

$$mgh = \frac{mv_{\text{пост}}^2}{2} + \frac{mv_{\text{вр}}^2}{2}. \qquad (2)$$

Мы представили кинетическую энергию (правую часть равенства (2)) в виде двух слагаемых — энергии поступательного движения и энергии вращательного движения вокруг центра тяжести*).

Из кинематики известно, что

$$v_{\text{пост}}^2 = 2ah, \qquad (3)$$

где a — модуль ускорения поступательного движения маятника.

---

*) Возможность такого разбиения можно доказать и строго, но интуитивно это ясно и так.

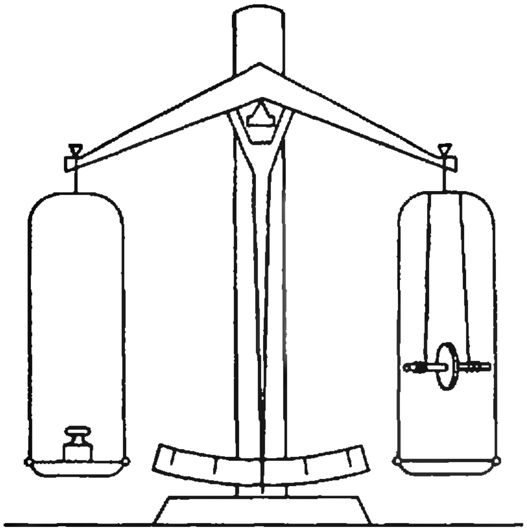


Рис. 4.

Таким образом, из уравнений (1)—(3) найдем:

$$a=\frac{g}{1+(R/r)^2}.$$

В нашем случае $R/r \gg 1$ (при этом условии выполняется требование «невесомости» оси), поэтому можно считать, что

$$a \approx g\left(\frac{r}{R}\right)^2. \qquad (4)$$

Если длина разматывающейся нити l, то $l=at^2/2$ и период колебаний маятника равен

$$T=2t=2\sqrt{\frac{2l}{a}}=2\frac{R}{r}\sqrt{\frac{2l}{g}}. \qquad (5)$$

Для диска формулы (4) и (5) соответственно преобразуются (см. «Дополнение»):

$$a=2g\left(\frac{r}{R}\right)^2, \qquad (4')$$

$$T=2\frac{R}{r}\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (5')$$

Теперь мы можем сравнить результаты расчетов и экспериментов. Из (4′) и (5′) видно, что и ускорение a, и период T не зависят от массы диска, но зависят от отношения радиусов R/r: чем больше R (по сравнению с r), тем меньше ускорение и, соответственно, больше период колебаний. Это действительно согласуется с экспериментом. Но если вы опыты проводили аккуратно, то заметили, что расчетный период (5′) меньше экспериментального. Это, как уже говорилось, связано с затуханием. А как вы думаете — где именно происходит наибольшая потеря энергии?

Наконец, можно проделать еще один очень эффектный опыт с маятником Максвелла, но для этого необходимы весы (рис. 4). Сначала при неподвижном маятнике приведите весы в равновесие, а затем отпустите маятник. Равновесие нарушится: маятник как бы станет легче. Почему? Объясните это самостоятельно.

Дополнение

Для тех, кто знаком с интегральным исчислением, приведем вывод формулы кинетической энергии вращающегося диска, откуда будет легко получить формулы (4′) и (5′).

Разобьем диск радиусом R на n тонких колец шириной Δx каждое (рис. 5). Кинетическая энергия одного кольца радиусом x и шириной Δx равна

$$\Delta E_к=(\rho 2\pi x b\Delta x)\,\frac{\omega^2x^2}{2},$$

где ρ — плотность материала диска, b — его толщина, ω — угловая скорость вращения, а выражение в скобках — масса выбранного кольца.

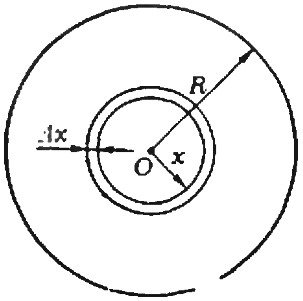


Рис. 5.

Кинетическая энергия всего диска приближенно равна сумме кинетических энергий отдельных колец:

$$E_к \approx \Sigma\Delta E_к.$$

Если перейти к пределу при n, стремящемся к бесконечности, приближенное равенство становится точным:

$$E_к=\lim_{n\to\infty}\Sigma\Delta E_к=$$

$$=\int_0^R \rho 2\pi x b\,\frac{\omega^2x^2}{2}\,dx=$$

$$=\frac{\rho\pi b\omega^2R^4}{4}=\frac{(\rho\pi R^2b)\,\omega^2R^2}{4}=\frac{m\omega^2R^2}{4}.$$

Кинетическая энергия вращающегося обруча той же массы равна $mv^2/2=m\omega^2R^2/2$. Следовательно, кинетическая энергия диска в два раза меньше.

Формулы (4′) и (5′) выведите самостоятельно.

задачник кванта

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 января 1982 года по адресу: 113035, Москва, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 11—81» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М711, М712» или «Ф723». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи.

Задачи

М711 — М715; Ф723 — Ф727

М711. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность с центром O, взаимно перпендикулярны. Докажите, что ломаная AOC делит четырехугольник на две части равной площади.

В. Варваркин

М712. Докажите, что любое положительное число можно представить в виде суммы девяти чисел, десятичные записи которых содержат только цифры 0 и 7.

Э. Туркевич

М713. M — множество точек на плоскости. Точка O плоскости называется «почти центром симметрии» множества M, если из M можно выбросить одну точку такую, что для оставшегося множества O является центром симметрии в обычном смысле. Сколько «почти центров симметрии» может иметь конечное множество?

В. Прасолов

М714*. N друзей одновременно узнали N новостей, причем каждый узнал одну новость. Они стали звонить друг другу и обмениваться новостями. За один разговор можно передать сколько угодно новостей. Какое минимальное количество звонков необходимо, чтобы все узнали все новости? Рассмотрите три случая: а) $N=64$, б) $N=55$, в) $N=100$.

А. Анджан

М715*. Прямой угол разбит на клетки (рис. 1). На некоторых клетках стоят фишки, причем расположение фишек можно преобразовывать так: если для некоторой фишки соседняя сверху и соседняя справа клетки свободны, то в эти клетки ставится по фишке, а старая фишка убирается. Вначале в угловую клетку ставится одна фишка. Можно ли указанными операциями освободить от фишек уголки из а) трех, б) шести, в) десяти клеток, показанные на рисунках 2, *а*, *б*, *в*?

М. Концевич

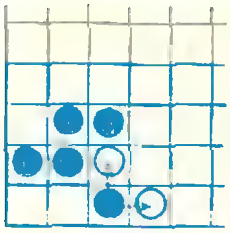


Рис. 1.

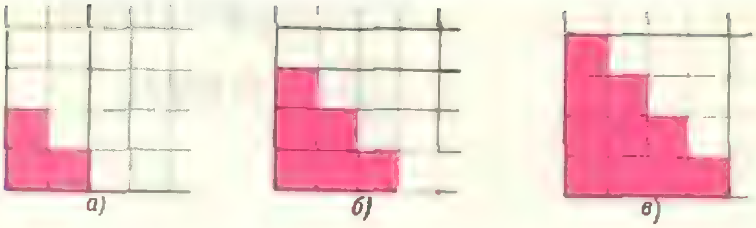


Рис. 2.

Ф723. Спортсмены бегут с одинаковыми скоростями v колонной длины l_0. Навстречу бежит тренер со скоростью u $(u<v)$. Спортсмен, поровнявшийся с тренером, бежит назад с той же скоростью v. Какова будет длина колонны, когда все спортсмены развернутся?

И. Воробьев

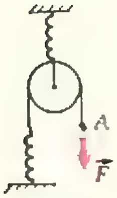


Рис. 3.

Ф724. Насколько переместится конец перекинутой через подвижный блок нити (точка A на рисунке 3), если к нему приложить силу $\vec{F}$? Жесткости пружин одинаковы и равны k. Пружины, нить и блок считать невесомыми.

Г. Меледин

Ф725. Из взрывчатого вещества нужно изготовить тонкостенную коническую оболочку так, чтобы при взрыве, начинающемся с вершины конуса и «сползающем» вниз, продукты взрыва ударялись о горизонтальную плиту, на которой стоит конус, одновременно. Скорость детонации (скорость вовлечения во взрыв новых участков взрывчатого вещества) равна v, а скорость разлета продуктов взрыва u. Каким должен быть угол φ между осью конуса и его образующей?

И. Воробьев

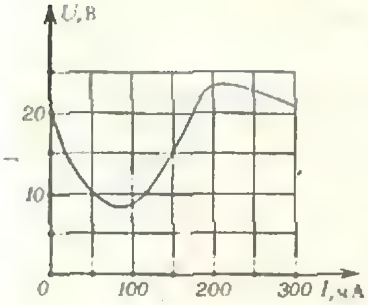


Рис. 4.

Ф726. В длинной горизонтально расположенной теплоизолированной трубе между двумя поршнями массы m каждый находится 1 моль идеального одноатомного газа при температуре T_0. Вне поршней — вакуум. В начальный момент скорости поршней направлены в одну сторону и равны v и $3v$. До какой максимальной температуры нагреется газ? Поршни тепло не проводят. Универсальная газовая постоянная равна R.

В. Бородин

Ф727. Зависимость напряжения от тока для некоторого источника электрической энергии показана на рисунке 4. Постройте график зависимости напряжения на нагрузке, на которую замкнут источник, от сопротивления нагрузки.

Problems M711 — M715; P723 — P727

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The

M711. The diagonals of a convex quadrilateral $ABCD$ inscribed in a circle of centre O are perpendicular to each other. Prove that the broken line AOC splits the quadrilateral into two parts of equal area.

V. Varvarkin

problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications.

The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than January 15th to the following adress: USSR, Moscow, 113035 МОСКВА, Б. ОРДЫНКА 21/16, «КВАНТ». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as solutions of problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-adressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year, we sum up the results of the Kvant problem contest. The list of prizewinners is published in the September issue.

If you have an original problem to propose for publication, please send it to us in two copies (including the solution) in an envelope inscribed "NEW PROBLEM IN PHYSICS (MATHEMATICS)".

M712. Prove that any positive real number can be presented as the sum of nine numbers whose decimal representations contain the digits 0 and 7 only. *E. Turkevich*

M713. A point in the plane is said to be an "almost centre of symmetry" of the plane set M, if it becomes a centre of symmetry in the usual sense after one (appropriately chosen) point is removed from M. How many almost centres of symmetry can a finite set have? *V. Prasolov*

M714*. N friends simultaneously learn N news items (one each) and start telephoning each other to exchange news. Each phone call lasts exactly one hour, during which any number of news items may be communicated. What is the minimal number of hours needed for all the friends to learn all the news? Consider three cases: a) $N=64$, b) $N=55$, c) $N=100$. *A. Andjan*

M715*. A right angle is split up into little square cases (see Рис. 1). The disposition of pawns placed in the cases may be altered according to the following rule: if both the case directly above and the next case to the right of some pawn are empty, the pawn may be removed, two pawns being placed in the empty cases instead. At the start, one pawn is placed in the case at the vertex. Using the rule above, is it possible to chase out all pawns from the "corners" of the angle on figure Рис. 2, *а*, *б*, *в* and consisting of a) three, b) six, c) ten cases? *M. Kontsevich*

P723. A group of athletes is running with velocity v, forming a column of length l_0. Their coach runs in the opposite direction with velocity u $(u < v)$. When each athlete encounters the coach, he turns around and runs back at the same speed v. How long will the column be when all the athletes will have turned around? *I. Vorobiev*

P724. How far will the extremity (the point A on figure Рис. 3) of a spring thrown over a pulley be displaced, if a force $\vec{F}$ is applied to it? The rigidities of the springs both equal k. The string, the pulley and the springs are assumed to have no mass. *G. Meledin*

P725. A thin cone-shaped envelope must be made from explosive material, so that during the explosion, which begins at the vertex of the cone, the products of explosion reach the horizontal plate (on which the cone is placed) simultaneously. The detonation velocity (i. e. the velocity with which the explosion propagates in the explosive material) is v, while the velocity of motion of the explosion products is u. What angle φ between the axis and the generator of the cone must be chosen? *I. Vorobiev*

P726. One mole of monoatomic gas at temperature T_0 is contained in a long horizontal thermoisolated pipe, between two identical pistons of mass m. The pistons are surrounded by vacuum. At the initial moment of time the two pistons move in the same direction with velocities v and $3v$. To what maximal temperature will the gas be heated? The pistons don't conduct heat. The universal gas constant is R.

P727. The dependence of tension on current of a certain source of electric energy is shown on figure Рис. 4. Plot the graph of the tension obtained from this source on a resistor, as a function of the resistance. *V. Borodin*

Решения задач

M671 — M674; Ф683 — Ф687

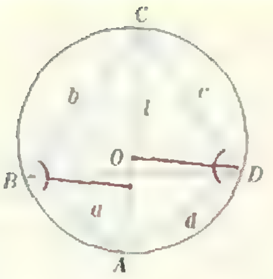
M671. *Во вписанном четырехугольнике одна диагональ делит вторую пополам. Докажите, что квадрат длины первой диагонали равен половине суммы квадратов длин всех сторон четырехугольника.*

Пусть a, b, c, d — длины сторон четырехугольника $ABCD$, $|BO|=|OD|$, $|AC|=l$ (см. рисунок). По теореме косинусов

$$l^2=a^2+b^2-2ab\cos\widehat{B}, \tag{1}$$

$$l_2=c^2+d^2+2cd\cos\widehat{B} \tag{2}$$

($\widehat{D}=180°-\widehat{B}$, поскольку четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность).



Легко заметить, что треугольники ABC и ADC равновелики: $S_{ABC}=S_{ADC}$ — они имеют общее основание AC и равные по длине высоты, опущенные на это основание. Поэтому $\frac{1}{2}ab\sin\widehat{B}=\frac{1}{2}cd\sin(180°-\widehat{B})$, то есть $ab=cd$. Складывая (1) и (2), получаем требуемое.

Р. Мазов

М672. *Пусть a — натуральное число такое, что 2^a-2 делится на a (например, $a=3$). Определим последовательность (x_n) условиями*

$$x_1=a,\ x_{k+1}=2^{x_k}-1.$$

Докажите, что $2^{x_k}-2$ делится на x_k при любом k.

◆

Докажем это утверждение методом математической индукции.

При $k=1$ оно справедливо по условию. Предположим, что $2^{x_k}-2$ делится на x_k, и докажем, что $2^{x_{k+1}}-2$ делится x_{k+1}.

Пусть $x_{k+1}-1=2^{x_k}-2=mx_k$, где $m>1$ — натуральное число. Тогда

$$2^{x_{k+1}}-2=2(2^{x_{k+1}-1}-1)=2(2^{mx_k}-1)=$$
$$=2(2^{x_k}-1)(2^{(m-1)x_k}+2^{(m-2)x_k}+\ldots+1)=Mx_{k+1}$$

где M — натуральное число, что и требовалось доказать.

В. Яноус

От редакции. Задача **М672** по существу совпадает с леммой 2 из статьи И. Яглома «Почти простые числа» («Квант», 1981, № 9).

М673. *На плоскости в вершинах треугольника лежат три шайбы A, B, C. Хоккеист выбирает одну из них и бьет по ней так, что она проходит между двумя другими и останавливается в какой-то точке. а) Покажите, как после пяти ударов шайба C может вернуться на свое место, а шайбы A и B поменяться местами. б) Могут ли все три шайбы A, B, C вернуться на свои прежние места после 25 ударов?*

◆

а) Нетрудно сообразить, что если по шайбе C наносится хотя бы один удар, то за пять ударов вернуть назад шайбу C и поменять местами шайбы A и B не удастся.

Однако, если шайба C стоит на месте, а перемещаются только шайбы A и B, задача легко решается (см. рис. 1; индекс i означает положение шайбы после i-го удара).

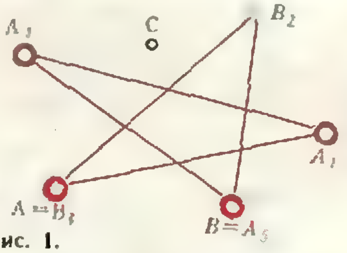


Рис. 1.

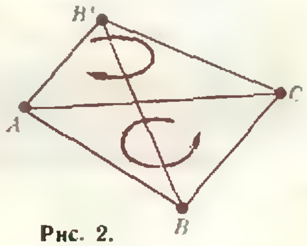


Рис. 2.

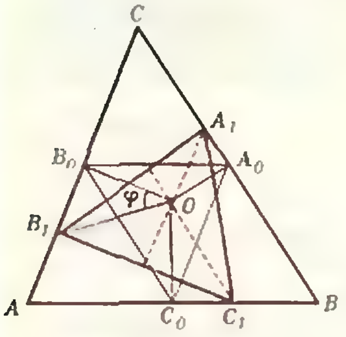
б) Ответ: не могут. Для доказательства проследим за *ориентацией* треугольника ABC — направлением обхода его контура. Легко видеть, что после каждого удара направление обхода меняется на противоположное (на рисунке 2 обход вершин $A\to B\to C\to A$ осуществляется против часовой стрелки, а обход вершин $A\to B'\to C\to A$ — по часовой стрелке). Поэтому после нечетного числа ударов направление обхода будет противоположным заданному вначале.

А. Егоров

М674. *На сторонах BC, AC и AB остроугольного треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1 соответственно. Известно, что центр описанной около треугольника ABC окружности совпадает с точкой пере-*

◆

Пусть A_0, B_0, C_0 — середины сторон треугольника ABC, O — центр описанной около него окружности (см. рисунок). Треугольник $A_0B_0C_0$ подобен треугольнику ABC, а точка O является точкой пересечения его высот. Рассмотрим преобразование подобия $F=H_O^k\cdot R_O^\varphi$ (композицию гомотетии H_O^k с центром O и коэффициентом k и поворота R_O^φ на угол φ вокруг O), *сечения высот треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны.*



где $k=\frac{1}{\cos\varphi}$. При этом точки $F(A_0)$, $F(B_0)$ и $F(C_0)$ будут принадлежать прямым BC, AC и AB соответственно. Таким образом, при изменении φ мы получаем целое семейство треугольников с общим *ортоцентром* (точкой пересечения высот), вписанных в треугольник ABC и ему подобных. Осталось показать, что треугольник $A_1B_1C_1$ принадлежит этому семейству.

Выберем $\varphi=B_0\widehat{O}B_1$ так, что $F(B_0)=B_1$; пусть $F(A_0)=A_2$, $F(C_0)=C_2$. Точка O служит точкой пересечения высот треугольников $A_1B_1C_1$ и $F(\triangle A_0B_0C_0)=\triangle A_2B_1C_2$; значит, сторона A_2C_2 должна быть параллельна стороне A_1C_1 или совпадать с ней. Но ясно, что высоты треугольника $A_2B_1C_2$, опущенные из вершин A_2 и C_2, не могут пройти через O, за исключением того случая, когда $A_2=A_1$ и $C_2=C_1$, так что на самом деле треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_1C_2$ совпадают.

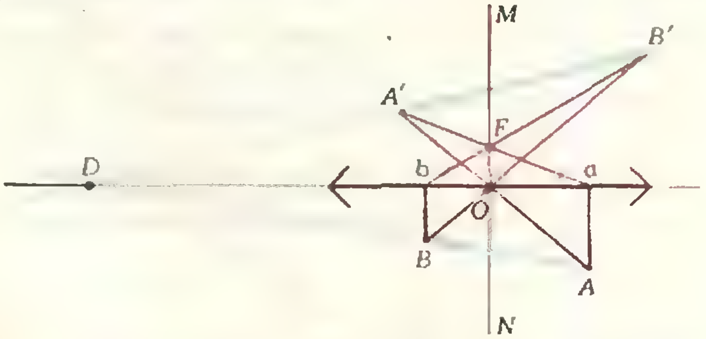
В заключение заметим, что в нашем решении остроугольность треугольника ABC не использовалась: утверждение задачи верно для любого треугольника ABC (и любых точек A_1, B_1, C_1 на прямых BC, AC, AB).

Д. Изаак

◆

Ф683. *На рисунке показаны источник AB и его изображение $A'B'$, полученное в линзе. Определить построением расположение линзы и ее фокусное расстояние.*

Оптический центр линзы лежит в точке O пересечения прямых BB' и AA'. Точка D, являющаяся пересечением прямых AB и $A'B'$, лежит в плоскости линзы. Следовательно, линза расположена вдоль прямой OD; MN ($MN\perp OD$) — главная оптическая ось линзы.



Лучи Aa и Bb после преломления пересекутся в фокусе линзы ($Aa\|Bb\|MN$). Следовательно, F — фокус линзы.

С. Кротов

◆

Ф684. *Схема имеет N входных зажимов, один выходной и один общий («земля»). На каждом из входных зажимов потенциал относительно «земли» составляет от +50 до +200 В.*

1) Нарисуйте вариант схемы, который обеспечит на выходном зажиме максимальный из приложенных ко входам потенциалов.

2) Нарисуйте другой вариант — обеспечивающий на выходном зажиме минимальный из приложенных потенциалов.

Постарайтесь обойтись без применения дополнительных источников питания.

Первый вариант приведен на рисунке 1. В схеме закрыты все диоды, кроме одного — того, который подключен ко входу с максимальным потенциалом $\varphi_{\max}$. Этот потенциал и окажется на выходе; разность между ним и другими (меньшими) потенциалами обеспечит запирание остальных диодов.

Второй вариант может быть таким, как на рисунке 2. Если потенциал пластины источника ($\mathcal{E}$) больше или равен $\varphi_{\max}$, то открытым окажется диод, подключенный ко входу с минимальным потенциалом; то же будет и на выходе; остальные диоды будут заперты.

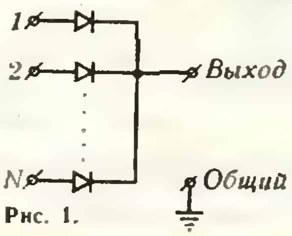


Рис. 1.

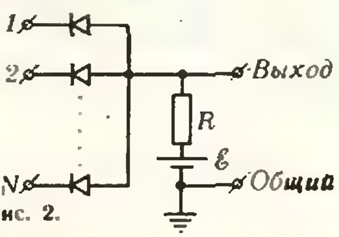


Рис. 2.

Для того чтобы обойтись без дополнительного источника, можно воспользоваться схемой первого варианта — ее выходное напряжение вполне заменяет источник.

Строго говоря, потенциалы на выходных зажимах схем не равны в точности входным, а отличаются на величину падения напряжения на открытом диоде — оно составляет доли вольта. Этот недостаток можно в значительной мере уменьшить, воспользовавшись тем, что напряжение на открытом диоде мало зависит от тока, протекающего через диод. Подумайте сами, как это сделать. (Подсказка: без дополнительного источника не обойтись.)

А. Зильберман

◆

Ф685. *Между стенкой и кубом массы $M=10$ кг летает на гладком столе упругий шарик массы $m=0{,}1$ г. Его скорость вначале, когда куб покоился, составляла $v_0=100$ м/с. Найти скорость куба в тот момент, когда он будет в 2 раза дальше от стенки, чем вначале.*

Будем считать, что при каждом ударе шарика о куб скорость куба меняется на очень малую величину и остается во много раз меньше, чем скорость шарика.

Пусть x — расстояние от куба до стенки, u — скорость куба, v — скорость шарика. Тогда время между двумя последовательными соударениями равно $\tau=2x/v$. При каждом соударении куб получает импульс $\Delta p=2mv$ (мы учли, что $u \ll v$). Скорость шарика за один удар изменяется на $\Delta v=-2u$ (это очевидно, если рассматривать движение в системе отсчета, связанной с кубом). Для упрощения расчетов примем, что в результате соударений скорости u и v меняются не скачками, а плавно. Тогда «среднее» ускорение шарика $v'=\dfrac{\Delta v}{\tau}=-\dfrac{uv}{x}$. Учитывая, что $u=x'$, перепишем это равенство:

$$v'x+x'v=0.$$

Заметим, что слева написано выражение, равное производной от произведения vx; тот факт, что эта производная равна нулю, означает, что величина vx остается в процессе постоянной. Следовательно,

$$vx=v_0x_0,$$

где x_0 — расстояние между кубом и стенкой в начале процесса. При $x=2x_0$ скорость шарика равна $v_0/2$. Скорость куба в этот момент найдем из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2}=\frac{m(v_0/2)^2}{2}+\frac{Mu^2}{2} \Rightarrow u=\frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{3m}{M}}\approx 0{,}27 \text{ м/с}.$$

З. Рафаилов

◆

Ф686. *Тонкий обруч массы M и радиуса R поставлен на горизонтальную плоскость. По гладкому каналу, проходящему внутри обруча, соскальзывает из верхней точки без начальной скорости небольшая шайба массы m. Определить скорость центра обруча в тот момент, когда шайба находится в точке обруча A, радиус-вектор которой образует угол φ с вертикалью. В начальный момент обруч покоится. Трение между обручем и плоскостью отсутствует.*

Силы, действующие на систему обруч — шайба, — это сила тяжести и сила нормальной реакции со стороны плоскости. Обе эти силы направлены вдоль вертикали. Следовательно, центр масс системы в горизонтальном направлении не перемещается.

Поскольку трение между обручем и плоскостью отсутствует, обруч движется поступательно. Согласно закону сохранения импульса, в любой момент времени

$$M|u|=m|v_x|. \qquad (1)$$

где u и v_x — горизонтальные проекции скоростей обруча и шайбы (причем $u=|\vec{u}|$). Так как v_x периодически меняет знак, то и u «синхронно» меняет знак. Общий характер движения обруча таков: шайба на участках BC и BE (рис. 1) — центр обруча движется вправо; шайба на участках CD и DE — центр обруча движется влево.

Скорости шайбы $\vec{v}$ и обруча $\vec{u}$ связаны законом сохранения энергии:

$$mgR(1+\cos\varphi)=\frac{mv^2}{2}+\frac{Mu^2}{2}, \qquad (2)$$

где φ — угол, который составляет с вертикалью радиус-вектор точки, в которой в данный момент (при данных значениях $\vec{v}$ и $\vec{u}$) находится шайба.

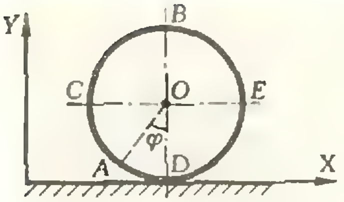


Рис. 1.

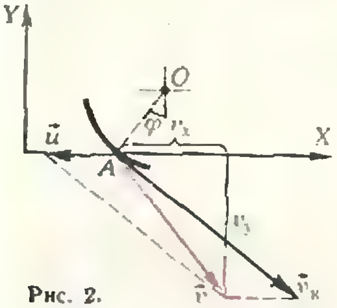


Рис. 2.

Движение шайбы относительно неподвижного наблюдателя можно представить в любой момент времени как суперпозицию двух движений: движения относительно центра обруча со скоростью $v_к$, направленной по касательной к обручу, и движения вместе с обручем со скоростью u, направленной горизонтально (рис. 2). Как видно из рисунка 2,

$$\frac{|v_y|}{|v_x|+|u|}=\operatorname{tg}\varphi. \qquad (3)$$

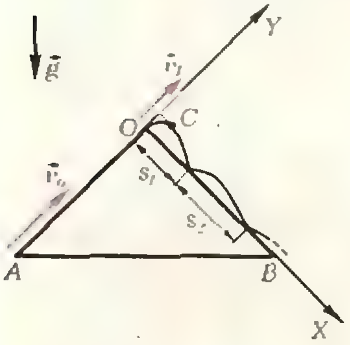
Решая совместно уравнения (1) — (3), найдем значение скорости центра обруча в тот момент, когда радиус-вектор точки, в которой находится шайба, составляет угол φ с вертикалью:

$$|\vec{u}|=m\cos\varphi\sqrt{\frac{2Rg(1+\cos\varphi)}{(M+m)(M+m\sin^2\varphi)}}.$$

С. Кротов

◆

Ф687. *Стальному шарику, находящемуся в точке A основания AB равнобедренного прямоугольного клина, сообщают скорость v_0 в направлении стороны AO (см. рисунок). При каких значениях v_0 шарик из точки A попадает в точку B? Длина ребра клина l.*



В общем случае траектория шарика после отрыва от клина в точке O будет такой, как показано на рисунке, — она будет состоять из участков парабол. Проекции на ось OX перемещений шарика за последовательные равные промежутки времени $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ относятся как

$$s_1:s_2:s_3:\ldots:s_n=1:3:5:\ldots:(2n-1)$$

(поскольку в момент «отрыва» шарика в точке O проекция его скорости $\vec{v_1}$ на ось OX равна нулю). Если при n-м соударении с ребром OB шарик попадает в точку B, то

$$s_1+s_2+s_3+\ldots+s_n=s_1(1+3+5+\ldots+(2n-1))=s_1n^2=l.$$

Найдем, как связаны s_1 и v_1. Проекции ускорения шарика на оси OX и OY равны $a_x=a_y=g\sqrt{2}/2$, и

$$s_1=a_x\frac{t_1^2}{2}=g\frac{\sqrt{2}}{4}t_1^2.$$

Время t_1 движения шарика до первого удара о клин найдем из условия $v_1-a_y\frac{t_1}{2}=0$:

$$t_1=\frac{2v_1}{a_y}=\frac{4v_1}{g\sqrt{2}}.$$

Таким образом,

$$s_1=\frac{2v_1^2\sqrt{2}}{g}, \text{ или } v_1^2=\frac{gl\sqrt{2}}{4n^2}.$$

Связь между v_1 и v_0 найдем из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2}=\frac{mv_1^2}{2}+mgl\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_0=\sqrt{v_1^2+gl\sqrt{2}}=\frac{1}{2n}\sqrt{gl\sqrt{2}(4n^2+1)}.$$

Итак, шарик попадает в точку B, если в точке A ему сообщают скорость $|\vec{v_0}|=\frac{1}{2n}\sqrt{lg\sqrt{2}(4n^2+1)}$, где n — натуральное число. Отметим, что

$$\lim_{n\to\infty}v_0=\sqrt{gl\sqrt{2}}.$$

Этот же результат следует из закона сохранения энергии: при $n\to\infty$ $v_1\to0$, и

$$\frac{mv_0^2}{2}=mgl\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow v_0=\sqrt{gl\sqrt{2}}.$$

Е. Рабкин

В. Гальперин, Г. Гальперин

Освещение плоскости прожекторами

Интересная и трудная задача **М545**, решению которой посвящена эта заметка, по постановке вопроса и методам решения типична для комбинаторной геометрии — раздела геометрии, занимающегося задачами о разбиениях, покрытиях, упаковках фигур.
Напомним ее формулировку:

На плоскости задано n точек. Нужно разместить в этих точках n прожекторов, каждый из которых освещает угол величины $\frac{360°}{n}$ так, чтобы осветить всю плоскость. Докажите, что это возможно при любом расположении данных точек, если а) $n=3$; б) $n=4$; в) n — *любое натуральное число* (в случаях а) — в) прожекторы можно поворачивать); г) *Пусть теперь прожекторы освещают углы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ $(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=360°)$ и составлены в одну точку так, что они освещают всю плоскость. Докажите, что можно перенести*) в каждую из данных точек по одному из n прожекторов так, что вся плоскость будет по-прежнему освещена.*

История этой задачи достаточно интересна. Самый простой ее частный случай б) предлагался на первой Всесоюзной математической олимпиаде в 1967 году. Именно там с ней познакомился второй из авторов этой заметки (тогда он еще был школьником). Несколько лет спустя он нашел доказательство более общего факта (пункт в)) и предложил его оргкомитету Московской математической олимпиады для отборочных соревнований московских школьников — кандидатов в команду Москвы на Всесоюзную олимпиаду 1978 года. На этих соревнованиях первый из авторов (однофамилец второго), бывший тогда десятиклассником, придумал новый, допускающий дальнейшие обобщения подход к задаче.

В том же «историческом» порядке мы расскажем о разных способах решения задачи и ее обобщениях.

Разбиение на части

Начнем с пункта *б*). Проведем прямую *e* так, чтобы две из данных точек находились в одной из получившихся полуплоскостей, а две оставшиеся — в другой. Два прожектора, находящиеся в одной полуплоскости, всегда можно направить так, чтобы они осветили всю другую полуплоскость (рис. 1).

В случае а) разобьем плоскость на три угла по 120° с общей вершиной *O* так, чтобы каждый угол содержал ровно одну из данных точек M_1, M_2, M_3 (в качестве точки O можно, например, взять основание высоты треугольника $M_1M_2M_3$, опущенной на его самую длинную сторону; см. рис. 2).

Рассмотрим теперь углы, симметричные этим углам относительно точки O. На рисунке 2 показано, как направить прожектор, помещенный в точку M_1 так, чтобы он освещал закрашенный красным цветом угол. Аналогично, прожекторы в точках M_2 и M_3 можно направить так, чтобы они освещали «свои» углы.

Ту же идею — разделить плоскость на части так, чтобы каждую из них удалось осветить своей группой прожекторов, — можно применить и в случае в).

Для этого достаточно доказать следующие два утверждения.

Утверждение 1. *Пусть внутри данного угла величины $\alpha=k\frac{2\pi}{n}$, где $k<\frac{n}{2}$ расположено k прожекторов. Тогда их можно повернуть так, чтобы они вместе осветили целиком угол, симметричный данному относительно его вершины (рис. 3).*

Для доказательства этого утверждения индукцией по k удобно использовать такую арифметическую лемму. *Если $s_1, s_2, \ldots, s_k$ — целые неотрицательные числа, причем $s_1 \geq 1$,*

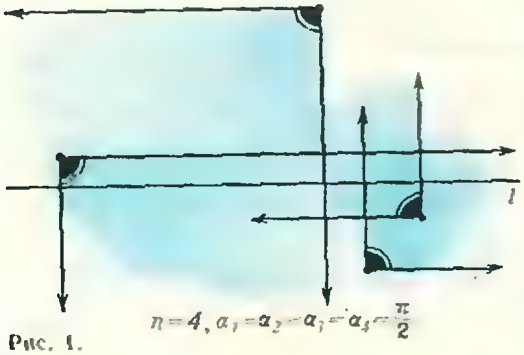


Рис. 1.

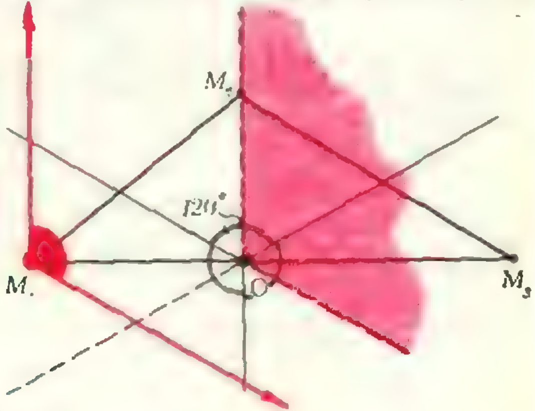


Рис. 2.

---

*) Имеется в виду, что прожекторы можно параллельно переносить, но не поворачивать!

$s_k \geqslant 1$ и $s_1+s_2+\ldots+s_k=k$, то существует $m<k$, для которого $s_1+\ldots+s_m=m$ (тогда $s_{m+1}+\ldots+s_k=k-m$).

Наконец, остается доказать еще такой довольно очевидный факт — легче сделать это отдельно для четного и для нечетного n.

Утверждение 2. *Если в плоскости задано n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$, то ее можно разбить на две полуплоскости, содержащие по $n/2$ точек, если n четно, или на три угла с общей вершиной и величинами $k_1\frac{2\pi}{n}$, $k_2\frac{2\pi}{n}$, $k_3\frac{2\pi}{n}$, где $k_1+k_2+k_3=n$ и $k_i<n/2 (i=1, 2, 3)$, каждый из которых содержит по k_i точек, если n нечетно.*

Упражнение 1. Докажите утверждение 1, лемму и утверждение 2.

После этого, согласно утверждению 1, освещаем соответствующими прожекторами углы, симметричные относительно их общей вершины тем углам, в которых они расположены, и вся плоскость оказывается освещенной.

Алгоритм улучшения

Наметим идею решения пункта г). Расставим прожекторы по данным точкам $M_1, M_2, \ldots M_n$ произвольным образом. Если при этом не вся плоскость освещена, мы предъявим другой, «улучшенный» способ расстановки прожекторов (при этом «качество» расстановки будет оцениваться некоторой числовой функцией f). Поскольку всего расстановок прожекторов по точкам $M_1, M_2, \ldots, M_n$ лишь конечное число (равное $n!$), взяв расстановку, для которой значение функции f максимально, мы автоматически осветим полностью всю плоскость: действительно, если бы при этом не вся плоскость освещалась, мы смогли бы еще «улучшить» расстановку, получив тем самым противоречие.

Начнем реализовывать этот план. Теперь прожекторы — любые углы α_i с общей вершиной O, $0<\alpha_i<\pi$, $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=2\pi$, причем каждый из них освещает изнутри сторону некоторого выпуклого n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ (рис. 4), $A_i\widehat{O}A_{i+1}=\alpha_i$. Опустим из точки O перпендикуляры OH_i на стороны многоугольника (или их продолжения); пусть $|OH_i|=h_i$. Рассмотрим векторы $\vec{e}_i=\frac{1}{h_i^2}\overrightarrow{OH_i}$. Ясно, что $|\vec{e}_i|=\frac{1}{h_i}$ (рис. 5).

Расстановке прожекторов по точкам $M_1, M_2, \ldots, M_n$ отвечает расстановка векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ по этим точкам (мы как бы прикрепляем вектор $\vec{e}_i$ к прожектору α_i и переставляем их вместе как единое целое).

Единственный геометрический факт, нужный нам в дальнейшем и «оправдывающий» странный, на первый взгляд, выбор векторов $\vec{e}_i$, состоит в следующем:

Лемма. *Пусть прожектор α_p, помещенный в точку M, освещает точку N, а прожектор α_q — нет. Тогда $\overrightarrow{MN}\cdot\vec{e}_p>\overrightarrow{MN}\cdot\vec{e}_q$.*

Доказательство. Пусть $\overrightarrow{MN}=\vec{v}$. Отложим от точки O вектор $\overrightarrow{OP}=\vec{v}$ (рис. 6). Луч $[OP)$ пересекает p-ю сторону многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ в некоторой точке K, а q-ю сторону не пересекает, поскольку прожектор α_p освещает точку N, а прожектор α_q ее не освещает.

Есть две возможности: 1) луч $[OP)$ не пересекается с прямой, на которой лежит q-я сторона, и 2) луч $[OP)$ пересекает эту прямую в некоторой точке R.

В первом случае утверждение леммы очевидно, так как $\vec{v}\cdot\vec{e}_p>0$, а $\vec{v}\cdot\vec{e}_q<0$.

Во втором случае очевидно неравенство $|OK|<|OR|$, и поэтому $\vec{v}\cdot\vec{e}_p=$
$=|OP|\cdot|e_p|\cdot\cos(\widehat{\vec{v}, \vec{e}_p})=\frac{|OP|}{|OK|}>\frac{|OP|}{|OR|}=$
$=|OP|\cdot\frac{1}{h_q}\cos(\widehat{\vec{v}, \vec{e}_q})$. Лемма доказана.

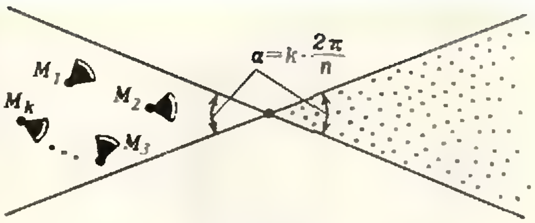


Рис. 3.

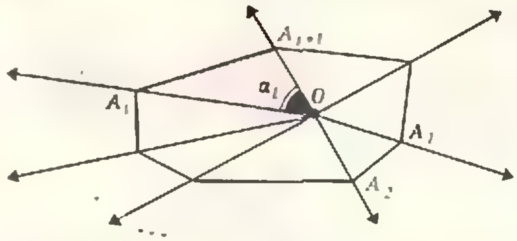


Рис. 4.

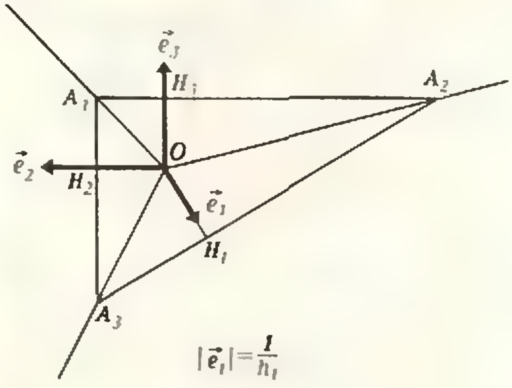


Рис. 5.

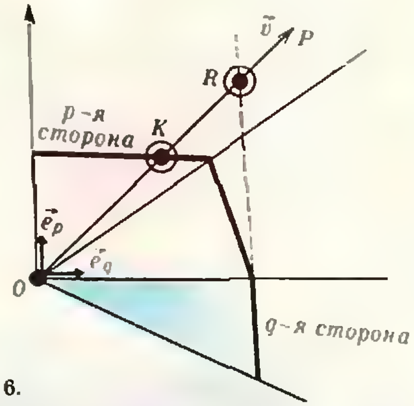


Рис. 6.

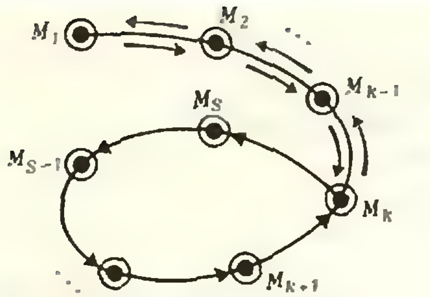


Рис. 7.

Введем теперь величину $f_\sigma(N)$, зависящую от точки N плоскости и от расстановки σ прожекторов по точкам $M_1, M_2, \ldots, M_n$, следующим образом:

$$f_\sigma(N)=\overrightarrow{M_1N}\cdot\vec{e}_{\sigma(1)}+\overrightarrow{M_2N}\cdot\vec{e}_{\sigma(2)}+\ldots+ +\overrightarrow{M_nN}\cdot\vec{e}_{\sigma(n)} \qquad (1)$$

($\sigma(i)$ — номер прожектора, поставленного в точку M_i).

Следующее основное утверждение показывает, что функция $f_\sigma(N)$ может характеризовать «качество» расстановки.

Утверждение 3. *Если точка N при расстановке σ не освещена, то найдется расстановка прожекторов τ такая, что $f_\tau(N)>f_\sigma(N)$.*

Доказательство. Приведем сначала алгоритм, позволяющий «улучшить» расстановку σ.

Пусть прожектор α_i расположен в точке M_i. Пусть прожектор α_1, стоящий в точке M_1, не освещает точку N. Уберем его на время, и в точку M_1 перенесем прожектор, который после переноса уже осветит точку N.

Упражнение 2. Докажите, что такой прожектор найдется.

Пусть это будет прожектор α_2. Теперь в точке M_2, где стоял прожектор α_2, ничего нет. Поставим в эту точку один из $n-1$ оставшихся прожекторов, который после этого осветит точку N. Пусть это будет прожектор α_3. Поместим теперь в точку M_3 прожектор α_4, который после этого станет освещать N, в точку M_4 поместим прожектор α_5 и так далее, до тех пор, пока не образуется цикл (рис. 7): это означает, что в точку M_k перенесен прожектор α_{k+1}, в точку M_{k+1} — прожектор α_{k+2}, ..., в точку с номером s — прожектор α_k ($s>k$). Прожекторы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$ возвратим на свои старые места (в точки с теми же номерами). В результате точка N оказывается освещенной каждым прожектором $\alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_s$ (так как раньше точка N не освещалась, $s\geqslant k+1$).

Посмотрим, как изменилось число $f(N)$. Слагаемые с номерами, отличными от k, $k+1, \ldots, s$, в сумме (1) не изменились. А из леммы следует, что все слагаемые с номерами k, $k+1, \ldots,$ s после указанной перестановки увеличились.

Итак, утверждение 3 доказано. Правда, величину f_σ еще нельзя непосредственно использовать для оценки «качества» расстановки σ — ведь она зависит от точки N. Здесь дело спасает замечательное

Утверждение 4. *Для любых двух точек N_1 и N_2 разность $f_\sigma(N_1)-f_\sigma(N_2)$ не зависит от расстановки прожекторов.*

Доказательство. $f_\sigma(N_1)-f_\sigma(N_2)=$

$$=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{M_{\sigma(i)}N_1}\cdot\vec{e}_{\sigma(i)}-\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{M_{\sigma(i)}N_2}\cdot\vec{e}_{\sigma(i)}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(\overrightarrow{M_{\sigma(i)}N_1}-\overrightarrow{M_{\sigma(i)}N_2})\cdot\vec{e}_{\sigma(i)}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{N_2N_1}\cdot\vec{e}_{\sigma(i)}=\overrightarrow{N_2N_1}\cdot\sum_{i=1}^{n}\vec{e}_{\sigma(i)}=c.$$

Сумма $\sum\limits_{i=1}^{n}\vec{e}_{\sigma(i)}$ есть постоянный вектор (не зависящий от расстановки). $\overrightarrow{N_2N_1}$ — также фиксированный вектор, и поэтому число c не зависит от расстановки прожекторов, что и требовалось доказать.

Это означает, что функцию $f_\sigma(N)$ можно заменить функцией $f_\sigma=f_\sigma(N)+\overrightarrow{NN_0}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\vec{e}_{\sigma(i)}=\sum\limits_{i=1}^{n}\overrightarrow{M_{\sigma(i)}N_0}\cdot\vec{e}_{\sigma(i)}$, где N_0 — произвольная фиксированная точка плоскости

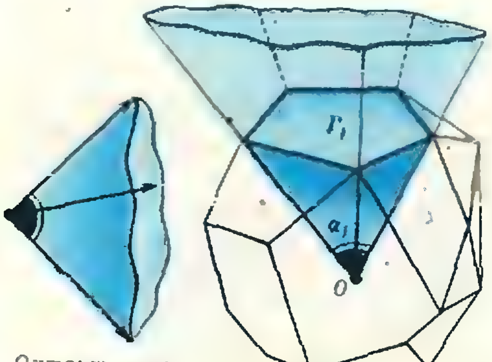
Число f_σ уже не зависит от точки N и при каждой описанной нами перестановке будет возрастать.

Идея, таким образом, полностью осуществлена: найдена «функция качества», зависящая только от расстановки прожекторов, и показано, как увеличить ее значение, если какая-нибудь точка не освещена. Так как для некоторой расстановки ω число f_ω максимально, при расстановке ω освещена вся плоскость.

Упражнение 3. Проведите доказательство пространственных вариантов задачи о прожекторах.

а) В 8 любых точках пространства можно расположить октанты (трехгранные углы с прямыми плоскими углами (см. рис. 8, *а*)) так, чтобы они покрыли все пространство.

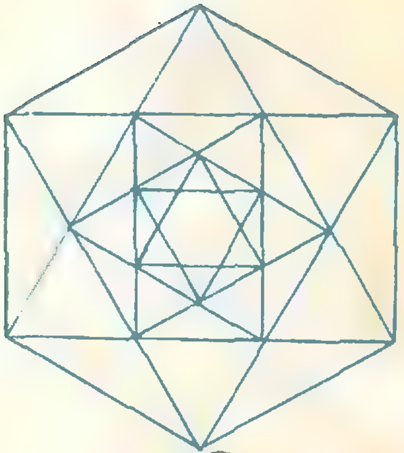
б) Пусть в пространстве заданы выпуклый многогранник с гранями $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ и точка O внутри него, а также n точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Каждая грань Γ_i определяет многогранный угол α_i с вершиной в O. В точке O расположено n прожекторов, причем i-й прожектор, $1\leqslant i\leqslant n$, освещает многогранный угол α_i (тем самым все пространство полностью освещено (рис. 8, б). Докажите, что прожекторы можно перенести в точки $M_1, M_2, \ldots, M_n$ так, что все пространство по-прежнему будет освещено.



Октант *а*) *б*)

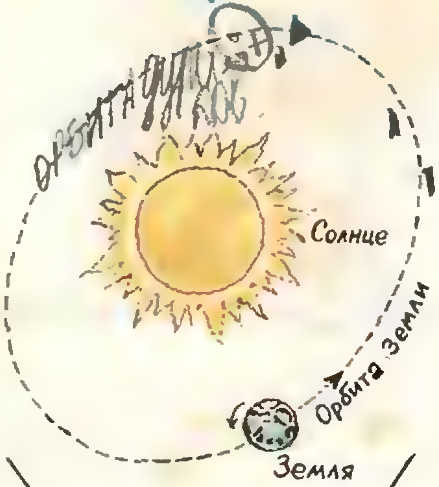
Рис. 8.

Задачи



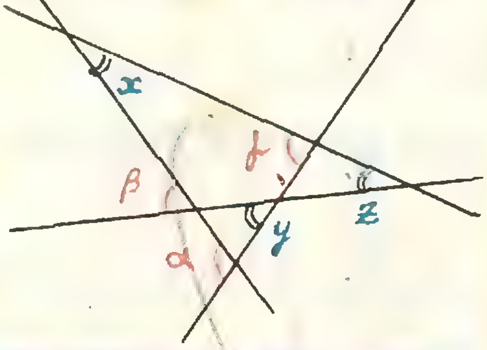
1. В клетке таблицы $n \times n$ записаны числа -1, 0 и 1. Может ли быть так, чтобы суммы чисел по строкам, столбцам и большим диагоналям были все различны?

2. Сколько треугольников содержит фигура, изображенная на верхнем рисунке?



3. Сколько оборотов совершает Земля вокруг своей оси за один год? (Продолжительность года считать равной 365 дням.)

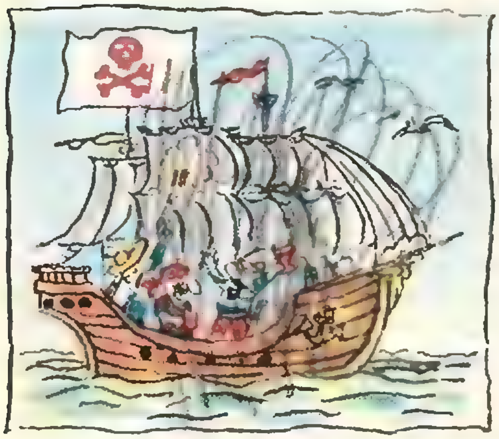
4. На плоскости расположены четыре прямые (см. рисунок). Известны углы между некоторыми из них: $\alpha = 110°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 80°$. Найдите углы между остальными парами прямых.

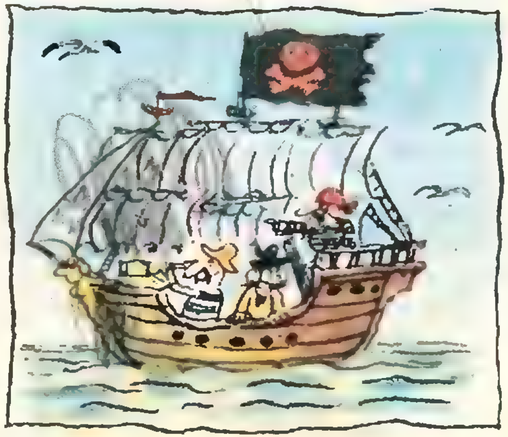


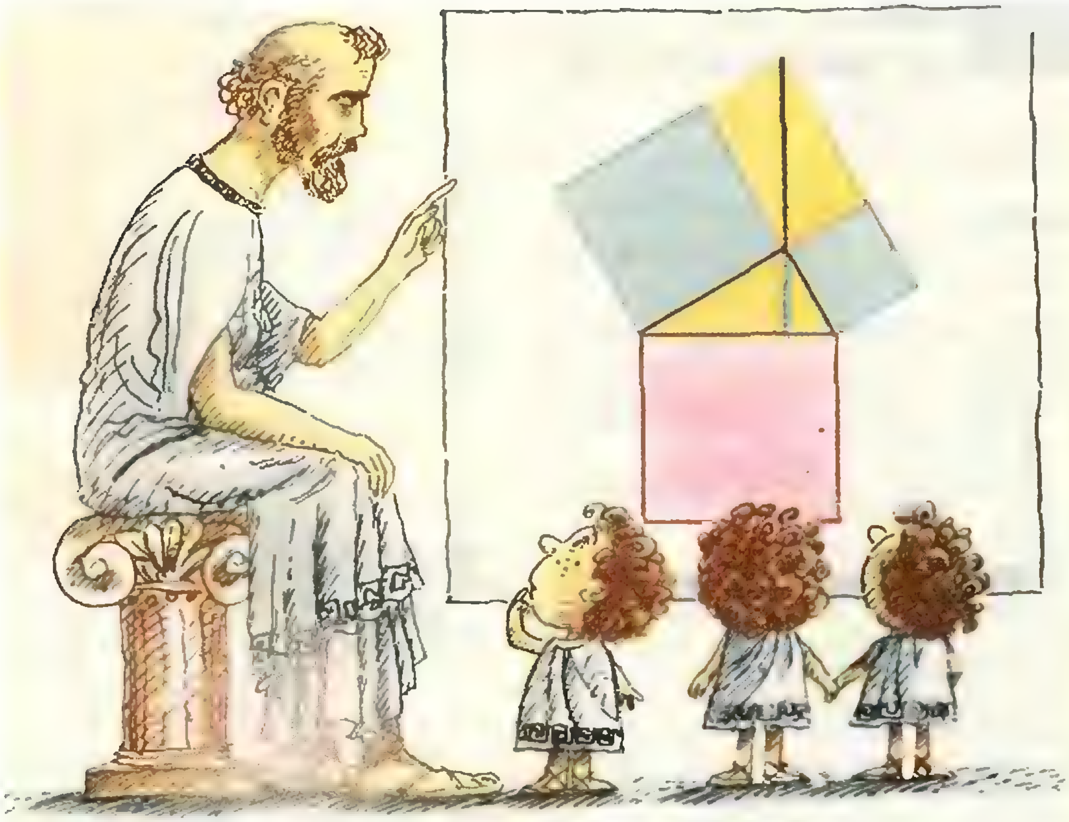
5. Найдите все такие двузначные числа, которые делятся на произведение своих цифр.

6. На пакете с фотопленкой написано: «Обрабатывать при красном свете». Получится ли на этой пленке пиратский флаг, изображенный на рисунке слева? А флаг, изображенный справа?

Эти задачи нам предложили
Т. Волошик, ученица
7 класса школы № 3
г. Белоозерска,
Ф. Бартенев, *Г. Коткин*,
Б. Мукушев, *А. Савин*







Р. Рубинов

По следам теоремы Пифагора

В нынешнем учебнике геометрии теорема Пифагора «Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов его катетов» доказывается «алгебраически», выкладкой («Геометрия 6—8», п. 67).

Евклид доказывал ее «геометрически». Он строил на сторонах прямоугольного треугольника квадраты и доказывал, что сумма площадей квадратов на катетах равна площади квадрата на гипотенузе. Сейчас мы приведем два доказательства теоремы Пифагора, использующие эту идею, и затем предъявим много других фигур, для которых выполнено то же «пифагорово соотношение», что и для квадратов.

Строим квадраты

На рисунке 1, *а* на катетах выделенного прямоугольного треугольника внутрь построены квадраты; квадрат на гипотенузе построен наружу. Везде, где один квадрат налегает на другой, стороны квадратов продолжены. Равновеликие фигуры*) окрашены в одинаковый цвет. Из рисунка видно, что треугольник, образованный из красной трапеции и желтого треугольника («красно-желтый» треугольник), равновелик треугольнику, образованному из зеленой трапеции и серого треугольника («серо-зеленый» треугольник). На рисунке 1, *б* на катетах исходного треугольника (теперь белого) квадраты построены внешним образом, причем в одном из них серо-зеленый треугольник заменен на равновеликий ему красно-желтый. Заменив еще раз зеленую трапецию с серым треугольником на красную трапецию с желтым треугольником, получим нужное равенство площадей.

---

*) То есть фигуры, имеющие одинаковую площадь.

Еще одно доказательство получается из рисунков 2, *а — е*; оно использует тот факт, что синяя высота в нашем прямоугольном треугольнике (см. заставку) и красная диагональ прямоугольника, образованного продолжениями сторон квадратов, лежат на одной прямой (докажите это!).

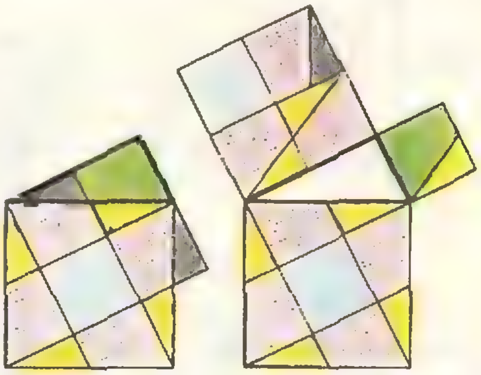


Рис. 1. а) б)

Обобщаем теорему Пифагора

Итак, в прямоугольном треугольнике

$$a^2+b^2=c^2,$$

где a, b, c — его катеты и гипотенуза. Заметим теперь, что если у нас есть фигуры A, B и C, площади S_A, S_B и S_C которых равны, соответственно, ka^2, kb^2 и kc^2, то $S_A+S_B=S_C$. В частности, «пифагорово соотношение» выполняется для площадей подобных фигур, построенных на сторонах прямоугольного треугольника*). (Это замечание может пригодиться для вычисления площадей фигур, которые мы будем рисовать ниже.)

На сторонах прямоугольного треугольника мы будем теперь строить секторы (рис. 3), полукруги (рис. 4), луночки (рис. 5), дуговые треугольники (рис. 6).

Комбинируя секторы и круги, луночки и дуговые треугольники, мы получим рисунки 7 и 8: на них

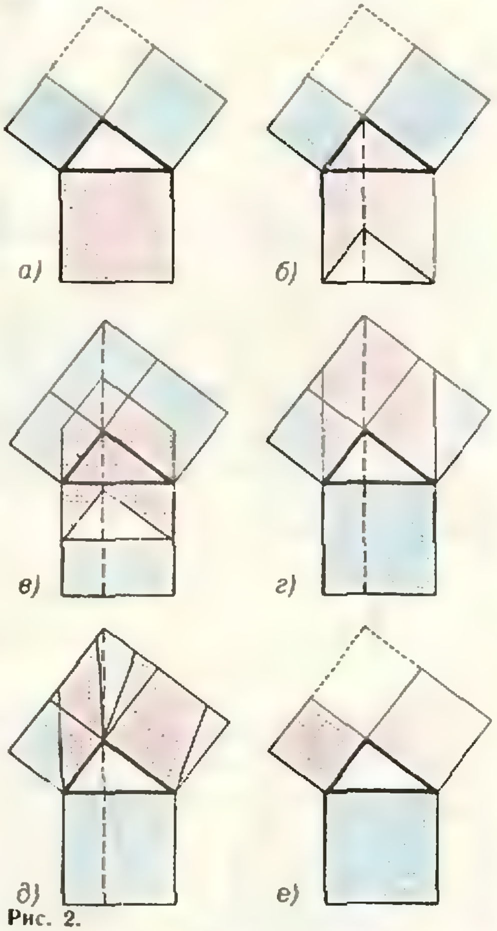


Рис. 2.

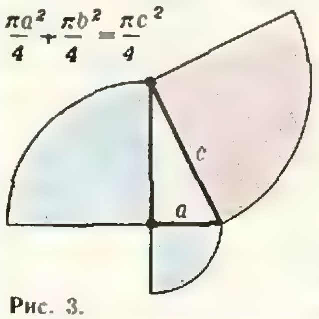


Рис. 3.

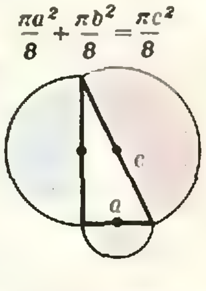


Рис. 4

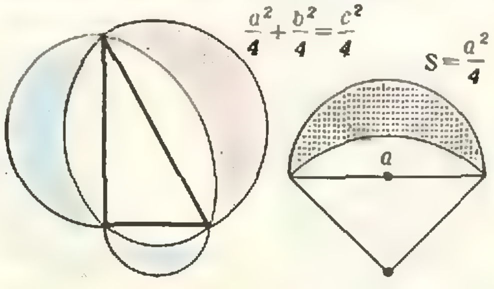


Рис. 5. а) б)

---

*) Мы говорим, что подобные фигуры F_a, F_b, F_c построены на сторонах a, b, c треугольника ABC, если при подобии $F_x \to F_y$ сторона x переходит в сторону y ($x, y \in \{a, b, c\}$).

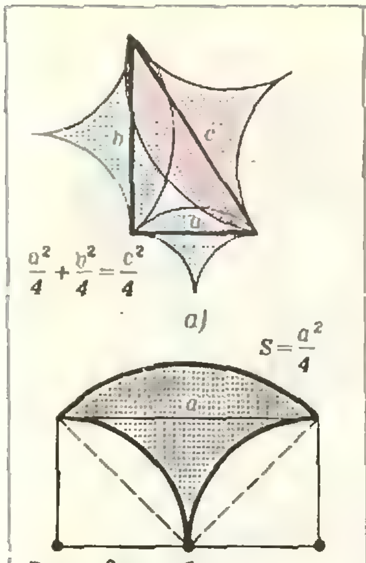

b
c
a
$\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}=\frac{c^2}{4}$
а)
$S=\frac{a^2}{4}$
a
б)

Рис. 6.

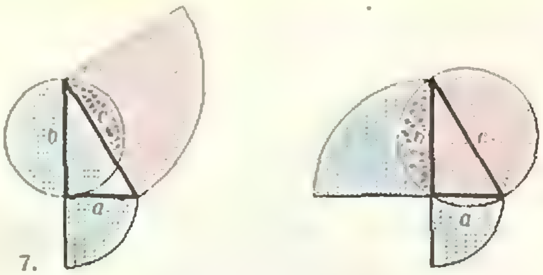


Рис. 7.

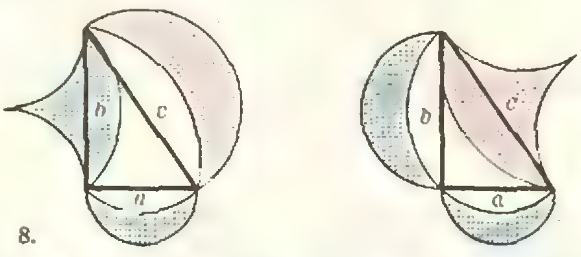


Рис. 8.

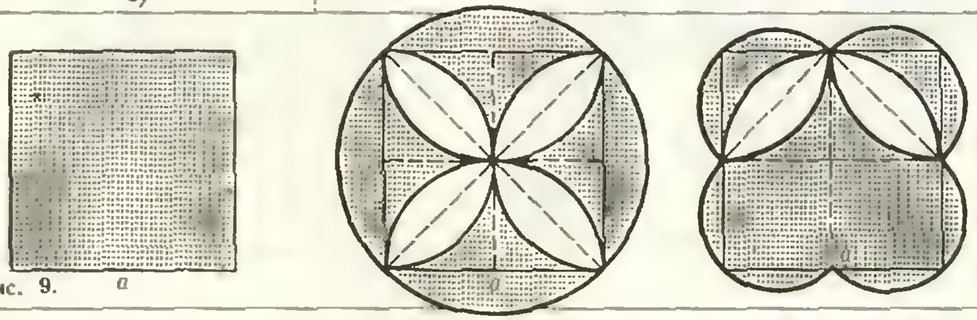


Рис. 9.

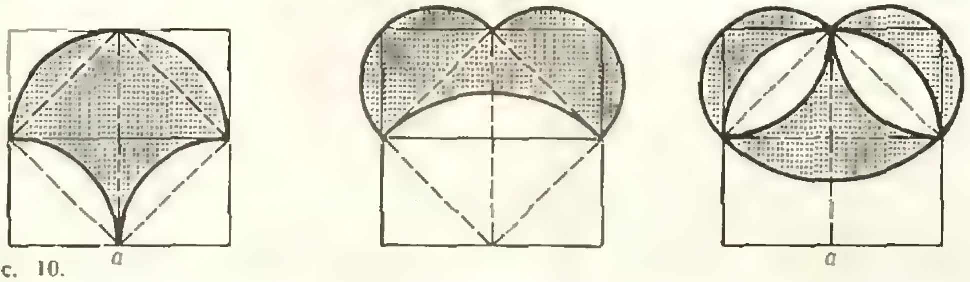


Рис. 10.

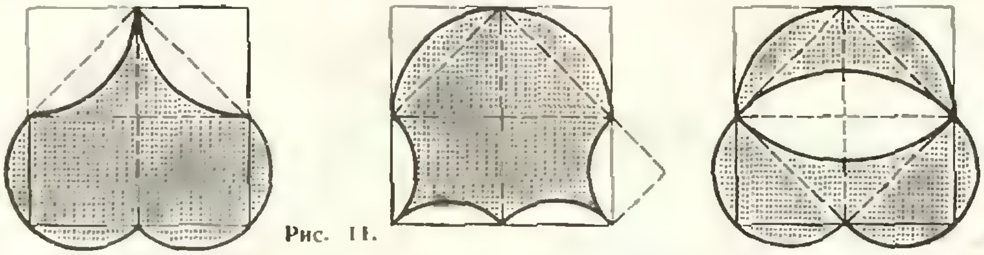


Рис. 11.

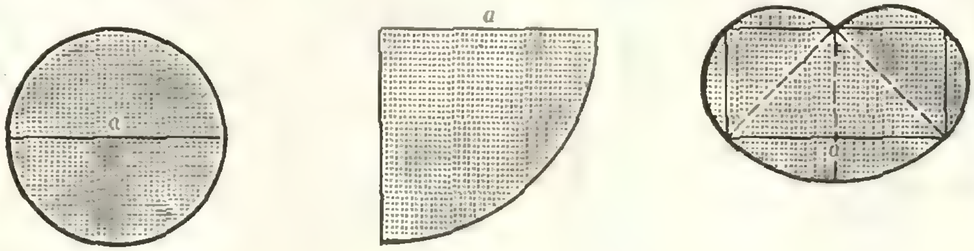


Рис. 12.

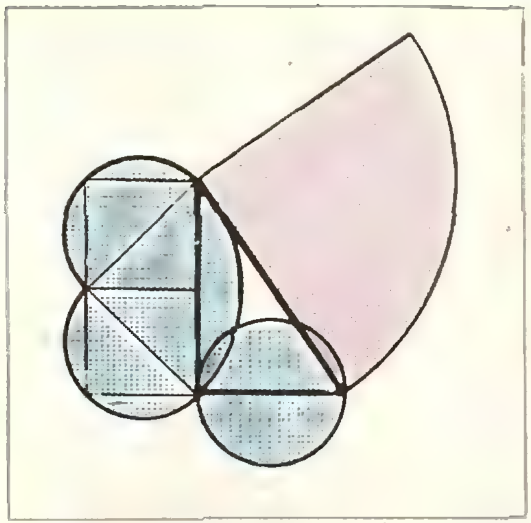


Рис. 13.

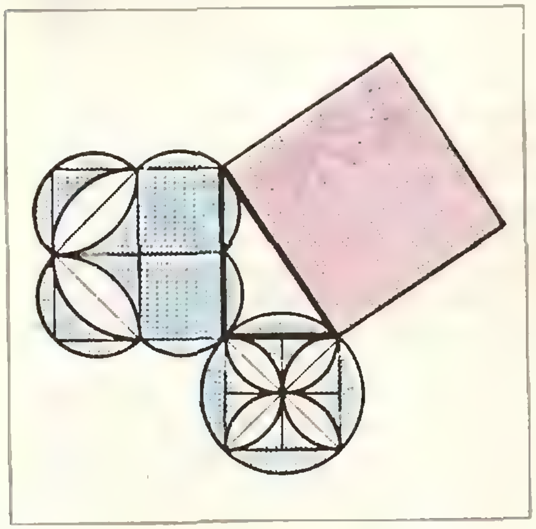


Рис. 14.

снова сумма площадей синих фигур равна площади красной фигуры.

На рисунках 9—12 изображено по три равновеликие фигуры: на рисунке 9 — площади a^2 (a — сторона квадрата), на рисунке 10 — площади $a^2/2$, на рисунке 11 — площади $3a^2/4$, на рисунке 12 — площади $\pi a^2/4$ (проверьте это!). Комбинируя их на катетах и гипотенузе прямоугольного треугольника, получим серию рисунков 13—16.

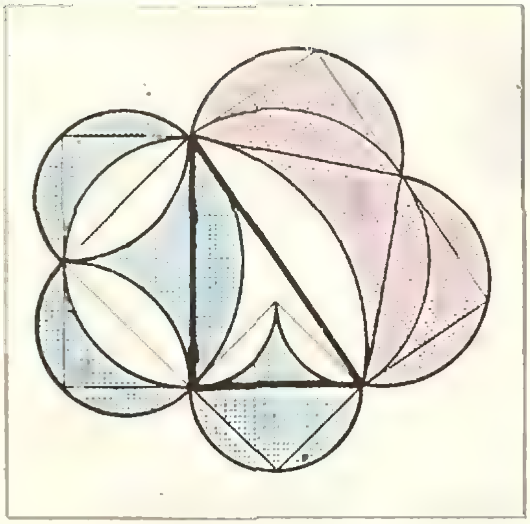


Рис. 15.

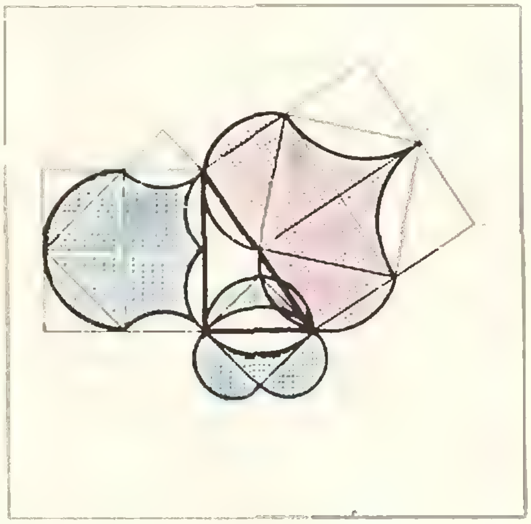


Рис. 16.

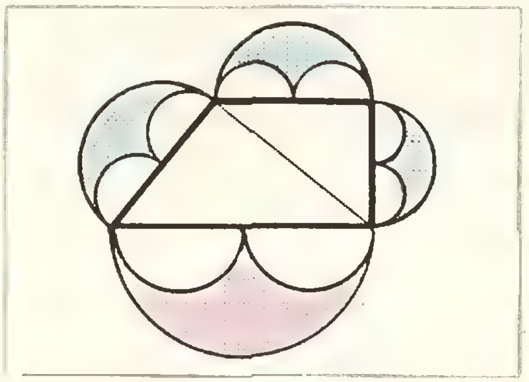


Рис. 17.

В заключение мы предлагаем вам доказать, что сумма площадей трех синих криволинейных треугольников, построенных на сторонах прямоугольной трапеции, диагональ которой перпендикулярна боковой стороне (рис. 17), равна площади такого же треугольника, построенного на большем основании. Теперь вам понадобится для этого не более двух минут!

С. Коршунов

Закон Дальтона

Среди задач на законы идеальных газов часто встречаются задачи, в которых речь идет о смеси нескольких газов. Уравнение газового состояния $pV=\frac{m}{\mu}RT$ в таких случаях неприменимо, так как неизвестно, что понимать под молярной массой смеси μ. Как же быть?

Очевидно, что каждый из газов в смеси вносит свой вклад в общее давление. При этом каждый газ ведет себя независимо от других и подчиняется уравнению Менделеева — Клапейрона

$$p_iV=\frac{m_i}{\mu_i}RT.$$

Давление p_i, создаваемое в сосуде каким-либо компонентом, когда остальные компоненты удалены из сосуда, называют парциальным давлением. Английский ученый Дальтон экспериментально установил, что для достаточно разреженных газов давление газовой смеси равно сумме парциальных давлений компонентов смеси:

$$p=p_1+p_2+\ldots+p_n.$$

Этот закон в дальнейшем назвали законом Дальтона.

Теперь легко найти уравнение, описывающее состояние газовой смеси. Для этого нужно в равенство, выражающее закон Дальтона, подставить значения парциальных давлений, полученные из уравнений Менделеева — Клапейрона:

$$pV=\left(\frac{m_1}{\mu_1}+\frac{m_2}{\mu_2}+\ldots+\frac{m_n}{\mu_n}\right)RT,$$

или

$$pV=(\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n)RT,$$

где ν_i — число молей соответствующего компонента.

Рассмотрим несколько конкретных задач. Все они предлагались в свое время на вступительных экзаменах в Московский физико-технический институт.

Задача 1. *Закрытый сосуд разделен на две равные части твердой неподвижной полупроницаемой перегородкой. В первую половину сосуда вводится смесь аргона и водорода при давлении $p=1{,}5\cdot10^5$ Па, во второй половине — вакуум. Через перегородку может диффундировать только водород. После окончания процесса диффузии давление в первой половине оказалось равным $p'=10^5$ Па. Определите отношение масс аргона и водорода в сосуде. Молярная масса аргона $\mu_а=40$ г/моль, водорода — $\mu_в=2$ г/моль. Считайте, что температура во время процесса поддерживается постоянной.*

Процесс диффузии протекает довольно медленно, поэтому сразу после введения смеси в первую половину сосуда давление p создается смесью газов:

$$p=p_а+p_в.$$

Здесь $p_а$ — парциальное давление аргона и $p_в$ — парциальное давление водорода. Их можно найти из уравнений состояния

$$p_аV=\frac{m_а}{\mu_а}RT \quad и \quad p_вV=\frac{m_в}{\mu_в}RT,$$

где V — объем половины сосуда, $m_а$ и $m_в$ — массы аргона и водорода соответственно, а T — температура сосуда. Подставляя давления $p_а$ и $p_в$ в выражение для давления смеси p, получим

$$pV=\left(\frac{m_а}{\mu_а}+\frac{m_в}{\mu_в}\right)RT=\left(\frac{m_а}{m_в}+\frac{\mu_а}{\mu_в}\right)\frac{m_в}{\mu_а}RT. \qquad (1)$$

Так как перегородка для водорода проницаема, после окончания процесса диффузии водород займет весь объем сосуда, причем плотность водорода везде будет одной и той же. Следовательно, в первой половине останется ровно половина всего водорода, и его парциальное давление $p'_{\text{в}}$ уменьшится в 2 раза: $p'_{\text{в}}=p_{\text{в}}/2$. Давление же аргона $p_{\text{а}}$ не изменится. Тогда

$$p'=p_{\text{а}}+p'_{\text{в}},$$

или

$$p'V=\left(\frac{m_{\text{а}}}{\mu_{\text{а}}}+\frac{1}{2}\frac{m_{\text{в}}}{\mu_{\text{в}}}\right)RT=$$

$$=\left(\frac{m_{\text{а}}}{m_{\text{в}}}+\frac{1}{2}\frac{\mu_{\text{а}}}{\mu_{\text{в}}}\right)\frac{m_{\text{в}}}{\mu_{\text{а}}}RT. \quad (2)$$

Разделив уравнение (2) на уравнение (1), после несложных преобразований найдем искомое отношение:

$$\frac{m_{\text{а}}}{m_{\text{в}}}=\frac{\mu_{\text{а}}}{\mu_{\text{в}}}\,\frac{2p'-p}{2(p-p')}=10.$$

Задача 2. *Цилиндрический сосуд разделен подвижным, хорошо проводящим тепло поршнем на две части. В начальный момент справа от поршня находится кислород, а слева — смесь гелия и водорода; масса кислорода $m_{\text{к}}=32$ г. Поршень при этом располагается посередине сосуда. Материал поршня, непроницаемый для водорода и кислорода, оказался проницаемым для гелия, в результате чего поршень начал перемещаться и окончательно расположился на расстоянии четверти длины цилиндра от левой стенки. Определите массы гелия и водорода в смеси.*

В первый момент кислород и смесь водорода с гелием занимают одинаковые объемы; температуры в обеих частях сосуда одинаковы (так как поршень хорошо проводит тепло); давления слева и справа от поршня также одинаковы (потому что поршень находится в равновесии, а процесс диффузии происходит гораздо медленнее, чем процесс выравнивания давлений). Это позволяет сделать вывод о том, что в начальный момент число молей газа в обеих частях сосуда одно и то же, то есть слева от поршня находится 1 моль смеси гелия и водорода.

В конечном состоянии давления кислорода $p_{\text{к}}$ и водорода $p_{\text{в}}$ оказываются одинаковыми (так как давление гелия в обеих частях сосуда одно и то же, а поршень находится в равновесии):

$$p_{\text{к}}=p_{\text{в}}.$$

Из уравнения Менделеева — Клапейрона для кислорода и водорода имеем

$$\frac{3}{4}p_{\text{к}}V=\frac{m_{\text{к}}}{\mu_{\text{к}}}RT \text{ и } \frac{1}{4}p_{\text{в}}V=\frac{m_{\text{в}}}{\mu_{\text{в}}}RT,$$

где $m_{\text{к}}$ и $m_{\text{в}}$ — массы кислорода и водорода, а $\mu_{\text{к}}$ и $\mu_{\text{в}}$ — их молярные массы. Отсюда находим массу водорода:

$$m_{\text{в}}=m_{\text{к}}\frac{\mu_{\text{в}}}{3\mu_{\text{к}}}=\frac{2}{3}\text{ г},$$

что соответствует числу молей $\nu_{\text{в}}=1/3$. Следовательно, число молей гелия $\nu_{\text{г}}=2/3$, а масса гелия в смеси

$$m_{\text{г}}=\mu_{\text{г}}\nu_{\text{г}}=8/3\text{ г}.$$

Задача 3. *В сосуде находится смесь азота и водорода. При температуре T, когда азот полностью распался на атомы, а водород находится еще в молекулярном состоянии, давление смеси равно p. При температуре $2T$, когда оба газа полностью диссоциировали, давление в сосуде стало $3p$. Каково отношение числа молей азота и водорода?*

Обозначим через $\nu_{\text{а}}$ число молей азота в смеси, а через $\nu_{\text{в}}$ — число молей водорода. При температуре T, когда водород находится еще в молекулярном состоянии, уравнение состояния газовой смеси имеет вид

$$pV=(2\nu_{\text{а}}+\nu_{\text{в}})RT$$

(здесь учтено, что азот полностью распался, и его число молей удвоилось), а при температуре $2T$, когда оба газа полностью продиссоциировали, —

$$3pV=2(2\nu_{\text{а}}+2\nu_{\text{в}})RT.$$

Разделив одно уравнение на другое, получим

$$\frac{\nu_{\text{а}}}{\nu_{\text{в}}}=\frac{1}{2}.$$

* * *

Уравнение состояния газовой смеси

$$pV=(\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n)RT$$

можно представить в другом виде. Действительно, количество молей ν_i каждого газа равно отношению числа молекул N_i этого газа к числу Авогадро N_A, поэтому

$$pV=(N_1+N_2+\dots+N_n)\,\frac{R}{N_A}\,T.$$

Если обозначить общее число молекул в смеси через N и учесть, что отношение R/N_A — это постоянная Больцмана k, то уравнение состояния можно записать так:

$$pV=NkT.$$

Заметим, что точно так же выглядит уравнение Менделеева — Клапейрона для однокомпонентного газа. Значит, пользоваться такой записью уравнения состояния можно как для одного газа, так и для газовой смеси.

Задача 4. *В сосуде объемом $V=1$ л хранится тритий (изотоп водорода с атомной массой $A=3$). Масса трития $m=1$ г. За 12 лет половина ядер трития превращается в ядра гелия. Найдите давление в сосуде в конце этого срока хранения. Температура газа поддерживается равной $t=27\,^\circ$C. Образовавшийся гелий имеет атомную массу $A=3$.*

Давление трития в начале срока хранения равно

$$p_1=\frac{N}{V}\,kT=\frac{m}{\mu}\,R\,\frac{T}{V}$$

(здесь N — число молекул трития, $\mu=6$ г/моль — молярная масса трития).

Через 12 лет $N/2$ молекул трития превращается в N молекул гелия (каждая молекула трития, подобно обычному водороду, содержит 2 атома). Давление p_2 в сосуде создается смесью трития и гелия, общее число молекул которых равно $N/2+N=3/2N$:

$$p_2=\frac{3}{2}\,NkT=\frac{3}{2}\,p_1=$$

$$=\frac{3}{2}\,\frac{m}{\mu}\,R\,\frac{T}{V}\approx 6{,}3\cdot 10^5\ \text{Па}.$$

Задача 5. *Имеется 1 м^3 сухого воздуха и 1 м^3 влажного воздуха при одних и тех же давлении и температуре. Масса какого воздуха больше: сухого или влажного?*

Из уравнения состояния газовой смеси $pV=NkT$ следует, что число молекул N влажного и сухого воздуха одно и то же, так как обе смеси имеют одинаковые объемы, давления и температуры. Сухой воздух состоит, в основном, из азота, молекулы которого имеют относительную молекулярную массу $M_а=28$, и из кислорода с относительной молекулярной массой $M_к=32$. У влажного воздуха часть этих молекул заменена более легкими молекулами воды с $M_{воды}=18$. Следовательно, масса влажного воздуха меньше, чем сухого.

* * *

В заключение заметим, что довольно часто уравнение состояния газовой смеси записывают в виде

$$pV=\frac{m}{\mu}\,RT,$$

как и для однокомпонентного газа. При этом молярная масса смеси μ подбирается такой, чтобы выполнялось равенство $\frac{m}{\mu}R=Nk$, где m — масса, а N — полное число молекул смеси. Например, для воздуха $\mu=29$ г/моль.

Упражнения

1. В сосуде объемом $V=0{,}5$ л находится $m=1$ г парообразного йода. При температуре $t=1000\,^\circ$C давление в сосуде оказалось равным $p=93$ кПа. Найдите степень диссоциации молекул йода I_2 на атомы при этих условиях. Молярная масса йода равна $\mu=254$ г/моль. Примечание. Степенью диссоциации α называют отношение числа диссоциированных молекул к общему числу молекул.

2. Под тяжелый поршень, скользящий без трения внутри вертикально расположенного откачанного цилиндра, вводится некоторое количество смеси водорода и гелия, в результате чего поршень располагается посередине цилиндра. С течением времени поршень смещается вниз, так как материал, из которого он изготовлен, оказался проницаемым для гелия (для водорода он непроницаем). Окончательное положение равновесия поршня находится на одной трети высоты цилиндра. Каково отношение масс гелия и водорода в смеси? Температуру можно считать неизменной.

3. Определите отношение массы 1 м^3 сухого воздуха к массе 1 м^3 воздуха с относительной влажностью $\varphi=50\%$. Обе порции воздуха взяты при давлении $p=0{,}1$ МПа и температуре $t=20\,^\circ$C. Давление насыщенных водяных паров при температуре 20°C равно $p_0=2{,}3$ кПа.

Говорят студенты

В газете Московского физико-технического института «За науку» от 23 января 1981 года были опубликованы ответы студентов на вопросы анкеты МФТИ. Мы думаем, что этот материал будет интересен и нашим читателям — будущим студентам.

Они разные по возрасту и характеру, в отношении к учебе и к трудностям. Некоторые их ответы серьезные, другие — полушутливые. Разговор шел в сессию: это уж у кого какое было настроение.

Итак, на вопросы анкеты отвечают физтехи:

Почему вы пошли на физтех?

— Хотелось проверить свои силы — способность заниматься серьезным делом.

— Из принципа. Надо было кому-то что-то доказать.

— В школе очень нравилась физика. Ну, и мальчишеское тщеславие подталкивало туда, где труднее.

— Учился в ЗФТШ и увлекался математикой. Физтех выбрал еще в 8 классе.

Трудными ли были вступительные экзамены?

— Нет. И это было первое, что потрясло на физтехе.

— Тогда они мне показались трудными.

— Сданный хорошо экзамен не труден.

— По физике — нет, по математике — да.

— Вступительные экзамены — ерунда по сравнению с первой сессией.

Что помогло вам поступить?

— Уверенность в себе и знания.

— ЗФТШ и интерес к физике.

— Прежде всего — удача; ну и... готовился.

— Мне отчаянно повезло!

Первые впечатления (самое яркое событие)?

— Значок мастера спорта СССР на груди экзаменатора-физика.

— Сама атмосфера физтеха.

— В первый день занятий, потратив 5 часов, получил пропуск в зал мини-ЭВМ.

— Первая в жизни тройка.

Трудно ли учиться на физтехе?

— Труднее, чем не учиться.

— Да. Приходится разбираться в таких науках, которые в будущем пригодятся лишь отчасти. А то, что тебя реально интересует, изучаешь сам, в свободное время.

— Если учиться, то не очень.

— Очень. Из-за сессий.

— Трудно. Пятерки в школе не стоили никакого труда. Все познается в сравнении.

— Наверно, трудно. Но когда нравится, этого не видишь.

Что вы делаете в свободное время?

— Занимаюсь литературной деятельностью.

— Пытаюсь вырасти над собой.

— Люблю читать. Но главное — это танцевальные занятия. Считаю танцы и отдыхом, и работой одновременно. Они помогают проникнуть мне в мир искусства.

— Странный вопрос! Изучаю квантовую механику.

— Ничего. На то оно и свободное.

Что наиболее характерно для МФТИ, для его студентов?

— Работа в импульсном режиме, умение «взяться», «напрячься» и форсировать какой угодно материал.

— Скромность для них точно не характерна.

— Нет априорного преклонения ни перед чем.

Существует ли, по-вашему, «дух физтеха»?

— Существует. Это стремление быть первым в любом деле, за которое берешься.

— Физтехи не боятся трудных задачек.

— Несомненно. Например, он в манере решать задачи «из соображений симметрии», т. е. из самых туманных и сомнительных первоначальных предположений.

— Говорят, что существует. В науке этот дух, может, и хорош, а вообще я его не люблю.

Анкета

Уважаемый читатель!

Для улучшения работы журнала и более полного удовлетворения ваших интересов редакция просит вас ответить на следующие вопросы (ответы присылайте на отдельном листке бумаги, сохранив нумерацию вопросов). В части вопросов достаточно перечислить рубрики или написать «да» или «нет», в других — желательно дать подробный ответ. Редакция будет вам очень признательна, если дополнительно вы напишете свое общее мнение о журнале, приведете примеры, когда он вам помог (и чем), укажете, что вас наиболее интересует в журнале, чем он еще мог бы вам помочь.

Анкету просим выслать до 1 февраля 1982 г. по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, Анкета «Кванта».

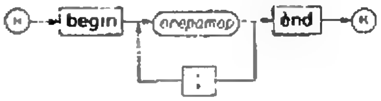
1. Ваши фамилия, имя, отчество, возраст, место учебы (город, школа, класс) или работы (профессия, специальность), круг интересов (математика, физика).
2. С какого года вы читаете «Квант»?
3. Сколько человек читают ваши номера «Кванта»?
4. Материалы каких рубрик журнала вас больше всего интересуют и доступны для вас? Какие не интересуют или не нравятся?
5. Назовите 2—3 лучшие статьи (за 1979—1981 годы) из разных рубрик журнала.
6. Решаете ли вы задачи из Задачника «Кванта»? Назовите номера 10 лучших задач, условия или решения которых опубликованы в 1980—1981 годы.
7. Статьи на какие темы вы хотели бы видеть в журнале в 1982 году?

Заочная школа программирования

Урок 16: Условный оператор и оператор выбора. Операторы цикла. Процедуры и функции в Паскале.

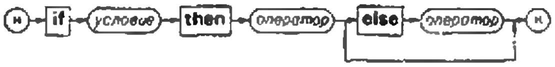
При изучении языка Рапира вы привыкли к тому, что в условном и циклическом предписаниях после слов ТО и ИНАЧЕ и после знака :: можно записывать сколько угодно предписаний (до слова ВСЕ). В языке Паскаль эти операторы имеют другую структуру: в них разрешается использовать только один оператор, как и в Робике. Если по смыслу задачи нужно использовать несколько операторов, приходится использовать специальную конструкцию — составной оператор.

Составной оператор — это последовательность операторов, заключенная в операторные скобки **begin-end** Синтаксическая диаграмма для описания составного оператора имеет вид:



Из диаграммы видно, что операторы, входящие в составной оператор, должны быть разделены точкой с запятой.

Условный оператор описывается диаграммой:



Здесь и во всех следующих диаграммах оператор может быть составным. Условие может быть простым или сложным. Сложное условие образуется с помощью логических операций AND, OR и NOT. При записи условий используются следующие знаки сравнения: = равно

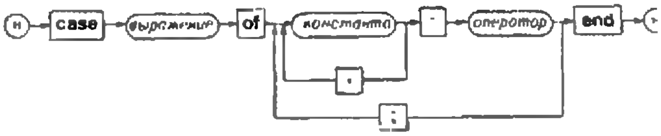
=	равно
<>	не равно
>	больше
<	меньше
<=	меньше или равно
>=	больше или равно

Например, после выполнения последовательности операторов

```
x: =k mod 5;
a: =k mod 4;
if (x=0) AND (a=1)
   then writeln('ДА')
   else writeln('НЕТ');
```

будет отпечатано ДА, если число k кратно 5 и дает при делении на 4 в остатке 1, и НЕТ — в противном случае.

При помощи условного оператора можно выбрать одну из двух возможностей для дальнейшего выполнения программы. На практике часто бывает нужно выбрать одну возможность не из двух, а из большего числа вариантов. В этом случае используют *оператор выбора — оператор* **case**, который может быть описан диаграммой:



Оператор выбора работает так. Сначала вычисляется значение выражения, затем отыскивается константа, равная вычисленному значению выражения, и выполняется оператор, записанный после этой константы. Если такой константы нет, то будет выполняться оператор, следующий за оператором выбора. Нужно заметить, что выражение и константа должны быть одного и того же типа.

Рассмотрим пример. Каждая школьная отметка обозначается цифрой и имеет название. Например, 3 — удовлетворительно. По следующей программе вводится значение оценки, записанное цифрой, а печатается ее название.

```
program оценки (output, input);
var отм:1..5;
begin
  read(отм);
  case отм of
    5: writeln('ОТЛИЧНО');
    4: writeln('ХОРОШО');
    3: writeln('УДОВЛ.');
    2: writeln('ПЛОХО');
    1: writeln('ОЧЕНЬ ПЛОХО')
  end
end.
```

```
4
```

Программа этого примера напечатает слово ХОРОШО.

Задание **16.1.** *Дана система команд самоходного аппарата Кибик:*

команда	действие
1	проехать 100 м на север
2	проехать 100 м на юг
3	проехать 100 м на запад
4	проехать 100 м на восток

Составьте программу, осуществляющую ввод координат начального положения Кибика и одну команду, а затем печатающую координаты точки, в которой будет находиться Кибик после исполнения этой команды.

Комментарий

Если вы попробуете разобраться в чужой, достаточно сложной программе, вы встретитесь с различными трудностями: вам будут понятны не все обозначения, назначение тех или иных переменных, использованные алгоритмы и т. д. Для того чтобы в вашей программе легче было разобраться другому человеку, она может быть дополнена словесными пояснениями, называемыми *комментариями.*

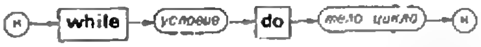
Комментарии не влияют на выполнение программы, их назначение состоит в том, чтобы помочь человеку, читающему программу, лучше и быстрее разобраться в структуре программы, пояснить смысл и назначение выбранного алгоритма, отметить те или иные особенности программы. Комментарии нужно включать в программу в процессе ее написания.

В Паскале любой текст, заключенный в фигурные скобки, рассматривается как комментарий. Комментарий может быть вставлен в любом месте программы. Далее, при выдаче текста программы на печать, комментарий печатается вместе с программой.

Операторы цикла

В Паскале различают три вида оператора цикла: цикл с условием продолжения, цикл с условием окончания и цикл с параметром.

Цикл с условием продолжения описывается диаграммой:



Работа этого оператора аналогична работе оператора цикла ПОКА в Рапире: тело цикла выполняется до тех пор, пока истинно условие. Тело цикла — это единственный (быть может, составной) оператор.

Рассмотрим программу для вычисления значений функции $F(n) = n! = 1*2*...*n$.

Напомним, что $0! = 1$ и имеет место рекуррентное соотношение $F(k) = k*F(k-1)$.

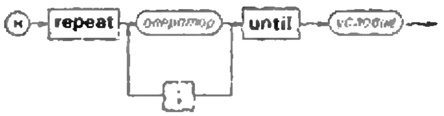
```
program факт1 (output, input);
var f,k,n: integer;
begin
  read(n); {n>=0}
  f:=1; k:=0;
  while k< >n do
    begin {f=k!}
      k:=k+1; f:=f*k
    end;
    {f=n!}
    writeln('n-',n,' n!=',f)
end.
```

```
5
```

После исполнения этой программы будет напечатано: $n=5$ $n!=120$.

Задание **16.2.** *Система команд Кибика дополнена командой* 0 — *закончить работу. Используя задание* 16.1, *составьте программу, которая вводит координаты начального положения Кибика и программу его движения (одну команду за другой), а также печатает координаты конечной точки маршрута и чертит путь движения Кибика (с помощью процедур системы ШПАГА).*

Цикл с условием окончания описывается диаграммой:



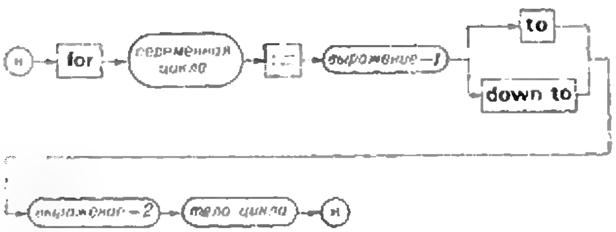
В этом случае сначала выполняется тело цикла, а потом проверяется условие. Выход из цикла происходит в случае, когда условие истинно. Особенность этого цикла состоит в том, что тело цикла всегда выполняется хотя бы один раз, даже если условие сразу истинно.

Запишем теперь программу, вычисляющую значения функции $F(n)=n!$, используя оператор цикла с условием окончания.

```
program факт2(output, input);
var f,k,n:integer;
begin
  read(n); f:=1; k:=1;
  repeat
    f:=f*k; k:=k+1
  until k>n;
  writeln('n=',n,' n!=',f)
end.
```

Сравните условия в этих двух программах! В первом случае тело цикла повторяется при истинном значении условия, а во втором истинное условие — признак окончания работы цикла.

Цикл с параметром описывается диаграммой:



Значение выражения—1 — начальное значение переменной цикла, а значение выражения—2 — ее конечное значение. Тип переменной цикла должен быть скалярным (кроме *real*). Работа этого оператора цикла состоит в следующем. Сначала переменная цикла получает начальное значение, и если оно не превосходит конечного значения, выполняется тело цикла. Затем переменная цикла принимает следующее значение, полученное при помощи функций *succ**) (в случае **to**) или *pred* (в случае **downto**), и опять выполняется тело цикла. В наиболее распространенном случае, когда переменная цикла принимает значения типа *integer*, ее значение изменяется на +1 (в случае **to**) и на −1 (в случае **downto**). Так происходит до тех пор, пока значение переменной цикла не превзойдет ее конечного значения.

Обратите внимание, что в первых двух типах циклов тело цикла обязательно должно содержать оператор, изменяющий значение переменной цикла (иначе произойдет зацикливание!), а в цикле с параметром наличие такого оператора приведет к ошибке.

Следующая программа отпечатает все пары целых чисел $(x; y)$, являющиеся решениями уравнения $2y-x^2=4$, если $x\in[-50; 25]$, $y\in[100; 300]$.

```
program корни (output);
var счкор,x,y,i,j:integer;
begin
  счкор:=0; {число корней}
  for i:=—50 to 25 do
    for j:=100 to 300 do
      if 2·y—x*x=4 then
      begin
        счкор:=счкор+1;
        writeln('x=',x,' y=',y)
      end;
  if счкор=0
    then writeln('корней нет')
end.
```

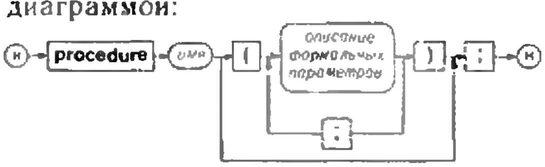
Задание **16.3.** *Составьте программу для нахождения суммы* $s=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$. *Предусмотрите ввод числа n.*

---

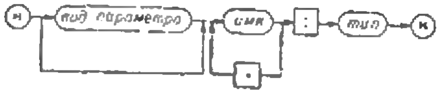
*) О функциях *succ* и *pred* рассказано ниже.

Процедуры и функции

Описания процедуры и функции в Паскале имеют такую же структуру, как и вся программа. Отличие состоит только в форме заголовка. *Заголовок процедуры* описывается диаграммой:

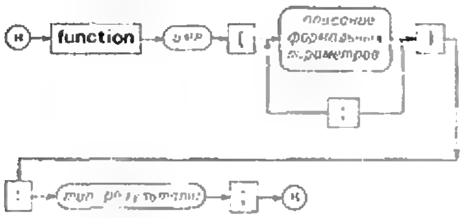


Формальные параметры описываются диаграммой:



Подробно о видах параметров и способах их передачи при вызове процедур будет рассказано в одном из следующих уроков.

Заголовок функции описывается диаграммой*) :



Тип результата функции должен быть скалярным. Опишем в виде процедуры, а затем в виде функции, программу, вычисляющую значения функции $F(n)=n!$.

```
procedure факт1 (n:integer);
var k,f:integer;
begin
   f:=1; k:=0;
   while k< >n do
    begin
     k:=k+1; f:=f*k
    end;
   writeln('n=',n,n!=',f)
end;
function  факт2 (n:integer) :integer;
var k,f:integer;
begin
   f:=1; k:=1;
   repeat
     f:=f*k; k:=k+1
   until k>n;
   факт2:=f
end;
```

Пусть теперь нужно найти значение $C=\frac{n!}{k!(n-k)!}$. Используя функцию *факт 2*, легко записать соответствующий оператор присваивания:

c:=*факт2*(*n*)/(*факт2*(*k*)**факт2*(*n*—*k*))

Стандартные функции

В Паскале можно использовать все стандартные функции Рапиры: *sin, cos, exp, ln, arctan* и функции *abs, sqr, sqrt, arcsin, odd, round, trunc, succ, pred.*

$abs(x)=|x|$, $sqr(x)=x^2$, $sqrt(x)=\sqrt{x}$.

Результат функции *odd*(*x*) есть **true**, если *x* — нечетное число, и **false** при *x* четном.

Функция *round* округляет значение действительного числа, а функция *trunc* отбрасывает его дробную часть. Например, *round* (5.7)=6, *trunc* (5.7)=5.

Функции *succ* и *pred* применимы к любому скалярному типу (кроме *real*). Результат функции *succ*(*x*) есть следующее за *x* значение в описании типа, а функции *pred*(*x*) — предшествующее *x* значение.

Опишем тип *неделя* — (*пн, вт, ср, чт, пт, сб, вск*). Тогда *succ*(*ср*)= =*чт*, *pred*(*ср*)=*вт*.

Результатом выполнения цикла

```
for день:=пн to вск do
writeln(день);
```

будет печать всех значений данного типа:

*пн вт ср чт пт сб вск**).

Задание **16.4.** *Опишите функцию степ для вычисления x^n с параметрами x:real, n:integer.*

Задание **16.5.** *Опишите процедуру с параметром n:integer для вычисления суммы* $S=1^3+2^3+\ldots+\ldots+n^3$.

Указание. Используйте функцию *степ* из задания 16.4.

И. Юнерман

---

*) На диаграмме не показана обходная стрелка, начинающаяся после поля имя и кончающаяся перед полем с двоеточием

*) Разумеется, машина напечатает эти значения в столбик.

XV Всесоюзная олимпиада школьников

В. Вавилов, А. Земляков

Олимпиада по математике

С 15 по 22 апреля в Алма-Ате состоялся заключительный этап XV Всесоюзной олимпиады школьников по математике. В нем приняло участие 148 школьников: 39 восьмиклассников, 47 девятиклассников и 62 десятиклассника. Все эти ребята — победители республиканских и зональных олимпиад, а также школьники, получившие дипломы I и II степени на заключительном этапе XIV Всесоюзной олимпиады.

В этом году олимпиада была посвящена XXVI съезду Коммунистической партии Советского Союза.

Заключительный этап олимпиады проходил в два тура, которые состоялись 17 и 19 апреля. В каждый из дней школьникам было предложено по четыре задачи, на решение которых отводилось по 5 часов. При отборе задач методическая комиссия придерживалась тех же принципов, что и в прошлом году («Квант», 1980, № 11, с. 45). Ниже мы приводим условия всех задач; в скобках рядом с условием каждой задачи указано, кто ее предложил. В конце статьи вы найдете решения всех задач, не вошедших в Задачник «Кванта» («Квант», 1981, № 7).

Задачи

Первый день

8 класс

1. Две одинаковые шахматные доски (8×8 клеток) имеют общий центр, причем одна из них повернута относительно другой на 45° около центра. Найдите суммарную площадь всех пересечений черных клеток этих двух досок, если площадь одной клетки равна 1. *(Н. Карташов)*

2. На окружности даны точки A, B, M и N. Из точки M проведены хорды MA_1 и MB_1, перпендикулярные прямым NB и NA соответственно. Докажите, что прямые AA_1 и BB_1 параллельны. (Если $A=A_1$, то прямая AA_1 является касательной к окружности в точке A; аналогично при $B=B_1$.) *(А. Слинько)*

3. Будем говорить, что число обладает свойством (K), если оно разлагается в произведение K последовательных натуральных чисел, больших 1.

а) Найдите K такое, для которого некоторое число обладает одновременно свойствами (K) и $(K+2)$.

б) Докажите, что чисел, обладающих одновременно свойствами (2) и (4), не существует. *(В. Федотов)*

4. В таблице 4 строки. В первой из них записаны произвольные натуральные числа, среди которых могут быть и одинаковые. Вторая строка заполняется так: слева направо просматриваются числа первой строки и под числом a записывается число k, если a встретилось в первой строке в k-й раз. Аналогично по второй строке записывается третья, а по третьей — четвертая. Докажите, что вторая и четвертая строки всегда получаются одинаковыми. *(А. Кузнецов)*

9 класс

1. Найдите наименьшее значение площади прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат Ox и Oy, содержащего фигуру, заданную системой неравенств ($a\in\mathbf{R}$)

$$\begin{cases} y\leqslant -x^2, \\ y\geqslant x^2-2x+a. \end{cases}$$

(А. Савин)

2. См. задачу № 4 для 8-го класса.

3. Правильные треугольники ABC, CDE и EHK (вершины указаны против часовой стрелки) с попарно общими вершинами C и E расположены на плоскости так, что $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DK}$. Докажите, что треугольник BHD — тоже правильный. *(А. Купцов)*

4. В некотором поселке 1000 жителей. Ежедневно каждый из них делится узнанными вчера новостями со всеми своими знакомыми. Известно, что любая новость становится известной всем жителям поселка. Докажите, что можно выбрать 90 жителей так, что если одновременно всем им сообщить какую-то новость, то через 10 дней она станет известной всем жителям поселка. *(Н. Карташов, А. Савин)*

10 класс

1. Про числа a и b известно, что неравенство

$$a \cdot \cos x + b \cdot \cos 3x > 1$$

не имеет решений. Докажите, что $|b| \leqslant 1$. *(Ю. Нестеренко)*

2. Точки K и M — середины сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$, точки L и N расположены на двух других сторонах так, что четырехугольник $KLMN$ — прямоугольник. Докажите, что площадь четырехугольника $ABCD$ вдвое больше площади прямоугольника $KLMN$.

3. Найдите все последовательности натуральных чисел (x_n) такие, что выполнены следующие два условия:

а) $x_n \leqslant n\sqrt{n}$ при любом n;

б) разность $x_m - x_n$ делится на $m - n$ при любых различных m и n. *(Ю. Нестеренко)*

4. Можно ли все клетки какой-нибудь прямоугольной таблицы окрасить в белый и черный цвета так, чтобы белых и черных клеток было поровну, а в каждой строке и в каждом столбце было более 3/4 клеток одного цвета? *(С. Конягин)*

Второй день

8 класс

5. Докажите, что если четырехугольники $ACPH$, $AMBE$, $AHBT$, $BKXM$, $CKXP$ являются параллелограммами (вершины всех четырехугольников перечислены в одном направлении), то ломаная $ABTE$ не имеет самопересечений и ограничивает параллелограмм. *(В. Федотов)*

6. Решите уравнение

$$x^3 - y^3 = xy + 61$$

в натуральных числах x и y. *(С. Конягин, А. Слинько)*

7. В футбольном турнире 18 команд сыграли между собой 8 туров — каждая команда сыграла с восемью разными командами. Докажите, что найдутся три команды, не сыгравшие между собой пока ни одного матча. *(С. Конягин)*

8. Точки C_1, A_1, B_1 взяты на сторонах, соответственно, AB, BC и CA треугольника ABC так, что $|AC_1|:|C_1B| = |BA_1|:|A_1C| = |CB_1|:|B_1A| = 1:3$. Докажите, что периметр P треугольника ABC и периметр P_1 треугольника $A_1B_1C_1$ связаны неравенствами

$$\frac{1}{2} P < P_1 < \frac{3}{4} P.$$

(В. Турчанинов)

9 класс

5. Докажите, что если положительные числа x, y удовлетворяют уравнению $x^3 + y^3 = x - y$, то $x^2 + y^2 < 1$. *(Г. Гальперин)*

6. Ученику нужно скопировать выпуклый многоугольник, помещающийся в круге радиуса 1. Сначала ученик отложил первую сторону, из ее конца провел вторую, из конца второй — третью и т. д. Закончив построение, он обнаружил, что многоугольник не замкнулся, а первая и последняя нарисованные им вершины находятся на расстоянии d одна от другой. Известно, что углы ученик откладывал точно, а относительная погрешность при откладывании длины каждой стороны не превышала числа p. Докажите, что $d \leqslant 4p$. *(Н. Карташов)*

7. В каждой вершине куба записано число. За один шаг к двум числам, размещенным на одном (любом) ребре, прибавляется по единице. Можно ли за несколько таких шагов сделать все восемь чисел равными между собой, если вначале были поставлены числа, как на рисунке 1? Как на рисунке 2? Как на рисунке 3? *(Н. Васильев)*

8. Найдите хотя бы одно натуральное число n такое, что каждое из чисел n, $n+1$, $n+2$, ..., $n+20$ имеет с числом $30\,030 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ общий делитель, больший единицы. *(Ю. Нестеренко)*

10 класс

5. Натуральные числа от 100 до 999 написаны каждое на своей карточке. Карточки положены на стол числами вниз, перемешаны и затем сложены в одну стопку. Будем, открывая последовательно карточки из этой стопки, сортировать их, раскладывая на кучки числами вверх в соответствии с младшей цифрой написанного числа. В первой кучке окажутся все числа, оканчивающиеся на 0, во второй — оканчивающиеся на 1, и так далее. Сложим все кучки в одну стопку, положив поверх первой кучки вторую, затем третью и в конце концов — десятую. Получившуюся стопку карточек рассортируем еще раз, но теперь, открывая карточки, будем раскладывать их на кучки в соответствии со второй цифрой. Сложим опять получившиеся кучки в одну стопку, как указано раньше, и рассортируем их в последний раз, раскладывая на кучки в соответствии со старшей цифрой. В каком порядке будут расположены карточки в стопке, собранной, как указано ранее, после этой сортировки? *(Ю. Нестеренко)*

6. В прямоугольнике 3×4 расположено 6 точек. Докажите, что найдется пара точек,

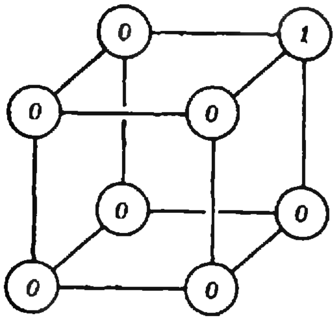


Рис. 1.

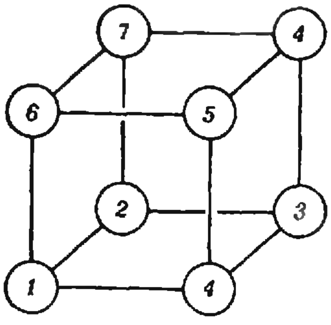


Рис. 2.

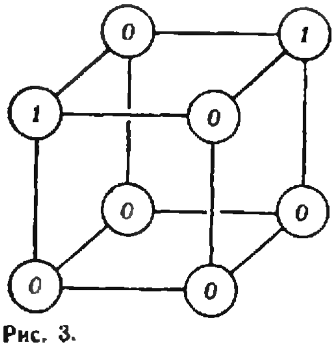


Рис. 3.

Участники олимпиады по математике, получившие дипломы I степени. В первом ряду (слева направо): А. Николаев, К. Черанс, Я. Бриталс, И. Жуков; во втором ряду: В. Шевчишин, Н. Гринберг, Ю. Екишев, В. Алексеев, Г. Перельман; в верхнем ряду: Т. Маланюк, Л. Лапшин.

удаленных одна от другой не более чем на $\sqrt{5}$. *(Г. Мустафин, Ю. Нестеренко)*

7. а) Найдите наименьшее возможное значение многочлена

$$P(x, y) = 4 + x^2y^4 + x^4y^2 - 3x^2y^2.$$

б) Докажите, что этот многочлен нельзя представить в виде суммы квадратов многочленов от переменных x, y. *(Г. Мустафин, Ю. Нестеренко)*

8. Отрезки AD, BE, CF служат боковыми ребрами правильной треугольной призмы. На ее основании ABC найдите все точки, равноудаленные от прямых AE, BF, CD. *(Ю. Нестеренко)*

В восьмом классе самой трудной оказалась задача № 5, в девятом задача № 4, в десятом — задачи № 4 и № 8. Все остальные задачи решило примерно от четверти до половины участников.

Распределение призеров по классам дано в таблице. Их имена вы найдете на с. 54. Кроме 84 призеров еще 23 участника получили похвальные грамоты.

Награждены	Дипломы первой степени	Дипломы второй степени	Дипломы третьей степени	Всего	В %
8 класс (из 39)	4	15	7	26	66
9 класс (из 47)	2	12	11	25	53
10 класс (из 62)	6	10	15	31	50

Специальный приз, учрежденный редколлегией и редакцией журнала «Квант», — подшивка журнала «Квант» за 1980 год с автографом академика И. К. Кикоина — был вручен *Янису Бриталсу* (Рига). Подпиской на журнал «Квант» на 1982 год награждены девятиклассница *Надя Абдрафикова* (Белорецк) и восьмиклассники *Витя Викторов* (Рязань), *Олег Кудинов* (Заринск), *Виталий Стаховский* (Капустин Яр) и *Женя Шмелев* (п. Надежный Якутской АССР).

Несколько слов о составе и работе жюри. Возглавил работу жюри академик-секретарь АН Казах. ССР О. А. Жаутыков, ему помогали два заместителя — доцент Казахского политехнического института С. К. Канеев и старший научный сотрудник Московского государственного университета В. В. Вавилов. В каждом классе было по два куратора: в 8 классе — А. М. Слинько и Л. П. Фалалеев, в 9 классе — А. П. Савин и К. К. Кабдыкаиров, в 10 классе — Ю. В. Нестеренко и К. Ж. Наурызбаев. Всего в составе жюри насчитывалось 53 человека. Почетным гостем олимпиады был академик АН УССР Б. В. Гнеденко. Члены жюри провели, как обычно, разбор задач для руководителей команд и, отдельно, для школьников. Перед разбором задач и руководители, и школьники получили решения всех задач, подготовленные методической комиссией.

В день закрытия олимпиады жюри организовало «математический бой» между командой ФМШ № 18 при МГУ и командой ФМШ № 45 при ЛГУ. Победили москвичи со счетом 42:38. На бое были предложены некоторые задачи Московской студенческой олимпиады этого года.

Хозяева олимпиады отнеслись к юным математикам с большой теплотой и заботой. В программе олимпиады — встречи с учеными и студентами, посещения театров и музеев, экскурсии по городу, посещение спортивного комплекса «Медео», вечера отдыха и многое-многое другое. Юные математики возложили цветы к памятнику В. И. Ленину и Мемориалу Славы, приняли участие во Всесоюзном ленинском коммунистическом субботнике. Хочется сердечно поблагодарить Академию наук, Министерство просвещения, Центральный комитет комсомола Казахстана, администрацию, сотрудников и учащихся республиканской физико-математической школы, сделавших все, чтобы превратить олимпиаду в настоящий праздник юных математиков.

Я. Бриталс, получивший специальный приз журнала «Квант».

Решения и указания

8 класс

1. Искомая площадь равна $32(\sqrt{2}-1)$.

Обозначим через $S_{чч}$ площадь пересечений **черных** клеток верхней доски с **черными** клетками нижней, через $S_{чб}$ — площадь пересечений **черных** клеток верхней доски с **белыми** клетками нижней. Аналогично введем обозначения $S_{бч}$ и $S_{бб}$. Тогда $S_{чч}+S_{чб}+S_{бч}+S_{бб}=S$, где S — площадь голубого восьмиугольника на рисунке 4.

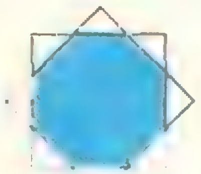


Рис. 4.

Если мы из исходного положения повернем верхнюю доску вокруг центра на 90°, то ее черные клетки перейдут в белые, а белые — в черные. Значит, $S_{чч}=S_{бч}$ и $S_{чб}=S_{бб}$. Если же мы из исходного положения повернем на 90° обе доски, то черные клетки перейдут в белые на обеих досках, так что $S_{чб}=S_{бч}$ и $S_{чч}=S_{бб}$. Поэтому $S_{чч}=S_{бч}=S_{чб}=S_{бб}$, то есть $S_{чч}=\frac{1}{4}S$. Остается найти S.

2. При фиксированных точках A, B и N задание точки A_1 определяет положение точки M и, следовательно, положение точки B_1. Таким образом, при фиксированных A, B, N мы получаем некоторое отображение $A_1 \xrightarrow{\varphi} B_1$ точек окружности в себя (рис. 5).

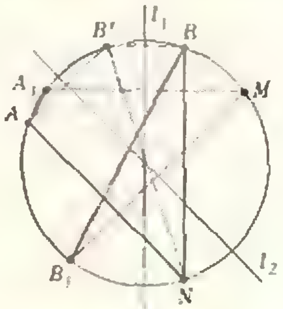


Рис. 5.

Нетрудно видеть, что отображение φ представляет собой композицию двух осевых симметрий относительно прямых $l_1 \parallel (BN)$ и $l_2 \parallel (AN)$, проходящих через центр окружности (см. рис. 5), так что на самом деле φ есть поворот вокруг центра (см. «Квант», 1980, № 3, с. 5).

Чтобы определить угол поворота, найдем образ $\varphi(B)$ точки B. Отразив точку B относительно прямой l_1, получим точку B', являющуюся противоположным концом диаметра, проходящего через N. Отразив B' относительно l_2, получим A. Итак, $\varphi(B)=A$. Если на-

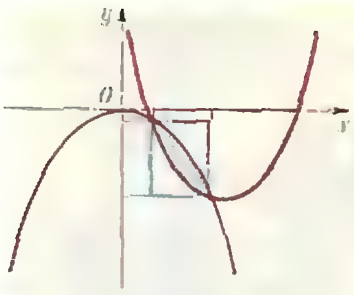


Рис. 6.

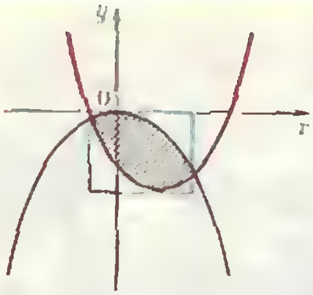


Рис. 7.

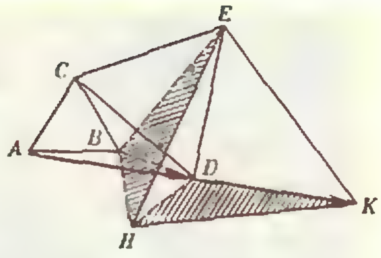


Рис. 8.

правление от точки A к точке B считать положительным, то φ — поворот на угол, дополняющий центральный угол, опирающийся на дугу AB, до 2π.

Поэтому всегда $\overset{\smile}{AB}+\overset{\smile}{A_1B_1}=2\pi$.

Доказательство того, что при этом условии прямые AA_1 и BB_1 параллельны, мы оставляем читателям.

4. Выберем в нашей таблице какой-нибудь столбец. Пусть в первой строке этого столбца стоит число a, во второй — m, в третьей — n. Докажем, что в четвертой строке снова стоит число m. Для простоты изложения отбросим все столбцы, стоящие правее выбранного. Докажем, что в третьей строке («урезанной» таблицы) число n встретится ровно m раз.

То, что во второй строке число m встречается ровно n раз, означает, что в первой строке какие-то n различных чисел a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a встречаются не менее, чем по m раз каждое, причем a — ровно m раз. Каждое из чисел a_i и число a встречаются когда-то в первый, во второй, ..., и m-й раз; поэтому числа 1, 2, ..., $m-1$, m появляются во второй строке по крайней мере n раз (m — ровно n раз). Число $m+1$ во второй строке появляется менее чем n раз, ибо в первой строке в $(m+1)$-й раз могут появляться лишь числа a_1, a_2, ..., a_{n-1}. Числа $m+2$, $m+3$, ... тем более не могут встречаться во второй строке n и более раз. Итак, во второй строке в n-й раз появляются числа 1, 2, ..., m и только они. Поэтому в третьей строке число n появляется ровно m раз, что и требовалось доказать.

5. Из того, что пять перечисленных четырехугольников являются параллелограммами, следуют равенства векторов: $\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{HA}$, $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{BT}$, $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{XK}$, $\overrightarrow{XK}=\overrightarrow{PC}$. Из них получаем $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BT}$, что и требовалось.

6. Очевидно, $x>y$. Пусть $x=y+d$, где $d\geqslant 1$ (d — натуральное число). Тогда

$$(3d-1)y^2+(3d-1)yd+d^3=61,$$

откуда $d^3<61$, то есть $d=1$, 2 или 3. Эти три возможных значения d дают нам три квадратных уравнения, из которых лишь у одного (при $d=1$) есть натуральный корень $y=5$. При этом $x=6$.

7. Рассмотрим одну из команд. Она сыграла с восемью командами и с девятью не сыграла. Если среди этих девяти последних есть две, не сыгравшие между собой, то все доказано. Предположим, что это не так. Тогда все эти девять команд сыграли между собой, для чего им потребовалось сыграть 36 матчей. Однако за один тур эти девять команд могут провести только 4 матча, а за 8 туров — 32 матча. Противоречие!

9 класс

1. Возможны два случая расположения парабол $y=-x^2$ и $y=x^2-2x+a$ — они изображены на рисунках 6 и 7. На этих же рисунках показаны нужные прямоугольники. Разобравшись с координатами точек пересечения парабол, получим ответ: искомая площадь равна $(1-a)\sqrt{1-a}$, если $a\leqslant 0$, и $1-2a$, если $0<a<\frac{1}{2}$; если же $a\geqslant\frac{1}{2}$, множество решений системы либо пусто, либо состоит из одной точки — площадь прямоугольника может быть сколь угодно малой.

3. Утверждение задачи следует из того, что треугольник CAD при повороте на угол 60° против часовой стрелки около вершины C переходит в треугольник CBE (рис. 8), а треугольник HBE при повороте на угол 60° по часовой стрелке около H — в треугольник HDK.

5. Ясно, что $x>y>0$. Из $\frac{x^3+y^3}{x-y}=1$ следует $\frac{x^3-y^3}{x-y}<1$, $x^2+xy+y^2<1$. Но $x^2+y^2<$ $<x^2+xy+y^2$.

6. Припишем каждой стороне направление, в котором она откладывалась. Спроектируем наши построения на прямую, соединяющую начальную и конечную точки (находящиеся на расстоянии d). Относительная погрешность при этом проектировании не меняется. Сумма длин проекций сторон многоугольника, направленных в одну сторону, не превосходит 2 (диаметра круга), в другую — тоже, и, если даже все проекции векторов погрешностей направлены одинаково, их сумма не больше $2p+2p=4p$, то есть $d\leqslant 4p$.

8. Пусть $m=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot k$, где k — натуральное число. Подобрав k так, чтобы число $m-1$ делилось на 11, а число $m+1$ делилось на 13, получим, что число $n=m-10$ удовлетворяет всем условиям задачи. Таково, например, $k=45$; тогда $n=9440$.

10 класс

1. Положим $f(x)=a\cdot\cos x+b\cdot\cos 3x$. Утверждение задачи следует из того, что при всех целых n выполняются неравенства $f(\pi n)\leqslant 1$ и $f\left(\frac{\pi}{3}+\pi n\right)\leqslant 1$, то есть

$$\begin{cases} -1\leqslant a+b\leqslant 1, \\ -1\leqslant \frac{a}{2}-b\leqslant 1 \end{cases}$$

(см. рис. 9).

2. Утверждение задачи остается справедливым, если в условии слово «прямоугольник» заменить словом «параллелограмм».

Нарисуем параллелограмм $KL'MN'$, где L' и N' — середины сторон BC и AD (рис. 10). Для этого параллелограмма утверждение очевидно. Может ли наш параллелограмм $KLMN$ с ним не совпадать? Поскольку центр симметрии у них общий (середина отрезка KM), это возможно лишь в том случае, когда $(NN') \parallel (LL')$, то есть четырехугольник $ABCD$ — трапеция ($(AD) \parallel (BC)$) со средней линией KM. Площадь этой трапеции $h \cdot |KM|$ (h — расстояние между прямыми AD и BC), очевидно, вдвое больше площади параллелограмма $KLMN$.

3. Ответ: $x_n = 1$ ($n \in \mathbf{N}$), $x_n = n$ ($n \in \mathbf{N}$).

Решение. Из $x_1 \leqslant 1$ следует $x_1 = 1$; $x_2 \leqslant 2\sqrt{2} < 3$, так что x_2 равно либо 1, либо 2.

1) Если $x_2 = 1$, то разности $x_n - 1$ для каждого n делятся на $(n-1)(n-2)$. Если $x_n \neq 1$, то

$$(n-1)(n-2) \leqslant |x_n - 1| \leqslant n\sqrt{n} + 1.$$

Эти неравенства не могут выполняться при достаточно больших n. Поэтому $x_n = 1$ для достаточно больших n. Пусть m — произвольное натуральное число. Разность $x_{n+m} - x_m$ делится на n. Если n достаточно велико, то на n делится разность $1 - x_m$ (для любого достаточно большого n). Отсюда следует, что $x_m = 1$, то есть все члены последовательности равны 1.

2) Если $x_2 = 2$, то при любом k разности $x_k - x_1 = x_k - 1$ и $x_k - x_2 = x_k - 2$ делятся, соответственно, на $k-1$ и $k-2$. Это равносильно тому, что на $(k-1)(k-2)$ делятся разности $x_k - k$. Если $x_k \neq k$, то

$$(k-1)(k-2) \leqslant |x_k - k| \leqslant k\sqrt{k} + k,$$

что невозможно при достаточно больших k, и, следовательно, $x_k = k$ для $k \geqslant K_0$. При фиксированном m и достаточно большом k разность $x_{k+m} - x_m = k + m - x_m$ делится на k. Тогда разность $x_m - m$ делится на любое достаточно большое k. Это возможно лишь в том случае, когда $x_n = n$ при всех n.

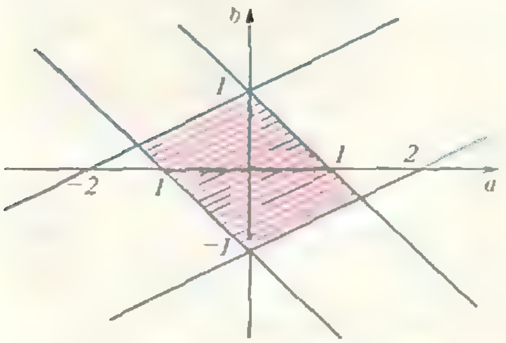


Рис. 9.

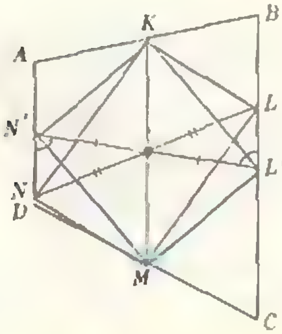


Рис. 10.

5. После первой сортировки младшие цифры у написанных на карточках чисел не убывают. Этот порядок младших цифр сохраняется в каждой кучке после второй сортировки; поэтому в стопке, собранной после второй сортировки, двузначные числа, образованные двумя младшими разрядами написанных на карточках чисел, не убывают. Этот порядок сохранится в каждой кучке после третьей сортировки и т. д. Поэтому в последней стопке карточки будут лежать по возрастанию номеров (или по «неубыванию», если числа на карточках могут повториться).

6. На рисунке 11 прямоугольник 3×4 разбит на пять цветных многоугольников, в каждом из которых максимальное расстояние между двумя точками равно $\sqrt{5}$. При любом расположении шести точек по крайней мере две из них попадут в один из этих многоугольников, и расстояние между ними будет не более $\sqrt{5}$.

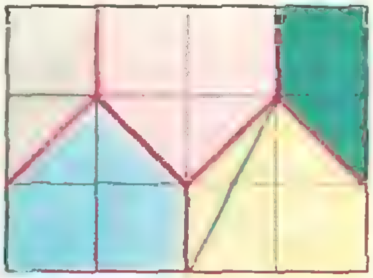


Рис. 11.

7. а) Наименьшее значение многочлена равно 3. Докажем это. Имеем

$$4 + x^2y^4 + x^4y^2 - 3x^2y^2 = 4 + x^2y^2(x^2 + y^2) - 3x^2y^2 \geqslant 4 + x^2y^2 \cdot 2|xy| - 3x^2y^2$$

(мы воспользовались неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим для чисел x^2, y^2).

Введем обозначения: $t = |xy|$, $f(t) = 4 + 2t^3 - 3t^2$. Легко показать, что в точке $t = 1$ многочлен $f(t)$ принимает наименьшее значение на множестве $t \geqslant 0$. Поэтому $P(x, y) \geqslant f(1) = 3$.

Число 3 является значением многочлена $P(x, y)$ при $x = y = 1$.

б) Пусть

$$4 + x^2y^2 + x^4y^2 - 3x^2y^2 = g_1^2 + g_2^2 + \ldots, \qquad (1)$$

где $g_1, g_2, \ldots$ — некоторые многочлены, степени которых, очевидно, не превосходят трех. Представим g_i в виде суммы $g_i = a_i + b_i + c_i + d_i$, где a_i, b_i, c_i, d_i — однородные многочлены степеней, соответственно, 3, 2, 1, 0 (разумеется, некоторые из них могут быть тождественными нулями) *). Сравнивая в (1) члены степеней 6, 4 и 2, мы последовательно получим, что все a_i, b_i и c_i делятся на xy. Поскольку c_i — многочлены первой степени, все $c_i=0$. Но тогда сравнение членов степени 4 приводит к невозможному равенству $3x^2y^2+b_1^2+b_2^2+\ldots=0$ — противоречие.

---

*) Многочлен $g(x, y)$ называется *однородным степени k*, если все его одночлены имеют степень k, то есть $g(tx, ty) = t^k \cdot g(x, y)$.

Замечание. Можно доказать, что многочлен $P(x, y)$ представим в виде суммы квадратов рациональных дробей от x и y. Для этого, как легко видеть, достаточно представить в виде суммы квадратов многочленов выражение $(4+x^2+y^2)\,P(x, y)$. Справедливо и общее утверждение: *многочлен от любого числа переменных, не принимающий отрицательных значений, можно представить в виде суммы квадратов нескольких рациональных дробей; многочлен от одной переменной, не принимающий отрицательных значений, можно представить в виде суммы квадратов двух многочленов.*

8. Искомое множество состоит из одной точки — центра O треугольника ABC.

Предположив, что A — ближайшая к одной из искомых точек O вершина треугольника ABC, то есть $|OA|<|OB|$, $|OA|<|OC|$, воспользуйтесь тем, что в треугольниках AOE, BOF, COD конгруэнтны основания AE, BF, CD и высоты, опущенные на эти основания. После этого докажите, что $|OA|=|OB|=|OC|$.

Т. Петрова, Л. Чернова

Олимпиада по физике

С 15 до 22 апреля в Ташкенте состоялся заключительный этап XV Всесоюзной олимпиады школьников по физике, которая была посвящена XXVI съезду КПСС.

140 учащихся из сборных команд всех союзных республик, городов Москвы и Ленинграда, сборных команд Министерства путей сообщения и Главного политического управления Министерства обороны СССР соревновались в решении задач, составленных специально для олимпиады известными учеными-физиками и педагогами из ведущих вузов и научных учреждений страны. Все участники заключительного этапа — победители республиканских олимпиад этого года или призеры предыдущей Всесоюзной олимпиады, завоевавшие дипломы I и II степени.

Торжественное открытие олимпиады состоялось 16 апреля в актовом зале Ташкентского государственного педагогического института им. Низами. Министр просвещения Узбекской ССР С. Ш. Шермухамедов пожелал всем участникам честной и упорной борьбы и выразил надежду, что члены команды Узбекистана выступят «дома» успешнее, чем на предыдущих олимпиадах. Со словами напутствия к ребятам обратились председатель жюри XV Всесоюзной олимпиады по физике, заслуженный деятель науки Уз. ССР, лауреат Государственной премии им. Беруни, член-корреспондент АН Уз. ССР Р. Б. Бегжанов, секретарь ЦК комсомола республики Ш. Н. Махмудова и начальник Главного управления народного образования Ташкентского горисполкома Х. К. Юлдашев. Участников олимпиады приветствовали также член команды Уз. ССР, ученик школы № 17 Ташкента Анвар Исмаилов и четырехкратный призер Всесоюзных олимпиад, студент Московского физико-технического института Евгений Пономарев.

В этот же день юные физики возложили цветы к памятнику В. И. Ленину и на Могилу неизвестного солдата, совершили экскурсию по Ташкенту, а вечером побывали на спектакле в Театре оперы и балета им. Навои.

17 апреля состоялся первый — теоретический — тур олимпиады. Восьмиклассникам нужно было решить 4 задачи (времени на работу давалось 4 часа), девятиклассникам и десятиклассникам — по 5 задач (времени — 5 часов). Приводим условия задач (большинство из них помещено в Задачнике «Кванта» в 7 и 8 номерах журнала за этот год).

Теоретический тур

8 класс

1. По двум гладким наклонным плоскостям, образующим одинаковые углы α с го-

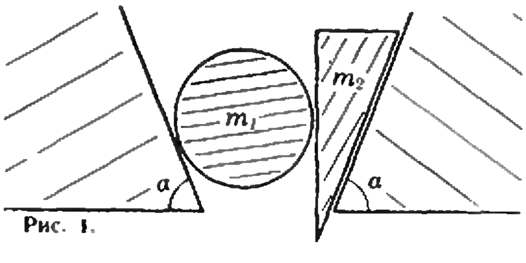


Рис. 1.

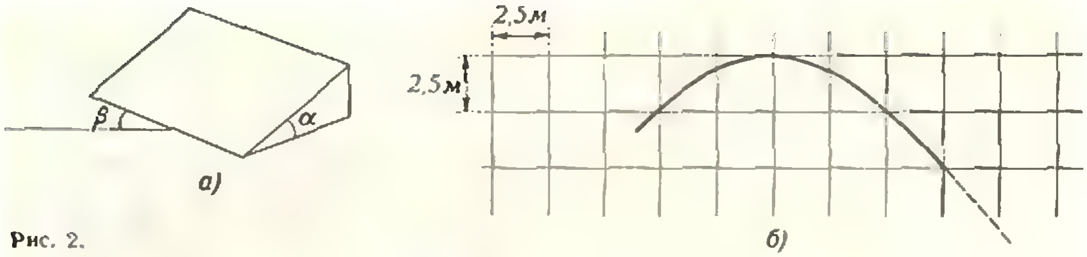


Рис. 2.

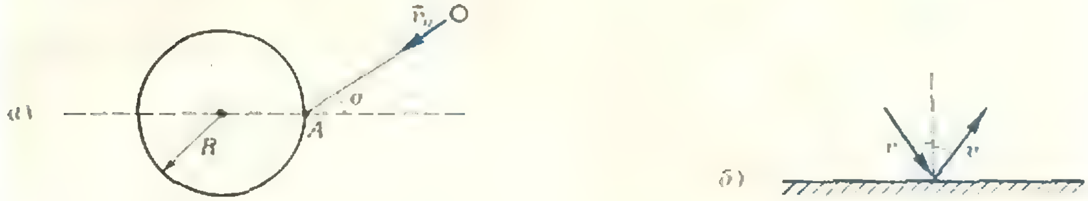


Рис. 3.

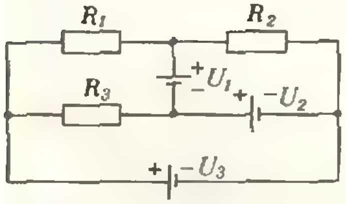


Рис. 4.

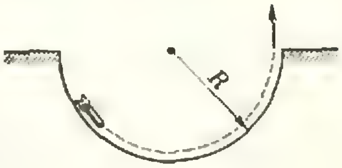


Рис. 5.

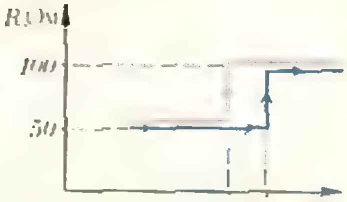


Рис. 6.

ризонтом, движутся, касаясь друг друга, цилиндр и клин (рис. 1). Найдите, с какой силой клин давит на цилиндр. Масса цилиндра m_1, масса клина m_2.

2. Шайба наезжает на ледяную горку под углом $\beta = 60°$ к ее основанию (рис. 2, *а*); скорость шайбы при этом была $v_0 = 10$ м/с. След шайбы на ледяной горке частично стерся, и то, что от него осталось, изображено на рисунке 2, *б*. Каков угол наклона α ледяной горки к горизонту? Трение шайбы об лед пренебрежимо мало, въезд на горку — плавный.

3. Небольшой шарик движется с постоянной скоростью v_0 по гладкой горизонтальной поверхности и попадает в точке A в цилиндрический вертикальный колодец глубиной H и радиусом R (рис. 3, *а*). Вектор скорости шарика составляет угол α с диаметром колодца, проведенным в точку A. При каком соотношении между R, H, v_0 и α шарик после упругих соударений со стенками и дном сможет «выбраться» из колодца? Примечание. При упругом ударе шарика модуль скорости остается постоянным, а угол падения равен углу отражения (рис. 3, *б*).

4. На схеме, показанной на рисунке 4, сопротивления всех резисторов одинаковы: $R_1 = R_2 = R_3 = R$. Напряжения на клеммах батарей равны $U_1 = U$, $U_2 = 2U$, $U_3 = 4U$. Найдите: 1) направление и величину токов, протекающих по каждому из резисторов; 2) направление и величину токов, протекающих через батареи.

9 класс

1. Игрушечная ракета наполняется сжатым воздухом, который при запуске выбрасывает из нее массивную пробку. При вертикальном старте ракета поднимается на высоту $h = 16$ м. Предлагается производить запуск ракеты другим способом. Сначала ракета скользит без начальной скорости по направляющим рельсам в виде полуокружности (рис. 5) радиусом $R = 4$ м. В нижней точке, когда ракета приобретает максимальную скорость, срабатывает двигатель ракеты. На какую высоту поднимется ракета при таком способе запуска? Трением и сопротивлением воздуха можно пренебречь. Объясните результат с точки зрения закона сохранения энергии.

2. Горизонтально расположенный цилиндрический теплоизолированный сосуд объемом $V_0 = 100$ л, заполненный гелием, разделен на две части теплонепроницаемым поршнем, который может перемещаться без трения. Газу, находящемуся в левой части сосуда, сообщают количество теплоты $\Delta Q = 100$ Дж. Найдите изменение давления в сосуде к тому моменту, когда поршень перестанет двигаться.

3. В таблице приведены экспериментальные данные о теплоемкостях и атомных массах некоторых твердых тел. На основании этих данных установите некоторую физическую закономерность и заполните три пустые клеточки таблицы. Какова предполагаемая точность ваших предсказаний (в процентах)? Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К).

4. Для исследования свойств нелинейного резистора был произведен ряд экспериментов. Вначале была исследована зависимость сопротивления резистора от температуры. При повышении температуры до значения $t_1 = 100$ °C мгновенно происходил скачок сопротивления от величины $R_1 = 50$ Ом до величины $R_2 = 100$ Ом, при охлаждении обратный

Вещество	Серебро	Алюминий	Золото	Висмут	Кобальт	Медь	Железо	Литий	Магний	Никель	Платина	Титан	Ванадий
$c\left(\frac{\text{Дж}}{\text{г}\cdot\text{К}}\right)$	0,238	0,90	0,128	0,132	0,417	0,383	0,447	3,52		0,43	0,131		0,484
A (г)	107	27	197	209	59	64		7	24	60	196	48	51

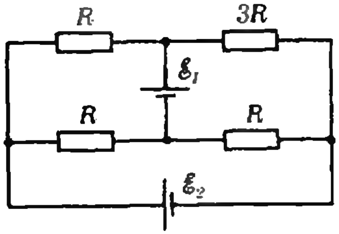


Рис. 7.

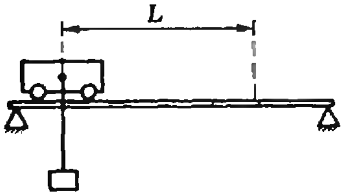


Рис. 8.

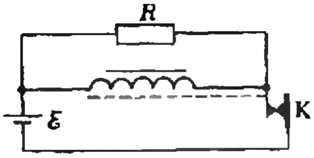


Рис. 9.

скачок происходил при температуре $t_2=99$°C (рис. 6). Во втором опыте к резистору приложили постоянное напряжение $U_1=60$ В, при этом температура резистора оказалась равной $t_3=80$°C. Наконец, когда к резистору приложили постоянное напряжение $U_2=80$ В, в цепи возникли самопроизвольные колебания тока. Определите период этих колебаний T, а также максимальное и минимальное значения тока. Температура воздуха в лаборатории постоянна и равна $t_0=20$°C. Теплоотдача от резистора пропорциональна разности температур резистора и окружающего воздуха. Теплоемкость резистора $C=3$ Дж/К.

5. Собрана схема, показанная на рисунке 7. ЭДС батареи $\mathscr{E}_1$ уменьшили на 1,5 В, после чего токи на различных участках цепи изменились. Как нужно изменить ЭДС батареи $\mathscr{E}_2$, чтобы 1) ток через батарею $\mathscr{E}_1$ стал прежним, 2) ток через батарею $\mathscr{E}_2$ стал прежним? Внутренними сопротивлениями батарей пренебречь.

10 класс

1. Ракета запущена с поверхности Земли вертикально вверх с первой космической скоростью и возвращается на Землю недалеко от места старта. Сколько времени она находилась в полете? Радиус Земли $R_З=6400$ км. Примечание. Площадь эллипса с полуосями a и b вычисляется по формуле $S=\pi ab$.

2. Для горизонтального перемещения грузов на расстояние $L=20$ м используется самоходная тележка, перемещающаяся по горизонтальным рельсам. На тросе длиной $l=5$ м к тележке подвешивают перемещаемый груз (рис. 8). Тележка половину времени движется равноускоренно, а половину — равнозамедленно. Определите возможные значения ускорения тележки, при которых груз в момент остановки тележки в конце пути окажется неподвижным. В начальный момент времени вся система была неподвижна.

3. См. задачу № 2 для 9-го класса.

4. На рисунке 9 изображена схема электрического звонка. В отсутствие тока в катушке ключ K замкнут. При возрастании тока в катушке ключ размыкается при токе $I_1=1$ А, а при уменьшении тока — вновь замыкается при токе $I_2=0,9$ А. Найдите частоту колебаний подвижного контакта ключа K, если ЭДС батареи $\mathscr{E}=10$ В, индуктивность катушки с железным сердечником $L=1$ Гн, сопротивление $R=10$ Ом. Активное сопротивление катушки считать равным нулю. Какую среднюю мощность потребляет звонок от батареи при работе?

5. Объектив телескопа Гейла имеет диаметр $D=250$ см и фокусное расстояние $F=160$ м. Телескоп используется для фотографирования искусственного спутника Земли, имеющего диаметр $d=200$ см и находящегося на расстоянии $L=320$ км. 1) На каком расстоянии от фокуса должна быть расположена фотопластинка? 2) Каким будет размер изображения искусственного спутника? 3) Каков будет диаметр размытых (несфокусированных) изображений звезд на фотографии?

18 апреля жюри закончило проверку работ теоретического тура. Сведения, полученные в результате проверки, приведены в следующей таблице:

		Номер задачи				
		1	2	3	4	5
Число работ с полным решением задачи	8 кл.	12	15	7	16	
	9 кл.	20	21	32	26	20
	10 кл.	18	25	31	20	37
Число учащихся, не решивших задачу	8 кл.	18	8	17	15	
	9 кл.	10	10	4	9	11
	10 кл.	9	5	7	7	3

Из таблицы видно, что в среднем участники олимпиады успешно справились с заданием теоретического тура.

19 апреля проходил экспериментальный тур. Каждый участник выполнял две экспериментальные задачи. Вот их условия:

Экспериментальный тур

8 класс

1. Соберите простейший электромотор и испытайте его в действии.

Необходимые материалы и принадлежности: ось с коллектором, две железные пластинки 1,5×6 см для якоря, две скобки из жести для крепления якоря, моток проволоки, полоска папиросной бумаги для изоляции, подставка, источник питания, соединительные провода, подковообразный магнит, инструменты.

2. Определите мощность нагревателя.

Необходимые материалы и принадлежности: источник постоянного тока (до 32 В), мензурка на 250 мл с водой, спираль, термометр (0°С — 100°С), соединительные провода, ключ, секундомер, миллиметровая бумага для построения графиков.

Примечание. Теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг · К).

9 класс

1. Определите заряд на обкладках конденсатора при напряжении 40 В.

Необходимые материалы и принадлежности: конденсатор, микроамперметр, резистор, секундомер, переключатель.

2. Определите теплоемкость неизвестной жидкости по известной теплоемкости воды (жидкости не смешивать!).

Необходимые материалы и принадлежности: вода, неизвестная жидкость, калориметр, весы, разновесы, электроплитка, фильтровальная бумага, тела с неизвестной теплоемкостью.

10 класс

1. Определите индуктивность и активное сопротивление дросселя с железным сердечником на частоте 50 Гц.

Необходимые материалы и принадлежности: дроссель с железным сердечником, активное сопротивление, конденсатор, вольтметр переменного тока, источник переменного напряжения.

2. а) Определите чувствительность фотоэлемента: 1) в режиме короткого замыкания; 2) в режиме с активной нагрузкой.

б) Постройте график зависимости КПД фотоэлемента от освещенности при одном значении нагрузочного сопротивления.

в) С помощью фотоэлемента проверьте закон освещенности.

Необходимые материалы и принадлежности: фотоэлемент, переменное активное сопротивление, вольтметр постоянного тока, амперметр постоянного тока, лампа накаливания, источник питания для лампы накаливания.

За работой каждого экспериментатора наблюдали члены жюри. По ходу работы они оценивали экспериментаторские навыки школьника, его

Участники олимпиады по физике, получившие дипломы I степени. Сидят (слева направо): А. Гниловской, В. Ухов, А. Гутин, П. Цветков, М. Шмаков; стоят: В. Баиков, В. Деревянко, Р. Сулейманов, С. Ким, И. Солодовников, С. Козлов, Б. Макеев.

Фото В. Саломова

умение обращаться с приборами и выбирать оптимальные варианты решения. Письменный отчет о проделанной работе был не менее важным критерием оценки. Проверка письменных отчетов показала, что многие участники не имеют навыков критического анализа полученных из эксперимента данных, мало знакомы с методами оценки точности результатов.

21 апреля состоялось торжественное закрытие XV Всесоюзной олимпиады школьников по физике. Жюри объявило итоги олимпиады. Председатель жюри Р. Б. Бегжанов и заместитель председателя жюри профессор Московского физико-технического института С. М. Козел вручили награды победителям. Имена призеров, получивших дипломы I, II и III степени, приведены на странице 55. Многие участники олимпиады были награждены также специальными призами и грамотами.

Специальный приз, учрежденный редколлегией и редакцией журнала «Квант», был вручен семикласснику (выступавшему за 8 класс) *Александру Дешковскому* (Барановичи, с. ш. № 6). 21 участник олимпиады награжден подпиской на журнал «Квант» на 1982 год. Подпиской на «Квант» награждена также республиканская физико-математическая школа-интернат, сотрудники которой сделали очень много для того, чтобы участники олимпиады, приехавшие из разных концов страны, чувствовали себя в Ташкенте как дома.

XV Всесоюзная олимпиада школьников по физике закончилась. Она была настоящим праздником юных физиков. И в этом большая заслуга Министерства просвещения Уз. ССР, Центрального комитета комсомола республики, ученых Ташкентского государственного университета, политехнического и педагогического институтов.

Призеры XV Всесоюзной олимпиады школьников

Математика

Дипломы I степени

по [illegible] классам получили

Бритиас Я. (Рига, ФМШ № 1),
Жуков И. (Ленинград, с. ш. № 227),
Николаев А. (Уфа, с. ш. № 114),
Черанс К. (Рига, ФМШ № 1);

по 9 классам —

Перельман Г. (Ленинград, с. ш. № 239),
Шевчишин В. (Львов, с. ш. № 11);

по 10 классам —

Алексеев В. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Аралкин А. (Новокузнецк, с. ш. № 11),
Гринберг Н. (Киев, с. ш. № 145),
Екишев Ю. (Сыктывкар, с. ш. № 1),
Лапшин Л. (Ленинград, с. ш. № 239),
Малинюк Т. (Киев, ФМШ при КГУ).

Дипломы II степени

по 8 классам получили

Абраменко С. (Караганда, с. ш. № 63),
Айнсаар Т. (Ныо),
Байбородин О. (Сыктывкар, с. ш. № 1),
Булавас В. (Паневежис, с. ш. им. Бальчикоиса),
Буриченко В. (Новокузнецк, с. ш. № 49),
Головин Г. (Славянск, с. ш. № 10),
Ерошкин О. (Днепропетровск, с. ш. № 15),
Зыков К. (Москва, с. ш. № 57),
Наурызбаев А. (Алма-Ата, РФМШ),
Орлов Д. (Владимир, с. ш. № 8),
Парновский Л. (Львов, с. ш. № 52),
Семенов А. (Саратов, с. ш. № 13),
Устеменко А. (Павлодар, с. ш. № 3),
Харитонов Ф. (Николаев, с. ш. № 38),
Шляхтов А. (Ульяновск, с. ш. № 51);

по 9 классам —

Белостоцкий В. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Закиров А. (Бийск, с. ш. № 25),
Короткин Д. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Кушнир А. (Киев, ФМШ при КГУ),
Левин А. (Ленинград, с. ш. № 239),
Матвеев К. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Савкин А. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Самборский С. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Спивак А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Титенко В. (Пуховичи),
Фульман И. (Гомель, с. ш. № 2),
Янгель А. (Ныо);

по 10 классам —

Анкудинов А. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Грасманис М. (Рига, ФМШ № 1),
Гринчук М. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),

Крижановский О. (Харьков, с. ш. № 27),
Липаев А. (Москва, с. ш. № 2),
Меркявичюс Л. (Лентварис, с. ш. № 2),
Рабинович Б. (Тула, с. ш. № 36),
Сегалович И. (Алма-Ата, РФМШ),
Чеканов Ю. (Москва, с. ш. № 91),
Эпиктетов М. (Алма-Ата, РФМШ).

Дипломы III степени

по 8 классам получили

Аверин А. (Челябинск, с. ш. № 127),
Викторов В. (Рязань, с. ш. № 45),
Кудинов О. (Заринск, с. ш. № 2),
Мамедов А. (Баку, с. ш. № 160),
Романов В. (Тула, с. ш. № 36),
Стаховский В. (п. Капустин Яр Астраханской обл., с. ш. № 231),
Юдаев А. (Новочеркасск, с. ш. № 5);

по [illegible] классам —

Белокопытов А. (Киев, ФМШ при КГУ),
Дранко О. (Киев, ФМШ при КГУ),
Зубова М. (Томск, с. ш. № 55),
Зусманович П. (Алма-Ата, РФМШ),
Казмирчук А. (Киев, ФМШ при КГУ),
Камунтавичюс Д. (Вильнюс, с. ш. им. Венуолиса),
Кордзая К. (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Мазуров О. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Матюшов С. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Тупайло С. (Киев, ФМШ при КГУ),
Фрегер В. (Вольск, с. ш. № 12);

по 10 классам —

Белоцерковский Ю. (Минск, с. ш. № 64),
Бураго Д. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Гайсинский М. (Ташкент, с. ш. № 103),
Гионашвили З. (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Дерягин Д. (Москва, с. ш. № 2),
Кивимаш А. (Таллин, с. ш. № 1),
Колпаков И. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Кругляк А. (Донецк, с. ш. № 26),
Матвеев А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Минарский А. (Ленинград, с. ш. № 239),
Орел М. (Ленинград, с. ш. № 239),
Пятов П. (Дубна, с. ш. № 9),
Фролов А. (Ярославль, с. ш. № 33),
Чанышев А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Черкасенко В. (Киев, ФМШ при КГУ).

Физика

Дипломы I степени

по 8 классам получили

Банков В. (Алексин, с. ш. № 1),
Гниловской А. (Ленинград, с. ш. № 80),
Сулейманов Р. (Янгиабад, с. ш. № 10),
Шмаков М. (Солнечногорск, с. ш. № 2);

по 9 классам —

Ким С. (Алмалык, с. ш. № 15),
Макеев Б. (Москва, с. ш. № 361),
Ухов В. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Цветков П. (Подольск, с. ш. № 6);

по 10 классам —

Гутин А. (Клинцы, с. ш. № 2),
Деревянко В. (Киев, ФМШ при КГУ),
Козлов С. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Солодовников И. (Москва, с. ш. № 179).

Дипломы II степени

по 8 классам получили

Алексеев А. (Ленинград, с. ш. № 202),
Бирзвалкс В. (Рига, с. ш. № 1),
Бруенков Е. (Коммунарск, с. ш. № 22),
Ивайлов И. (Казань, с. ш. № 131),
Кононов Р. (Петропавловск, с. ш. № 5),
Мокеев И. (Ангарск, с. ш. № 10),
Тетерина И. (Ангрен, с. ш. № 33),
Хазарадзе Т. (Тбилиси, ФМШ № 42 при ТГУ);

по 9 классам —

Альдфедер И. (Нальчик, с. ш. № 9),
Баталов С. (Арзамас, с. ш. № 2),
Бергельсон А. (Москва, с. ш. № 2),
Зандаров Ю. (Кургантепа, с. ш. № 1),
Калда Я. (Таллин, с. ш. № 1),
Качаев И. (Красноярск, с. ш. № 10);

по 10 классам —

Бабий О. (Киев, ФМШ при КГУ),
Игамкулов З. (Ташкент, РФМШ),
Кадиров Т. (Ташкент, РФМШ),
Кудрявцев С. (Магадан, с. ш. № 1),
Ляпин А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Мушинский А. (Минск, с. ш. № 23),
Шубенин И. (Рига, с. ш. № 52).

Дипломы III степени

по 8 классам получили

Гребнев И. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Жемайтис Р. (Вильнюс, с. ш. № 9),
Житомирский М. (Харьков, с. ш. № 27),
Стефанов М. (Москва, с. ш. № 1),
Чеканов С. (Саратов, с. ш. № 13),
Эхатамм М. (Таллин, с. ш. № 1),
Якунин А. (Грозный, с. ш. № 2);

по 9 классам —

Малышев В. (Волгоград, с. ш. № 131),
Панасюк А. (Одесса, с. ш. № 117),
Пентегов В. (Киев, с. ш. № 145),
Пироженко А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Погорелов В. (Узловая, с. ш. № 61),
Рахманов М. (Алма-Ата, РФМШ),
Чичкань С. (Киев, с. ш. № 145);

по 10 классам —

Байков П. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Григорьев Д. (Москва, с. ш. № 57),
Кадиров А. (Ташкент, РФМШ),
Мусиенко П. (Барнаул, с. ш. № 3),
Осодоев А. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Сапонов П. (Усть-Каменогорск, с. ш. № 3),
Семенченко М. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Фролов А. (Тула, с. ш. № 36).

Новые книги

В этом номере мы продолжаем публиковать краткие аннотации на книги по математике и физике, доступные и интересные нашим читателям, выпускаемые в 1982 году издательством «Наука». Большинство книжных магазинов, распространяющих литературу данной тематики, а также отделы «Книга — почтой» до конца 1981 года без ограничений принимают предварительные заказы (открытки) на эти книги. Мы просим всех заинтересованных читателей оформить такие заказы. Это поможет издательству точнее планировать и распределять тиражи издаваемых книг (особенно переводных, тиражи которых оговариваются соглашениями с иностранными издательствами). В скобках мы указываем квартал, в котором предполагается выход книги в свет.

Математика

1. М. Гарднер *Математические чудеса и тайны* (перевод с англ.). Издание 4-е, стереотип. (I кв.) Цена 30 к.

М. Гарднер — видный американский популяризатор науки. Эта его книга рассказывает о современных математических фокусах. По большей части автор не формулирует закономерностей, лежащих в их основе. Он лишь описывает действия «фокусника» — явные и тайные. Читателю несомненно доставит удовольствие восстановить соответствующую алгебраическую или геометрическую идею.

2. Б. В. Гнеденко, А. Я. Хинчин. *Элементарное введение в теорию вероятностей.* Издание 9-е, стереотип. (I кв.) Цена 30 к.

Эта книга выдержала восемь изданий в нашей стране и переведена во многих странах мира. Отличается она от других книг по теории вероятностей прежде всего тем, что предъявляет минимальные требования к математическим знаниям читателей — для понимания всех ее разделов вполне достаточно школьного курса. Все вводимые теоретические понятия и выводимые правила возникают на базе практических примеров.

3. Е. И. Игнатьев. *В царстве смекалки.* Издание 4-е, исправл. (I кв.) Цена 40 к.

Эта книга впервые увидела свет в 1908 году и в свое время имела огромный успех. С 1908 г. по 1926 г. она несколько раз переиздавалась. Затем о ней незаслуженно забыли и вновь «вернули к жизни» лишь в 1977 году. Весь тираж разошелся немедленно. Задачи, собранные Е. И. Игнатьевым,— занимательного характера: их можно отнести к разделу «математических игр и развлечений». Здесь есть арифметические, геометрические, комбинаторные задачи; задачи, связанные с играми, задачи на графы и задачи-шутки. Эта книга доступна и школьникам младших классов.

4. М. М. Постников. *Введение в теорию алгебраических чисел.* (II кв.) Цена 40 к.

Эта книга — переработанное и дополненное издание брошюры того же автора «Теорема Ферма», вышедшей в 1978 году. В ней идеи и понятия теории алгебраических чисел изложены в связи с Великой теоремой Ферма; читателю разъясняется, что их появление не случайно и диктуется логикой решения конкретной задачи. Изложение ведется концентрически с тем, чтобы даже минимально подготовленный читатель мог усвоить основные идеи.

5. *Старинные занимательные задачи по математике* (пересказ и обработка Ю. В. Нестеренко, С. Н. Олехника, М. К. Потапова) (IV кв.) Цена 40 к.

В книге собраны задачи из старинных русских рукописей, а также книг, изданных до 1800 г., интересные как содержанием, так и способом решения. Задачи сопровождаются замечаниями исторического характера.

6. Г. Штейнгауз. *Сто задач* (перевод с польск.). Издание 3-е, стереотип. (II кв.) Цена 50 к.

В предисловии к своей книге Г. Штейнгауз написал, что он «старался составить задачи, которые возникают самым естественным образом из геометрических явлений или же из реальных обстоятельств» и что его цель «ввести читателей в практику того универсального метода трактовки явлений, которому греки дали название математика, облегчить им переход от практики средней школы к настоящей математике и показать им эту науку на доступном материале».

Все задачи, входящие в книгу, снабжены полными решениями.

7. С. А. Абрамов. *Элементы программирования.* (I кв.) («Популярные лекции по математике».) Цена 20 к.

Эта книга полезна при первом знакомстве с программированием. В ней рассказывается о том, что такое алгоритм, алгоритмический язык, трансляция, операционная система. Текст сопровождается задачами.

8. М. Н. Аршинов, Л. Е. Садовский. *Коды и математика.* (IV кв.) (Библиотечка «Квант».) Цена 35 к.

Теория кодирования, первоисточник которой — криптография (искусство засекречивания истинного содержания сообщения), в настоящее время выросла в обширную и разветвленную область со своим кругом объектов и задач. Главным образом она занимается решением проблем, возникающих при передаче информации по линиям связи. Авторы, говоря о ярко выраженной прикладной направленности теории кодирования, указывают и на ее связь с различными разделами математики: теорией чисел, алгеброй, комбинаторикой, теорией вероятностей.

9. М. И. Башмаков, Б. М. Беккер, В. М. Гольховой. *Задачи по математике. Алгебра и анализ.* (II кв.) (Библиотечка «Квант».) Цена 35 к.

Задачи, собранные в книге, представляют основной круг идей школьного курса алгебры и начал математического анализа. Все задачи, связанные общей идеей решения, сгруппированы в серии; в каждой серии они расположены в порядке возрастания трудности. Такое расположение материала, а также указания, составляющие вторую часть книги, и вводные замечания к отдельным главам помогут читателю в приобретении навыков математического мышления.

В книге имеются разделы, посвященные комбинаторике и комплексным числам.

Физика

1. Ю. А. Храмов. *Физики: Биографический справочник.* Издание 2-е, исправл. и дополн. (IV кв.) Цена 2 р. 40 к.

В книге представлены биографии более тысячи отечественных и зарубежных ученых-физиков. Почти все очерки сопровождаются фотографиями. Исторический диапазон книги — от Аристотеля до наших дней.

2. Л. Д. Ландау, А. И. Китайгородский. *Физика для всех. Физические тела.* Издание 5-е, исправл. (I кв.) Цена 40 к.

Л. Д. Ландау, А. И. Китайгородский. *Физика для всех. Молекулы.* Издание 5-е, исправл. (II кв.) Цена 40 к.

А. И. Китайгородский. *Физика для всех. Электроны.* Издание 2-е, перераб. (III кв.) Цена 40 к.

А. И. Китайгородский. *Физика для всех. Фотоны и ядра.* Издание 2-е, перераб. (IV кв.) Цена 40 к.

Основное внимание в книгах уделено фундаментальным законам и понятиям физики, а также новейшим достижениям современной физики. Книги написаны занимательно и живо, однако они требуют от читателя внимательного, вдумчивого подхода.

Первая из четырех книг («Физические тела») посвящена основным законам движения; детально изложены закон всемирного тяготения и его применение для расчетов космических скоростей и различных геофизических явлений.

Вторая книга («Молекулы») рассказывает о строении вещества и различных фазовых состояниях вещества, знакомит читателя с основными законами термодинамики.

В третьей книге («Электроны») излагаются законы квантовой физики. Большое внимание уделено современным представлениям о диэлектриках и магнетиках.

Содержание четвертой, заключительной, книги («Фотоны и ядра») составляют основные сведения об электромагнитных волнах, проблемы теплового излучения, учение о спектрах. Отдельные разделы посвящены специальной теории относительности и волновой механике.

3. Я. И. Перельман. *Занимательная физика.* В 2-х книгах.

Книга 1. Издание 21-е, исправл. (III кв.) Цена 40 к.

Книга 2. Издание 21-е, исправл. (IV кв.) Цена 45 к.

Написанная известным популяризатором и педагогом более полувека назад, книга с интересом читается современным читателем. Автор, обращаясь к кругу явлений повседневной жизни, к области техники, к страницам научно-фантастических романов, старается научить читателя видеть суть явления, мыслить физически. Книги содержат множество интересных задач, парадоксов, физических головоломок.

4. Л. М. Блинов, С. А. Пикин. *Жидкие кристаллы.* (III кв.) (Библиотечка «Квант») Цена 35 к.

В книге известных специалистов — экспериментатора и теоретика — рассказывается о мире жидких кристаллов.

Книга познакомит читателя с электрооптическим эффектом в нематиках. На этом эффекте основана работа электронных циферблатов. Холестерические жидкие кристаллы заинтересуют тех, кто хочет узнать о тонкопленочных тепловизорах. О лазерном пере и плоском телевизоре читатель прочтет в главе о смектиках. Структура жидких кристаллов — растворов имеет огромное значение для жизнедеятельности организма — для циркуляции крови, переноса ею кислорода, функционирования клеток мозга, для работы различных клеточных мембран.

5. А. А. Боровой. *Как регистрируют частицы.* (I кв.) (Библиотечка «Квант») Цена 30 к.

Эта книга — рассказ об интересных и порой драматических поисках элементарных частиц. Невозможно представить себе обнаружение и изучение элементарных частиц без специальных приборов — детекторов. Многообразие детекторов вызвано различием в свойствах частиц, в интенсивности их взаимодействия с веществом. Поэтому значительное внимание в книге уделено этим процессам, фундаментальным законам и понятиям физики.

В основу книги положены лекции, которые автор читал школьникам старших классов в Школе естественных наук при Институте атомной энергии им. И. В. Курчатова.

6. Л. В. Тарасов, А. Н. Тарасова. *Беседы о преломлении света.* (I кв.) (Библиотечка «Квант») Цена 30 к.

Интересно и увлекательно авторы рассказывают о хорошо всем знакомом явлении преломления света. Читатель узнает, чем объясняются миражи в пустыне и на море, радуги, гало, ложные солнца. В книге популярно излагаются элементы кристаллооптики и волоконной оптики. Авторы рассказывают о целенаправленном изменении показателя преломления, управлении им при помощи электрического поля, звуковых волн. Рассматриваемые в книге вопросы сопровождаются интересными задачами.

7. А. Л. Эфрос. *Геометрия беспорядка.* (III кв.) (Библиотечка «Квант») Цена 35 к.

Эта книга о новой математической дисциплине — теории протекания. Она объясняет проникновение жидкости на большие расстояния в пористые тела, разрушение горных пород (образование микротрещин), аномальные свойства переохлажденной воды, электропроводность сильно неоднородных систем; на основе теории протекания строятся различные модели перехода металл—диэлектрик и т. д.

А. Егоров, И. Клумова

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку — мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

ЭВМ анализирует эндшпиль

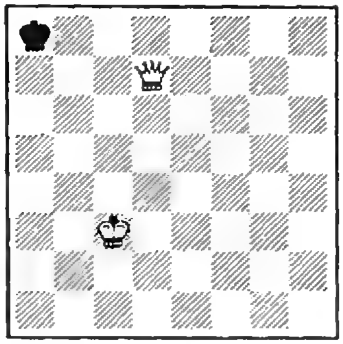
В статье «ЭВМ за шахматной доской» («Квант», 1981, № 1) рассказывалось о современных методах шахматного программирования, основанных на переборе вариантов. В эндшпиле человек может рассчитать очень длинные варианты, к тому же оценка многих получающихся позиций ему хорошо известна из опыта или теории. Поэтому в эндшпиле ЭВМ, работающая по обычной программе, уступает человеку в большей степени, чем в середине игры. Однако в отдельных классах малофигурных окончаний машина уже сейчас превосходит человека. Причина этого очень проста — при небольшом числе фигур на доске число возможных позиций хоть и велико, но обозримо. Мощности существующих ЭВМ хватает, чтобы реализовать на них специальные переборные программы анализа отдельных видов эндшпилей. Правда, оказалось, что анализ пятифигурного эндшпиля (считая королей) находится на пределе возможностей современной ЭВМ.

Впервые этим методом, по-видимому, была решена старая и довольно экзотическая «задача о неприкосновенном короле», о которой уже рассказывалось в «Кванте» десять лет назад («Квант», 1971, № 12, с. 50).

Белый король не имеет права двигаться. Может ли один белый ферзь с помощью своего «неприкосновенного» короля заматовать одинокого короля противника?

Многие шахматисты, в том числе гроссмейстеры, полагали, что заматовать короля нельзя. Математики А. Брудно и И. Ландау привлекли на помощь ЭВМ, которая установила, что мат дается не позднее 23-го хода при любом начальном положении белого ферзя и черного короля, но... только при неприкосновенном короле на поле c3 (ввиду симметрии годятся также поля c6, f3 и f6). Кажется, это первый случай в истории и шахмат, и ЭВМ, когда машина решила шахматную задачу раньше человека. Справедливости ради надо отметить, что если квалифицированному шахматисту сообщают, что мат есть, то он его находит сам.

Пусть белый король прикован к полю c3. Для решения, прежде всего, загоним черного короля на угловое поле a8. С этим заданием ферзь справляется легко, занимая при этом поле d7.

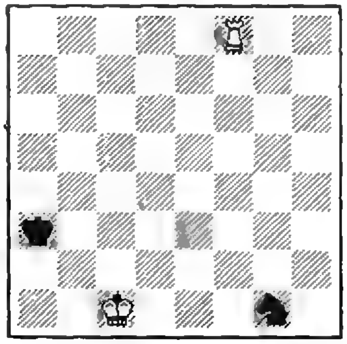


Если теперь ход черных, то после **1...Крb8 2. Фc6!** белые матуют в 10 ходов: **2...Крa7 3. Фc8! Крb6 4. Фd7! Крc5** (4...Крa5 5. Фb7 и 4... Крa6 5. Фc7 Крb5 6. Фd6 приводит к основному варианту) **5. Фe6 Крb5 6. Фd6 Крa5 7. Фb4+Крa6 8. Фb8 Крa5 9. Фb7 Крa4 10. Фa6×**

Если же ход белых, то они должны передать очередь хода противнику. Это достигается «методом треугольника»: **1. Фd5+Крa7** (1...Крb8 2. Фc6!) **2. Фb5 Крa8 3. Фd7** и цель достигнута.

Конечно, этот пример — скорее головоломка, чем настоящая шахматная задача. Но с помощью ЭВМ были получены и более серьезные результаты. О них речь пойдет в сегодняшнем шахматном конкурсе, а мы кончим одним шахматным примером, хорошо иллюстрирующим возможности ЭВМ.

Из четырехфигурных эндшпилей наиболее интересным является «ладья против коня».



Ход черных.
Белые выигрывают.

Задача белых проста — поймать коня, а потом уже без помех матовать черного короля. ЭВМ обнаружила, что в этой позиции при лучшей игре белых и точной защите черных конь ловится только на 27-м ходу, причем ошибка белых может вообще упустить выигрыш.

Приведем основной вариант решения. **1...Кe2+2. Крd2** (2. Крc2 уже упускает выигрыш) **2...Кd4 3. Крc3** (ошибочно было бы 3. Крd3. Впрочем, белым придется сделать еще много единственных ходов. Трудно предположить, чтобы все их сумел бы найти шахматист во время партии!) **3...Кb5+4. Крc4 Кd6+5. Крc5 Кb7+6. Крb6 Кd6 7. Лf4!** (ладья ходит реже, чем король, но ее перемещения более тонкие) **7...Крb3 8. Крc5 Кb7+ 9. Крc6 Кd8+ 10. Крb5 Кe6 11. Лf3+ Крc2 12. Крc4 Крd2 13. Лf5 Крc2 14. Лf2+ Крd1 15. Крd3 Кc5+ 16. Крd4 Кb3+ 17. Крc3 Кре+ 18. Лb2! Кc5 19. Крd4 Кe6+ 20. Крe3 Крd1 21. Лb6 Кg5** (после 21...Кc5 22. Крd4 Кd7 23. Лd6 конь ловится быстрее) **22. Лc6! Кf7 23. Лc7 Кe5 24. Крe4! Кg4 25. Лg7! Кf6+26. Крe5 Кh5 27. Лg5** и конь пойман.

Игры с квадратичными функциями

1. а) Да, (0,5; 2/3), $m_1=8$; б) (0,4; 0,8), $m_2\approx7{,}6$.
2. а) (1; 2), $v^*=0$; б) $((a-b)/2;\ (a+b)/2)$, 0; в) (5; −1), 0,09; г) $(al;\ bl)$, $(\sqrt{a}-\sqrt{b})\times\times\sqrt{k^2+1}$, где $l=\frac{k^2}{1+k^2}$; е) (0; 0), 0.
3. а) Есть; б), в) нет.
5. $v=Rxy+Kx+Ly+d$, $R=a-b-c+d$, $K=b-d$, $L=c-d$; а) (0,5; 0,5), $v^*=0$; б) $x^*=\frac{1}{c+1}=1-y^*$, $v^*=c+x^*$; в) нет; $v^*=-\frac{(b-c)^2}{8(b+c)}<0$; $x^*=3/8=1-y^*$, $v^*=-1{,}25$ при $b=30=3c$; г) $x^*=1$, $y^*=0$, $v^*=b=4$.

Освещение плоскости прожекторами

1. Доказательство утверждения. 1. Без ограничения общности можно считать, что на каждой стороне данного угла A расположен хотя бы один прожектор.

Пусть $\alpha<\pi$. Доказательство проведем индукцией по k.

При $k=1$ утверждение очевидно, и пусть оно верно для любого $j<k$. Докажем его для $j=k$. Разобьем угол A и симметричный ему относительно вершины угол на k углов по $\frac{2\pi}{n}$ каждый — эти мелкие углы назовем для удобства «секторами». Обозначим число прожекторов в i-м секторе через s_i $(i=1, 2,\ldots, k)$. Все числа s_i — целые неотрицательные, $s_1\geqslant1$, $s_k\geqslant1$ и $s_1+s_2+\ldots+s_k=k$.

Возьмем первые m секторов, где m выбрано согласно лемме. Их объединение — угол, внутри которого находятся m прожекторов. Они, по предположению индукции, могут осветить симметричный ему угол, а оставшиеся $k-m$ прожекторов могут осветить оставшийся угол. Следовательно, весь симметричный углу A угол будет полностью освещен.

Пусть теперь $\alpha=\pi$ и все прожекторы находятся в верхней полуплоскости. Без ограничения общности можно считать, что на границе полуплоскости расположен прожектор A (A — вершина угла в 180°). Если в первом секторе нет прожекторов, отнесем прожектор A ко второму сектору, сведя задачу к случаю $\alpha<\pi$. Если есть прожекторы, то прожектор A отнесем к сектору k. Тогда в первом и k-м секторах числа прожекторов $s_1\geqslant1$ и $s_k\geqslant1$, и выполнено равенство $s_1+s_2+\ldots+s_k=k$, то есть выполнены условия упражнения 2. Дальше рассуждаем аналогично предыдущему.

Доказательство леммы.
Если $s_1=1$, то $m=1$ — в противном случае $s_1>1$. Если, далее, $s_1+s_2=2$ и $s_1>1$, то $s_2=0$ и тогда $m=2$ — иначе $s_1+s_2>2$. И так далее: если на l-м шаге возникает равенство $s_1+\ldots+s_m=l$, то $m=l$ и $s_m=0$, если же это равенство не возникло, то $s_l>0$. Однако, если равенство не возникло ни при одном $l<k$, то оно обязано возникнуть (по условию) на k-м шаге, то есть при $m=k$, и тогда $s_k=0$, что противоречит условию $s_k\geqslant1$. Значит, равенство возникло раньше, и $m<k$.

2. Если в точку M_1 перенести все прожекторы, то вся плоскость будет освещена. Поэтому какой-то прожектор осветит точку N.

Закон Дальтона

1. $\alpha=\frac{\rho\mu V}{mRT}-1\approx0{,}12=12\%$.

2. $\frac{m_т}{m_в}=\frac{\mu_т}{2\mu_в}=1$.

3. $\frac{m_{сух}}{m_{вл}}=\frac{1}{1-\left(1-\frac{\mu_{\text{вод.пар}}}{\mu_{\text{возд}}}\right)\frac{p_0\varphi/100\%}{p}}\approx1{,}004$.

Задачи наших читателей
(см. с. 10)

1. Из законов сохранения импульса и энергии получаем

$$\frac{v_n}{v_1}=\left(\frac{2k}{k+1}\right)^{n-1}\ \text{и}\ \text{КПД}=\left(\frac{4k}{(k+1)^2}\right)^{n-1}$$

Отсюда видно, что при фиксированном n отношение v_n/v_1 с ростом k растет сначала быстро, а потом достигает насыщения, КПД же уменьшается без насыщения. Поэтому существует оптимальное значение k для всякого n, а значит — и для всякого отношения v_n/v_1.

2. При освещении термометра солнечными лучами окрашенный столбик спирта заметно нагревается, тогда как прозрачная пустая часть трубки термометра остается относительно холодной. Это приводит к перегонке спирта из нагретого столбика в «охлажденную» верхнюю часть трубки. Для восстановления термометра нужно создать противоположные условия — верхнюю часть термометра поместить над нагревателем. Нагревшись, спиртовой конденсат испарится и затем сконденсируется на сравнительно холодном окрашенном столбике спирта — термометр полностью восстановится.

3. Пусть в одной из комнат находится источник звука. Ясно, что через дырку в перегородке в соседнюю комнату будет проникать часть звуковой мощности, падающей на перегородку, равная отношению площади дырки к площади перегородки, то есть $S_д/S_п$. Если же обивка не идеальная (пропускает сотую часть звуковой мощности), то в соседнюю комнату звук проходит не только через дырку, но и через саму перегородку тоже. Таким образом, отношение звуковых мощностей, проникающих в соседнюю комнату во втором и в первом случаях, равно

$$k=\frac{S_д/S_п+0{,}01}{S_д/S_п}=1+\frac{10^{-2}}{4\cdot10^{-4}/4}=101.$$

Итак, пусть лучше в перегородке будет дырка, чем если перегородка будет сплошной, но тонкой.

Веселая мозаика Сэма Лойда

(см. «Квант» № 9)

Какого числа мне дали книжку?

Головоломка основана на двух следующих свойствах календаря:

I. Ежегодно ровно три месяца начинаются с одного и того же дня недели: в високосном году — январь, апрель и июль, в невисокосном — февраль, март и ноябрь; в частности, 1/I, 1/IV и 1/VII—80 г. — вторники, 1/II, 1/III и 1/XI—81 г. — воскресенья, а остальные дни недели оказываются первыми числами не чаще двух раз в году.

II. Каждое число, кроме 31-го, бывает в течение года любым из семи дней недели; 31-е число ежегодно выпадает на шесть дней недели, а на какой-нибудь один из дней недели ни разу за весь год не выпадает (эта особенность 31-го числа связана с тем, что из семи месяцев года, насчитывающих 31 день, два месяца заканчиваются в один и тот же день недели: в високосном году на один день недели приходится 31/I и 31/VII, в невисокосном — 31/I и 31/X); в частности, в 1980 г. 31-е число ни в одном месяце не было вторником, а в 1981 г. не бывает средой (и — сравните с I, это важно для дальнейшего — бывает воскресеньем).

Чтобы убедиться в справедливости свойств I, II, очевидно, достаточно проверить их для одного високосного и одного невисокосного года (например, для 1980 г. и для 1981 г.).

Какого же числа мне дали книжку? По условию оно ни разу в году не выпадает на какой-то день недели. Значит, по свойству II, это — 31-е число.

Книжку мне дали наверняка после того, как она была напечатана, но заведомо до выхода в свет этого номера «Кванта», то есть либо в 1980 г., либо в 1981 г. В каком именно? По условию, три месяца в нем (включая тот, когда я стал писать заметку) начинаются с такого дня недели, на который не выпадает 31-е число. Согласно I и II, это — 1980 г. (а упомянутые три месяца — январь, апрель и июль).

Остается некоторая неопределенность (скажем, я мог получить книжку 31/III и приступить к сочинению заметки в апреле или взять книжку 31/V, а заметку начал писать в июле и т. п.). Устранить неопределенность помогают сведения про «завтра» и «позавчера».

Назовем *сегодняшним* день, когда я начал писать заметку, и будем двигаться от него назад — в прошлое: *вчера, позавчера, «позапозавчера»*. Это самое «позапозавчера» и есть тот день, для которого «позавчера было завтра». Это «позапозавчера» 31-е число; значит, позавчера — 1-е, вчера — 2-е, сегодня — 3-е. Итак, сегодня — либо 3/I, либо 3/IV, либо 3/VII—80 г. «Позапозавчера» для этих трех дней — 31/XII—79 г., 31/III—80 г. и 30/VI—80 г. соответственно. Первое из них относится не к 1980 г., третье — не 31-е число. Итак, друзья дали мне книжку Лойда 31/III—80 г. Стотысячный тираж «Математической мозаики» разошелся быстрее, чем за месяц.

Пони и белая лошадь

Пони нужно скопировать на черную бумагу, разрезать силуэт на 6 частей и эти 6 черных кусочков положить на лист белой бумаги, как показано на рисунке 1,— внутри получится маленькая белая лошадь. Именно этот трюк сделал популярным выражение: «О, но это же лошадь другой масти!».

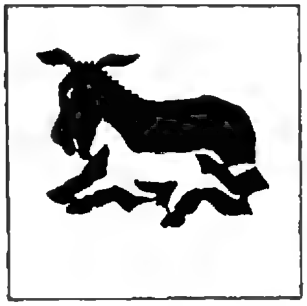


Рис. 1

Корова, коза и гусь

Через 45 дней после того, как корова и коза будут выпущены на пастбище, травы на нем не останется — ни той, что была до начала пиршества (обозначим ее количество через T), ни той, что вырастет за 45 дней:

$$45(x+y)=T+45t,$$
$$45(x+y-t)=T.$$

Аналогично,

$$60(x+z-t)=90(y+z-t)=T.$$

Итак,

$$3(x+y-t)=4(x+z-t)=$$
$$=6(y+z-t)=\frac{T}{15}.$$

Так как $x=y+z$,

$$3(2y+z-t)=4(y+2z-t)=$$
$$=6(y+z-t)=\frac{T}{15},$$

откуда $z=t$, $y=2t$, $x=3t$, $T=180t$.

Итак, один из вопросов выяснен: трава росла на пастбище до начала пиршества 180 дней. Если выпустить на пастбище всех троих — корову, козу и гуся, то корова и коза съедят первоначальный запас травы за 36 дней, а гусь позаботится об уничтожении ее прироста:

$$36(x+y+z-t)=36(x+y)=36\cdot 5t=180t.$$

Последний вопрос: как определить высоту посоха на рисунке 2?

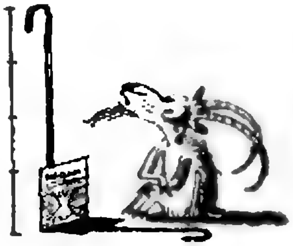


Рис. 2

Обратимся вслед за Лойдом к следующему отрывку из «Белого отряда» Конан-Дойля («Математическая мозаика», с. 311):

«Седой лучник взял у своих товарищей несколько кусков веревки и, связав их вместе, вытянул вдоль длинной тени, которую в лучах восходящего солнца отбрасывала хмурая баш-

ия. Затем он поставил вертикально древко своего лука и измерил длинную темную линию, потянувшуюся от него по земле.
— Древко в 5 футов отбрасывает 12-футовую тень,— пробормотал он.— А башня отбрасывает тень в 60 футов; значит, веревки в 30 футов будет достаточно.»
В этом весь секрет: все тени на рисунке 2 находятся в одинаковом отношении к высоте предметов, которые их отбрасывают. Так как «Квант» по высоте равен примерно 25 см, посох был небольшим: его высота примерно равна 4×25 см = 1 м.

Задача Колумба

Первое яйцо нужно поместить точно в центр салфетки, а потом — после каждого хода партнера — делать «центральносимметричный» ход (цифры на рисунке 3, а обозначают номер хода, помогая понять начало партии). Просто положив первое яйцо в центр салфетки, вы рискуете проиграть, ибо противник может положить свое яйцо непосредственно рядом с вашим, и из-за неправильной формы яйца вы не сумеете точно «отсимметризовать» его ход. Чтобы выиграть наверняка, надо, подобно Колумбу, надбить яйцо и поставить его вертикально.

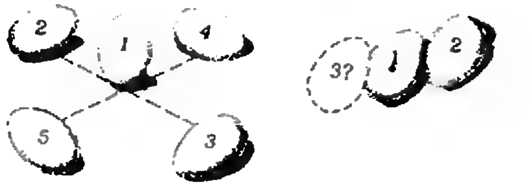


Рис. 3

Монастырская задача

Парадоксальные условия задачи на первый взгляд выполнить невозможно (особенно если решать ее подбором). Призовем однако на помощь элементарную алгебру. Изобразим схематически (табл. 1) жилые этажи: буквой A отметим угловые кельи, буквой B — средние кельи, выходящие на запад и на восток, буквой C — средние кельи с окнами на север и на юг. Пусть на верхнем этаже монахинь $2n$, на нижнем n, а всего $3n$. В 6 кельях на южной стороне живут 11 монахинь, в 6 кельях, выходящих на север,— тоже 11, вместе — 22. Значит, в 4 кельях B живут $3n - 22$ монахин. Столько же их и в 4 кельях C. Значит, в 8 кельях A живут $3n - 2(3n - 22) = 44 - 3n$ монахинь. Так как каждая келья занята, то

$$3n - 22 > 4,$$
$$44 - 3n > 8,$$

откуда $26 < 3n < 36$ и, значит, поскольку n — целое,

$$9 < n < 12,$$
$$27 < 3n < 36.$$

Итак, вначале было не больше, чем 36, а в конце осталось не меньше, чем 27 монахинь. Если исчезли 9 монахинь, то было именно 36, а осталось ровно 27 монахинь.

A	C	A
B		B
A	C	A

A	C	A
B		B
A	C	A

Табл. 1

1	5	1
5		5
1	5	1

1	2	1
2		1
1	1	2

$n = 12$

2	4	1
4		4
1	4	2

1	2	1
2		1
1	1	2

$n = 11$

2	4	1
4		2
1	2	4

2	1	1
1		1
1	1	2

$n = 10$

4	1	3
1		2
3	2	2

1	1	1
1		1
1	1	2

$n = 9$

Табл. 2

1	4	1
4		6
1	6	1

1	3	1
3		1
1	1	1

$n = 12$

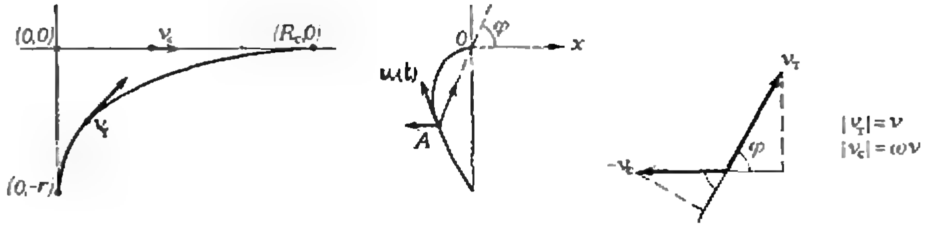
4	2	2
1		1
3	1	4

1	1	1
1		2
1	1	1

$n = 9$

Табл. 3

При этом для любого n от 9 до 12 действительно можно расселить на двух этажах $3n$ монахинь с соблюдением всех требований настоятельницы (табл. 2), так что задача разрешима даже при дополнительном условии, чтобы монахини исчезали по трое три раза. Расселиться по кельям и 36, и 27 монахинь могут и по-иному, чем в таблице 2,— например, так, как показано в таблице 3.
Таким образом, вопрос о числе монахинь решается однозначно, в то время как в их размещении по кельям имеется некоторая неопределенность, видимо не замеченная Лойдом.



а) б) в)

Рис. 4.

Том, сын трубача

Пусть (рис. 4, а) Том бежит со скоростью v_T по линии погони из точки (0; $-r$), а свинья — со скоростью v_c по оси абсцисс из точки (0; 0). Скорости постоянны по величине. Том бежит быстрее свиньи: $|v_T|=v$, $|v_c|=\omega v$, $\omega<1$.

Докажем, что за конечное время τ Том догонит свинью и что расстояние $R_T=v\tau$, которое он при этом пробежит, выражается через r и ω по формуле

$$R_T=\frac{r}{1-\omega^2}.$$

Чтобы найти скорость сближения Тома и свиньи, перейдем в систему отсчета, где свинья неподвижна и находится в начале координат O, новая ось абсцисс OX параллельна старой и направлена вправо (рис. 4, б). Пусть в момент t Том находится в точке $A=A(t)$. Найдем его скорость $u(t)$ в новой системе: отложим из точки A вектор длины v в направлении AO и вектор длины ωv влево; тогда $u(t)$ — сумма этих векторов (иначе говоря, $u(t)=v_T-v_c$; отметим, что направления u и $|u|$ зависят от t). Найдем скорость $u_{AO}(t)$, с которой уменьшается расстояние AO (скорость сближения Тома и свиньи), и скорость $u_{OX}(t)$, с которой Том перемещается вдоль оси OX. Для этого спроектируем вектор $u(t)$ на направления AO и OX. Проекции вычисляются просто, так как $u(t)$ является разностью векторов v_T и v_c, имеющих именно эти направления. Обозначая через $\varphi(t)$ угол между AO и OX и проектируя v_T и v_c на OX и AO, получаем (рис. 4, в)

$$u_{OX}(t)=v\cdot\cos\varphi(t)-\omega v, \qquad (1)$$

$$u_{AO}(t)=v-\omega v\cdot\cos\varphi(t). \qquad (2)$$

Так как $u_{AO}(t)\geqslant v(1-\omega)$ и так как начальное расстояние между Томом и свиньей равно r, время погони

$$\tau<\frac{r}{v(1-\omega)}.$$

Поскольку Том начинает и заканчивает погоню в точках, где $X=0$, получаем

$$\int_0^\tau u_{OX}(t)\,dt=0,$$

то есть, согласно (1),

$$\int_0^\tau v\cdot\cos\varphi(t)\,dt=\omega v\tau=\omega R_T. \qquad (3)$$

Согласно (2),

$$r=\int_0^\tau u_{AO}(t)\,dt=v\tau-\omega\int_0^\tau v\cdot\cos\varphi(t)\,dt,$$

так что, с учетом (3),

$$r=R_T(1-\omega^2),$$

или

$$R_T=\frac{r}{1-\omega^2}$$ *).

Вспоминая соотношения $R_1=\frac{r}{1-\omega}$, $R_2=\frac{r}{1+\omega}$, $R_c=\omega R_T$ (здесь R_1 и R_2 — расстояния, которые пробежал бы Том, если бы гнался за свиньей не из точки (0; $-r$), а из точек ($-r$; 0) и (r; 0) соответственно), находим

$$R_T=\frac{1}{2}(R_1+R_2),$$

$$R_c=\frac{1}{2}(R_1-R_2).$$

Тем же методом получается и более общая формула: если Том по-прежнему преследует свинью по линии погони и свинья снова бежит по оси абсцисс из точки (0; 0), а Том в начальный момент находится в точке $(x_0; y_0)$, где $x_0=r\cdot\cos\Theta$, $y_0=r\cdot\sin\Theta$, то расстояние, которое пробежит Том, догоняя свинью, равно

$$R=\frac{1}{2}\,[R_1(1-\cos\Theta)+R_2(1+\cos\Theta)];$$

R_1, R_2 и R_T получаются по этой формуле при $\Theta=\pi$, $\Theta=0$ и $\Theta=-\frac{\pi}{2}$.

Сколько лет мисс Покахонт?

По условию, 15 детей Смита родились с интервалом в 1 год; значит мисс Покахонт, старший ребенок, на 14 лет старше Капитана Джона, самого младшего из детей. Дано, что Покахонт старше Джона в 8 раз, значит ей 16 лет.

Сколько лет Мэри?

Дедушка упоминает четыре момента времени — назовем их T_1, T_2, T_3 и T_4. За дальнейшими рассуждениями удобно следить по таблице 4. Когда-то (в момент T_1) Мэри была втрое старше Энн (им было тогда $3x$ и x лет соответственно, так что Энн моложе Мэри на $2x$ лет). В момент T_4 Энн станет втрое старше, чем была Мэри в момент T_1; значит,

---

*) Мы воспроизвели с небольшими изменениями доказательство из статьи С. Ащеулова и В. Барышева «Погоня, столкновение, поимка» («Квант», 1979, № 1, с. 24).

	T_1	T_2	T_3	T_4
Мэри	$3x$	$4{,}5x$	$5x$	
Энн	x	$2{,}5x$	$3x$	$9x$

Табл. 4

в момент T_4 Энн будет $9x$ лет. В момент T_2 Мэри была вдвое моложе, чем будет Энн в момент T_4, то есть в момент T_2 Мэри было $4{,}5x$ лет, а Энн (она на $2x$ лет моложе Мэри) было $2{,}5x$ лет. Сейчас (в момент T_3) Мэри вдвое старше, чем была Энн в момент T_2; значит, сейчас Мэри $5x$ лет, а Энн $3x$ лет. Поскольку $5x+3x=42$, $x=5\frac{1}{4}$, $5x=26\frac{1}{4}$. Итак, Мэри 26 лет и 3 месяца.

Великолепная Лу Диллон, альбомы и карандаш

Удивительно, но некоторые говорят, что 2 альбома дороже карандаша на 94 копейки. Сколько же тогда стоит альбом? И сколько карандаш? Задачу, разумеется, решить невозможно: два неизвестных связаны одним линейным уравнением.

Не менее удивительно, что кому-то удалось решить задачу про Лу Диллон, где для определения четырех неизвестных t_i (t_i — времена, которые тратила Лу на следующие друг за другом четверти мили, $i=1, 2, 3, 4$) имеется лишь 3 линейных уравнения.

Шифровка

ИСПРАВЬТЕ СТАРЫЕ ОШИБКИ И ОПЕЧАТКИ И НЕ ДЕЛАЙТЕ НОВЫХ!

Шифр очень простой: сначала пишем полслова, оставляя промежутки между буквами **(И С П Р А)**, а затем заполняем промежутки остальными буквами **(ИВСЬПТРСА)**. Мораль тоже простая: хочется, чтобы Лойда «читали, а не почитали».

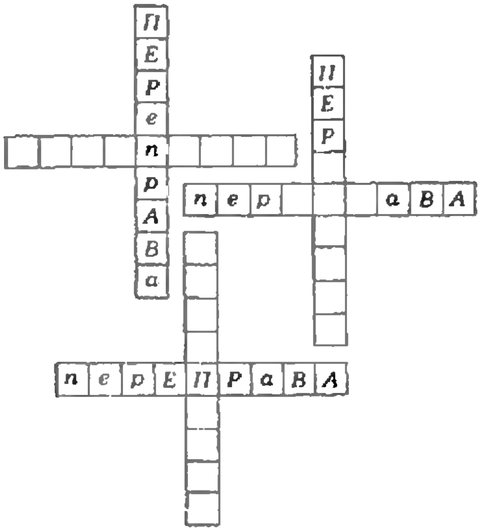


Рис. 5.

Колоколоколокола

Переправа. За манипуляциями с кубиками удобнее следить, если два «*П*», два «*Р*», два «*Е*» и два «*А*» обозначать по-разному: *Пп, Рр, Ее, Аа* (рис. 5). После «переправы» кубики в каждой из этих четырех пар меняются между собой местами.

Апельсин. *Апельсин* чудесным образом превращается в собаку: в горизонтальном желобе получается слово *спаниель*.

Один остроумный человек, долго мучившийся с этой головоломкой, сказал потом, что «решая ее, он ПАСИНЕЛЬ».

Колоколоколокола. Что же касается *колокола* и *кола*, то ловушка была в том, что просветы между словами можно вставить двумя способами. Правильный выбор фразы и желоба такой: сначала поставьте колокол около *кола* (правая вертикаль), потом положите *кол* около *колокола* (горизонталь) и, наконец, поставьте *кол* около *колокола* (левая вертикаль).

Числовые ребусы

(см. «Квант» № 9, с. 49)

1. а) окружность = 6871956432, г = 0;
   б) окружность = 1834071596, г − 2.

2. I.

```
 _23604 | 162
  162   |-----
  ----  | 162
  _940
   910
   ----
   _304
    304
    ----
```

II.

```
 _40146Y9Y | 325
  325      |------
  ---      | 13012X
  _984
   973
   ----
   _116Y
    1098
    ----
     _939
      64X
      ---
     _2XYY
      2802
      ----
       2Y9
```

III.

```
 _816230 | 9X6
  74X6   |----
  ----   | 9X6
  _8783
   8290
   ----
   _4Y30
    4Y30
    ----
```

IV.

```
 _315201 | 615
  3086   |----
  ----   | 615
   _880
    615
    ---
  _2671
   2671
   ----
```

«Шахматный конкурс»

(см. «Квант» № 9)

I (Карпов — Корчной, матч претендентов, 1974 г.). Белые эффектно заканчивают поединок. **24.e5!** (перерезая пятую горизонталь) **24...С: d5** (после 24...de 25 К:f6+ ef 26. Kh5 мат неизбежен) **25.ef ef 26.Ф:h7+ Kpf8 27.Фh8+. Черные сдались** (27...Кре7 28. К:d5+ Ф:d5 29.Лe1+).

2 (Карпов — Чом, 1977 г.). У черных лишняя фигура, к тому же под боем белая ладья. Однако после **1.Кf5!** венгерскому шахматисту пришлось немедленно сложить оружие; грозит 2.Лh7+ и 3.Фg7×; к мату приводит и 1...К:d7 2.Фh2+ Крg8 3.Фg3+ и 4.Фg7×.

3(Карпов — Остос, 1980 г.). **43. Кf8+! Крg8** (коня бить нельзя из-за мата) **44.К:e6 Фe8 45.К:g7! Черные сдались.** Это была первая победа советских шахматистов на Шахматной олимпиаде на Мальте.

4(Карпов — Рашковский, 1973 г.). Здесь эффектно выигрывает 23.С:f5!, и слона нечем брать: 23...С:f5 24.Л:b7 с выигрышем ферзя, или 23...gf 24. Лg3+ Крf8 25. Фh8+ Крe7. 26.Лe1+. (Однако в партии белые сыграли 23.Кf3 и реализовали свой перевес только через ...30 ходов. Красивый комбинационный удар остался за кулисами.)

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 10)

1. ДВА×ШЕСТЬ меньше, а ДВАДЦАТЬ больше, чем ДВА×100 000.

2. а) Нельзя. Если бы это можно было сделать, то сумма всех десяти сумм не превосходила бы 130, но сумма всех цифр равна 45, а в нашу «сумму сумм» каждая цифра входит три раза. б) Нельзя. Действительно, цифры 9 и 6, 9 и 7, 9 и 8 не могут быть в одной тройке. Поэтому среди ближайших четырех соседей девятки (двух — с одной, и двух — с другой стороны) нет цифр 6, 7, 8. Значит, среди них есть 4 или 5 (поскольку цифры 8, 7, 6, 5, 4 не могут идти подряд), так что среди них есть также 0 или 1. Но тогда невозможно расставить цифры 8, 6 и 7 (убедитесь в этом!).

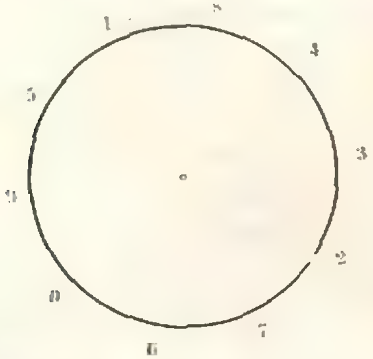


Рис. 6.

в) Можно (см. рисунок 6).

3. Можно. Нужно последовательно ходить на свободный кружочек с кружочков с номерами 5, 7, 6, 4, 2, 5, 4, 8, 6, 9, 7, 5, 3, 6, 11, 10, 7, 5, 4, 1, 6, 11, 8, 4, 6.

4. Можно. Одно из возможных решений: 10 → 2; 12 → 10; 14 → 6; 2 → 10; 16 → 14; 8 → 6; 5 → 7; 13 → 5; 14 → 6; 3 → 11; 5 → 7; 11 → 3; 4 → 2; 1 → 3.

5. Такого числа нет, поскольку 528 делится на 11.

Задачи наших читателей

(см. «Квант» № 10, с. 50)

1. $|BC| = |\vec{a}|\tau^2/2$.

2. Воздух над батареей действительно теплее, чем над подоконником. Однако этот воздух не нагревает, а скорее охлаждает стакан с закипающей водой, поскольку температура воздуха ближе к комнатной, нежели к температуре кипения воды. Теплый воздух (около батареи) движется быстрее, чем холодный (около подоконника), и отнимает у горячего стакана больше тепла (получается вынужденное охлаждение теплым воздухом).

3. $m = N/(gc)$ (здесь g — ускорение свободного падения, c — скорость света).

Двадцатое — лишнее

(см. «Квант» № 10, 2 с. обложки)

См. рисунок 7. Лишнее число — 10.

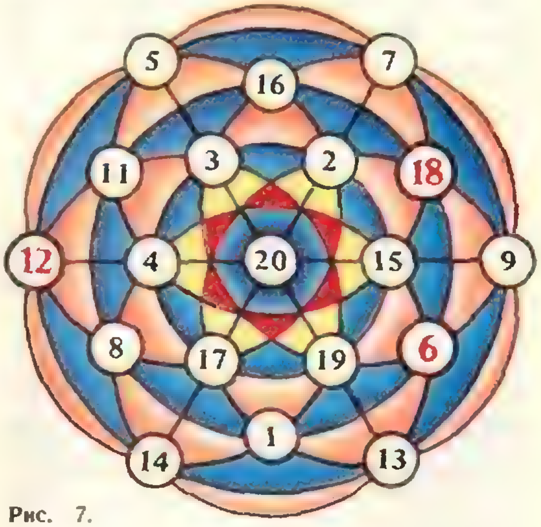


Рис. 7.

Номер подготовили:
А. Виленкин, А. Егоров, И. Клумова, Т. Петрова,
А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
Г. Красиков, Н. Кузьмина, Э. Назаров,
А. Пономарева, А. Прокофьев

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Н. Дорохова

113035, Москва, Б. Ордынка 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 22.9.81
Подписано в печать 29.10.81
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 7,28 Т-27744
Цена 30 коп. Заказ 2289
Тираж 232 544 экз.

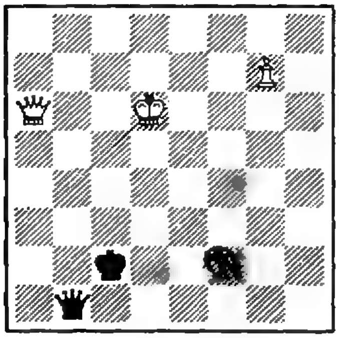
Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

ШАХМАТНЫЙ КОНКУРС

ЭВМ И ШАХМАТНЫЙ КОДЕКС

Когда математики (создатели «Каиссы») научили ЭВМ исследовать эндшпиль, они проанализировали некоторые известные позиции. И вот что при этом выяснилось.

Одним из самых сложных окончаний является «ферзь с коневой пешкой против ферзя». Машина исследовала позиции с белой пешкой на седьмой горизонтали и теперь про каждую из них может точно сказать, выигрывают в ней белые или нет, и если выигрывают, то за сколько ходов. Вот одна из двух позиций, заслуживающих особого внимания.



Ход черных. Белые выигрывают

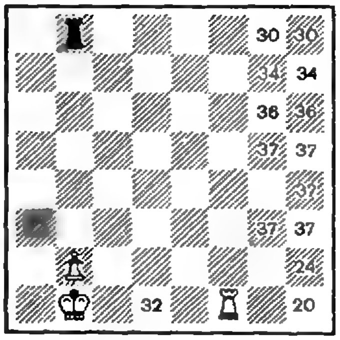
У белых здесь действительно выигрыш, но... в шахматном кодексе есть следующее правило: партия заканчивается вничью, если обеими сторонами сделано по 50 ходов, в течение которых ни одна фигура не была взята и ни одна пешка не сделала хода. К этому пункту в последнем издании кодекса имеется следующее толкование: «Для позиций «король и два коня против короля и пешки» число в 50 ходов увеличивается до 75 ходов. Оно может быть увеличено для других конкретных позиций только при условии, что это число и эти позиции будут точно указаны в положении о турнире или матче».

В приведенной позиции при наилучшей игре обеих сторон 58 ходов идет маневрирование и лишь на 59-м — взятие или превращение пешки.

Итак, позиции, обнаруженные ЭВМ, показывают, что число в 50 ходов должно быть увеличено в кодексе и для эндшпиля «король, ферзь и пешка против короля и ферзя». Можно сказать, что это первый случай в истории, когда ЭВМ вмешивается в шахматный кодекс! (Эндшпиль «король и два коня против короля и пешки» был исследован много лет назад и без помощи ЭВМ).

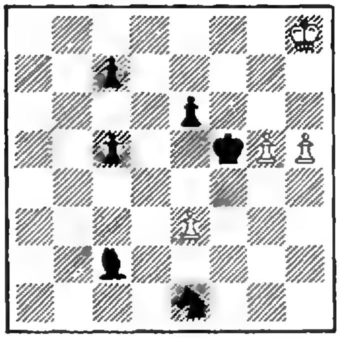
На практике значительно чаще ферзевых окончаний встречаются ладейные. Один из распространенных видов таких окончаний — «ладья с пешкой против ладьи» — также было поручено исследовать ЭВМ. Затратив 60 часов машинного времени, она блестяще справилась со своей задачей и теперь может оценить любую позицию такого типа, независимо от положения пешки. При этом машина установила много любопытных фактов. Например, она обнаружила позицию, которая выигрывается не ранее 60-го хода: белые — Крс3, Лс4, пb2; черные — Кре4, Л d1 (ход черных). Кстати говоря, пешку здесь удается сдвинуть с места только на 32-м ходу после длительного и сложного маневрирования.

Для быстрой оценки возникающих эндшпильных позиций полезно иметь схему ничейной и выигрышной зон расположения какой-нибудь одной фигуры при фиксированном расположении остальных фигур. Здесь также помогает ЭВМ.

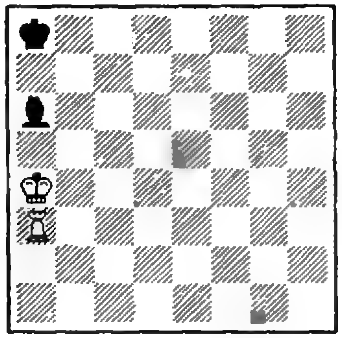


В этой «позиции» ход черных (черный король — может стоять на любом доступном ему поле доски). При одних положениях короля черных белые выигрывают, при других — нет. Результаты анализа, проведенного ЭВМ, показаны прямо на рисунке. Если на поле для короля нет числа, то позиция ничейная; если же на этом поле записано число *n*, то белые выигрывают в *n* ходов. Мы видим, что если черный король отрезан по линии "Г", то единственным спасительным полем для него является g4 (не считая полей, на которых король просто берет белую ладью).

Сегодняшние конкурсные задания позволят вам посоревноваться с ЭВМ. Это настоящие шахматные эндшпили, которые машина успешно проанализировала.



1. Белые начинают и выигрывают.



2. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 31 декабря 1981 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс № 11-81»).

XV Всесоюзная олимпиада школьников по физике
(Ташкент, апрель 1981 г.).
Идет эксперимент.

Цена 30 коп.

Индекс 70465

XV Всесоюзная олимпиада школьников по математике
(Алма-Ата, апрель 1981 г.).

Куратор 8-го класса А. М. Слинько проводит разбор задач со школьниками. ▼

Чье решение лучше? ▼

Может быть, «Квант» поможет? ▼

НОМЕР
12

Квант

12
1981

Основан в 1970 году

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Главный редактор
академик Кикоин И. К.

Первый заместитель
главного редактора
академик Колмогоров А. Н.

Заместители
главного редактора:
Данилычева М. Н
Лешковцев В. А.
Соловьев Ю. П.

Редакционная коллегия:
Асламазов Л. Г.
Башмаков М. И.
Белонучкин В. Е.
Болтянский В. Г.
Боровой А. А.
Брук Ю. М.
Вавилов В. В.
Васильев Н. Б.
Воронин С. И.
Гнеденко Б. В.
Гутенмахер В. Л.
Долбилин Н. П.
Дубровский В. Н.
Земляков А. Н.
Зильберман А. Р.
Климанов А. И.
Козел С. М.
Кротов С. С.
Кудрявцев Л. Д.
Михайлов А. А.
Никишин Е. М.
Новиков С. П.
Потапов М. К.
Разумовский В. Г
Родина Н. А.
Розов Н. Х.
Савин А. П.
Смородинский Я. А.
Сосинский А. Б.
Уроев В. М.
Фабрикант В. А.

Редакционный совет:
Беляев С. Т.
Балдин А. М.
Буховцев Б. Б.
Велихов Е. П.
Верченко И. Я.
Воздвиженский Б. В.
Глушков В. М.
Дорофеев Г. В.
Ермолаева Н. А.
Ершов А. П.
Зубов В. Г.
Иванов Ю. Б.
Канторович Л. В.
Капица П. Л.
Кириллин В. А.
Коткин Г. Л.
Логунов А. А.
Можаев В. В.
Орлов В. А.
Кузьмин Р. Н.
Патрикеева Н. А.
Перышкин А. В.
Сагдеев Р. З.
Соболев С. Л.
Стасенко А. Л.
Сурин И. К.
Сурков Е. Л.
Фаддеев Л. Д.
Фирсов Б. В.
Яковлев Г. Н.

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ

В НОМЕРЕ:

Ученые обращаются к молодежи

2 *Велихов.* Задача все та же — учиться

* * *

4 *А. Черник.* Звездная динамика

11 *Ю. Демков.* Поворачиваем кубики

17 *С. Вавилов.* «Теплый свет» и тепловое излучение

Задачник «Кванта»

24 Задачи М716 — М720; Ф728 — Ф732

26 РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ М676 — М680; Ф688 — Ф691

34 *Г. Гуревич.* Системы разновесов

36 Список читателей, приславших правильные решения

«Квант» для младших школьников

37 Задачи

38 *С. Тавридов.* Пентамино на плоскости и в пространстве

По страницам школьных учебников

40 *В. Рыжик.* Геометрический подарок

Практикум абитуриента

42 *В. Белонучкин.* Диаграмма состояния

Информация

46 *Л. Асламазов.* XII Международная физическая олимпиада

50 *А. Абрамов, В. Мишин.* XXII Международная математическая олимпиада

54 *В. Сергеев, А. Криворучко, М. Немиченицер.* Математические олимпиады в ПТУ

Рецензии, библиография

55 *И. Зорич.* Что может голография?

57 **Шахматная страничка**

58 **Ответы, указания, решения**

61 Напечатано в 1981 году

Новости науки *(23)*

Смесь *(41, 53)*

Шахматный конкурс *(3-я с. обложки)*

Новогоднюю елку на нашей обложке мы составили из четырнадцати экземпляров кубика Рубика — математической головоломки, секреты которой «Квант» раскроет в новом, 1982 году

© Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1981

Е. Велихов

Задача все та же — учиться!

В один из самых критических моментов для судьбы Советского государства, 60 лет тому назад, В. И. Ленин, выступая на III Всероссийском съезде РКСМ, сказал: «...задачи молодежи вообще и союзов коммунистической молодежи и всяких других организаций в частности можно было бы выразить одним словом: задача состоит в том, чтобы учиться». Прошло 60 лет. Возникло и окрепло первое социалистическое государство, образовалось общество развитого социализма в СССР, социализм победил во многих странах. Из семян, посеянных в первые годы Советской власти, выросла советская наука. Она решила ряд исторических задач — от электрификации страны до создания атомной науки и техники, освоения космоса и т. д. Сегодня в СССР работает треть научных работников всего мира.

Развитие научно-технической революции привело к тому, что продукт науки — знания — стали одним из основных национальных богатств.

В СССР созданы не только могучая передовая наука, научные школы, экспериментальная и материальная базы науки, но и одна из самых мощных и эффективных систем образования. И в то же время по-прежнему главная задача молодежи — учиться — остается столь же актуальной, как и 60 лет назад.

Каждое новое поколение советской молодежи встречается с новыми задачами, поставленными развитием общества, — от восстановления народного хозяйства после гражданской войны, строительства первых пятилеток до освоения целины, строительства БАМа, шефства над атомной энергетикой, нефтяными промыслами Тюмени. Не менее титаническая задача стоит и в учебе: каждое новое поколение должно воспринять и переварить все то, что создано предыдущими. В XX веке рост научно-технической информации происходит лавинообразно. Даже преподаватели подчас не успевают быть в курсе современной науки. Однако прогресс нашего общества зависит от успеха этого процесса — учебы.

Академик Евгений Павлович Велихов — лауреат Государственной премии, вице-президент Академии наук СССР, председатель Секции физико-технических и математических наук Президиума Академии наук СССР, заместитель директора Института атомной энергии имени И. В. Курчатова.

Статья перепечатывается с сокращениями из сборника «Ленин. Наука. Молодежь», выпущенного в 1980 году издательством «Наука».

Задачи здесь поистине грандиозные, но и резервы далеко не использованы. Как ни странно, но сам процесс мышления и обучения мы знаем еще очень плохо, и поэтому весьма неэффективно используются способности человеческого разума. Преподавание по-прежнему остается искусством, иногда творящим чудеса. По собственному школьному опыту мы знаем, что большинство из нас за 10 лет так и не овладевает иностранным языком, который при необходимости и по соответствующей методике эффективно усваивается за полгода. То же касается и всех других дисциплин. Школьник, изучивший принципы высшей математики в 6—7 классах, выглядит вундеркиндом, хотя это не менее естественно, чем научиться плавать в годовалом возрасте.

Современный спорт заставляет нас обращать много внимания на развитие человека до пределов его физических возможностей. В спорте считается нормальным, что школьники соревнуются за мировое первенство, лыжники достигают Северного полюса. В области же обучения мы значительно более робки. Да и придаем ли мы сравнимое социальное значение соответствующим усилиям человека в интеллектуальной сфере? Только тот, кто когда-либо соприкасался с настоящим педагогом, может представить себе, до какой степени неэффективен рутинный процесс передачи знаний от поколения к поколению, выработанный человечеством. При современной потребности общества в человеческом интеллекте сколько Эйнштейнов, Менделеевых, Толстых мы теряем! Важными факторами успеха в учебе являются стремление, внутренняя потребность и уверенность в себе каждого молодого человека. И, конечно, эти свойства должны стимулироваться прежде всего обществом, в том числе комсомольскими и другими общественными организациями.

Не менее странно и то, что мы искусственно разделяем два процесса — учебу и творчество. На самом деле — это один процесс. Если учеба для человека не является процессом творческим, то она почти бесполезна И наоборот, только сохраняя способность учиться и удивляться новому, человек сохраняет способность творить независимо от возраста. Опять-таки этот процесс определяется индивидуальными усилиями и потребностями и общественными стимулами, которые формируют их.

Современный мир с его «накатанными дорогами», мелкими ежедневными проблемами и соблазнами способствует замедлению формирования личности. Сам процесс образования, а затем и начало рабочей деятельности иногда также подавляют индивидуальность. Наше общество кровно заинтересовано в том, чтобы каждый молодой человек был яркой индивидуальностью с сильным, самостоятельным, творческим характером, независимо от того, какую профессию он изберет и где он будет трудиться. В промышленности, в сельском хозяйстве, в сфере обслуживания, тем более в науке и технике в социалистическом обществе все больше и больше требуется интеллект — это генеральная линия нашего развития. Формирование такой личности требует ранней закалки и тренировки — умственной и физической.

Важнейшей задачей всего советского общества, в том числе и молодежи, является обеспечение должного научно-технического уровня и прогресса в непрерывном соревновании с капитализмом. У нас есть все основания быть уверенными, что эта задача будет успешно решена.

А. Чернин

Звездная динамика

МЛЕЧНЫЙ ПУТЬ

Демокрит (V – IV вв. до н. э.) говорил, что Млечный Путь, это белесоватая полоса, протянувшаяся через все небо, есть «соединение света множества звезд». История астрономии знает немало и других предположений о природе Млечного Пути, обсуждавшихся задолго до того, как появилась возможность проверить их астрономическими наблюдениями; споры о Млечном Пути продолжались веками. Решение в пользу догадки Демокрита пришло в 1610 году, когда Галилей направил на небо только что созданный им телескоп [illegible]. За несколько ночей было сделано тогда множество замечательных астрономических открытий, и среди них — открытие звезд Млечного Пути. Как писал Галилей, стали «доступными глазу звезды», которые раньше никогда не были видимы и число которых по меньшей мере в десять раз больше числа звезд, известных издревле. Это — факт высокого значения, который положил конец спорам о Млечном Пути и выявил его природу для чувства и разума».

Исследования Млечного Пути превратились в одну из главных задач астрономии в XVIII и XIX веках, и теперь мы знаем, что звезды Млечного Пути принадлежат к гигантской звездной системе, содержащей в себе более ста миллиардов звезд, среди которых и ближайшая к нам звезда — Солнце. Общие черты строения и динамики этой системы, называемой Галактикой*), надежно выяснены лишь в последние 30—40 лет. Вместе с тем стало известно, что во Вселенной имеются и другие системы такого рода — галактики.

Движение звезд в галактиках определяется силами тяготения. Закон взаимного тяготения тел, установленный в исследованиях земного притяжения, в наблюдениях за движениями тел в Солнечной системе, справедлив и в звездных системах, которые в миллионы и миллиарды раз больше Солнечной системы; в этом проявляется универсальный, всемирный характер тяготения.

Галактика и галактики

В строении Галактики различают два главных структурных элемента — диск и сферическую составляющую. Диск образован молодыми и яркими звездами, у него имеется утолщение в середине, так что он похож на чечевицу или линзу (рис. 1). Диаметр диска составляет примерно 75 тысяч световых лет, его поперечный размер раз в десять меньше; Солнце находится в диске на расстоянии двух третей радиуса от центра. Видимый изнутри диск Галактики и представляется нам полосой Млечного Пути.

Кроме звезд диска в Галактике имеются и другие, менее яркие звезды; они заполняют, сгущаясь к центру, сферический объем с диаметром, близким к диаметру диска. Наиболее плотная центральная часть Галактики — ее ядро (см. рис. 1).

Один из самых впечатляющих астрономических феноменов — спиральный узор галактик (рис. 2). Он образован самыми молодыми, ярчайшими звездами дисковой составляющей. Наша Галактика и другие галактики, украшенные этим узором, называются спиральными. В рукавах спиралей находится очень небольшая доля звезд, но зато они ярче всех, и потому в удаленных галактиках бывает чаще всего виден только их спиральный узор. Самая близкая к нам гигантская спиральная галак-

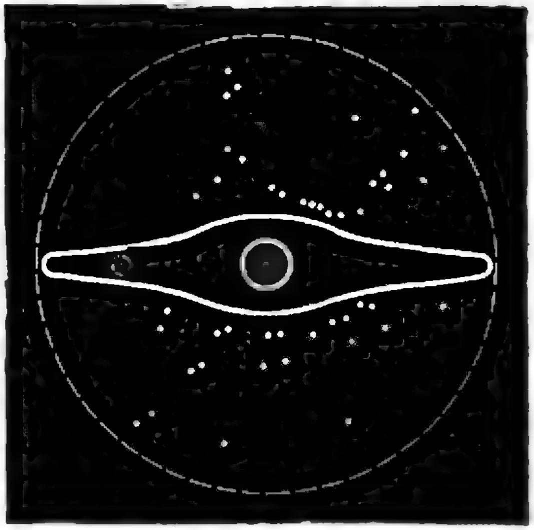


Рис. 1. Галактика в поперечном разрезе. Диск, сферическая составляющая и ядро — три главных элемента ее структуры. Положение Солнца указано символом ☉; так его обозначали еще в древнеегипетских надписях. В сферической составляющей показаны некоторые из шаровых звездных скоплений, ее коллективных членов.

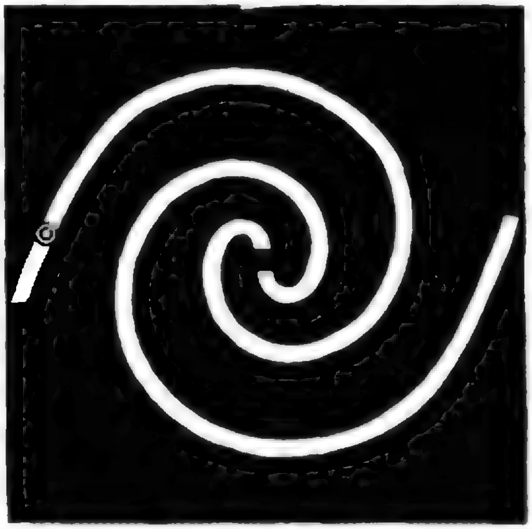


Рис. 2. Схема спиральных рукавов в диске Галактики «анфас». В диске имеется газ, который вращается вместе со звездами: это гигантский вихрь, и в создаваемых им уплотнениях рождаются молодые звезды, которые и обрисовывают спиральный узор.

---

*) Что в переводе с новогреческого означает «млечный»

тика — знаменитая туманность Андромеды.

Галактики, лишенные спирального узора, обычно не имеют и дисковой составляющей. Их сферическая составляющая (в действительности она всегда в той или иной степени сплюснута) представляется на астрономических фотографиях эллипсом; поэтому такие галактики называют эллиптическими. Встречаются и вовсе бесструктурные на вид образования — неправильные галактики, которые выглядят клочковатыми облаками звезд. Иногда оказывается, что и у них имеется сферическая составляющая, содержащая, как и в других случаях, слабые, неяркие звезды. Наконец, сейчас находят очень концентрированные звездные системы, напоминающие плотные центральные области, ядра спиральных и эллиптических галактик, только они еще плотнее и гораздо массивнее.

Движение звезд в диске Галактики

Звезды дисковой составляющей Галактики движутся по почти круговым орбитам. Их движение похоже на обращение планет вокруг Солнца, хотя в Галактике нет такого подавляющего по массе центрального тела, как Солнце в Солнечной системе, которое одно создавало бы притяжение всех тел к центру. Ядро нашей Галактики имеет очень небольшую массу и не оно удерживает звезды на их орбитах. Сила притяжения к центру создается в Галактике совместными тяготениями самих звезд.

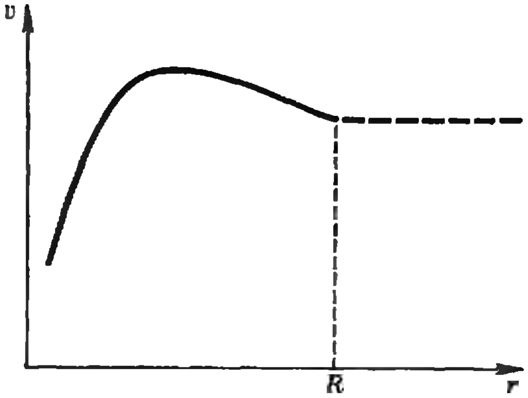


Рис. 3. Кривая вращения — типичная зависимость скорости вращения звезд в диске спиральной галактики от расстояния до центра. К пунктирной линии, уходящей за пределы галактики, мы вернемся позже.

На звезду, движущуюся по круговой орбите радиуса r, действует притяжение звезд, находящихся внутри этой орбиты. Силы притяжения, создаваемые внешними звездами, направлены в разные стороны и друг друга уравновешивают*). Звезды «не замечают» внешних тяготеющих масс, а масса всех внутренних звезд действует так, как если бы вся она была целиком сосредоточена в центре. В соответствии с этим и на основании закона всемирного тяготения сила притяжения звезды к центру дается формулой

$$F = G\frac{m \cdot M(r)}{r^2}. \qquad (1)$$

Здесь m — масса звезды, $M(r)$ — полная масса внутри орбиты радиуса r, $G=6{,}67\cdot10^{-11}$ м^3(кг · с^2) — постоянная тяготения. Сила $\vec{F}$ направлена к центру Галактики. При скорости движения звезды v сила тяготения создает центростремительное ускорение

$$\frac{v^2}{r} = \frac{F}{m}. \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) следует связь между скоростью звезды, радиусом ее орбиты и массой звезды:

$$v^2 = \frac{G \cdot M(r)}{r}. \qquad (3)$$

Такая же по виду формула описывает круговые движения планет и обращение спутника вокруг Земли.

Формула (3) позволяет оценить скорости звезд в диске Галактики по известным значениям радиуса орбиты и массы внутри нее. Если радиус орбиты сравним по величине с полным радиусом Галактики, то есть $r\sim R\sim10^{20}$ м, то под массой $M(r)$ нужно понимать величину, сравнимую с массой всей Галактики: $M(r)\sim M\sim10^{41}$ кг. (Масса Галактики находится умножением средней массы звезды $m\sim10^{30}$ кг на полное число звезд в Галактике $N\sim10^{11}$.) Для этих величин r и $M(r)$ находим приближенно из соотношения (3)

---

*) Это всегда так, когда в системе имеется сферическая или цилиндрическая симметрия Доказательство приведено в Приложении I на с 10

$$v \approx 3 \cdot 10^5 \text{ м/с} = 300 \text{ км/с}.$$

Согласно данным наблюдений Солнце обращается вокруг центра Галактики со скоростью $v_☉ = 220$ км/с, что довольно близко к полученной нами оценке. (Это — самое быстрое из всех движений, в которых мы участвуем вместе с Землей; скорость обращения Земли вокруг Солнца составляет 30 км/с, а линейная скорость собственного вращения Земли — 0,5 км/с.)

Движение звезд в диске Галактики происходит согласованно, так что и диск как целое вращается вокруг своего центра. Скорости вращения — разные на разных расстояниях от центра (рис. 3).

Динамика сферической составляющей

Движение звезд в сферической составляющей Галактики иное, их орбиты не круговые, а сильно вытянутые. Некоторые орбиты весьма близки к прямым линиям, а в принципе возможны и чисто прямолинейные, радиальные орбиты.

Чтобы разобраться в особенностях такого движения, стоит вспомнить сначала один вопрос, который, кажется, любят задавать на вузовских приемных экзаменах: как будет двигаться камень, брошенный в шахту, пробуренную в Земле насквозь через центр? Очевидно, камень будет сначала падать с ускорением к центру вдоль радиуса; затем, миновав центр, начнет замедлять движение; потом на миг остановится и полетит обратно, наращивая скорость; но пролетев центр, он снова начнет замедлять движение, остановится, полетит опять к центру и т. д. Это будет периодическое колебательное движение от одного апоцентрия, то есть точки максимального удаления от центра, до другого.

Подобные колебательные движения вокруг центра Галактики и совершают звезды ее сферической составляющей. То обстоятельство, что их орбиты немного отличаются от чисто радиальных, мало что меняет в этой картине. Поведение скорости радиального движения звезд напоминает классический пример колебательного процесса — качания маятника: его скорость максимальна в среднем положении и обращается в нуль в крайних положениях.

Двигаясь каждая в своей «шахте», звезды испытывают тяготение, различное по силе на разных расстояниях от центра системы (при круговом движении сила притяжения постоянна по величине). Ясно, что в этом случае для количественного анализа движения требуется знать конкретное распределение массы в системе. Но если интересоваться не деталями, а общими динамическими характеристиками сферической составляющей, то для численных оценок достаточно и того, что мы уже выяснили с помощью простых аналогий.

Найдем, например, характерную скорость радиального движения звезд. Из периодичности этого движения следует, что средняя скорость за период равна нулю: $\overline{v} = 0$. Средний же квадрат скорости отличен от нуля: $\overline{v^2} \neq 0$. Корень квадратный из этой величины — среднеквадратичная скорость — и будет нас интересовать. Оценим ее для звезды, которая при максимальном удалении от центра выходит к границам системы. Следует ожидать, что в таком случае в выражении для среднеквадратичной скорости должны фигурировать величины, характеризующие систему в целом: полная масса галактики M и ее радиус R. Должна, конечно, входить и гравитационная постоянная G, так как движение управляется силами тяготения.

Для нахождения связи между интересующими нас величинами мы воспользуемся методом размерностей*). Запишем размерности величин M, R, G:

$$[M] = \text{кг}, \quad [R] = \text{м}, \quad [G] = \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}.$$

Интересующая нас среднеквадратичная скорость $\overline{v^2}$ имеет размерность

$$[\overline{v^2}] = \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}.$$

---

*) Методу размерностей посвящена большая статья в 6 номере «Кванта» за этот год

Из трех величин — M, R, G — можно составить единственную (проверьте!) комбинацию, имеющую размерность квадрата скорости:

$$\left[\frac{GM}{R}\right] = \frac{м^2}{с^2}.$$

Поэтому нужно считать, что

$$\overline{v^2} = a\,\frac{GM}{R}.$$

Здесь a — некоторый безразмерный множитель, зависящий от деталей строения системы; как показывает накопленный в теоретической физике опыт оценок такого рода, безразмерный множитель чаще всего не слишком сильно отличается от единицы. Из соотношения (4) следует, что характерная скорость радиальных движений звезд в сферической составляющей Галактики близка к значению в несколько сотен километров в секунду, которое мы находили выше для круговых движений в диске. Эти скорости — одного порядка.

Метод анализа размерностей и оценок по порядку величины незаменим, когда точная теория либо слишком сложна математически, либо невозможна из-за неопределенности или недостатка имеющихся наблюдательных или экспериментальных данных. Формально он как будто прост, но, по существу, предполагает, что сначала достигнуто общее качественное понимание того, что происходит. Точность оценок невелика, но, например, для целей астрофизики во многих случаях вполне достаточна.

И на круговых, и на радиальных (или близких к ним) орбитах звезды совершают финитное движение, то есть при своих перемещениях они не выходят за пределы некоторого ограниченного объема: их связывает в звездной системе их общее поле тяготения. Связанное состояние звезд обеспечивает неизменное во времени, стационарное состояние системы в целом.

Массы галактик

Возможен только один способ определения масс звездных систем — по создаваемой ими силе тяготения. Тяготение проявляется в движениях звезд, и если удается измерить их характерные скорости и размер системы, то масса может быть найдена с помощью формул (3) или (4). Первая применима к спиральным галактикам с дисками, а вторая — к сферическим составляющим галактик и к эллиптическим галактикам, которые динамически им подобны. В обоих случаях речь чаще всего идет о приближенной оценке, и потому, опуская в (4) неопределенный множитель, можно написать общую оценочную формулу для массы галактики:

$$M \sim \frac{\overline{v^2}\,R}{G}. \qquad (5)$$

Найденные таким способом массы спиральных галактик лежат в пределах от $3 \cdot 10^{-8}\ M_\odot$ до $3 \cdot 10^{11}\ M_\odot$, где $M_\odot$ — масса Солнца; диапазон масс эллиптических галактик шире — от $3 \cdot 10^{6}\ M_\odot$ до $3 \cdot 10^{12}\ M_\odot$; массы неправильных галактик сравнительно невелики — от $10^{6}\ M_\odot$ до 10^{9}—$10^{10}\ M_\odot$.

Многие крупные галактики, и наша Галактика в том числе, обычно имеют по нескольку малых галактик-спутников. Эти спутники обращаются вокруг центральной галактики, и по анализу их движений тоже можно получить динамическую оценку масс крупных галактик. Если центральная галактика целиком лежит внутри орбит ее спутников, а именно такая картина и наблюдается на фотографиях, то силы тяготения, действующие на все спутники, обусловлены одной и той же тяготеющей массой. Применяя в этом случае формулу (3), найдем, что скорость v_1 вращения близкого спутника с радиусом орбиты r_1 больше скорости v_2 более далекого спутника с радиусом орбиты r_2:

$$\frac{v_1}{v_2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{1/2},$$

и скорость убывает с радиусом орбиты по закону

$$v(r) \sim r^{-1/2} \qquad (6)$$

(этому закону подчиняются и планеты Солнечной системы).

К удивлению астрономов, в последние годы стали появляться указания на то, что в семействах спутников нашей Галактики, галактики Андромеды и некоторых других массивных галактик закон (6) не выполняется. В наблюдениях измерялись скорости спутников, находящихся на расстояниях до десяти радиусов центральной галактики, и всякий раз оказывалось, что скорости отнюдь не убывают с радиусом орбиты, а остаются (с известной точностью) постоянными. Это обстоятельство и отражает пунктирная линия на кривой вращения (см. рис. 3).

В поисках объяснения советские астрономы из Тартуской обсерватории и американские астрономы из Принстонского университета предложили обсудить одну далеко идущую возможность. Что если масса галактики на самом деле не ограничивается той, что лежит в пределах видимого на фотографиях объема? Не могут ли, кроме звезд, существовать и какие-то иные тяготеющие массы, распределенные по гораздо большему объему вокруг галактик? Так возникла гипотеза о невидимых, «скрытых» массах галактик.

Предполагается, что эта дополнительная масса образует корону галактики, которая простирается на большие расстояния и достигает самых дальних орбит галактик-спутников. Если так, то спутники движутся не в пустоте, а среди невидимых, «скрытых» масс. Тогда тяготеющая масса, влияющая на движение спутника, складывается из массы видимых звезд галактики и «скрытой» массы, находящейся внутри орбиты спутника. В результате суммарная тяготеющая масса возрастает с ростом радиуса орбиты; из-за этого скорости галактик-спутников и не подчиняются закону (6). Если скорости одинаковы на орбитах разных радиусов, то, как видно из формул (3) и (5), с ростом r тяготеющая масса должна возрастать по закону

$$M \sim r. \qquad (7)$$

Отсюда следует, что полная масса галактики может оказаться во много раз больше массы видимых звезд. Если семейство галактик-спутников, движущихся с одинаковыми скоростями, находится на расстоянии, скажем, $3R$ от центра галактики, то и полная масса всей системы в три раза больше массы видимых звезд, то есть видимого тела галактики.

При возрастании массы по закону (7) плотность вещества в галактике убывает от центра наружу как r^{-2} (мы покажем это в Приложении II). На достаточном удалении от центра плотность падает быстрее и сходит на нет.

* * *

Гипотеза «скрытой» массы объясняет динамику галактик-спутников, но ставит вместе с тем новые трудные вопросы. Прежде всего, что представляет собой эта масса? Ответ не известен. Предполагают, что она может складываться из масс малых и очень слабых по блеску звезд. Если так, то звезд в Галактике гораздо больше, чем можно увидеть даже в самый лучший телескоп.

Но это — не единственная возможность. В последнее время астрономы и физики внимательно обсуждают идею, согласно которой «скрытая» масса представляет собой газ элементарных частиц — нейтрино. Эти частицы известны в физике уже почти полвека, но до сих пор не ясно, имеют они массу покоя (подобно протону, электрону и другим частицам) или их масса покоя равна нулю (как у фотона). При наличии массы покоя, хотя бы и гораздо меньшей, чем у электрона (легчайшей из частиц, относительно которой точно известно, что она имеет массу покоя), нейтрино действительно могли бы создавать вокруг массивных галактик протяженные облака, невидимые, но тяготеющие.

В недавних экспериментах московских физиков, проведенных не с космическими, а с лабораторными нейтрино, возникающими при радиоактивном распаде, были обнаружены признаки того, что нейтрино, возможно, на самом деле имеют массу покоя. Сообщается, что она приблизительно в десятки тысяч раз меньше массы покоя электрона. Это предварительный результат, но если он подтвердится, то нужно будет считать, что и космические нейтрино имеют массу покоя. Тогда идея нейтринной «скрытой» массы получит надежное физическое обоснование.

А пока что, как и много веков назад, высказываются все новые догадки, идеи, гипотезы — споры о природе галактик продолжаются....

Приложение I

Докажем, что силы притяжения, действующие на звезду со стороны «внешних» звезд, уравновешивают друг друга, если внешнее распределение сферически симметрично.

Рассмотрим сначала гравитационное действие тонкого сферического слоя радиуса r и толщины $l \ll r$ на область внутри этого слоя (рис. 4). Для этого подсчитаем сумму сил, действующих со стороны отдельных элементов слоя на массу m, помещенную в произвольной точке A. Выделим пару элементов, «вырезаемых» в слое двуполостным конусом с вершиной в точке A (см. рис. 4). Конус считаем очень узким, так что $\alpha \ll \pi$. Образуемые таким сечением элементы слоя можно приближенно считать плоскими дисками, пренебрегая кривизной их поверхности. В этом приближении диаметры дисков равны

$$d_1 = r_1\alpha, \quad d_2 = r_2\alpha,$$

где r_1, r_2 — расстояния дисков от точки A.

Со стороны диска 1 на массу m в точке A действует сила $\vec{F}_1$, со стороны диска 2 — сила $\vec{F}_2$.

Ввиду малости размеров диска ($d_1 \ll r_1$, $d_2 \ll r_2$) силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ можно определить, считая, что вся масса каждого из дисков сосредоточена в точке, находящейся, соответственно, на расстояниях r_1 и r_2 от точки A. Тогда

$$|\vec{F}_1| = \frac{Gm_1m}{r_1^2}, \quad |\vec{F}_2| = \frac{Gm_2m}{r_2^2},$$

где m_1, m_2 — массы дисков. Чтобы найти m_1 и m_2, учтем, что диски имеют столь малую толщину, что изменением плотности ϱ внутри них можно пренебречь, так что эти массы равны

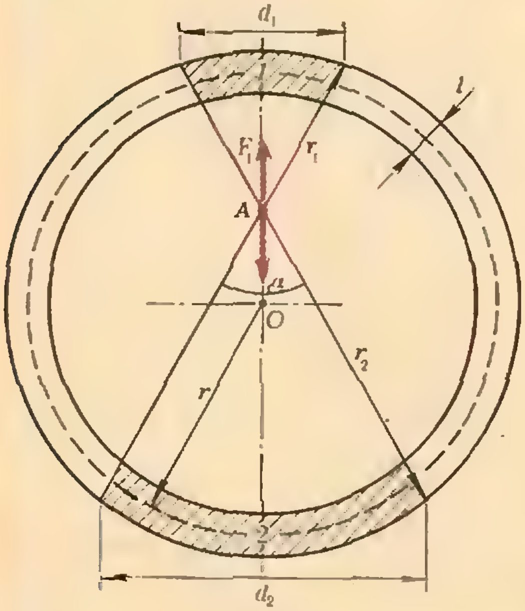


Рис. 4.

$$m_1 = \varrho\pi\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 l = \varrho\pi\left(\frac{r_1\alpha}{2}\right)^2 l,$$

$$m_2 = \varrho\pi\left(\frac{d_2}{2}\right)^2 l = \varrho\pi\left(\frac{r_2\alpha}{2}\right)^2 l.$$

Подставляя теперь массы m_1 и m_2 в выражения для $|\vec{F}_1|$ и $|\vec{F}_2|$, находим:

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = G\varrho\pi\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 ml.$$

Таким образом, по величине силы F_1 и F_2 равны, а будучи противоположно направленными, они взаимно уравновешиваются.

Очевидно, что весь сферический слой можно разбить на подобные пары элементов; при этом сила, создаваемая каждой парой в точке A, равна нулю, так что и общее гравитационное воздействие всего слоя в этой точке отсутствует.

Далее, переходя от отдельного слоя ко всему внешнему распределению тяготеющих масс, можно это распределение мысленно разбить на тонкие сферические слои, и так как, согласно доказанному выше, каждый такой слой не создает гравитационной силы во внутренней точке A, то и вся их совокупность никак не влияет ни на произвольно выбранную точку A, ни на всю внутреннюю область вообще.

В качестве интересного упражнения можно предложить провести аналогичное доказательство для случая цилиндрической симметрии в распределении внешних масс.

Приложение II

Докажем, что если полная масса M, заключенная внутри сферы радиуса r, возрастает пропорционально r, то плотность $\varrho(r)$ (сферически симметричная) распределена по закону $\varrho \sim r^{-2}$.

Выделим тонкий сферический слой толщины l с внешним радиусом r. Масса такого слоя равна $\Delta M = M(r) - M(r-l) = Kr - K(r-l) = Kl$, где K — коэффициент пропорциональности. Объем такого слоя равен $\Delta V = \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot (r-l)^3 = \frac{4}{3}\pi(3r^2l - 3rl^2 + l^3)$ (объем сферы радиуса r равен $\frac{4}{3}\pi r^3$). Средняя плотность в слое равна

$$\varrho_{\text{ср}} = \frac{\Delta M}{\Delta V} = \frac{3Kl}{4\pi(3r^2l - 3rl^2 + l^3)}.$$

Плотность $\varrho(r)$ на расстоянии r от центра сферы равна $\lim\limits_{l\to 0} \varrho_{\text{ср}}$, то есть

$$\varrho(r) = \lim_{l\to 0} \frac{3Kl}{4\pi(3r^2l - 3rl^2 + l^3)} = \frac{K}{4\pi r^2} \sim r^{-2},$$

что и требовалось доказать.

Ю. Демков

Поворачиваем кубики

Нет, в этой статье не обсуждается «венгерский шарнирный кубик» (см. «Квант», 1980, № 12, с. 17) — головоломка, родившаяся в руках венгерского архитектора Эрнё Рубика и вызвавшая ажиотаж во всем мире, особенно в ВНР и США, где ее выпускают в миллионах экземпляров. К этой трудной и интересной игре «Квант» скоро вернется, а здесь речь пойдет о значительно более простой головоломке, которую каждый может смастерить за несколько минут и для которой можно построить несложную и законченную математическую теорию.

Возьмем 8 кубиков и сложим из них куб вдвое большего размера*). Раскрасим три пары противоположных граней этого куба, соответственно, в белый и желтый, красный и оранжевый, зеленый и синий цвета́. Тогда у каждого из маленьких кубиков три грани окажутся раскрашенными в разные цвета́. Возьмем теперь куб в руки и повернем на 180° слой из четырех прилегающих друг к другу кубиков относительно четырех остальных (по часовой или против часовой стрелки, не важно, — результат от этого не зависит). Очевидно, что это можно сделать тремя разными способами. Назовем эти три поворота *элементарными операциями* или *ходами*. Повторяя эти ходы в разном порядке несколько раз, мы будем получать разные распределения цветов по граням куба. Назовем каждое такое распределение цветов *состоянием* куба, причем все распределения, отличающиеся поворотом куба как целого, будем считать одним и тем же состоянием. Назовем *нулевым* то состояние, при котором каждая грань большого куба раскрашена одним цветом.

Возникают следующие вопросы. Сколько имеется различных состояний, получающихся из нулевого некоторой последовательностью ходов? Каково наименьшее число ходов, переводящих данное произвольное состояние в нулевое? Каково минимальное число ходов, переводящих два данных состояния друг в друга?

Изображение состояний и запись ходов

Чтобы ответить на эти вопросы, научимся сначала описывать состояние куба и введем специальную запись для ходов. Сперва зафиксируем положение куба в пространстве, считая, что один из маленьких кубиков остается неподвижным при всех преобразованиях, например тот, три внешние грани которого окрашены в белый, оранжевый и зеленый цвета́.

На рисунке 1 изображение куба и 12-ти обращенных к нам граней малых кубиков дополнено изображением 9-ти задних граней, как бы отраженных в круглом вогнутом зеркале. Три грани заднего малого кубика, остающиеся неподвижными, на рисунке не изображены.

Обозначим поворот передних четырех кубиков на 180° вокруг оси x буквой X, поворот четырех правых кубиков — Y и поворот четырех верхних кубиков — Z (рис. 2). При всех этих ходах задний малый кубик будет оставаться неподвижным, так что выполняя ходы X, Y, Z, мы никогда не повернем куб как целое. Состояния, которые получаются из нулевого применением операций X, Y, Z, изображены на рис. 1, где они помечены номерами *2—4*.

Композиция ходов и соотношения

Композицию (последовательное выполнение) ходов мы будем называть

---

*) Чтобы это осуществить на самом деле, нужно внутренние грани кубиков покрыть тонким слоем пластилина — они склеятся при сборке, а потом легко будут расцепляться и сцепляться

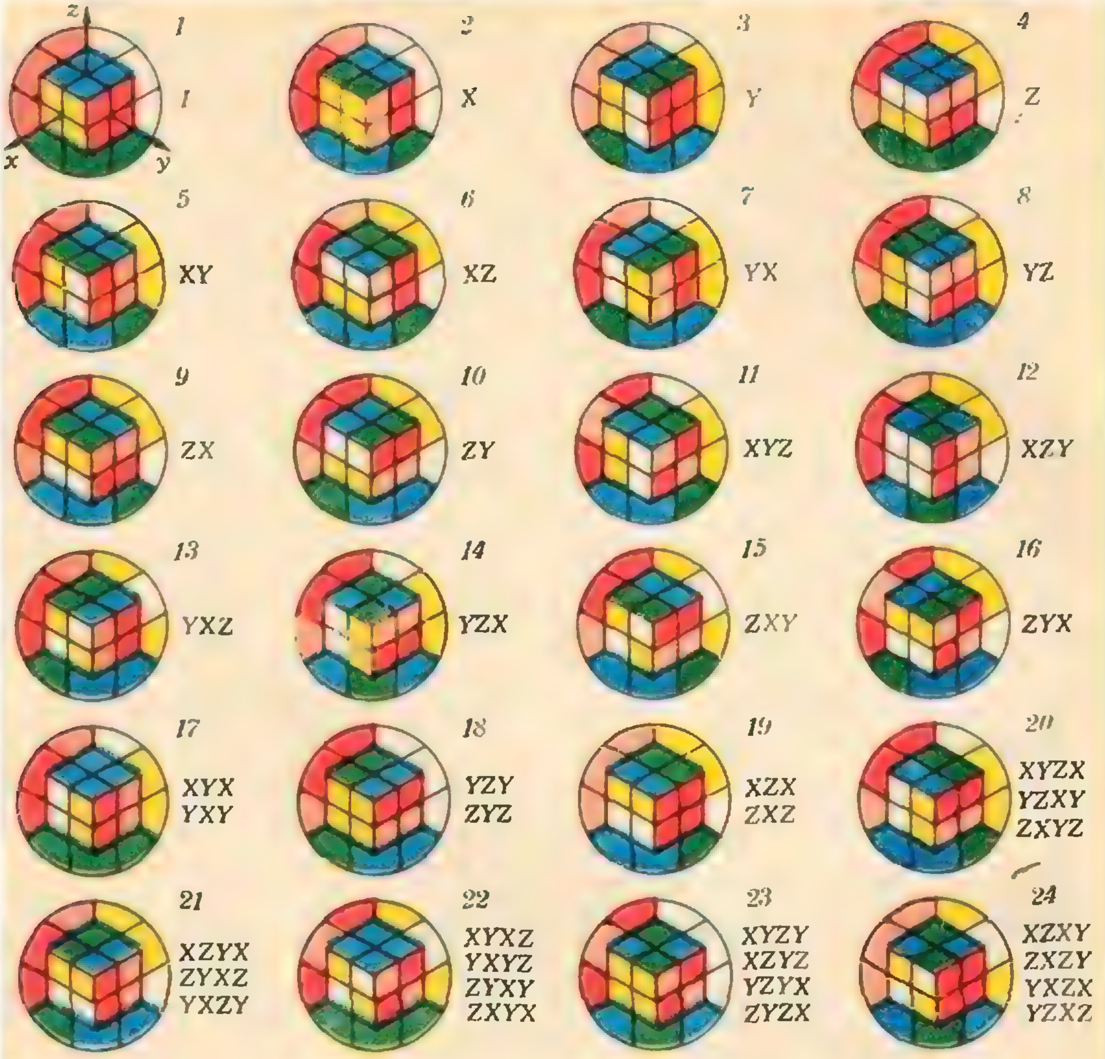

z
x
y
1
I
2
X
3
Y
4
Z
5
XY
6
XZ
7
YX
8
YZ
9
ZX
10
ZY
11
XYZ
12
XZY
13
YXZ
14
YZX
15
ZXY
16
ZYX
17
XYX
YXY
18
YZY
ZYZ
19
XZX
ZXZ
20
XYZX
YZXY
ZXYZ
21
XZYX
ZYXZ
YXZY
22
XYXZ
YXYZ
ZYXY
ZXYX
23
XYZY
XZYZ
YZYX
ZYZX
24
XZXY
ZXZY
YXZX
YZXZ

Рис. 1.

также *умножением*; произведение ходов будем записывать слева направо. Например, YZX — это последовательное выполнение ходов Y, Z, X; $X^3=XXX$ — это выполнение трех ходов X. Два произведения ходов мы будем считать *равными*, если они на каждое состояние куба действуют одинаково.

Умножение ходов, конечно, не коммутативно; например, все шесть «парных» произведений не равны (номера *5—10* на рисунке 1).

Обозначим I «тождественный» ход, оставляющий куб не изменившимся. Очевидно,

$$X^2=Y^2=Z^2=I. \qquad (*)$$

Легко проверить, что все «парные» произведения, повторенные три раза, не меняют состояния куба:

$$(XY)^3=(YZ)^3=(ZX)^3=(YX)^3=(ZY)^3=(XZ)^3=I. \qquad (**)$$

Кроме того,

$$(XYZY)^2=(XZYZ)^2=(YXZX)^2=(YZXZ)^2=(ZXYX)^2=(ZYXY)^2=I \qquad (***)$$

Из равенств (*), (**), (***) легко получить (уже не обращаясь к кубу!) много новых равенств. Например (проверьте!), $XYX=YXY$ (см. также задачу 1 на с. 16).

Итак, мы получили три группы равенств, согласно которым все три хода X, Y, Z являются «корнями квадратными из единицы» (*), а все шесть парных ходов — «корнями кубичными из единицы» (**), а еще шесть комбинаций ходов специального вида ($XYZY$, $YZXZ$, ...) тоже яв-

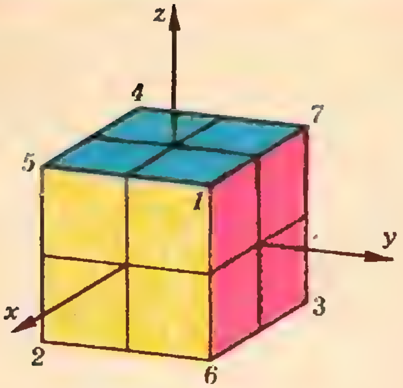


Рис. 2.

ляются «корнями квадратными из единицы» (***).

Граф состояний

Мы научились изображать состояния куба (и приписали им номера *1—24*, рис. 1), научились записывать ходы и нашли соотношения между ходами. Хотелось бы уметь более наглядно изображать связь между состояниями и ходами. Для этого служит *граф состояний*, показанный на рисунке 3. На нем точки (вершины) обозначают состояния, а отрезки — ходы, позволяющие перейти из одного состояния в «соседнее». Так, в центре рисунка жирная точка изображает нулевое состояние; из нее выходят три отрезка, отвечающие ходам X, Y, Z; из точек на концах этих отрезков также выходит по три отрезка: один возвращает в нулевое состояние, остальные приводят в два новых состояния, и т. д. Продолжая этот процесс неограниченно, можно считать всю плоскость покрытой шестиугольной сеткой — графом состояний.

Соотношениям (*) на графе отвечает движение туда и обратно по одному из отрезков, а соотношениям (**) — обход шестиугольника (проверьте!).

У полученной картины очевидный недостаток — на ней имеется бесконечно много вершин (состояний), в то время как у нашего куба лишь конечное число состояний. Значит, какие-то (различные) вершины отвечают одному и тому же состоянию. Чтобы в этом разобраться, занумеруйте (например, прямо на рисунке 3) все вершины графа номерами *1—14*, пользуясь рисунком 1.

Вы тогда увидите, какие вершины между собой должны совпадать. Например, жирная точка в верхней части рисунка 3 тоже отвечает нулевому состоянию (а всего таких точек на рисунке уместилось 7). Кстати, путь от «центральной» нулевой точки к «верхней» соответствует соотношению

$$XZYZXZYZ = I,$$

то есть одному из соотношений (***).

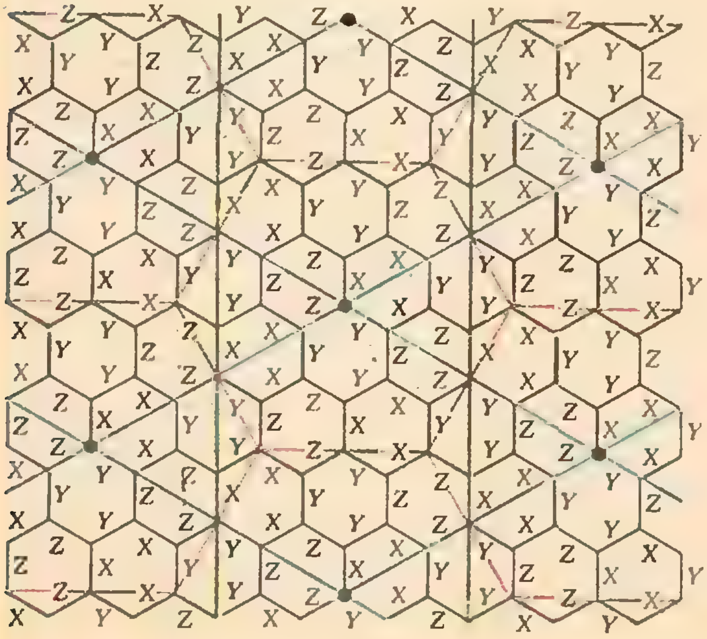


Рис. 3. Граф состояний куба. Стороны шестиугольников обозначают элементарные операции (они помечены буквами *X*, *Y*, *Z*), вершины шестиугольников — состояния, а жирные точки отвечают нулевому состоянию. Синие, красные и зеленые линии выделяют фундаментальные области.

Имея перед глазами пронумерованный граф состояний, легко ответить на поставленные в начале статьи вопросы. Имеется всего 24 состояния (и 24 класса равных между собой последовательностей ходов). Из них 3 состояния получаются из нулевого состояния одним ходом, 6 — двумя ходами, 9 — тремя ходами и 5 — четырьмя ходами. Вообще, чтобы найти минимальную цепочку ходов, соединяющую данные два состояния, достаточно найти две вершины на графе с соответствующими номерами и соединить их кратчайшей ломаной, которая укажет нужные ходы, причем число этих ходов всегда $\leqslant 4$.

Фундаментальные области

В последней фразе внимательный читатель должен был заметить неточность: необходимо брать не любые «две вершины с соответствующими номерами», а такие, которые расположены «по соседству», иначе может появиться лишний путь типа (***).

В этой связи удобно «раскроить» наш граф на ячейки, внутри которых нет совпадающих вершин и которые содержат все 24 состояния. На рисунке 3 показаны три способа для осуществления такого раскроя: на красные шестиугольники, на синие ромбы и на зеленые «прямоугольники с ломаными сторонами».

В математике такие ячейки часто называют *фундаментальными областями*. Проверьте, что после необходимых отождествлений граничных точек каждая из указанных ячеек действительно содержит 24 различных вершин — состояний.

Пространственный граф состояний

Не побоявшись пословицы «лучшее — враг хорошего», попробуем получить еще более точную модель состояний нашего куба, отправляясь от фундаментальных областей. Для этого придется выйти в трехмерное пространство.

Выделим сперва фундаментальную область, изображенную зелеными линиями на рисунке 3 и выпрямим горизонтальные ломаные линии. Тогда фундаментальная область превратится в прямоугольник, а сетка путей представится в виде регулярной кирпичной кладки из десяти «кирпичей» и четырех «полукирпичей» (рис. 4). Склеивая верхнюю и нижнюю стороны прямоугольника, получим трубку. Далее, скрутим эту трубку на пол-оборота и, изогнув ее, склеим торцы. Получим изображенную на рисунке 5 поверхность, называемую *тором*. Она покрыта сеткой из 12 шестиугольников с 24 вершинами и 36 ребрами. Если на каждую вершину мы запишем ее номер (пользуясь пронумерованным рисунком 3), то полученный *граф на торе дает полное описание нашей головоломки*. Действительно, каждой из 24 вершин на торе отвечает ровно одно из 24 состояний нашего куба, и от состояния к состоянию можно перейти за один ход тогда и только тогда, когда соответствующие вершины на торе соединены (черным) ребром (см. рис. 5).

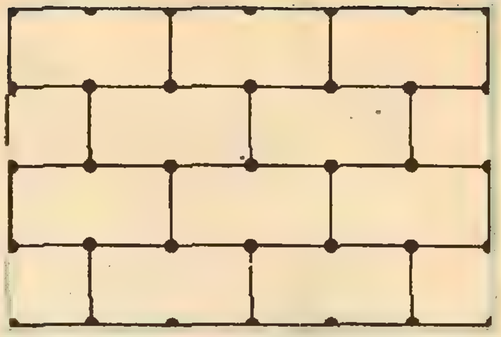


Рис. 4.

Геометрическая задача. Покажите, что отождествление границы других фундаментальных областей (см. рис. 3; красные шестиугольники и синие ромбы) по указанным выше правилам тоже дает тор с нарисованным на нем графом. Сравните этот граф с предыдущим.

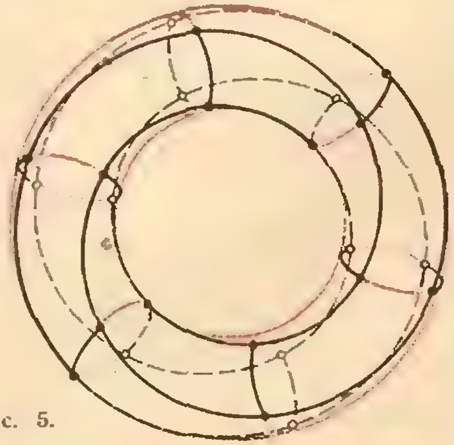


Рис. 5.

Группы преобразований

Увлекшись неожиданно возникшей здесь геометрией, нам не следует упускать из виду алгебраическую природу наших исследований, связанных с важным понятием группы преобразований. Непустая совокупность G преобразований некоторого множества*) называется *группой преобразований*, если

1° композиция любых двух преобразований из G также является преобразованием из G:

$$f, g \in G \Rightarrow f \circ g \in G;$$

2° преобразование, обратное к любому преобразованию из G, также содержится в G:

$$f \in G \Rightarrow f^{-1} \in G.$$

Из свойств 1° и 2° сразу следует, что тождественное преобразование I всегда содержится в G (ибо $f^{-1} \circ f = I$).

Легко видеть, что для нашей игры совокупность всех преобразований (то есть последовательностей ходов) куба является группой преобразований множества всех его состояний. Действительно, свойство 1° очевидно, свойство же 2° следует из того, что любой ход обратен сам к себе (см. (*)), а преобразование, обратное к любой последовательности ходов, является той же последовательностью, только выписанной в обратном порядке (проверьте!).

В качестве других примеров групп преобразований назовем семейство всех перемещений плоскости и совокупность всех взаимно-однозначных преобразований конечного множества (из n элементов) на себя. Последняя группа называется *группой подстановок**) (из n элементов) и обозначается S_n. (Проверьте для нее свойства 1° и 2° и покажите, что в S_n имеется $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ элементов).

С алгебраической точки зрения не существенно, какова природа преобразуемых элементов, а важна алгебраическая структура самих преобразований, то есть то, как устроена операция умножения $\circ$ (композиция) в совокупности G. Алгебраисты считают две группы преобразований G и H одинаковыми, если они *изоморфны*; это значит, что существует взаимно однозначное отображение $\alpha : G \to H$ группы G и H, сохраняющее операцию композиции, то есть удовлетворяющее свойству

$$g, g' \in G \Rightarrow \alpha(g \circ g') = \alpha(g) \circ \alpha(g').$$

Например, совокупность всех перемещений плоскости, переводящей в себя некоторый фиксированный равносторонний треугольник, является группой (почему?) и эта группа изоморфна группе подстановок множества из трех элементов S_3 (проверьте!).

Подробнее о группах преобразования и о важном понятии (абстрактной) *группы* можно прочитать в книге П. С. Александрова «Введение в теорию групп» (Библиотечка «Квант», вып. 7, М., 1980).

Алгебраическая модель игры

Мы покажем, что *группа преобразований нашего куба изоморфна группе S_4 перестановок четырех элементов*. Для этого занумеруем вершины куба (или, что то же, маленькие кубики) цифрами от *1* до *8*, как показано на рисунке 2. Легко видеть, что вершины *1—4* и *5—8* являются вершинами тетраэдров, вписанных в куб, причем при всех наших преобразованиях вершины *1—4* и *5—7* переходят друг в друга (а вершина *8* остается на месте). Таким образом, наши преобразования осуществляют перестановку вершин *1—4* и двадцати четырем преобразованиям куба взаимно однозначно сопоставляются $4! = 24$ перестановки четырех вершин. Трем ходам X, Y, Z соответствуют перестановки двух вершин: ходу X — вершин *1*, *2*, ходу Y — *1*, *3* и ходу Z — *1*, *4*. Таким образом, мы связали нашу исходную задачу с довольно простой задачей о представлении всех элементов группы перестановок четырех элементов в виде произведений трех базисных парных перестановок одного выделенного элемента с тремя остальными и показали, что

---

*) *Преобразованием* множества называется его взаимно однозначное отображение на себя

**) или *перестановок*

все остальные элементы группы можно построить в виде произведений не более чем четырех базисных элементов.

Наряду с геометрической, мы получили алгебраическую модель нашей игры.

Алгебраические задачи. 1. Покажите, что группа преобразований нашего куба однозначно описывается *основными* соотношениями (*); (**), (***). Это значит, что любое верное соотношение между ходами X, Y, Z может быть получено из основных *вставками* и *сокращениями*. (Вставкой называется операция над соотношениями, при которой в любое место уже полученного соотношения вставляется одна из левых частей основных соотношений например

$$XYXY = I \Rightarrow XY(ZZ)XY = I,$$

а сокращение — это операция, обратная к вставке, например:

$$ZXY(ZZ)YXZ = I \Rightarrow ZXYYXZ = I).$$

2. Покажите, что соотношения (*), (**) однозначно описывает группу тех перемещений плоскости, которые совмещают шестиугольную сетку саму с собой. (Указание. Ходу X отвечает симметрия плоскости относительно серединного перпендикуляра отрезка X — см. рис. 3).

Только ли игра?

Отметим в заключение, что в природе имеются объекты, обладающие свойствами, похожими на свойства нашего куба. Это так называемые *молекулы с внутренними вращениями*. Простейшей такой молекулой является молекула этана CH_3—CH_3, в которой один метильный радикал может поворачиваться относительно другого (рис. 6). Свойства симметрии таких молекул, описываемые группами преобразований, оставляющих молекулы неизменными, в настоящее время интенсивно изучаются. И хотя пока неизвестна молекула, обладающая как раз такой симметрией внутренних вращений, как рассмотренный нами куб, но не исключено, что она может быть найдена. Существует молекула «кубон», состоящая из восьми атомов углерода и восьми атомов водорода (рис. 7), похожая на рассмотренную здесь модель; но, по-видимому, свободного вращения одной грани относительно параллельной грани не происходит.

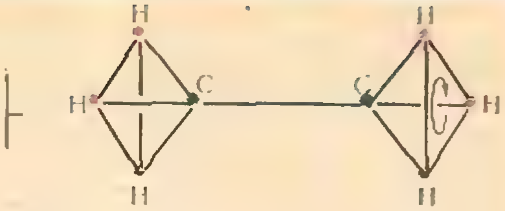


Рис. 4.

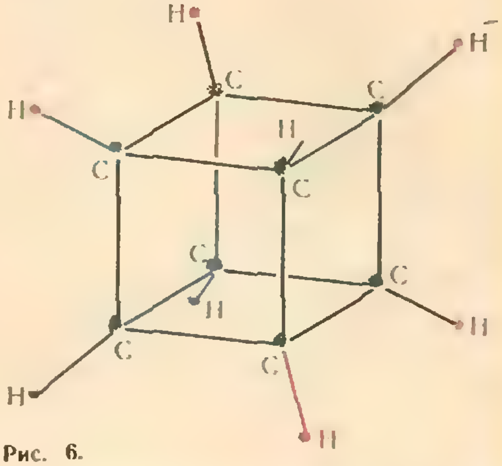


Рис. 6.

Отметим также, что двойная периодическая структура, которая видна на рисунке 3, встречается в реальных физических кристаллах. В этом случае мелкие шестиугольные ячейки соответствуют элементарным ячейкам кристалла, состоящим из атомов, в то время как бо́льшие ячейки связаны с более тонкими свойствами кристалла — ориентацией спинов атомов, размещением различных изотопов и т. д.

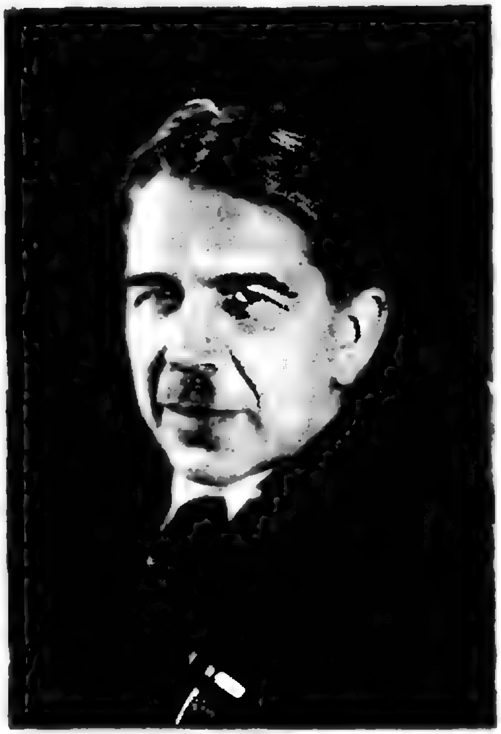
Отсюда видно, что исследованные группы симметрии такого типа может оказаться интересным и с физической точки зрения.

Поправка

В программу на с. 56 «Кванта», 1981, № 9 вкралось несколько опечаток, из которых укажем отсутствие метки 1 перед пятым оператором и пропуск знаков продолжения в записи оператора DATA. На с. 55 вместо CALL STR следует читать CALL STP.

В этом году исполнилось девяносто лет со дня рождения академика Сергея Ивановича Вавилова (12.3.1891—25.1.1951) — выдающегося советского физика и организатора науки, президента Академии наук СССР, директора Физического института имени П. Н. Лебедева АН СССР. С. И. Вавилов внес очень крупный вклад в развитие физической оптики, прежде всего — в изучение природы люминесценции. Вместе со своим учеником Павлом Алексеевичем Черенковым (впоследствии академиком) С. И. Вавилов открыл знаменитый эффект «сверхсветового электрона», получивший позднее имя авторов открытия.

С. И. Вавилов был активным пропагандистом естественно-научных знаний, автором нескольких превосходных научно-популярных книг. Мы помещаем здесь главу из его книги «О «теплом» и «холодном» свете», изданной в 1949 году. Текст дается с небольшими редакционными изменениями.



С. Вавилов

«Теплый свет» и тепловое излучение

> *«Надо подумать о безвредном свете гниющих деревьев и светящихся червей. Затем надо написать, что свет и теплоти не всегда взаимно связаны и потому различествуют».*
>
> М. В. Ломоносов

> *«Удивительная это вещь — свеча».*
>
> М. Фарадей. «История свечи»

Хорошо известно, что источнику света, до сего времени остающемуся господствующим, — электрической лампе накаливания — предшествовали многие тысячи лет развития и совершенствования. И все же с принципиальной стороны лампа накаливания мало отличается от первобытного костра. На обоих концах многотысячелетней эволюционной лестницы мы находим накаленное твердое тело в качестве излучателя. Вначале — это частицы твердого угля в пламени, в конце — накаленный металл вольфрам. Различие заключается в температуре и в других важных и существенных, но не принципиальных подробностях.

Разберем сначала привычные источники «теплого света». Вспыхивает спичка, давая на короткое время желтоватое пламя и свет. Температура пламени очень высокая, выше 1500°С. При этом, если следить за горением спички более внимательно, вначале (по крайней мере, в некоторых сортах спичек) ясно заметно своеобразное резкое желтое свечение, такое же, как при введении в бесцветное газовое пламя поваренной соли. Когда пламя устанавливается, часть его, около ствола спички, имеет слабую голубую окраску. Однако основная часть пламени светится привычным для нас желто-оранжевым, «теплым» светом, зависящим от накаливания пылинок сажи, находящихся в пламени. В стеариновой свече мы встречаемся с той же картиной — желто-оранжевым пламенем и слабо светящейся синей частью у фитиля; и здесь свет исходит, главным образом, от частиц угля, сосредоточенных в пламени и накаленных до температуры выше 1500°С. Мало чем в этом отношении отличаются керосиновая лампа и даже электрическая лампа накаливания. В первых моделях ламп Лодыгина и Эдиссона светилась угольная нить, накаливаемая током. В угольной лампе температура накала примерно на 100—200 градусов выше, чем в свечах и кострах. В современных вольфрамовых лампах накал доводится приблизительно до 2700°С. По качеству излучаемого света эти лампы все же ближе к костру, чем к Солнцу. Температура Солнца близка к 6000°С; до сих пор ни одно накаленное тело в практически приемлемых условиях не удалось довести до такого накала. Препятствием служит плавление металлов и их испарение. Вольфрам в этом отношении подходит больше всего (температура плавления 3380°С и малая испаряемость).

Даже при поверхностном наблюдении бросаются в глаза некоторые общие черты у самых разнообразных теплых источников света — спички, свечи, лампы накаливания, Солнца. Одна из таких особенностей состоит в следующем. Источник при одной и той же температуре светит тем ярче, чем темнее, чернее светящееся тело. Например, при одной и той же температуре прозрачное кварцевое стекло почти не светит, а кусок черного угля излучает весьма сильно. Чернота, так же как и белизна, конечно, не может возрастать безгранично; для нее существует предел, когда весь свет, какого угодно цвета, падающий на тело, без остатка в нем поглощается. Тело с такими свойствами называют «абсолютно черным телом». Осуществить такое тело с большим приближением к требуемым условиям не очень трудно. Всем хорошо известно, что если в яркий солнечный день, когда кругом все светится и блестит, посмотреть издалека через открытое окно или дверь вглубь закрытого помещения, то внутренние части кажутся угольно-черными, несмотря на то, что комнаты могут быть побелены или оклеены светлыми обоями. Происходит это потому, что лучи света, проникнув внутрь комнаты через окно, неизбежно там поглощаются вследствие многих рассеяний и отражений и наружу не выходят.

Отсюда становится понятным, как построить абсолютно черное тело: его можно изготовить из любого материала — угля, железа, белого фарфора и пр., если устроить некоторое замкнутое пространство с маленьким отверстием.

Абсолютно черное тело можно нагреть до высокой температуры, например, до накаливания, и поддерживать нагрев постоянным. Внутри полости тела со стенок будет излучаться свет, который должен вновь поглощаться на стенках. Наше тело — абсолютно черное, поэтому поглощение у него, по условию, максимальное, то есть полное. Но в то же время мы приняли меры к тому, чтобы температура тела была постоянной, поэтому максимальное поглощение должно возмещаться максимальным излучением, иначе температурное равновесие нарушится, тело нагреется.

Таким образом, мы приходим к выводу, что не только поглощение, но и излучение абсолютно черного тела должно быть максимальным. Вместе с тем, из этого же рассуждения следует, что излучение, поскольку оно максимальное, так же как и поглощение, не может зависеть от материала, из которого сделано тело. Заключение это имеет огромное теоретическое значение. В нем и кроется причина большого сходства самых разнообразных тепловых источников света. Костер, спичка, Солнце, лампочка накаливания по своим свойствам — достаточно «черные», они близки к абсолютно черному телу. Разница в значительной мере сводится к тому, что температура Солнца равна примерно 6000°С, а спички — около 1500°С. Если температура низкая, тело не может светиться за счет нагревания заметным видимым светом, оно будет излучать, главным образом, невидимые инфракрасные лучи с длинными волнами. При повышении нагрева тело начинает испускать темно-красный цвет. При дальнейшем возрастании температуры излучение становится оранжевым, желтым и, наконец, белым. С качественной стороны это одинаково справедливо как для абсолютно черного тела, так и, например, для лампы накаливания.

Нужно, однако, сделать одно важное замечание. Полое тело с небольшим отверстием полностью поглощает всякие лучи, любого цвета, с любыми длинами волн. Но существуют тела (конечно, не имеющие вида полости), полностью поглощающие только лучи определенного цвета, с определенной длиной волны. Такие тела можно назвать также абсолютно черными, но только в отношении некоторых длин волн. Рассмотрим, например, спиртовое пламя или газовое пламя в кислороде. Они почти бесцветны, хотя и имеют высокую температуру. Внесем в такое пламя немного обыкновенной столовой соли. Пламя приобретает резкую желтую окраску, такую же, какую имеют, как уже говорилось, некоторые спички в самом начале горения. В среднем пламя при этом остается прозрачным; вместе с тем оно начинает очень сильно поглощать свет в узкой области световых волн, в желтой части спектра; здесь оно становится абсолютно черным. Именно потому оно и светится.

Для большего пояснения этого существенного обстоятельства рассмотрим еще один интересный опыт. Химические элементы, называемые редкими землями, такие как неодим, празеодим, самарий и т. д., при введении их в стекло или кварц дают в спектре очень тонкие сильные полосы поглощения. Можно приготовить тонкую палочку или нитку из стекла или кварца с несколькими редкими землями. Если накалить такую палочку и посмотреть на нее в спектроскоп, то окажется, что светится только несколько тонких линий, как раз отвечающих поглощению редких земель; остальные части спектра — темные, так как само стекло или кварц в видимой части света не поглощают и потому при накаливании не светятся. Описанная стеклянная палочка стала «черной» только в отдельных узких спектральных областях.

Сказанное позволяет теперь объяснить ранее упоминавшиеся особенности горения спички и свечи. Ярко-желтая вспышка в начальной стадии горения у некоторых сортов спичек объясняется присутствием в головке спички ничтожного количества натрия, быстро, впрочем, выгорающего. Причина слабого синего свечения у ствола спички и фитиля свечи может быть объяснена тем, что в этих частях пламени еще не образовалась сажа. Здесь газ, обладающий некоторым поглощением в синей части спектра, светится свойственным ему тепловым излучением синего цвета. Как только начинает выделяться сажа, это слабое свечение перекрывается тепловым излучением накаленной сажи.

Таким образом, привычный оранжево-белый «тепловой тон» свечения костров и ламп накаливания — вовсе не обязательный признак того, что перед нами тепловой источник света. Тепловой источник может давать свет, сосредоточенный в отдельных линиях и полосах вовсе не «теплового», например синего, тона, и тем не менее оставаться тепловым.

Понятие о тепловом равновесном излучении было введено выше из рассмотрения абсолютно черного тела. В окружающем нас мире много, однако, тел, заведомо не абсолютно черных даже в узкой области спектра. Все тела (если не придавать им искусственно формы полости с малым отверстием) в какой-то мере отражают, рассеивают и пропускают часть падающего на них света и поэтому не могут быть абсолютно черными. Такие тела всегда, однако, можно нагреть и поддерживать их температуру постоянной. Наше собственное тело, как известно, нагрето и имеет в нормальных условиях довольно постоянную температуру. Должно, следовательно, существовать равновесие между излучением и поглощением света. Обозначим буквой a долю падающего света, которая поглощается рассматриваемым телом. Обозначим через E_0 энергию излучения абсолютно черного тела при той же температуре, которую имеет рассматриваемое тело, и через E — энергию, излучаемую в действительности телом. Тогда из условия равновесия между излучением и поглощением для рассматриваемого тела должно обязательно следовать

$$E = aE_0, \qquad (*)$$

так как поглощаемая энергия равна aE_0; в этом важном законе необходимо помнить, что все входящие в него величины (a, E и E_0) относятся к определенной длине волны света λ и к определенной температуре T. Иными словами, написанный закон можно выразить так: отношение тепловой излучательной способности любого тела к его поглощательной способности (для данных λ и T) равно излучательной способности абсолютно черного тела (для тех же λ и T).

Исходя, таким образом, из самых общих представлений о телах (именно — предполагая, что они в той или иной степени могут поглощать свет и находиться при этом при постоянной температуре), мы приходим к выводу, что любое тело — твердое, жидкое, газообразное — обязательно должно испускать тепловое излучение, если только оно находится в тепловом равновесии при температуре выше абсолютного нуля. В зависимости от степени нагрева этот свет будет видимым или невидимым.

Как уже указывалось выше, можно легко доказать, что не может существовать тела, излучение которого превышало бы излучение абсолютно черного тела при той же температуре. В этом смысле абсолютно черное тело — лучший, самый совершенный тепловой излучатель, и Фарадей в приведенных в начале главы словах имел основание удивляться обычной свече, свойства которой довольно близки к свойствам абсолютно черного тела, не говоря уже о ее практических преимуществах.

Такое «совершенство» абсолютно черного тела и близких к нему свечей и ламп накаливания, впрочем, очень относительно и условно. Дело в том, что все «тепловые излучатели» крайне неэкономичны в обычном техническом смысле слова; они превращают в видимый свет только ничтожную часть потребляемой ими энергии. Для абсолютно черного тела, находящегося при 2000°С, всего лишь 0,3% энергии переходит в видимый свет; при температуре в 3000°С коэффициент полезного действия поднимается до 3%. Выгоднее всего абсолютно черное тело должно работать около 6000°С, то есть при температуре Солнца. Причина этого, на первый взгляд удивительного совпадения состоит в том, что человеческий глаз биологически, в процессе развития, приспособился к солнечному свету, и поэтому свет от теплового излучателя с солнечной температурой наиболее экономичен. Однако экономичность даже этого самого выгодного абсолютно черного тела не велика; коэффициент полезного светового действия составляет приблизительно 13%, то есть 87% всей потребляемой источником энергии для глаза бесполезны. Для наиболее экономичных современных ламп накаливания мощностью 100 вт коэффициент полезного светового действия составляет всего 2—3%.

Естественно возникает вопрос: почему нельзя превратить всю энергию, сообщаемую абсолютно черному телу, или, во всяком случае, значительную ее часть в видимый свет? Что ставит этому границы?

Ответ на этот вопрос физикам удалось получить не легко; для этого пришлось произвести, в сущности, целую революцию в науке, потребовалось отказаться от многого общепринятого, считавшегося непреложной истиной.

Если абсолютно черное тело остается постоянно при одной и той же температуре и в то же время излучает свет, то, следовательно, вся непрерывно подводимая к телу энергия превращается в излучение. Только ничтожная доля этого излучения видима, остальная часть сосредоточена, главным образом, в области невидимых инфракрасных лучей с меньшими частотами световых колебаний (с бо́льшими длинами волн), чем у видимого света. Подводимая энергия, превращаясь в свет, распределяется между различными волнами, создавая непрерывный спектр теплового излучения. Процесс происходит подобно превращению механической или электрической энергий в тепло. При этом молекулы вещества приходят в поступательные, колебательные и вращательные движения с разнообразными скоростями, распределяясь по непрерывному закону. Такое распределение осуществляется посредством беспорядочных столкновений молекул друг с другом. Число молекул в данном объеме конечное, и, применяя обычные правила статистического расчета, можно определить наиболее вероятную среднюю энергию молекул и закон распределения энергии по молекулам.

До конца XIX века общепринятым в науке было мнение, что свет есть волновое движение среды, заполняющей пространство. Но если свет действительно таков, то, в отличие от частиц вещества, число которых в ограниченном объеме конечно, должно существовать бесконечное число возможностей распределения световой энергии по световым волнам при условии равновесия в тепловом излучении.

В самом деле, поскольку излучение абсолютно черного для всех волн тела не может зависеть от природы вещества, из которого изготовлено тело, в спектре его не может быть никаких характерных линий или полос, должны присутствовать все частоты колебаний, от очень малых до очень больших в непрерывном чередовании. При этом, с точки зрения старой, классической волновой теории света, все частоты равноправны и не имеют никаких преимуществ одна перед другой. А это значит, что на каждый бесконечно малый участок частот в спектре в среднем должна в условиях равновесия приходиться одна и та же бесконечно малая доля энергии.

Ясно, с другой стороны, что, по мере того как мы будем переходить от малых частот к большим, принципиально к бесконечно большим, мы будем встречать все большее число бесконечно малых участков частот, на каждый из которых приходится одна и та же бесконечно малая доля энергии излучения. Иными словами, с точки зрения классического волнового учения о свете в условиях теплового равновесия, энергия излучения обязательно должна непрерывно расти при передвижении по спектру от красной к фиолетовой части. Этот вывод, между тем, самым решительным образом расходится с опытом. В действительности во всех тепловых источниках, начиная с абсолютно черного тела, имеется максимум излучения, который в случае температур ниже 4000°С находится в инфракрасной области спектра и только при дальнейшем нагревании передвигается постепенно в видимую (желтую, зеленую и т. д.) часть. В фиолетовой области, вопреки теоретическому выводу, энергия при привычных для нас температурах не возрастает, а, наоборот, резко падает. Такое противоречие опыта самым общим представлениям о веществе и свете было справедливо названо физиками в свое время «фиолетовой катастрофой»; оно действительно обозначало необходимость полного отказа от многих установившихся воззрений, намечало целый переворот в естествознании.

На опыте получалось, что энергия распределяется по световым частотам примерно так же, как тепловая энергия распределяется по молекулам, то есть имеется отчетливый максимум. Единственно возможное объяснение опыта (до известной степени подсказываемое аналогией с молекулами) состояло в следующем. Вопреки всем прежним воззрениям и несмотря на несомненный волновой характер распространения света в пространстве, приходится принять, что его энергия сосредоточена в некоторых центрах, что свет поглощается и излучается молекулами только в виде целых порций энергии, названных квантами. Величина энергии кванта не постоянна; она пропорциональна частоте световых колебаний ν. Коэффициент пропорциональности h всегда один и тот же; он составляет весьма малую, но точно известную теперь величину, равную $6{,}62 \times 10^{-27}$ эрг · с.

Энергия кванта $h\nu$ совершенно ничтожна для радиоволн, где поэтому прерывное строение излучения практически не заметно; но квант приобретает все более ощутимые значения при переходе через видимый свет к лучам Рентгена. Здесь «зернистость» световой энергии проявляется вполне ясно и резко.

Почти за полвека после открытия квантов энергии были найдены бесчисленные другие доказательства их

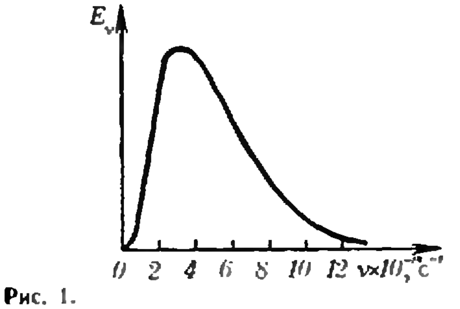


Рис. 1.

существования. В настоящее время это твердо установленная истина.

Представление о квантах световой энергии вполне объяснило свойства теплового излучения и дало возможность рассчитывать спектр излучения абсолютно черного излучателя для любых температур. На рисунке 1 изображено вычисленное таким образом распределение энергии в спектре теплового излучения абсолютно черного тела для солнечной температуры 6000°С. Максимум изображенной кривой соответствует длине волны 0,483 мк, то есть сине-зеленой области спектра.

На рисунке 2 в сжатом логарифмическом виде представлено распределение энергии в спектре абсолютно черного тела для громадного интервала температур, начиная от абсолютного нуля до 50 000 К. По оси абсцисс отложены логарифмы длин волн в сантиметрах, по ординатам — логарифмы величины, пропорциональной интенсивности излучения. Действительные длины волн указаны на нижней шкале в микронах. При таком изображении максимумы спектра излучения располагаются на прямой линии, как отмечено пунктиром на рисунке. Из этого рисунка сразу видно, например, что при температуре человеческого тела (около 310 К) максимум излучения абсолютно черного тела соответствует длине волны около 10 мк в далекой невидимой инфракрасной части спектра. Максимум свечения при привычных для нас температурах тепловых ис-

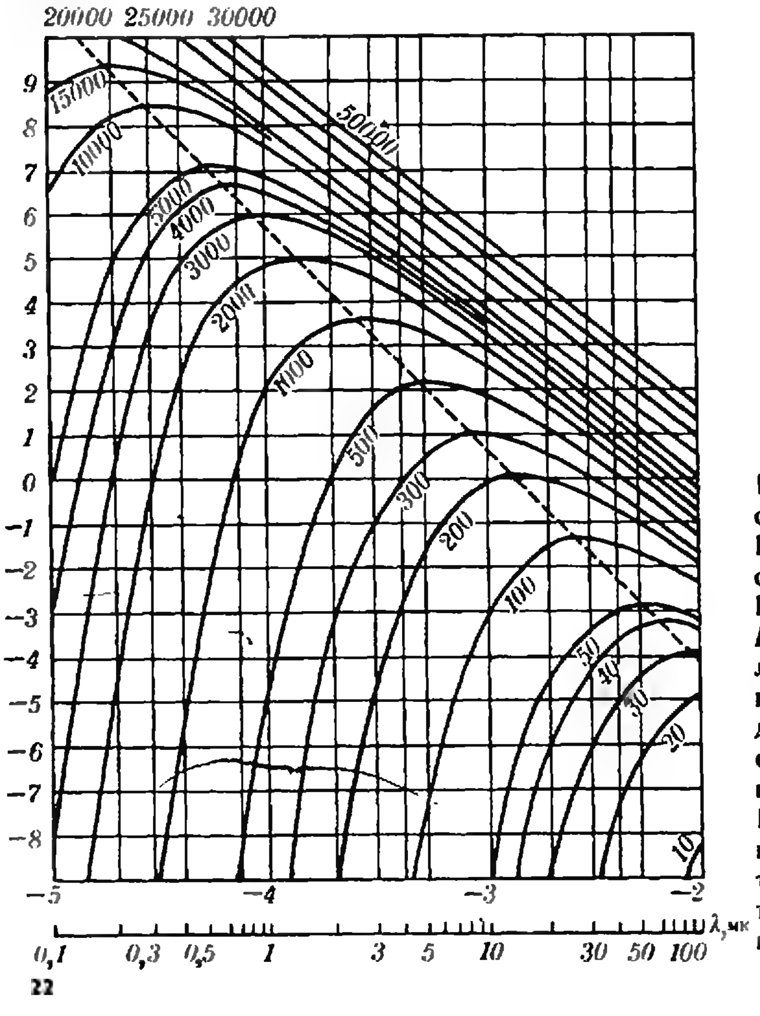


Рис. 2. По оси абсцисс отложены значения lg λ ([λ] = см), по оси ординат — значения lg $2I_\lambda$ ([I] = Вт/см^5). I — интенсивность излучения, то есть мощность излучения, приходящаяся на единицу объема абсолютно черного тела.

Каждая кривая соответствует определенной температуре черного тела (числа у кривых — значения T, К).

точников (около 3000 К) отвечает примерно 1 мк, то есть также находится в невидимой инфракрасной области спектра.

Легко понять на основании закона (*), что для излучателей не черных, то есть не полностью поглощающих падающий на них свет, спектральные кривые излучения расположатся ниже.

Только после того как удалось установить квантовый характер излучения и поглощения света, стал возможным ответ на первый вопрос, поставленный выше, — о причине малости коэффициента полезного светового действия тепловых излучателей. До открытия квантов это оставалось, в сущности, неразрешимой задачей.

Теперь мы знаем, что при тепловом равновесии абсолютно черного тела средняя тепловая энергия его молекул, участвующая в тепловом обмене, и средняя энергия световых квантов, находящихся в энергетическом равновесии с молекулами, должны быть теми же самыми, иначе равновесие было бы нарушено.

При этом надо иметь в виду, что энергия по спектру распределяется по обе стороны от указанного среднего значения. Как видно из рисунков 1 и 2, даже при самых выгодных условиях, при температуре, близкой к 6000°С, когда максимум теплового излучения совпадает с максимумом спектральной чувствительности человеческого глаза, основная часть энергии излучения приходится по обе стороны от максимума, то есть в условиях меньшей или полностью отсутствующей видимости. В этом и кроется причина очень малой экономичности тепловых излучателей. В условиях теплового равновесия между излучением и телом нет возможности сосредоточить всю энергию на световых квантах, наиболее выгодных для глаза.

Новости науки

Отрицательный ион позитрония

Давно известно, что позитрон и электрон могут образовать связанную систему, похожую на атом водорода, в которой роль ядра (протона) играет позитрон. Такая система называется позитронием.

На самом деле сравнение позитрония с атомом водорода не совсем точно. В атоме водорода протон значительно тяжелее электрона (в 1836 раз), и потому с большой точностью можно считать, что движется только электрон, а протон стоит на месте. Про позитроний так говорить нельзя: массы позитрона и электрона одинаковы. Позитроний лучше представлять как систему двух зарядов, которые обращаются вокруг общего центра масс, находясь на одинаковом расстоянии от него. Таким образом, позитроний выглядит как вращающийся электрический диполь. Расстояние между электроном и позитроном может либо оставаться постоянным, либо изменяться. В первом случае орбиты частиц являются круговыми, во втором — эллиптическими.

Конечно, описывать движение электрона и позитрона так, как описывают движение планет, незаконно. Позитроний — система квантовая, и описание его с помощью орбит передает лишь грубые (но зато главные) черты этой системы.

Хотя позитроний в целом — система нейтральная (его заряд равен нулю), это не означает, что он не окружен электрическим полем. Поля не было бы, если бы оба заряда располагались в одном месте. В позитронии же заряды находятся на расстоянии примерно $0{,}2 \cdot 10^{-8}$ см друг от друга, и потому поле, создаваемое позитроном, не уничтожается полностью полем, которое создается электроном. В результате позитроний может притянуть к себе еще один заряд — электрон или позитрон, и образовать связанную систему, состоящую из трех частиц.

Такую систему, которая состоит из двух электронов и одного позитрона, удалось создать в конце 1980 года американскому физику Миллсу. Ее назвали отрицательным ионом позитрония. Обозначают этот ион Ps^-.

В опытах Миллса пучок позитронов проходил в вакууме через тонкую ($4 \cdot 10^{-7}$ см) пленку углерода; при этом позитроны захватывали электроны и образовывали позитроний и Ps^-. На 10^4 позитронов, проходящих через пленку, возникало около 3 Ps^-.

Заметим, что Ps^- — система слабо связанная: когда позитроний присоединяет к себе электрон, выделяется энергия, равная 0,3266 эВ. Для сравнения скажем, что, для того чтобы «разорвать» позитроний, надо затратить энергию 6,5 эВ. Ps^- распадается с излучением двух гамма-квантов со средним временем жизни 0,5 нс.

Очевидно, должен существовать и положительный ион позитрония Ps^+, аналог иона молекулы водорода, содержащего два протона и один электрон. Однако его получить значительно труднее.

В открытии отрицательного иона позитрония нет ничего неожиданного, но оно демонстрирует новые возможности физического эксперимента наших дней.

Я. Смородинский

задачник кванта

Задачи

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Задачи по математике этого номера предлагались на XXII Международной олимпиаде школьников, проходившей в Соединенных Штатах Америки.

Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 февраля 1982 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 12—81» и номера задач, решения которых вы посылаете, например, «М716, М717» или «Ф728». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи.

М716—М720; Ф728—Ф732

М716. Из точки P внутри данного треугольника ABC опускаются перпендикуляры PA_1, PB_1, PC_1 на прямые BC, CA и AB. Для каких точек P внутри $\triangle ABC$ величина

$$\frac{|BC|}{|PA_1|}+\frac{|CA|}{|PB_1|}+\frac{|AB|}{|PC_1|}$$

принимает наименьшее значение?

М717. Даны натуральные числа n и r, $1 \leqslant r \leqslant n$. Рассмотрим всевозможные подмножества множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, состоящие из r чисел, и в каждом выберем наименьшее число. Докажите, что среднее арифметическое всех выбранных чисел равно $(n+1)/(r+1)$. (Например, при $n=3$, $r=2$ получаем три подмножества $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$ и среднее арифметическое равно $(1+1+2)/3=4/3$).

М718. Найдите наибольшее значение выражения m^2+n^2 для всевозможных пар $(m; n)$ натуральных чисел, таких что $1 \leqslant m \leqslant 1981$, $1 \leqslant n \leqslant 1981$ и $|n^2-mn-m^2|=1$

М719. а) Для каких $n \geqslant 3$ существует множество из n последовательных натуральных чисел, обладающих следующим свойством: наибольшее из этих n чисел является делителем наименьшего общего кратного остальных $n-1$ чисел?

б) При каких $n \geqslant 3$ существует единственное множество из n последовательных чисел, обладающее указанным свойством?

М720. Про функцию f, определенную на множестве всех пар неотрицательных целых чисел $(x; y)$, известно следующее:

1°. $f(0, y)=y+1$,
2°. $f(x+1, 0)=f(x, 1)$,
3°. $f(x+1, y+1)=f(x, f(x+1, y))$

для каждой пары $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Найдите значение $f(4, 1981)$.

Ф728. Три маленьких шарика с одинаковыми массами — красный, синий и зеленый, закреплены невесомым каркасом в вершинах равностороннего треугольника со стороной l. Система положена на гладкую горизонтальную поверхность и приведена во вращение с периодом T вокруг центра масс.

В некоторый момент красный шарик отрывается от каркаса. На каком расстоянии от синего шарика он окажется спустя время T?

В. Григорьев

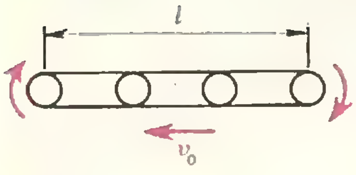


Рис. 1.

Ф729. Лента транспортера длины l движется со скоростью v_0 (рис. 1). С какой скоростью нужно толкнуть кубик массы m против движения транспортера для того, чтобы количество тепла, выделившегося за счет работы силы трения между кубиком и лентой транспортера, было максимальным? Чему равно это максимальное количество тепла, если коэффициент трения равен μ и выполняется условие $v_0^2<2\mu lg$?

Т. Мякишев

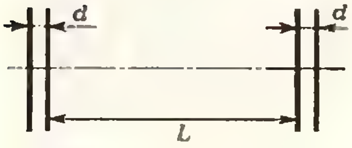


Рис. 2.

Ф730. Два плоских конденсатора расположены так, как показано на рисунке 2. Растояние L между конденсаторами много больше размеров их обкладок и расстояния d между обкладками. Заряд одного конденсатора q_1, заряд другого q_2. С какой силой притягиваются эти конденсаторы?

В. Петерсон

Ф731. Две одинаковые частицы с зарядами q и массами m вылетают одновременно из одной точки в направлении, перпендикулярном силовым линиям однородного магнитного поля с индукцией $\vec{B}$. Выразить расстояние между частицами как функцию времени, если начальные скорости частиц направлены одинаково и равны $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$.

В. Алешкевич

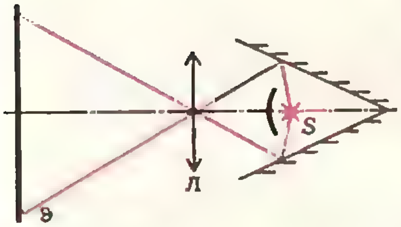


Рис. 3.

Ф732. Точечный предмет S находится на оси полого конуса с зеркальной внутренней поверхностью (рис. 3). С помощью линзы Л на экране Э получают изображение предмета, создаваемое лучами, однократно отраженными от зеркальной поверхности конуса (прямые лучи от предмета на линзу не попадают). Что произойдет с изображением, если линзу закрыть диафрагмой такой, как а) на рисунке 4, *а*? б) на рисунке 4, *б*?

Д. Белов

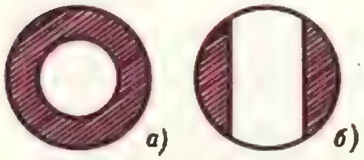


Рис. 4.

PROBLEMS M716—M720; P728—P732

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it

M716 Perpendiculars PA_1, PB_1, PC_1 to the lines BC, CA and AB are constructed from an inner point P of triangle ABC. For what points P inside the triangle does the expression

$$\frac{|BC|}{|PA_1|}+\frac{|CA|}{|PB_1|}+\frac{|AB|}{|PC_1|}$$

assume its least value?

M717 For the given natural numbers n and r, $1\leqslant r\leqslant n$, consider all the subsets of the set $\{1, 2, \ldots, n\}$ consisting of r numbers and choose the smallest number in each. Show that the arithmetical mean of the chosen numbers equals $(n+1)/(r+1)$. (E. g., for $n=3$, $r=2$, we have three subsets $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$ and the mean is $(1+1+2)/3=4/3$).

to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. In particular, problems M716, M720 were proposed at the XXII International Mathematics Olympiad (which was held last summer in the USA). The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than February 15th to the following adress: USSR, Moscow, 113035 МОСКВА, Б. ОРДЫНКА 21/16, «КВАНТ». Please send us the solutions of physics and mathematics problems, as well as solutions of problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words «KVANT'S PROBLEMS» and the numbers of all the solved problems, in your letter enclose an unstamped self-adressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. The list of prizewinners is published in the September issue.

If you have an original problem to propose for publication, please send it to us in two copies (including the solution) in an envelope inscribed «NEW PROBLEM IN PHYSICS (MATHEMATICS)».

M718 Find the greatest value of the expression m^2+n^2 for all pairs (m, n) of natural numbers satisfying $1\leqslant m\leqslant 1981$, $1\leqslant n\leqslant 1981$ and $|n^2-mn-m^2|=1$.

M719 a) For what $n\geqslant 3$ does there exist a set of n successive natural numbers, the largest of which divides the least common multiple of the other $n-1$ numbers?

b) For what $n\geqslant 3$ does there exist a unique set of n successive numbers with the above property?

M720 The function f, defined for all pairs of non-negative integers (x, y), satisfies

1° $f(0, y)=y+1$,

2° $f(x+1, 0)=f(x, 1)$,

3° $f(x+1, y+1)=f(x, f(x+1, y))$

for all $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$. Compute $f(4, 1981)$.

P728 Three small marbles of equal mass — blue, red and green — are fixed at the vertices of an equilateral triangle of side l by a weightless frame. This system is placed on a smooth horizontal plane and rotated about its center of mass so that it spins with period T. At some moment of time the red marble is disconnected from the frame. How far will the red marble be from the blue one after time T?

V. Grigoriev

P729 A conveyor belt of length l moves with velocity v_0 (see the figure Рис. 1, p 25). With what velocity must a cube of mass m be pushed against the direction of motion of the belt in order to ensure maximum heat production by friction? What is the value of this maximum if the friction coefficient is μ and the relation $v_0^2<2l\mu g$ holds?

G. Myakishev

P730 Two plane condensators are placed as shown on the figure Рис. 2, p 25). The distance L between the condensators is much greater than the size of and the distance between their plates. The charge of one condensator is q_1, that of the other is q_2. What is the force of attraction between the condensators?

V. Peterson

P731 Two particles of mass m and charge q fly out simultaneously from the same point, perpendicularly to the lines of a magnetic field of constant induction $\vec{B}$. Express the distance between the particles as a function of time if the initial velocities $\vec{v}_1$ and $\vec{v}_2$ have the same direction.

V. Aleshkevich

P732 An object S is placed inside a hollow cone whose inner surface is a (curved) mirror (see the figure Рис. 3, p 25). By using the lens $Л$, an image of the object is obtained on the screen $Э$ from rays once reflected by the mirror surface of the cone (the direct rays do not reach the lens). What happens to the image if the lens is covered by a diaphragm as in a) the picture Рис. 4, *а*? b) the picture Рис. 4, *б*?

D. Belov

Решения задач

M676—M680; Ф688—Ф691

M676. *Докажите, что для любого натурального m сумма цифр числа 1981^m не меньше 19.*

Обозначим сумму цифр числа A через $S(A)$. Числа A и $S(A)$ имеют одинаковый остаток при делении на 9. Поэтому число $S(1981^n)$ при делении на 9 дает в остатке 1, то есть является одним из чисел 1, 10, 19, 28,...

Поскольку число 1981^n кончается на 1 и не равно 1, $S(1981^n)\neq 1$.

Предположим, что $S(1981^n)=10$. Поскольку 1981^n кончается на 1, $S(1981^n-1)=9$. Значит сумма S_1 его цифр,

---

Решение задачи M675 содержится в заметке «Системы разновесов» на с. 34.

стоящих на нечетных местах заключена между 0 и 9; аналогично для суммы S_2 его цифр, стоящих на четных местах. Поскольку 1981^n-1 делится на 11, S_1 и S_2 имеют одинаковый остаток при делении на 11. (Здесь мы используем известный признак делимости на 11: *чтобы число A делилось на 11, необходимо и достаточно, чтобы разность между суммами цифр, стоящих на четных и на нечетных местах, делилась на 11.* Его нетрудно доказать, используя тот факт, что $100^{2m}-1$ при любом m делится на $100^2-1=99$ и, стало быть, на 11.) Но $0<S_1<9$ и $0<S_2<9$. Значит $S_1=S_2$ — противоречие с $S_1+S_2=9$.

Следовательно, $S(1981^n)\geqslant 19$.

А. Савкин

◆

М677. *Внутри остроугольного треугольника ABC выбрана точка M, являющаяся*

а) точкой пересечения медиан;

б) точкой пересечения биссектрис;

в) точкой пересечения высот.

Докажите, что если радиусы окружностей, вписанных в треугольники AMB, BMC, AMC, равны, то треугольник ABC — правильный.

а) Площади треугольников AMB, BMC и AMC (рис. 1) одинаковы — они равны $\frac{1}{3}S_{ABC}$ (докажите это).

Поскольку площадь S треугольника, его полупериметр p и радиус r вписанной в него окружности связаны соотношением $S=pr$, периметры треугольников AMB, BMC и AMC также одинаковы.

Предложим теперь, что треугольник ABC — неправильный; пусть, например, $|AB|>|BC|$. Тогда угол BDA — тупой; поэтому $|AM|>|MC|$, так что периметр треугольника AMB больше периметра треугольника BMC — противоречие.

б) Поскольку $\widehat{CBM}=\widehat{ABM}$ и радиусы окружностей, вписанных в треугольники AMB и BMC, равны, эти окружности касаются биссектрисы BM в одной и той же точке (рис. 2). Из этого следует, что все три окружности попарно касаются, и их центры O_1, O_2 и O_3 образуют правильный треугольник, стороны которого перпендикулярны биссектрисам данного треугольника ABC. Поэтому, например, $\widehat{BMC}=\frac{\pi+\widehat{A}}{2}=\frac{2\pi}{3}$, то есть $\widehat{A}=\frac{\pi}{3}$. Аналогично доказывается, что $\widehat{B}=\widehat{C}=\frac{\pi}{3}$.

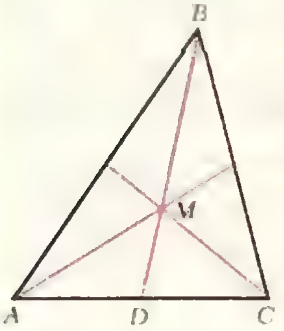


Рис. 1.

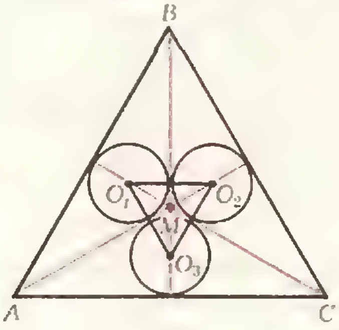


Рис. 2.

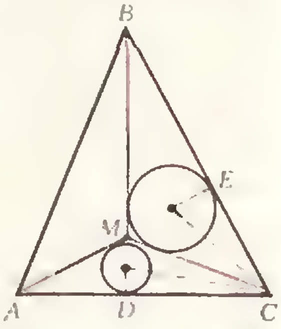


Рис. 3.

в) Как и в задаче а), предположим, что треугольник ABC — неправильный; пусть, например, $|BC|>|AC|$. Обозначим через D и E точки касания окружностей, вписанных в треугольники AMC и BMC соответственно, со сторонами AC и BC (рис. 3). Поскольку радиусы этих окружностей равны и $\widehat{CAM}=\widehat{CBM}$, $|AD|=|BE|$. Значит, $|CD|<|CE|$.

С другой стороны, при нашем предположении $\widehat{B}<\widehat{A}$, так что $\widehat{MCA}=\frac{\pi}{2}-\widehat{A}<\frac{\pi}{2}-\widehat{B}=\widehat{BCM}$. Поэтому $|CD|>|CE|$ — противоречие.

А. Егоров

◆

М678. *2m-значное число называется **справедливым**, если его четные разряды содержат столько же четных цифр, сколько и нечетные.*

Заметим вначале, что если мы в любое место $(2m-2)$-значного справедливого числа добавим две идущие подряд цифры одинаковой четности или добавим по цифре одинаковой четности в его начало и в конец, то получающееся при этом $2m$-значное число останется справедливым.

Докажите, что в любом $(2m+1)$-значном числе можно вычеркнуть одну из цифр так, чтобы полученное $2m$-значное число было справедливым.

Теперь докажем требуемое утверждение индукцией по m. При $m=1$ оно верно, поскольку в трехзначном числе всегда можно вычеркнуть цифру так, чтобы две оставшиеся были одинаковой четности. Предположим, что утверждение задачи верно для некоторого m, и докажем, что оно верно для $m+1$.

В любом $(2m+3)$-значном числе всегда найдутся две цифры одинаковой четности, стоящие либо рядом, либо одна — в начале, а другая — в конце числа. Вычеркнув на время две эти цифры, получим $(2m+1)$-значное число, в котором, по предположению индукции, можно вычеркнуть одну цифру так, что получившееся $2m$-значное число будет справедливым. Восстановив в нем две вычеркнутые ранее цифры одинаковой четности, получим согласно сделанному замечанию справедливое $(2m+2)$-значное число.

А. Сидоренко

◆

М679. *а) На плоскости расположены четыре круга так, что первый касается второго в точке A, второй — третьего в точке B, третий — четвертого в точке C и четвертый — первого в точке D. Докажите, что через четыре названные точки можно провести окружность или прямую.*

б) В пространстве расположены четыре шара так, что первый касается второго в точке A, второй — третьего в точке B, третий — четвертого в точке C и четвертый — первого в точке D. Докажите, что через четыре названные точки можно провести окружность или прямую.

в) В пространстве расположены четыре шара так, что каждый касается трех других. Докажите, что шесть точек касания принадлежат одной сфере или одной плоскости.

а) Прежде всего ясно, что если какие-то три из точек A, B, C, D лежат на одной прямой, то и четвертая точка лежит на той же прямой (рис. 1).

Пусть все четыре круга касаются внешним образом (рис. 2) и пусть AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 — отрезки общих касательных.

Из $\widehat{A_1AD}=\widehat{D_1DA}$, $\widehat{D_1DC}=\widehat{C_1CD}$, $\widehat{B_1BC}=\widehat{C_1CB}$ и $\widehat{A_1AB}=\widehat{B_1BA}$ следует $\widehat{A}+\widehat{C}=\widehat{B}+\widehat{D}$; значит, около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность.

В случае, когда не все четыре круга касаются внешним образом (рис. 3), рассуждения аналогичны.

б) Если центры шаров лежат в одной плоскости, то и все точки касания лежат в этой плоскости, так что в этом случае задача б) сводится к задаче а).

Если же центры O_1, O_2, O_3, O_4 — не в одной плоскости, проведем плоскость через три точки касания, например, A, B, C (рис. 4), и докажем, что четвертая точка D принадлежит этой плоскости.

Пусть h_1, h_2, h_3, h_4 — расстояния от точек O_1, O_2, O_3, O_4 до плоскости (ABC), а R_1, R_2, R_3, R_4 — радиусы шаров. Ясно, что $\frac{h_1}{h_2}=\frac{R_1}{R_2}$, $\frac{h_2}{h_3}=\frac{R_2}{R_3}$, $\frac{h_3}{h_4}=\frac{R_3}{R_4}$ (см. рис. 4). Перемножая эти отношения, получаем $\frac{h_1}{h_4}=\frac{R_1}{R_4}=\frac{|O_1D|}{|O_4D|}$, что и означает принадлежность точки D плоскости (ABC).

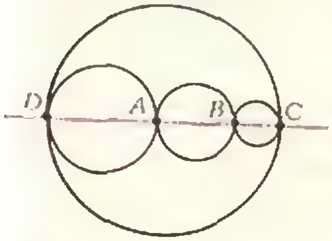


Рис. 1.

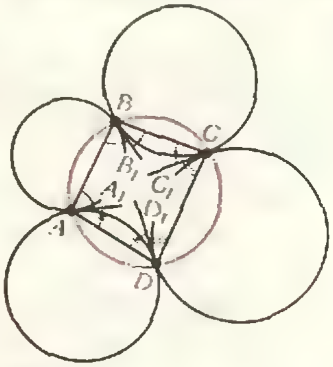


Рис. 2.

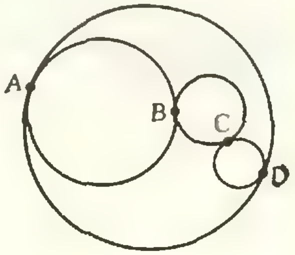


Рис. 3.

Таким образом, плоскость ABC пересекает шары по четырем кругам, касающимся, соответственно, друг друга в точках A, B, C, D так, как сказано в пункте а). Из этого следует утверждение задачи б).

в) Пусть A — точка касания первого и второго, B — первого и третьего, C — первого и четвертого, D — второго и третьего, E — второго и четвертого, F — третьего и четвертого шаров.

По доказанному в пункте б) точки A, C, F, D лежат на одной окружности или прямой. Точки A, E, F и B обладают тем же свойством.

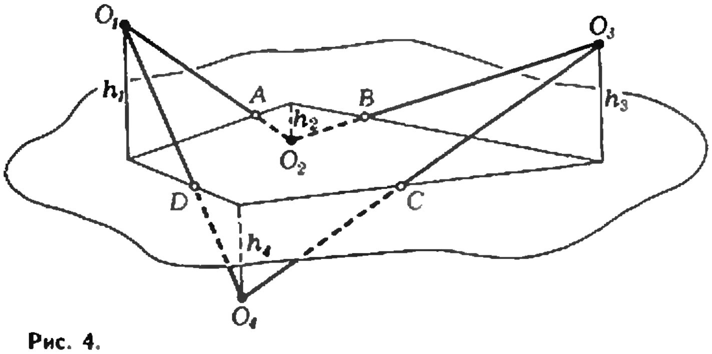


Рис. 4.

У этих двух четверок точек есть две общие точки: A и F. Поэтому если одна из четверок лежит на прямой, все шесть точек лежат в одной плоскости.

Если же эти четверки лежат на двух окружностях, находящихся в разных плоскостях и имеющих общую хорду AF, то через эти окружности можно провести сферу: центром этой сферы является точка пересечения перпендикуляров к плоскостям этих окружностей, проведенных через центры окружностей (эти перпендикуляры лежат в плоскости, проходящей через центры окружностей и середину их общей хорды AF).

В. Произволов

◆

M680. *Два связиста играют в такую игру. Имеется n телефонных узлов, и связисты по очереди соединяют кабелями два из них по своему выбору.*

Выигрывает тот, после хода которого с любого узла можно будет дозвониться до любого другого (может быть, через несколько промежуточных).

а) Выясните, кто выигрывает при $n=4, 5, 6, 7, 8$ — начинающий или его партнер?

б) Каков ответ при произвольном n?

Рассмотрите также два видоизмененных варианта игры:

в) Пусть игрок, связавший все узлы, проигрывает. Ответьте на вопросы а) и б) для этой новой игры.

г) Пусть вначале все узлы попарно соединены кабелем, и связисты убирают по очереди по одному соединению. Игрок, нарушивший связь в схеме, проигрывает. Вопрос тот же, что и в пунктах а) и б).

а) При $n=4, 7, 8$ выигрывает первый игрок, при $n=5, 6$ — второй; это будет следовать из решения общей задачи б).

б) Будем называть группу узлов *связной*, если любые два входящие в нее узла соединены (может быть, через несколько других узлов). Связную группу узлов будем называть *компонентой*, если ни один из входящих в нее узлов не соединен ни с одним из узлов, в ней не содержащихся. Ясно, что любой *граф* (система как-то соединенных узлов) состоит из одной или нескольких компонент.

При любой игре противников настанет момент, когда множество всех узлов окажется разбитым на три компоненты A_1, A_2, A_3. Пусть a_1, a_2, a_3 — количества узлов в этих компонентах. Ясно, что проигрывает тот из игроков, кому придется первым соединить какие-то две из этих компонент. Критическая ситуация возникает, когда все возможные соединения внутри компонент A_1, A_2, A_3 будут осуществлены.

Ясно, что с начала партии до наступления такого момента будет сделано

$$N=\frac{a_1(a_1-1)}{2}+\frac{a_2(a_2-1)}{2}+\frac{a_3(a_3-1)}{2}=\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2-n}{2}$$

ходов. Если число N окажется четным, то первый игрок проигрывает, если же нечетным — то выигрывает. Четность числа N, очевидно, определяется остатком, который дает число $a_1^2+a_2^2+a_3^2-n$ при делении на 4. Так как остаток от деления на 4 числа $a_1^2+a_2^2+a_3^2$ равен количеству нечетных чисел среди чисел a_1, a_2, a_3 (убедитесь в этом), первый игрок должен добиваться того, чтобы количество нечетных чисел среди a_1, a_2, a_3 не совпадало с остатком от деления n на 4. Второй же, наоборот, должен стремиться к их совпадению.

В дальнейшем компоненты с четным числом узлов мы будем называть *четными*, а с нечетным числом узлов — *нечетными*.

Рассмотрим отдельно четыре случая: $n=4k$, $n=4k+1$, $n=4k+2$, $n=4k+3$.

1°. $n=4k$. Первый игрок добивается победы, играя следующим образом. Пока компонент более трех, он играет так, чтобы после каждого его хода получалось не более одной четной компоненты: если в какой-то момент возникают две четные компоненты, он тут же объединяет одну из них с нечетной. В момент появления трех компонент (независимо от того, после чьего хода это произойдет) две компоненты будут

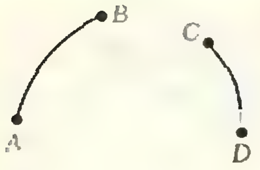


Рис. 1.

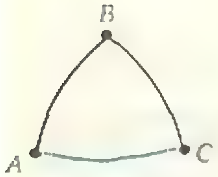


Рис. 2.

нечетными, а одна четной. Число N при этом нечетно — первый игрок выигрывает.

2°. $n=4k+1$. В этом случае выигрывает второй игрок, поскольку он может играть так, чтобы после каждого его хода было не менее двух четных компонент (убедитесь в этом). При этом среди чисел a_1, a_2, a_3 два непременно будут четными, а одно — нечетным (независимо от того, чей ход приведет к образованию трех компонент).

3°. $n=4k+2$. И в этом случае выигрывает второй игрок, применяя стратегию первого игрока в случае $n=4k$, так как при $n=4k+2$ среди чисел a_1, a_2, a_3 будут два нечетных.

4°. $n=4k+3$. Этот случай наиболее интересен.

При $n=3$, очевидно, выигрывает второй игрок.

Докажем, что при $n>3$ выигрывает первый игрок.

Если первый игрок своим первым ходом соединяет какие-то два узла A и B, а второй игрок — два других узла C и D (рис. 1), то первый игрок выигрывает, применяя стратегию второго игрока для случая $n=4k+1$. Если же второй игрок соединяет узел A с третьим узлом C, то вторым ходом первый игрок замыкает треугольник, соединяя узлы C и B (рис. 2). Второй игрок при этом любым ответным ходом создает четную компоненту. После этого первый игрок добивается того, чтобы после каждого его хода было не меньше двух четных компонент. Среди чисел a_1, a_2, a_3, как и в случае $n=4k+1$, будут два четных, что в данном случае обеспечивает победу первому игроку.

в) Этот пункт аналогичен предыдущему. При любой игре противников настанет момент, когда множество узлов разобьется на две компоненты A_1 и A_2 по a_1 и a_2 узлов. Проигрывает тот из игроков, кому придется соединить компоненты A_1 и A_2. Рассуждая так же, как и раньше, получим, что до наступления критического момента будет сделано $N=\dfrac{a_1^2+a_2^2-n}{2}$ ходов.

Вновь рассмотрим те же четыре случая.

1°. $n=4k$. Второй игрок выигрывает, добиваясь того, чтобы после каждого его хода было две четные компоненты (при этом N — четно).

2°. $n=4k+1$. Выигрывает второй игрок, так как, независимо от хода игры, одно из чисел a_1 или a_2 будет нечетным, а N — четным.

3°. $n=4k+2$. Первый игрок при $k\geqslant 1$ добивается победы так же, как в случае 4° пункта б): ему достаточно следить за тем, чтобы после каждого его хода, кроме, может быть, второго, было не менее двух четных компонент, чего он и добивается (см. рисунки 1, 2).

4°. $n=4k+3$. Выигрывает первый игрок, независимо от хода игры (докажите!).

г) Назовем связную группу узлов B_1, B_2, …, B_m *циклом*, если узел B_1 соединен с узлом B_2, узел B_2 — с узлом B_3, …, а узел B_m соединен с узлом B_1. Ясно, что если в связной системе узлов есть циклы, то игрок, делающий очередной ход, не проигрывает: он может разорвать любое из соединений в любом цикле — система останется связной.

Таким образом, выигрывает тот из игроков, после чьего хода в системе не остается циклов. Докажем, что в связной системе из n узлов, не содержащей циклов (такая система в теории графов называется *деревом*), имеется ровно $n-1$ соединение. Для этого зафиксируем какой-нибудь узел B и заметим, что существует единственный путь, ведущий из B в любой другой узел. Вдоль всех путей, выходящих из B, расставим стрелки, показывающие направление от B. В каждый из узлов, кроме B, входит ровно одна стрелка и, значит, общее число стрелок равно $n-1$.

Таким образом, дерево образуется после

$$N=\frac{n(n-1)}{2}-(n-1)=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

ходов. Следовательно, при $n=4k$ и $n=4k+3$ выигрывает первый игрок (N — нечетно), а при $n=4k+1$ и $n=4k+2$ — второй (N — четно).

А. Разборов

Ф688. *Тонкий обруч массы M и радиуса R жестко закреплен при помощи легких спиц на легкой тонкой оси, проходящей через центр обруча так, что плоскость обруча составляет с осью угол α (рис. 1). Определить, какую работу необходимо совершить, чтобы раскрутить ось до угловой скорости ω.*

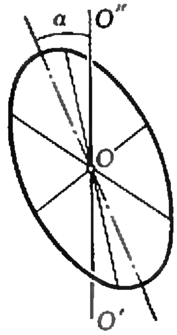


Рис. 1.

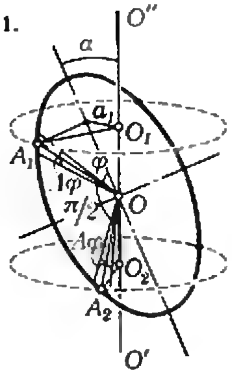


Рис. 2. $|O_1A_1|^2 = |OA_1|^2 - |OO_1|^2$; $|OA_1|^2 = R^2$. $|OO_1|^2 = |Oa_1|^2\cos^2\alpha = R^2(\cos^2\varphi)(\cos^2\alpha) = \frac{R^2}{2}\times\cos^2\alpha$ (так как $\varphi = \pi/4$). Таким образом,

$|O_1A_1|^2 = R^2 - \frac{R^2}{2}\cos^2\alpha = \frac{R^2}{2}(1+\sin^2\alpha)$.

Ф689. *На гладком горизонтальном столе лежит пачки бумаги, в которой 500 листов. Сотый лист (считая снизу) больше других. Этот лист осторожно тянут в горизонтальном направлении. Какое максимальное ускорение можно сообщить пачке, чтобы она при этом двигалась не распадаясь? Каково максимальное ускорение, с которым может двигаться центр масс пачки? С каким ускорением должен двигаться при этом сотый лист? Коэффициент трения о бумагу $\mu = 0{,}2$.*

Найдем кинетическую энергию обруча, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг оси $O'O''$ в таком положении, как указано в условии.

Линейные скорости различных точек обруча различны; соответственно, различны вклады, даваемые отдельными участками обруча в общую кинетическую энергию. Найдем кинетическую энергию пары малых участков A_1 и A_2 обруча, расположенных так, что $\widehat{A_1OA_2} = \pi/2$ (рис. 2). Размер каждого участка равен $R\cdot\Delta\varphi$, масса — $m = \frac{M}{2\pi R}R\cdot\Delta\varphi = \frac{M}{2\pi}\cdot\Delta\varphi$ (размер $R\cdot\Delta\varphi$ настолько мал, что различием в радиусах окружностей, по которым вращаются разные точки участков, можно пренебречь). Линейные скорости участков A_1 и A_2 равны, соответственно,

$$v_1 = \omega|O_1A_1|,\quad v_2 = \omega|O_2A_2|,$$

где $|O_1A_1|$, $|O_2A_2|$ — радиусы окружностей, по которым вращаются участки A_1 и A_2 вокруг оси $O'O''$. Как видно из рисунка 2,

$$|O_1A_1| = \sqrt{|OA_1|^2 - |OO_1|^2} = R\sqrt{1-\cos^2\alpha\cdot\cos^2\varphi},$$

$$|O_2A_2| = \sqrt{|OA_2|^2 - |OO_2|^2} = R\sqrt{1-\cos^2\alpha\cdot\sin^2\varphi}.$$

Таким образом, кинетическая энергия пары участков A_1 и A_2 равна

$$E_п = \frac{1}{2}m(v_1^2+v_2^2) = \frac{M}{4\pi}\cdot\Delta\varphi\cdot\omega^2R^2(1+\sin^2\alpha).$$

Рассмотрев любую пару участков, радиус-векторы которых образуют угол $\pi/2$, мы получим такое же выражение для их кинетической энергии. Число таких пар, очевидно, равно $\pi/\Delta\varphi$. Следовательно, общая энергия вращающегося обруча равна

$$E = \frac{\pi}{\Delta\varphi}E_п = \frac{M}{4}\omega^2R^2(1+\sin^2\alpha).$$

Согласно закону сохранения энергии работа, которую надо совершить, чтобы раскрутить обруч до угловой скорости ω, равна

$$A = \frac{M}{4}\omega^2R^2(1+\sin^2\alpha).$$

Для частного случая $\alpha = \pi/2$ (обруч вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси)

$$E_г = \frac{M}{2}\omega^2R^2.$$

Для $\alpha = 0$ (обруч вращается вокруг вертикального диаметра)

$$E_в = \frac{M}{4}\omega^2R^2 = E_г/2.$$

С. Кротов

◆

Любой лист в верхней части пачки под действием сил трения может получить ускорение

$$a_1 \leqslant \mu g.$$

Это значит, что друг относительно друга эти листы проскальзывать не будут, а при ускорении большого листа $a > \mu g$ возникнет проскальзывание всей верхней части пачки относительно большого листа.

В нижней части пачки проскальзывание возникает только в месте контакта с большим листом, потому что чем ниже лист, тем больше сила, прижимающая листы друг к другу. Ускорение листов нижней части пачки

$$a_2 < \frac{\mu M g}{m} = 4\mu g$$

(M — масса верхней части пачки, $m = M/4$ — масса нижней части).

Ясно, что для получения максимального ускорения пачки при условии, что она не распадается, большой лист нужно тянуть с ускорением

$$a=a_1=2\ \text{м/с}^2.$$

Таким и окажется ускорение пачки.

Чтобы получить максимальное ускорение центра масс пачки (без учета большого листа!), нужно сделать так, чтобы проскальзывали обе части. При этом общая внешняя сила $F=f_{\text{тр}1}+f_{\text{тр}2}=2\mu Mg$; ускорение центра масс

$$a=\frac{F}{M+m}=\frac{2\mu Mg}{M+m}=2\frac{\mu g}{1+\dfrac{m}{M}}\approx 1{,}6\mu g\approx 3{,}2\ \text{м/с}^2.$$

Тянуть большой лист нужно с ускорением $a \geqslant a_{2\max}=8\ \text{м/с}^2$.

З. Рафаилов

◆

Ф690. *Между точками A и B на поверхности Луны, расположенными на угловом расстоянии 90°, прорыт прямолинейный канал (рис. 1), заполненный воздухом при нормальной температуре. Давление воздуха в середине канала $p_C=10^5$ Па. Найти давление воздуха в канале у поверхности Луны. Луну считать однородным шаром с диаметром D = 3480 км. Ускорение $g_Л$ свободного падения на поверхности Луны в шесть раз меньше земного.*

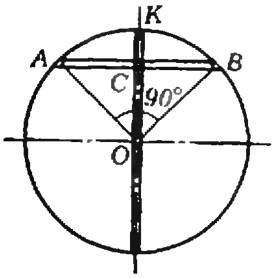


Рис. 1.

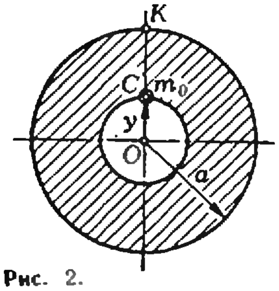


Рис. 2.

Давление воздуха p_C в середине канала равно давлению в вертикальной радиальной шахте на расстоянии $a/\sqrt{2}$ от центра Луны ($a=D/2$ — радиус Луны), а искомое давление равно давлению p_K на поверхности этой шахты. Поэтому необходимо установить, как изменяется давление по мере продвижения в глубь шахты.

Рассмотрим столбик воздуха малой высоты Δy, находящийся на расстоянии y от центра Луны, и запишем условие его равновесия:

$$\varrho g\Delta y=-\Delta p, \qquad (*)$$

где ϱ — плотность воздуха, g — ускорение свободного падения на данной глубине, Δp — разность давлений на высотах $y+\Delta y$ и y.

Плотность воздуха найдем из уравнения Менделеева — Клапейрона:

$$pV=\frac{m}{\mu}RT, \text{ и } \varrho=\frac{m}{V}=\frac{\mu}{RT}p,$$

где p — давление воздуха на выбранной глубине.

Теперь выясним, как меняется ускорение свободного падения по мере «углубления» в Луну. Выделим внутри Луны — шара радиуса a — шар радиуса $y<a$ (рис. 2). Если на поверхность этого меньшего шара поместить материальную точку массы m_0, то реально она будет притягиваться только меньшим шаром. Суммарное действие гравитационных сил между нашей материальной точкой и всеми частицами в заштрихованной области (см. рис. 2) равно нулю. Тогда ускорение g в точке C (с координатой y) определяется формулой

$$G\frac{m_0 m_y}{y^2}=m_0 g,$$

и ускорение $g_Л$ в точке K — формулой

$$G\frac{m_0 M}{a^2}=m_0 g_Л,$$

где m_y и M — массы меньшего и большего шаров соответственно. Разделив формулы почленно друг на друга и учтя, что массы шаров пропорциональны их объемам (а значит, и кубам их радиусов), получим:

$$g=g_Л\frac{y}{a}.$$

Подставим полученные выражения для ϱ и g в уравнение (*):

$$\frac{\mu p}{RT}\,\frac{g_Л y}{a}\,\Delta y=-\Delta p,$$

или

$$\frac{\Delta p}{p}=-\frac{\mu g_Л}{RTa}\,y\,\Delta y.$$

Если конечные приращения Δp и Δy заменить бесконечно малыми dp и dy, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dp}{p}=-\frac{\mu g_Л}{RTa}\,y\,dy.$$

Решение этого уравнения находится интегрированием:

$$\int_{p_C}^{p_K} \frac{dp}{p} = \int_{y_C}^{y_K} -\frac{\mu g_Л}{RTa} y\,dy,$$

или

$$\ln p_K - \ln p_C = -\frac{\mu g_Л}{RTa}\left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right).$$

Отсюда

$$\ln \frac{p_C}{p_K} = \frac{\mu g_Л a}{4RT} \approx 9{,}1,$$

или

$$\lg \frac{p_C}{p_K} \approx 0{,}43 \ln \frac{p_C}{p_K} \approx 3{,}9.$$

По таблицам десятичных антилогарифмов находим отношение давлений:

$$\frac{p_C}{p_K} \approx 8000;$$

следовательно, давление воздуха в канале у поверхности Луны приблизительно в 8000 раз меньше давления в центре канала:

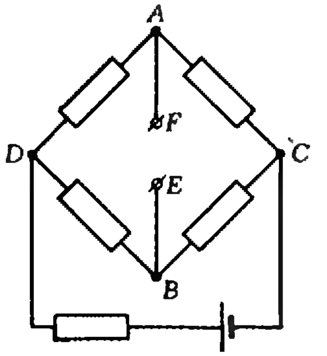
$$p_A = p_B = p_K \approx \frac{p_C}{8000} \approx 12{,}5 \text{ Па}.$$

Полученный нами ответ показывает, что в принципе возможно существование внутри Луны полостей, заполненных газом.

А. Стасенко

◆

Ф691. *Между точками E и F схемы, изображенной на рисунке, включают сначала идеальный вольтметр, а затем амперметр. Их показания равны соответственно U_0 и I_0. Какой ток будет течь через резистор с сопротивлением R, включенный между точками E и F?*



Включим (мысленно) между точками A и F два идеальных (без внутреннего сопротивления) источника тока с ЭДС, равными $-U_0$ и U_0. Такое включение ничего не изменит. В этом случае зависимость между током, идущим через включенное сопротивление R, и ЭДС источников должна быть линейной, то есть

$$I_R = \alpha\,\mathcal{E} - \beta U_0 + \beta U_0, \qquad (1)$$

где $\mathcal{E}$ — ЭДС источника, содержащегося в схеме, а коэффициенты α и β зависят от всех сопротивлений схемы.

Если между точками A и F включить лишь один идеальный источник с ЭДС равной $-U_0$, то разность потенциалов между точками A и B станет равной нулю, то есть ток через сопротивление R идти не будет. Значит, два первых члена уравнения (1) компенсируют друг друга, и

$$I_R = \beta U_0. \qquad (2)$$

Коэффициент β легко определить, так как формула (2) относится к случаю, когда в схему включен лишь один идеальный источник. Источник, входящий в схему, заменяется при этом сопротивлением, равным внутреннему сопротивлению этого источника, которое в задаче полагается равным нулю. Таким образом,

$$I_R = \frac{U_0}{R + R_{эф}}, \qquad (3)$$

где $R_{эф}$ — сопротивление между точками A и B при отключенном сопротивлении R. Формула (3) справедлива и для случая $R=0$, что соответствует включению амперметра; при этом

$$I_0 = \frac{U_0}{R_{эф}},$$

откуда находим

$$R_{эф} = \frac{U_0}{I_0}.$$

Следовательно, искомый ток равен

$$I_R = \frac{U_0 I_0}{R I_0 + U_0}.$$

В. Петерсон

Г. Гуревич

Системы разновесов

Проблема Эрдеша

Системой разновесов называется совокупность натуральных чисел, из которой нельзя извлечь два различных набора с одинаковой суммой (например, числа 1, 3, 7, 20 образуют систему разновесов, а числа 1, 2, 3, 4, 5, 8 не образуют: $2+3+4=8+1$).

В 1956 году известный венгерский математик П. Эрдеш сформулировал следующую общую проблему: ***Найти наименьшее натуральное число $m(k)$ такое, чтобы из натуральных чисел, не превосходящих $m(k)$, можно было выделить систему разновесов из k чисел.***

Другая, в известном смысле обратная проблеме Эрдеша задача состоит в нахождении ***наибольшего количества $l(N)$ разновесов среди чисел, не превосходящих данного натурального N.***

Несмотря на большой интерес, вызванный поставленными задачами у специалистов по теории чисел, теории кодирования и комбинаторному анализу, полностью они до сих пор не решены. Получены лишь некоторые оценки чисел $m(k)$ и $l(N)$, причем вопрос точности этих оценок остается открытым.

В задаче М675 («Квант», 1981, № 3) мы предложили нашим читателям получить некоторые оценки, относящиеся к проблеме Эрдеша, для конкретных k и N. Именно, мы предложили доказать, что ***из чисел, меньших 1000, можно выделить систему разновесов а) из 10 чисел; б) из 11 чисел; в) 14 чисел из них выбрать нельзя; г) если числа образуют систему разновесов, то сумма их обратных величин не превосходит 5/2.*** И, наконец, мы предложили ***д) из чисел, меньших 700, выбрать систему разновесов, состоящую из 11 чисел.***

Оценки сверху

Некоторые грубые оценки сверху числа $m(k)$ можно получить из очень простых соображений.

В самом деле, k чисел $1, 2, \ldots, 2^{k-1}$ образуют систему разновесов при любом натуральном k.

Упражнение 1. Докажите это.

Поэтому, очевидно, $m(k) \leqslant 2^{k-1}$. В частности, из чисел $1, 2, \ldots, 1000$ выделяется система разновесов из 10 чисел $1, 2, \ldots, 2^9=512$. Это дает решение пункта а) задачи М675.

Легко строится система разновесов и из 11 чисел, не больших 1000.

В самом деле, k чисел $3, 3\cdot 2, 3\cdot 2^2, \ldots, 3\cdot 2^{k-1}$ также образуют систему разновесов. Добавим к ним два числа $3\cdot 2^{k-1}-1$ и $3\cdot 2^{k-1}+1$ и докажем, что получающиеся числа также образуют систему разновесов.

Если какой-то набор из этих чисел содержит оба добавленных числа (тогда набор из оставшихся чисел их не содержит), то его сумма не меньше, чем $3\cdot 2^k$, и, следовательно, больше суммы всех остальных чисел.

Если же какой-нибудь набор содержит одно добавленное число, то любой набор, его не содержащий, будет иметь сумму, дающую при делении на 3 остаток, отличный от остатка при делении на 3 суммы исходного набора.

При $k=9$ получаем систему разновесов 3, 6, 12, ..., 767, 768, 769 из 11 чисел (это дает решение пункта б)).

Итак, $m(11) \leqslant 769$. Вообще же нами получена оценка $m(k) \leqslant 3\cdot 2^{k-2}+1$.

Оценка снизу

Попробуем теперь оценить число $m(k)$ снизу. Пусть $a_1<a_2<\ldots<a_k$ — система разновесов из k чисел ($k>1$).

Очевидно, что $ka_k-1 \geqslant a_1+a_2+\ldots+a_k$. Поскольку любые два набора из данных чисел имеют разные суммы, а общее число наборов из k чисел равно 2^k-1, получаем неравенство $a_1+a_2+\ldots+a_k \geqslant 2^k-1$.

Упражнение 2. Убедитесь в этом.

Поэтому $ka_k \geqslant 2^k$, то есть $a_k \geqslant \frac{2^k}{k}$. В частности, для $k=14$ получим $a_{14} \geqslant \frac{2^{14}}{14} > 1000$. Это дает решение пункта в).

Итак, $m(k) \geqslant \frac{2^k}{k}$.

Теперь мы можем оценить сумму $\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_k}$. Поскольку любая подсистема системы разновесов сама является системой разновесов, неравенство $a_i \geqslant \frac{2^i}{i}$ справедливо при любом i, большем 1. Отсюда

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_k} \leqslant 1+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{k}{2^k}.$$

Вычислим сумму $S(k)=\frac{2}{2^2}+\ldots+\frac{k}{2^k}$. Заметим, что $2S(k)=1+\frac{3}{2^2}+\ldots+\frac{k}{2^{k-1}}$ и поэтому

$$S(k)=2S(k)-S(k)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{2^{k-1}}-\frac{k}{2^k}=\frac{3}{2}-\frac{k+2}{2^k}<\frac{3}{2}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_k}<\frac{5}{2}$$

— утверждение пункта г) также доказано.

Сравнительно недавно (1977 год) американские математики Ф. Хансон, Дж. Стил и Ф. Стенджер доказали более сильное неравенство:

$$\frac{1}{a_1^s}+\frac{1}{a_2^s}+\ldots+\frac{1}{a_k^s}<\frac{2^s}{2^s-1}$$

для любого $s>0$. В частности, при $s=1$ получаем

$$\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_k}<2.$$

Некоторые наблюдения

Числа 1, 2, 4, ..., 512, как мы видели, образуют систему из 10 разновесов. Посмотрим, нельзя ли, пользуясь этой системой, получить систему разновесов из 11 чисел, меньших 1000.

Рассмотрим 11 чисел: $999-0$, $999-1$, ..., $999-512$. Докажем, что это — система разновесов.

Будем в дальнейшем называть *длиной* набора количество чисел в этом наборе.

Прежде всего ясно, что два набора одинаковой длины имеют разные суммы (мы вычитаем из 999 нуль и числа, дающие систему разновесов).

Докажем теперь, что более длинный набор имеет бо́льшую сумму.

В самом деле, сумма шести самых маленьких чисел системы: $(999-512)+(999-256)+\ldots+(999-16)$ — больше суммы пяти самых больших из этих чисел: $999+(999-1)+(999-2)+(999-4)+(999-8)$.

Пусть теперь $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и $b_1, b_2, \ldots, b_l$ — два набора из наших чисел, причем $m>l$. Если $m>6$, то $a_1+\ldots+a_m$, очевидно, больше $b_1+\ldots+b_l$. Если же $m\leqslant 6$, то $a_1+\ldots+a_m$ не меньше суммы m наименьших чисел нашей системы, которая в свою очередь больше суммы l $(l<m)$ самых больших чисел системы (убедитесь в этом!); последняя же сумма, конечно, не меньше $b_1+\ldots+b_l$.

Итак, мы построили еще одну систему разновесов из 11 чисел, меньших 1000.

Проанализируем проведенное доказательство.

Прежде всего заметим, что вместо числа 999 мы могли бы взять любое число a, для которого $a+(a-1)+(a-2)+(a-4)+(a-8)<(a-16)+\ldots+(a-512)$, то есть любое $a>512+\ldots+16-8-4-2-1=993$.

Кроме того, мы воспользовались тем, что суммы наборов одинаковой длины различны.

Попробуем обобщить наши наблюдения. Возьмем k натуральных чисел $a_1<a_2<\ldots<a_k$, для которых суммы любых двух наборов одинаковой длины различны.

Теперь, если k — четно $(k=2l)$, выберем число a так, чтобы выполнялось неравенство

$$(a-a_{2l})+\ldots+(a-a_l)>$$
$$>(a-a_{l-1})+\ldots+(a-a_1)+a,$$

а если k нечетно $(k=2l+1)$ — то неравенство

$$(a-a_{2l+1})+\ldots+(a-a_{l+1})>$$
$$>(a-a_{l-1})+\ldots+(a-a_1)+a.$$

Так построенные числа a, $a-a_1$, ..., $a-a_k$ образуют систему разновесов длины $k+1$.

Упражнения

3. Докажите это утверждение.

4. Докажите, что из двух наборов одинаковой длины, состоящих из различных чисел построенной системы, бо́льшую сумму имеет набор, содержащий наибольшее из выбранных чисел.

Улучшенная система разновесов

Пользуясь описанным способом, мы можем строить системы разновесов любой длины k.

Построим сначала последовательность чисел $a_1<a_2<\ldots<a_n<\ldots$, удовлетворяющую таким соотношениям:

$a_1=0$, $a_2=1$,

$$a_{2n+1}=(a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{2n})-$$
$$-(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})+1,$$
$$a_{2n+2}=(a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{2n+1})-$$
$$-(a_1+a_2+\ldots+a_n)+1$$

при $n\geqslant 1$.

Выпишем первые одиннадцать членов этой последовательности: 0, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 46, 88, 172, 337.

Положим $a=(a_{11}+a_{10}+\ldots+a_6)-(a_5+a_4+a_3+a_2+a_1)+1=667$.

По доказанному ранее мы получаем систему разновесов из 11 чисел: 667, $667-1$, $667-2$, ..., $667-337$. Все эти числа меньше 700. Это дает решение пункта д) задачи.

Упражнение 5. Докажите, что $m(6)=21$.

Система Конвея — Гая

Из всех систем разновесов, известных в настоящее время, на роль «рекордсмена» претендует система, построенная американскими математиками Конвеем и Гаем. В частности, для разновесов из 11 чисел у них самое большое число равно 594.

Построение, предложенное Конвеем и Гаем, состоит в следующем (см. таблицу):

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_n	0	1	2	2	3	3	3	4	4	4	4	5	5
y_n	0	0	0	1	1	2	3	3	4	5	6	6	7
z_n	0	1	2	4	7	13	24	44	84	161	309	594	1164

В первой строке таблицы записаны 0 и натуральные числа; во второй строке — последовательность (x_n), в которой всякое число $k>0$ встречается ровно k раз; в третьей строке — последовательность (y_n), полученная вычитанием чисел второй строки из чисел первой строки $(y_n=n-x_n)$. Последовательность (z_n) задается рекуррентно: $z_0=0$, $z_1=1$, $z_{n+1}=2z_n-z_{y_n}$. (Например, чтобы вычислить z_7, надо взять $z_6=24$, умножить его на 2 и вычесть $z_3=4$, поскольку $y_6=3$.) Последовательность (z_n) записана в последней строке таблицы.

Упражнение 6. Докажите, что $x_n=(\sqrt{2n})$, где через (x) обозначено ближайшее к x целое число.

Конвей и Гай высказали гипотезу, что при любом $n>0$ числа $a_0=z_n-z_0$, $a_1=z_n-z_1$, ..., $a_{n-1}=z_n-z_{n-1}$ образуют систему разновесов, и проверили ее для всех $n\leqslant 40$. (При $n=11$ получается следующая система разновесов: 594, 593, 592, 590, 587, 581, 570, 550, 510, 473, 285; как мы видим, наибольшее число здесь равно 594.)

В 1974 году индийский математик Х. Гупта доказал справедливость гипотезы Конвея — Гая и тем самым получил оценку для числа $m(k)$: $m(k)\leqslant z_k$. Совсем недавно советский математик В. Д. Яковлев независимо получил другое доказательство.

Очень интересно было бы для какого-нибудь n найти пример системы разновесов из n чисел, в которой самое большое число было бы меньше z_n. Тем самым было бы показано, что процедура получения систем разновесов Конвея — Гая все-таки не наилучшая

Список читателей, приславших правильные решения

В этом номере мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения задач М661 — М675 и Ф678 — Ф691 [жирные цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач].

Математика

Большинство читателей, приславших свои решения, успешно справились с задачами **М661, М662, М663, М671, М672.** Остальные задачи решили: *Э. Абасов* (Сумгаит) **67;** *А. Абдуллаев* (с. Каранапах Аз.ССР) **66, 67;** *В. Александров* (Саратов) **66;** *М. Алексеев* (Москва) **73;** *В. Арабидзе* (Тбилиси) **73;** *М. Арасланов* (Запорожье) **66, 75;** *С. Асеев* (Николаев) **66, 68;** *Р. Ахмедов* (с. Хосрех Даг. АССР) **73;** *Э. Ахмедов* (Баку) **67;** *А. Ашурбеков* (с. Пилич Даг. АССР) **67;** *Я. Базалий* (Донецк) **66—69;** *В. Барабанов* (Севастополь) **66;** *Ю. Баркаган* (Пенза) **66;** *А. Белоус* (Винница) **66;** *Ю. Беспалов* (Шостка) **65, 66, 69, 73;** *И. Бинус* (Пенза) **66;** *В. Будовский* (Харьков) **66;** *В. Валуев* (Тула) **73;** *И. Василенко* (Целиноград) **67;** *В. Вермул* (Душанбе) **67;** *И. Гайович* (Киев) **66;** *Г. Гарегин* (Ереван) **67;** *О. Гарифуллин* (Пенза) **66;** *А. Гасанов* (с. Б. Колатан Аз. ССР) **66, 69;** *В. Гешкенбейн* (Москва) **65;** *Г. Головин* (Славянск) **66, 69;** *Б. Гольдфарб* (Москва) **67;** *А. Гордиенко* (Димитров) **66—68, 73;** *А. Гохберг* (Донецк) **66—69, 73;** *А. Грижебовская* (Ставрополь) **69;** *О. Гринив* (Киев) **65, 66, 68, 73, 74;** *Н. Гришко* (Киев) **65—69;** *Е. Гутман* (Киев) **66—69;** *Д. Демин* (Винница) **66, 67;** *О. Доброрадных* (Белорецк) **66;** *О. Дранко* (Киев) **73, 74;** *А. Дубицкас* (Таураге) **64, 68, 73—75;** *М. Елисеев* (п. Нововоронежский Воронежской обл.) **73;** *О. Емченко* (Белорецк) **66;** *О. Ерошкин* (Днепропетровск) **65—68, 73;** *И. Жуков* (Ленинград) **65, 66, 73, 75;** *Б. Зальцман* (Хабаровск) **65;** *М. Заславский* (Харьков) **66, 73;** *И. Зябрев* (Кролевец) **66, 68, 69;** *В. Ивлев* (Джезказган) **68;** *И. Итенберг* (Ленинград) **68, 73;** *А. Казмерчук* (Киев) **73, 74;** *Ю. Какулов* (п. Цалка ГССР) **67, 69;** *Л. Калюжный* (Одесса) **66—69;** *Д. Камунтавичус* (Вильнюс) **65, 73;** *А. Карпович* (Киев) **68, 73;** *А. Кац* (Ташкент) **67, 68, 73;** *В. Кварцани* (Кутаиси) **67;** *А. Кернерман* (Киев) **73;** *В. Кисиль* (Одесса) **65, 66, 73, 74;** *С. Кодрян* (Киев) **66—69;** *Г. Козлов* (Апрелевка) **69;** *В. Козловский* (д. Н. Двор Гродненской обл.) **66;** *С. Комков* (Москва) **69;** *А. Корнилов* (Ростов-на-Дону) **65, 68, 75;** *Д. Короткин* (Ленинград) **65, 73, 74;** *Д. Коршунов* (Новосибирск) **73;** *И. Кудряшов* (Ленинград) **66, 67;** *И. Ланджев* (Бургас, НРБ) **67, 69;** *Л. Лейцин* (Чернигов) **66, 69, 73, 74;** *М. Манцев* (Ставрополь) **67;** *О. Марцынковский* (Одесса) **66;** *С. Махмедов* (Баку) **66, 67;** *В. Михайлов* (Опочка) **66;** *А. Михалева* (Ветка) **73;** *Д. Мустафин* (Ош) **66;** *А. Наумов* (Харьков) **66;** *Ю. Николаевский* (Харьков) **65, 67, 73;** *А. Никонов* (Кировград) **65—67, 69;** *О. Никонов* (Москва) **73;** *М. Овецкий* (Донецк) **66—69, 73, 74;** *О. Огурцова* (Ленинград) **66;** *Р. Оруджев* (Баку) **66, 69;** *С. Палий* (Одесса) **67;** *Г. Перельман* (Ленинград) **65, 66, 68, 69, 73—75;** *А. Попов* (п. Нововоронежский Воронежской обл.) **67;** *В. Поярков* (Николаев) **66;** *К. Пулатов* (Ташкент) **67;** *С. Путинцев* (Невинномысск) **66—69, 73—75;** *А. Разин* (с. Нивицы Львовской обл.) **66;** *А. Родионов* (Москва) **66, 73;** *Н. Розенвайн* (Киев) **66, 68;** *В. Романюк* (с. Куснище Волынской обл.) **66;** *А. Савкин* (Ленинград) **66, 67, 69;** *Р. Самборский* (Тернополь) **73;** *А. Семенов* (Саратов) **65;** *А. Сикса* (Киев) **66—68, 73;** *С. Сирош* (Котовск) **66, 67;** *Н. Смолин* (п. Туровец Вологодской обл.) **66, 67;** *Т. Сокова* (Белорецк) **74;** *А. Сохет* (Харьков) **66, 67, 73;** *С. Стариков* (Гомель) **67;** *Э. Степанян* (Баку) **66, 67;** *Н. Титаренко* (Винница) **66;** *А. Топорова* (Душанбе) **73;** *О. Третьяков* (Омск) **66;** *Г. Трунов* (Москва) **73;** *Е. Тюрин* (Вильнюс) **66, 67, 69;** *Р. Угриновский* (Хмельницк) **66, 67, 69;** *Т. Утепов* (Алма-Ата) **73;** *Н. Федин* (Омск) **67, 69;** *В. Финогенов* (Москва) **69, 73;** *Д. Фомин* (Ленинград) **65—68, 73;** *В. Хенкин* (Симферополь) **69;** *С. Хиршан* (Киев) **66, 67;** *А. Хохлов* (Москва) **66, 69, 73;** *С. Цветков* (Ленинград) **66;** *П. Цветков* (Подольск) **66, 67, 69, 74;** *Р. Цоуф* (Прага, ЧССР) **73, 75;** *О. Чалых* (Витебск) **66—69, 73;** *Н. Черникова* (Ленинград) **67;** *Г. Чхеидзе* (Тбилиси) **73;** *В. Шабунин* (п. Хохольский Воронежской обл.) **69;** *В. Шевчишин* (Львов) **65;** *А. Шигарев* (Сибай) **68;** *Л. Эпремидзе* (Тбилиси) **66, 67, 69;** *Ф. Эфендиев* (Баку) **66, 73, 74;** *С. Юровский* (Мытищи) **66;** *Ю. Юрьев* (Никель) **66, 73.**

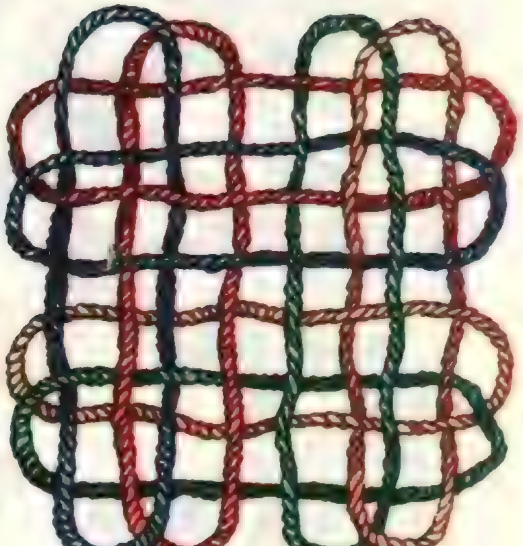
Физика

Почти все читатели, приславшие свои решения, справились с задачами **Ф678** и **Ф683.** Остальные задачи решили: *И. Алексеев* (Москва) **84, 85, 87—91;** *Э. Алиев* (Баку) **86, 88, 91;** *З. Али-Заде* (Баку) **89;** *Т. Аракелян* (Ереван) **81;** *М. Арамян* (Ереван) **87;** *Д. Асмус* (Челябинск) **81, 86, 88, 91;** *А. Астахов* (Железнодорожный Московской обл.) **91;** *О. Ахремов* (Вильнюс) **81, 85, 87, 89;** *А. Бабаев* (Баку) **81, 91;** *Э. Багдасарян* (Баку) **91;** *Я. Базалий* (Донецк) **80—82, 86—88, 90;** *Ю. Байкин* (п. Актюбинский Тат. АССР) **82;** *Ю. Бобрышев* (Ворошиловград) **85;** *С. Бочко* (Братск) **88;** *Б. Вейцман* (Одесса) **80—85, 87, 88—91;** *Ю. Воеводов* (Гомель) **82;** *К. Григоришин* (Запорожье) **79—81, 86, 87, 89, 91;** *Д. Григорьев* (Москва) **81, 82, 85—87;** *И. Гурович* (Одесса) **87, 91;** *М. Догадов* (Арзамас) **81;** *И. Доценко* (Москва) **84—87, 89—91;** *В. Евстратов* (Ленинград) **81, 84, 87—90;** *С. Егоров* (Ленинград) **79, 81, 84;** *М. Жаконис* (Каунас) **88, 90;** *Г. Кадышев* (Москва) **88, 89;** *Е. Касперский* (Долгопрудный) **89;** *А. Колежук* (Киев) **80, 81, 88;** *В. Комов* (Александров) **88—91;** *Л. Костадинов* (Плевен, НРБ) **86, 87;** *А. Кубышкин* (Киев) **80, 81, 84, 88, 91;** *Л. Кудрявцев* (Нефтекамск) **81;** *А. Кузнецов* (с. Шурскол Ярославской обл.) **88, 89;** *А. Кузьменко* (Киев) **88, 89;** *А. Латынин* (Киев) **80, 81, 88, 90;** *И. Ломако* (Минск) **81;**

(Окончание см. на с. 45)

Квант для младших школьников

Задачи



1. В равенствах

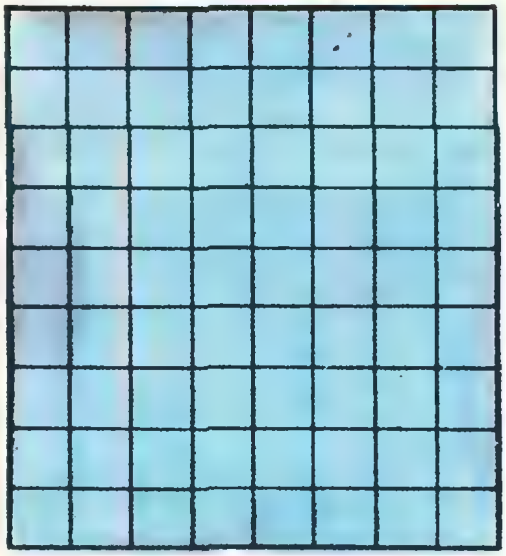
$$a:b=c,\ c+d=e,\ e-f=g,$$
$$g\cdot h=10i+j$$

расставьте вместо букв 10 цифр 0, 1, ..., 9 так, чтобы получились верные равенства.

2. В коврике, сплетенном из разноцветных веревок (см. рисунок), есть веревочное кольцо, при разрезании которого коврик распадается на три части так, что две из этих частей состоят из одинакового числа веревок, а третья — всего из одной веревки. Укажите это кольцо.

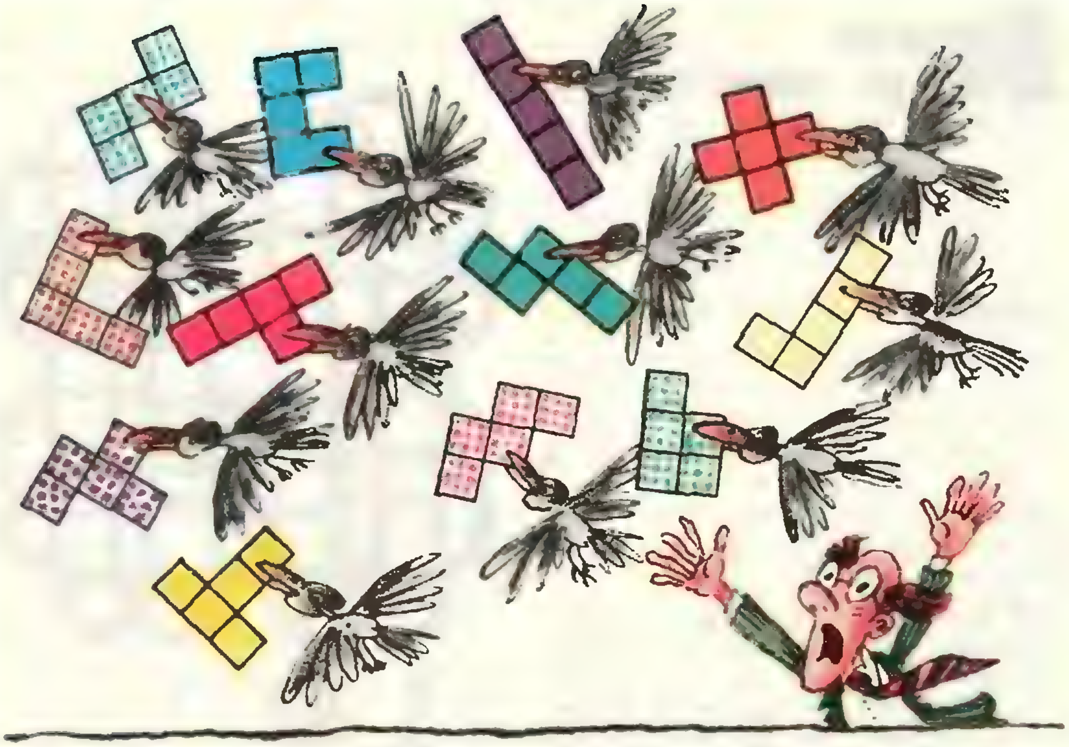
3. Докажите, что в любом выпуклом семиугольнике есть две диагонали, угол между которыми меньше 13°.

4. Толя предложил Ире разрезать «клетчатый» прямоугольник размером 8×9 (см. рисунок) по линиям сетки на прямоугольные полоски 1×6. Сможет ли Ира это сделать?



5. В первой строчке записаны три целых числа: a, b, c. Во второй строчке под ними записаны три разности: $a-b$, $b-c$, $c-a$. Числа в третьей строчке образованы из чисел второй строчки по тому же закону и т. д. Покажите, что ни в одной из строчек ниже седьмой не может встретиться число 279.

Эти задачи нам предложили
Ф. Бартенев, А. Калинин, А. Савин,
А. Швецов.



С. Тавридов

Пентамино на плоскости и в пространстве

Пентамино — это фигурка, являющаяся многоугольником, составленным из пяти одинаковых квадратов*); полный сбор пентамино изображен на рисунке перед заглавием. Разумеется, во всех задачах, о которых пойдет речь ниже, пентамино можно перевертывать.

Из пентамино получаются прекрасные головоломки. Так, из двенадцати пентамино можно сложить прямоугольники 4×15, 5×12, 6×10, причем последний — 2389 принципиально различными способами (два решения, получающиеся одно из другого поворотом или отражением, считаются одинаковыми); конечно, эти 2389 решений помогла найти ЭВМ. А вот прямоугольник 3×20 из двенадцати пентамино можно сложить только двумя различными способами; найдите их. А два прямоугольника 5×6 можно сложить так, что получится либо прямоугольник 5×12, либо 6×10 (проверьте!).

Обычную шахматную доску с четырьмя незакрытыми клетками также можно многими способами составить из пентамино. Такая «неполная» доска выглядит довольно изящно (три варианта сборки показаны на рисунке 1).

А вот фигуру, изображенную на рисунке 2, нельзя сложить из пентамино: с краев она ограничена 22 квадратами, а если посчитать, сколько квадратов каждого пентамино может находиться на краю этой фигуры, то в сумме для всех пентамино получится 21. Нельзя из пентамино сложить и фигуры, изображенные на рисунке 3, однако краткого и изящного доказательства этого факта пока не найдено.

---

*) Такие многоугольники, составленные не только из пяти, но и из одного, двух, трех, четырех, шести и т. д. квадратов, ввел в математико-игровой обиход американский математик С. В. Голомб. Он предложил для них общее название — *полимино*. О них можно прочесть в его книге «Полимино» (М., «Мир», 1975). См. также «Квант», 1977, № 2, 3 с. обложки и 1979, № 11, с. 22.

Представьте теперь, что пентамино можно изгибать по сторонам квадратов. Тогда, используя все пентамино, можно оклеить поверхность фигуры, изображенной на рисунке 4. Разумеется, придется напрячь воображение, проявить изобретательность. Можно сначала построить развертку фигуры и заполнить ее пентамино. Но более удачным нам представляется следующий способ.

Посмотрим на рисунок 4. В поле нашего зрения находятся передние, верхние и правые квадратики поверхности нашей фигуры. Уберем эти квадратики и изобразим оставшуюся часть поверхности, то есть задние, нижние и левые квадратики (рис. 5). Теперь, обозначив каждое пентамино своим символом, запишем на каждых пяти квадратиках поверхности соответствующий данному пентамино символ.

Одно из возможных оклеиваний фигуры рисунка 4 показано на рисунке 6.

«Гибкими» пентамино можно оклеить большое число многогранников с поверхностью из 60 квадратиков. Попробуйте придумать такие многогранники. Как ни странно, среди них нет ни одного прямоугольного параллелепипеда. Ждем ваших предложений — лучшие из них мы опубликуем.

Как только что было сказано, один параллелепипед нельзя оклеить всеми пентамино. А вот два одинаковых параллелепипеда $1\times3\times3$ (на поверхности каждого из них по 30 квадратиков) так оклеить можно. Можно оклеить и шесть параллелепипедов $1\times1\times2$. Сделайте это! Попробуйте перечислить все возможные наборы параллелепипедов (не обязательно одинаковых), оклеиваемых комплектом пентамино. (Разумеется, число квадратов на поверхности каждого такого параллелепипеда должно быть кратно пяти.)

Наконец, оклейте набором пентамино два одинаковых «крестообразных» многогранника, изображенных на рисунке 7.

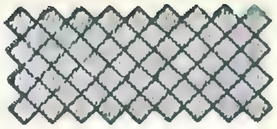


Рис. 2.

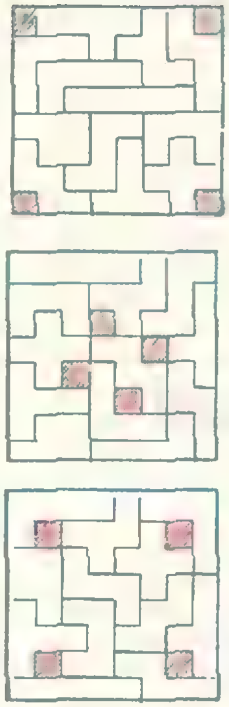


Рис. 1.

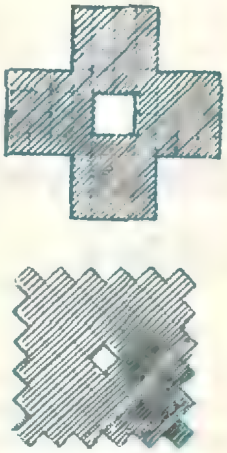


Рис. 3.

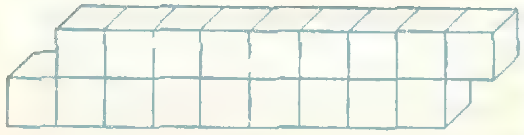


Рис. 4.

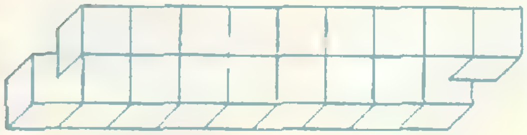


Рис. 5.

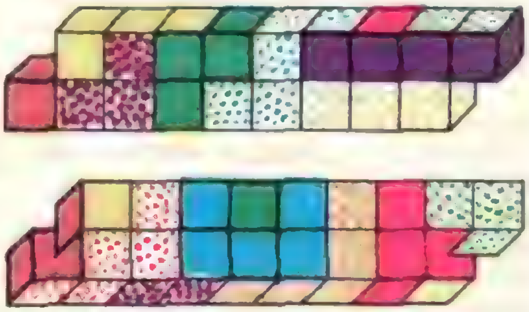


Рис. 6.

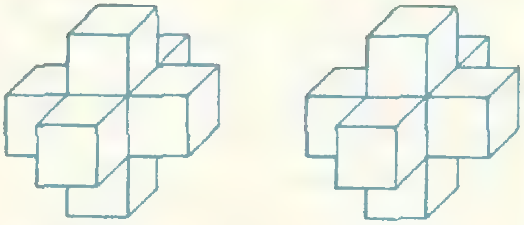


Рис. 7.

В. Рыжик

Геометрический подарок

Федя и Вася не мучились вопросом: «А что подарить друг другу на день рождения?» Каждый из них дарил другому придуманную им задачку или теорему — что-нибудь из математики. Близился Васин день рождения.

— А помнишь ли ты, — как бы невзначай спросил Федя у Васи, — как проводить перпендикуляр из точки на плоскость?

Вася стал водить карандашом по бумаге. Минут пять водил, а потом вздохнул:

— Нет, не помню.

— Не ты один, — посочувствовал Федя.

(Попробуй и ты, читатель, быстро и правильно сделать это построение.)

— Ну, тогда посмотри, что я придумал, — продолжал Федя. — Берем плоскость α и точку A вне ее. На плоскости α проводим прямую a — любую. Из точки A проводим перпендикуляр AB к прямой a. В плоскости α проводим прямую BC, перпендикулярную прямой a. Из точки A проводим перпендикуляр AD на прямую BC (см. рисунок). Все.

— Что «все»? — удивился Вася.

— Вообще все. Перпендикуляр из точки A на плоскость α построен.

— А доказательство? — спросил Вася.

— Пожалуйста. Проведем через точку D любую прямую, пересекающую прямую a; точку пересечения назовем K. Проведем еще отрезок AK. Из прямоугольных треугольников ADB и ABK получаем

$$|AK|^2=|AB|^2+|BK|^2=|AD|^2+|BD|^2+|BK|^2.$$

Из прямоугольного треугольника KBD —

$$|BD|^2+|BK|^2=|KD|^2.$$

Значит, $|AK|^2=|AD|^2+|KD|^2$. Но тогда угол D в треугольнике ADK — прямой, то есть $(AD)\perp(DK)$. Прямая AD перпендикулярна двум пересекающимся прямым в плоскости α — BC и KD; по признаку перпендикулярности прямой и плоскости она перпендикулярна плоскости α. Ну, как?

— Мне нравится, — сказал Вася. — Главное, я его уже запомнил, это построение. Один перпендикуляр, второй и третий. — Он помахал в воздухе пальцем, изображая перпендикуляры.

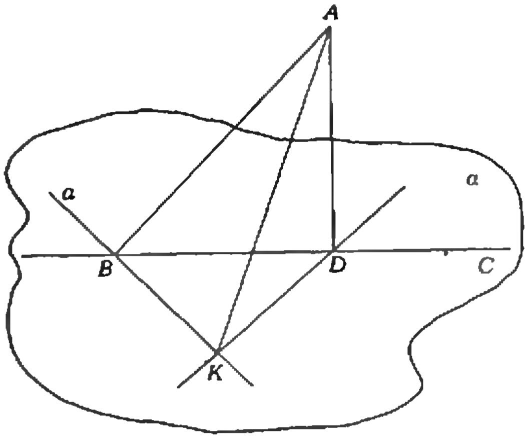
— И доказательство ясное, — продолжал он. — Из трех прямоугольных треугольников можно вывести, что и четвертый треугольник — тоже прямоугольный.

— Ты прав, — подтвердил Федя. — Между прочим, из этих же треугольников можно усмотреть доказательство теоремы о трех перпендикулярах. Вот тебе конверт: в нем записано и построение, и доказательство.

Тут его голос принял слегка торжественный оттенок.

— Этот конверт — мой подарок к твоему дню рождения. Между прочим, там есть еще над чем подумать.

Через несколько дней Вася пришел к Феде.



— Я подумал-подумал и вот что получилось, — сказал он. В твоем доказательстве использован признак перпендикулярности прямой и плоскости. Но можно обойтись и без него.

— То есть как? — удивился Федя.

— А вот как. Прямая AD перпендикулярна всем прямым на плоскости α, проходящим через точку D и пересекающим прямую a. Осталось доказать, что она перпендикулярна прямой, проходящей через точку D и параллельной прямой a — и все.

— А как ты это сделаешь, без признака-то? — спросил Федя.

— Ну, это ты сам попробуй. Я использовал, так сказать, идею «непрерывности»: отрезок AD короче любого другого отрезка AX, где X — точка на прямой, проходящей через D и пересекающей прямую a. Такую прямую можно взять «сколь угодно близко» от прямой b, проходящей через D и параллельной прямой a. Отсюда можно будет получить, что отрезок AD короче любого другого отрезка AY, где Y — точка на прямой b. Но тогда AD будет перпендикуляром к прямой b. Понял?

— Понять-то понял, да что-то мне не нравится, — пробурчал Федя. — Подозрительно все же, что ты обошелся без признака перпендикулярности... — И ушел.

На следующий день Федя радостно сообщил, что в Васином рассуждении есть ошибка, и без признака перпендикулярности, видимо, не обойтись. Разговор у них получился очень интересный.

Попробуйте и вы:

1. *Доказать теорему о трех перпендикулярах, используя теорему Пифагора.*

2. *Доказать перпендикулярность прямой AD и прямой b, проходящей через точку D и параллельной a, используя идею «непрерывности».*

3. *Найти ошибку в рассуждениях Васи.*

В пересечении — одна точка

Сейчас мы на простом алгебраическом уравнении проиллюстрируем один нестандартный прием решения уравнений. Вот это уравнение:

$$\sqrt{\frac{x-1}{2}}-\sqrt{\frac{3-x}{2}}=\frac{x^2+9}{6x}.$$

Возможно, вы легко придумаете этот «прием» сами. Поэтому, прежде чем читать наше решение, попробуйте это уравнение решить самостоятельно.

Решение. Данное уравнение таково, что области значений функции $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{2}}-\sqrt{\frac{3-x}{2}}$, стоящей в его левой части, и функции $g(x)=\frac{x^2+9}{6x}$, стоящей в его правой части, пересекаются по одной точке.

В самом деле, $[f(x)]^2=1-\sqrt{(x-1)(3-x)}$, откуда $[f(x)]^2\leqslant 1$, $|f(x)|\leqslant 1$. С другой стороны, при $x>0$ (поскольку область определения функции f есть отрезок $[1;3]$, функция g при $x\leqslant 0$ нас не интересует)

$$g(x)=\frac{x^2+9}{6x}=\frac{x}{6}+\frac{3}{2x}\geqslant$$

$$\geqslant 2\cdot\sqrt{\frac{x}{6}\cdot\frac{3}{2x}}=1$$

(мы воспользовались здесь легко доказываемым неравенством: при $a>0$, $b>0$ $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$). Таким образом, $f(x)\leqslant 1$, а $g(x)\geqslant 1$. Поэтому рассматриваемое уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\sqrt{\frac{x-1}{2}}-\sqrt{\frac{3-x}{2}}=1,\\ \frac{x^2+9}{6x}=1.\end{cases}$$

Единственный корень $x=2$ уравнения $\frac{x^2+9}{6x}=1$ является корнем и первого уравнения этой системы.

Упражнения

Решите уравнения

1. $$\sqrt{\frac{2\cos x}{3}}+\sqrt{\frac{2-2\cos x}{3}}=\frac{2}{3}\sin x+\frac{1}{2\sin x}.$$

2. $$\sqrt{1-\sin x}+\sqrt{\sin x}=2\cos x-\cos^2 x.$$

В. Хлобыстов

Снова о пифагоровых тройках

Пусть число $2n+1$ является полным квадратом: $2n+1=m^2$. Тогда $(n+1)^2=n^2+m^2$. Это равенство дает еще один способ (см., например «Квант», 1979, № 4, с. 40 или 1981, № 4, с. 39) отыскивать некоторые ***пифагоровы тройки*** — такие тройки натуральных чисел $(a;\ b;\ c)$, что $a^2+b^2=c^2$.

Из него вытекает также, что существует бесконечно много прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами, у которых гипотенуза на единицу длинее одного из катетов.

А. Юрашев

В. Белонучкин

Диаграмма состояния

Как известно, любое вещество в зависимости от внешних условий может находиться в твердом, жидком или газообразном состоянии.

Если давление мало, а температура велика, вещество обычно существует в виде газа. При низкой температуре и высоком давлении все вещества превращаются в твердые тела. При каких-то промежуточных значениях параметров существует жидкость. Схематически это изображено на рисунке 1. Осталось провести границы между областями различных состояний — и мы получим так называемую диаграмму состояния вещества в p — T координатах. Припомним несколько известных фактов, которые помогут нам в этом деле.

1) Давление насыщенных паров растет с ростом температуры; соответственно, температура кипения повышается с ростом давления. Значит, граница жидкость — газ (Ж — Г) идет слева — снизу вправо — наверх.

2) Температура плавления слабо зависит от давления — граница твердое состояние — жидкость (Т — Ж) идет почти вертикально.

3) Существует особая точка — критическая ($T_{кр}$, $p_{кр}$). При приближении к ней по границе Ж — Г свойства жидкости и газа (в первую очередь — плотности) отличаются все меньше и меньше; в критической точке отличия исчезают. Граница Ж — Г в этой точке кончается.

4) Для всех веществ (исключение — гелий) имеется тройная точка — такая совокупность параметров ($T_{тр}$, $p_{тр}$), при которой сосуществуют все три фазы (жидкая, твердая и газообразная). Если $T < T_{тр}$, $p < p_{тр}$, то жидкое состояние невозможно, возможны только твердое и газообразное состояния. Следовательно, существует граница твердое состояние — газ (Т — Г). А так как при низких температурах, далеких от критической ($T \ll T_{кр}$), различие между жидким и твердым состояниями гораздо меньше, чем между ними и газом, поведение границы Т — Г похоже на поведение границы Ж — Г.

Итак, вид диаграммы состояния должен быть примерно таким, как на

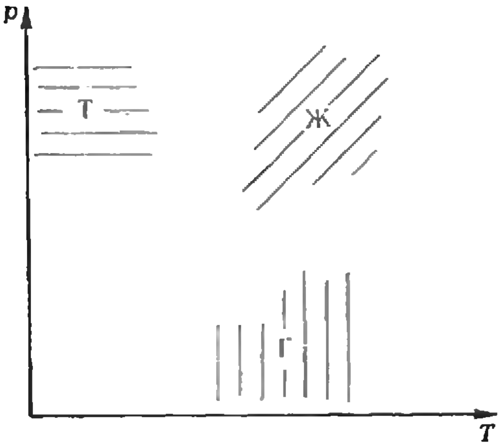


Рис. 1.

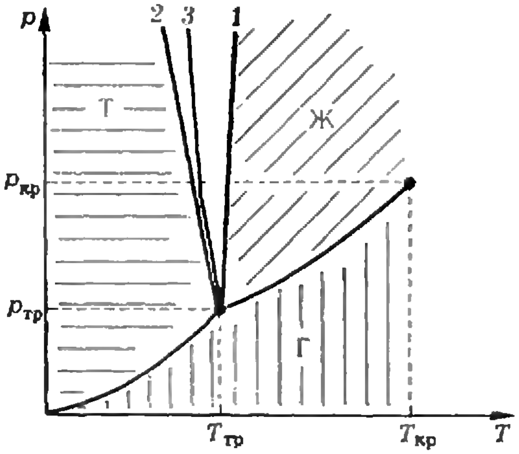


Рис. 2.

рисунке 2. Обратите внимание: граница Т — Ж проведена в трех вариантах. Обычный вариант — *1* — температура плавления растет с ростом давления. Но для некоторых веществ, например, висмута, отдельных сортов чугуна, $T_{пл}$ с ростом давления падает — вариант *2*. Для воды $T_{пл}$ падает до давлений порядка $2 \cdot 10^8$ Па (2000 атм), а затем начинает расти — вариант *3*.

Качественно зависимость температуры фазового перехода (так называют переход вещества из одного состояния — твердого, жидкого или газообразного — в другое) от давления можно понять, опираясь на один из наиболее общих законов природы — принцип Ле Шателье — Брауна*). Несколько упрощенно его можно сформулировать следующим образом:

Всякое внешнее воздействие вызывает в системе изменения, уменьшающие эффект этого воздействия.

Так, если насыщенные пары находятся в равновесии с жидкостью, при уменьшении обьема, занимаемого системой, давление паров начнет повышаться. Плотность жидкости больше плотности паров. Если часть паров сконденсируется, плотность, а значит, и давление остающихся паров, уменьшится. Эффект внешнего воздействия частично (а если температура поддерживается постоянной, то и полностью) скомпенсируется. Следовательно, немедленно начнется этот компенсирующий процесс — конденсация паров. Чтобы воспрепятствовать конденсации, то есть чтобы все-таки повысить давление паров, очевидно, надо повысить температуру системы. Таким образом, опираясь (кроме принципа Ле Шателье — Брауна) только на тот факт, что плотность жидкости больше плотности пара, мы пришли к выводу, что более высокому давлению насыщенных паров отвечает более высокая температура.

Чаще всего нас интересует переход жидкость — газ; им мы в основном и будем заниматься.

Обсудим некоторые особенности поведения насыщенного пара. Заметим, в частности, что плотность и давление (иногда несколько старомодно называемое упругостью) насыщенных паров не связаны прямой пропорциональностью.

Задача 1. *Приготовление пищи в кастрюле-скороварке идет при температуре $t_1 = 120°C$. При такой температуре давление насыщенных водяных паров $p_1 = 2$ атм. Во сколько раз плотность пара при этом выше, чем над поверхностью кипящей воды в открытой кастрюле?*

В открытой кастрюле вода кипит под давлением $p_0 = 1$ атм при температуре $t_0 = 100°C$. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu} RT$ получим выражение для плотности:

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{\mu p}{RT}.$$

Для отношения плотностей имеем

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_0} = \frac{p_1}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T_1} = \frac{2 \cdot 373}{1 \cdot 393} \approx 1{,}9.$$

Результат понятен: давление должно подняться в 2 раза, но немного выросла температура, значит (это ясно и из формулы $p = nkT$) плотность увеличилась меньше, чем вдвое.

Диаграмму состояния мы строили для случая, когда система состоит только из того вещества, состояние которого мы анализируем. Как влияет на состояние наличие посторонних веществ? Чтобы разобраться в этом, решим следующую задачу.

Задача 2. *В сосуд объема $V = 22{,}4$ литра при нормальном давлении воздуха и температуре $t_0 = 0°C$ налили 18 г воды. Затем сосуд закрыли герметичной крышкой и нагрели до температуры $t_1 = 100°C$. Определить давление в сосуде.*

К сожалению, нередко можно услышать от школьников два разных, но одинаково неправильных ответа.

1) В сосуде давление воздуха $p_0 = 1$ атм, да при нагревании до температуры T_1 оно возрастет до величины $p_1 = p_0 \frac{T_1}{T_0} = 1 \cdot \frac{373}{273} \approx 1{,}3$ атм. Это больше давления насыщенных паров воды при 100°C; значит, вода испаряться не будет, и общее давление в сосуде будет равно $p = p_1 = 1{,}3$ атм.

2) 100°C — температура кипения воды. Значит, вся вода в сосуде испарится; давление образовавшегося пара (в количестве 1 моль — ведь воды было 18 г) нетрудно рассчитать (при $T_0 = 273$ К 1 моль в объеме 22,4 л создает давление $p_0 = 1$ атм, а при $T_1 = 373$ К давление пара будет $p_{п1} \approx 1{,}3$ атм); давление воздуха в сосуде возрастет при нагревании до $p_{в1} \approx 1{,}3$ атм; общее давление станет равным $p_1 = p_{п1} + p_{в1} \approx 2{,}6$ атм.

---

*) Текст, набранный мелким шрифтом, заметно выходит за рамки школьного курса.

Авторы первого ответа забывают, что жидкость должна находиться в равновесии со *своим* паром; это означает, что при $t_1 = 100°C$ вода будет испаряться, пока давление *ее* паров не достигнет 1 атм.

Неправилен, понятно, и второй ответ, так как давление паров воды при 100°C не может подняться выше 1 атм.

Итак, в сосуде давление воздуха будет $p_{\text{в}1} \approx 1{,}3$ атм, давление водяных паров — $p_{\text{п}1} = 1$ атм (мы убедились, что масса воды достаточна для создания такого давления), и суммарное давление в сосуде будет всего $p_1 = p_{\text{п}1} + p_{\text{в}1} = 2{,}3$ атм.

Кстати, кипеть вода при этом не будет. Ведь кипение — это процесс парообразования не только на поверхности жидкости, но и во всем ее объеме. Если температура такова, что соответствующее ей давление насыщенных паров равно *суммарному* внешнему давлению, то образующиеся внутри жидкости пузырьки пара не схлопываются внешним давлением; дальнейшее испарение внутрь пузырьков увеличивает их объем, пузырьки всплывают, на поверхности лопаются — жидкость кипит.

Подчеркнем еще раз: испарение происходит всегда, когда *давление паров* над поверхностью жидкости меньше давления насыщенных паров при данной температуре; кипение происходит лишь в том случае, когда *суммарное давление* (и внутри жидкости) не превосходит давления насыщенных паров при данной температуре.

Между прочим, на Земле полно воды; а относительная влажность, равная 100%, то есть насыщение воздуха парами воды, встречается редко. Почему при избытке воды не вся атмосфера насыщена водяными парами? Может быть, достаточное количество воды просто не успело испариться? Давайте оценим скорость испарения воды.

Задача 3.*) *Оцените количество воды, испаряющейся при комнатной температуре с единицы поверхности в открытом стакане (а также в реке, в ручейке, в океане). Давление насыщенных паров воды при температуре $T = 300$ К равно $p_{\text{н}} = 3{,}5$ кПа.*

Когда вода находится в равновесии со своим насыщенным паром, то она, строго говоря, испаряется. Более того, скорость испарения не зависит от того, есть ли над поверхностью воды пар. Она определяется только тем, какое количество молекул воды имеет скорость, достаточную, чтобы покинуть жидкость (и подходящее направление скорости). Просто точно такое же количество молекул пара попадает в жидкость — скорость испарения равна скорости конденсации, существует *динамическое* равновесие. А подсчитать количество конденсирующегося пара не так уж трудно.

Число молекул пара, попадающих за единицу времени (1 с) на единичную площадку (1 м²) поверхности воды, равно

$$z = \frac{n\overline{|v_x|}}{2} \approx \frac{p_{\text{н}}}{2kT}\sqrt{\frac{RT}{M}}\left(\frac{1}{\text{м}^2\text{с}}\right)$$

(так как расчет приближенный, мы не учитываем различия между средним по модулю значением v_x ($|v_x|$) и средним квадратичным значением v_x ($\sqrt{\overline{v_x^2}}$)). Масса же пара, конденсирующегося на единице площади поверхности за единицу времени, равна, очевидно,

$$m = z\frac{M}{N_{\text{А}}} = \frac{p_{\text{н}}}{2}\sqrt{\frac{M}{RT}}\left(\frac{\text{кг}}{\text{м}^2\text{с}}\right)$$

($N_{\text{А}}$ — число Авогадро).

Как мы договорились, такая масса воды испаряется независимо от влажности воздуха, то есть независимо от содержания водяных паров в воздухе (что характеризуется значением n). Если восполнение испаряющейся воды не происходит (влажность очень маленькая), то именно такое количество воды испарится, уйдет с единицы поверхности за секунду. Рассчитаем понижение уровня воды за секунду:

$$h = \frac{p_{\text{н}}}{2\varrho}\sqrt{\frac{M}{RT}} = \frac{3{,}5\cdot 10^3}{2\cdot 10^3}\sqrt{\frac{18\cdot 10^{-3}}{8{,}3\cdot 300}} \approx$$
$$\approx 4{,}7\cdot 10^{-3}\ \text{м/с} = 4{,}7\ \text{мм/с}.$$

---

*) Аналогичная задача есть в сборнике «Задачи по физике» И. Слободецкого и Л. Асламазова, вышедшем в серии «Библиотечка «Квант» (задача № 75).

Задачи, которые используются в статье, — из репертуара приемных экзаменов в МФТИ.

На первый взгляд ничего страшного в этом результате нет. Но вспомним, что средняя глубина океанов около 4 км; значит, время их полного испарения порядка 10^6 с, а это немногим более 10 суток!

В чем же дело? Почему океаны существуют?

Есть несколько обстоятельств, мешающих их исчезновению.

Начнем с менее важных. Во-первых, относительная влажность не равна нулю. Но если даже мы примем ее равной 90%, это лишь на порядок понизит скорость испарения. Во-вторых, не все молекулы пара, ударяющиеся о поверхность воды, остаются в жидкости — некоторые отскакивают, отражаются. Следовательно, мы завысили скорость конденсации, а значит, и равную ей скорость испарения. Пусть «прилипает» десятая часть молекул (число, близкое к реальному, но уже заниженное). Накинем еще порядок. Мы продлили жизнь океанов до 100 дней, до 1001 дня. Для Шехерезады (и мировой литературы) это эпоха, но для океана с его миллиардолетней историей три года — миг.

Но вернемся к нашему стакану. Даже с введенной нами поправкой в 100 раз вода из полного стакана должна испариться полностью меньше, чем за полчаса. Цифра явно нереальная. В действительности над поверхностью воды быстро образуется слой насыщенных паров, точнее — слой воздуха с относительной влажностью 100%. И только до образования этого слоя уровень воды понижается со скоростью 4,7 мм/с. Как только слой образовался, скорость конденсации становится почти равной скорости испарения, и дальнейшее понижение уровня воды определяется весьма медленным процессом диффузии паров от поверхности жидкости в окружающее пространство.

Впрочем, в судьбе океанов главную роль играют не эти факторы, замедляющие испарение; океанам хватило бы времени для полного испарения. Дело в том, что мы рассматривали равновесные или почти равновесные (квазиравновесные) системы. А земная атмосфера — система существенно неравновесная. Теплый влажный воздух поднимается в холодные слои атмосферы, там вода конденсируется, а на пути к поверхности Земли капли не успевают испариться. Океанские воды пополняются, круговорот воды в природе продолжается.

Упражнения

1. Твердый галлий плавает в своем расплаве. Как зависит температура плавления галлия от давления?

2. Что вы можете сказать о свойствах льда при давлениях выше 2000 атм?

3. Как известно, при жарке пищи кипит находящаяся в ней вода, а не масло, на котором жарится еда. Давление насыщенных паров масла при 100°С равно $p_м = 1$ мм рт. ст., молярная масса масла $M_м \approx 80 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Во сколько раз отличаются плотности паров воды и масла под крышкой сковороды?

4. Какое максимальное количество воды может полностью испариться в условиях задачи 2 на с. 43?

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 36)

А. Маков (Братск) **88, 89**; *А. Мильман* (Одесса) **88—91**; *В. Михайлов* (Опочка) **80, 81, 84, 85, 87—91**; *П. Морозов* (Тула) **89, 91**; *К. Немченко* (Донецк) **87**; *С. Нестеренко* (Красноярск) **80, 81**; *К. Панкратов* (Куйбышев) **85**; *С. Пашенко* (Киев) **85, 86**; *В. Пентегов* (Киев) **88—91**; *В. Петроградский* (Пермь) **87—89**; *А. Пироженко* (Мытищи) **81—89**; *О. Плотникова* (Волгоград) **81**; *В. Погорелов* (Узловая) **88, 89**; *М. Половинченко* (Киев) **88, 89**; *А. Потапов* (Чайковский) **88**; *А. Радионов* (п. Никольское Ленинградской обл.) **80, 81**; *Н. Розенвайн* (Киев) **80, 81, 86—88**; *Ю. Самохин* (Москва) **81**; *Д. Свирида* (Москва) **84—91**; *Ю. Синюков* (ст. Селезни Тамбовской обл.) **81, 86, 89**; *С. Стрелецкий* (Львов) **79**; *Ю. Талденко* (Сумы) **81, 84, 86**; *А. Терещенко* (с. Нерудсталь Днепропетровской обл.) **82, 86—89**; *И. Тихоненко* (совх. Новоомский Омской обл.) **81, 91**; *А. Тищенко* (Днепропетровск) **80, 82, 89—91**; *О. Третьяков* (Омск) **85**; *В. Ухов* (д. Морозовка Ленинградской обл.) **79, 81**; *Н. Федин* (Омск) **81, 82, 85, 88—91**; *Н. Фесун* (Золотоножский р-н Черкасской обл.) **88—90**; *С. Фокин* (Верхний Уфалей) **87**; *А. Хельвас* (Киев) **81, 84, 87**; *А. Ходарин* (п. Нововоронежский Воронежской обл.) **86, 87**; *М. Шепетько* (Давид-Городок) **81**; *С. Шмаков* (Саратов) **88, 90**; *А. Шрамков* (п. Волоконовка Белгородской обл.) **89**; *А. Шугай* (Запорожье) **80, 88, 90**; *Ю. Щедрин* (Брянск) **88, 89**; *В. Ярош* (Ленинград) **88, 91**; *А. Ярощук* (Новосибирск) **90**.

Советская, болгарская и вьетнамская делегации у Памятника советско-болгарской дружбы.

Фото Христо Минчева

Л. Асламазов

XII Международная физическая олимпиада

С 1 по 10 июля этого года в Народной Республике Болгарии, в городе Варне, проходила XII Международная физическая олимпиада школьников. Эта олимпиада была рекордной по числу участников: 14 стран прислали свои команды. Это Болгария, Венгрия, Вьетнам, ГДР, Италия, Польша, Румыния, СССР, Финляндия, Франция, ФРГ, Чехословакия, Швеция и Югославия.

Команду СССР представляли призеры Всесоюзной олимпиады по физике:

Александр Гутин — выпускник средней школы № 2 г. Клинцы,

Владислав Деревянко — выпускник средней школы № 145 г. Киева,

Андрей Мушинский — выпускник средней школы № 23 г. Минска,

Илья Солодовников — выпускник средней школы № 179 г. Москвы,

Игорь Шубенин — выпускник средней школы № 52 г. Риги.

Руководителями нашей команды были заведующий лабораторией Научно-исследовательского института содержания и методов обучения Академии педагогических наук СССР О. Ф. Кабардин и инспектор Министерства просвещения СССР М. В. Грабиленков.

Как обычно, рабочее жюри состояло из хозяев — болгарских физиков. Оно осуществляло отбор и проверку задач. Результаты утверждались Международной комиссией, в которую вошли представители всех стран-участниц. Председателем Международной комиссии был избран известный болгарский ученый профессор А. Раев.

Большое внимание олимпиаде уделили Министерство просвещения НРБ, Димитровский комсомол, Городской совет Варны. Олимпиада была организована прекрасно. Все участники жили в новом благоустроенном здании Института усовершенствования учителей на берегу Черного моря. В аудиториях и лабораториях Института прошли также теоретический и экспериментальный туры. Участники олимпиады побывали на знаменитых курортах Золотые пески, Солнечный берег и Альбена, совершили поездки в Ботанический сад города Балчика и в старинный город Несебыр. Перед гостями выступили лучшие самодеятельные коллективы болгарских школьников, известные своей высокой музыкальной культурой. В течение всего времени олимпиады работал интерклуб, в котором ребята могли встретиться, рассказать о своих странах, обменяться впечатлениями об олимпиаде и просто потанцевать.

Как обычно, соревнования олимпиады проводились в два тура: сначала участники решали теоретические задачи, а затем — выполняли экспериментальную задачу. Приведем их условия:

Теоретические задачи

1. Пробирка массой M находится в вакууме. Перегородка массой m с пренебрежимо малой толщиной разделяет объем пробирки на две равные части. В закрытой части пробирки содержится ν молей идеального одноатомного газа с молярной массой μ при температуре T. Перегородка освобождается и, двигаясь без трения, вылетает из пробирки. Затем вытекает и газ. Какова будет конечная скорость пробирки, если в момент начала движения перегородки она была неподвижна? Универсальная газовая постоянная R известна.

Импульсом газа до вылета перегородки, а также теплообменом между газом, с одной стороны, и пробиркой и перегородкой, с другой, можно пренебречь. Земное притяжение не учитывается.

2. Электрическая лампа сопротивлением $R_0=2$ Ом при номинальном напряжении $U_0=4{,}5$ В питается током от аккумулятора с ЭДС $\mathcal{E}=6$ В, внутренним сопротивлением которого можно пренебречь.

а) Пусть номинальное напряжение подается на лампу через реостат с движком, включенным как потенциометр. Каково должно быть сопротивление реостата и на какой максимальный ток он должен быть рассчитан, чтобы КПД системы был не меньше $\eta_0=0{,}6$?

б) Каков максимально возможный КПД цепи лампа — аккумулятор при номинальном напряжении на лампе и каким образом их надо соединить через подходящий реостат, чтобы достичь максимального КПД?

3. Приемник радиоволн радиоастрономической обсерватории расположен на берегу моря на высоте $h=2$ м над уровнем моря. При восходе над горизонтом радиозвезды, излучающей электромагнитные волны длиной $\lambda=21$ см, приемник регистрирует чередующиеся максимумы и минимумы. Известно, что приемник регистрирует только те электромагнитные волны, у которых электрический вектор $\vec{E}$ колеблется параллельно водной поверхности. Интенсивность регистрируемого сигнала пропорциональна E^2.

а) Определите высоты звезды над горизонтом, измеренные в углах по небесной сфере, при которых регистрируются максимумы и минимумы (в общем виде).

б) Будет ли интенсивность сигнала в приемнике возрастать или уменьшаться непосредственно после восхода радиозвезды? Объясните, почему.

в) Найдите отношение интенсивностей сигналов в первом максимуме и следующем за ним минимуме.

При отражении электромагнитной волны от воды отношение амплитуд электрического поля отраженной ($E_{\text{отр}}$) и падающей ($E_{\text{пад}}$) волн описывается законом

$$\frac{E_{\text{отр}}}{E_{\text{пад}}}=\frac{n-\cos\varphi}{n+\cos\varphi},$$

где n — показатель преломления, а φ — угол падения электромагнитной волны. Для границы воздух — вода при $\lambda=21$ см величина $n=9$.

г) Будет ли возрастать или уменьшаться отношение интенсивностей сигналов, принимаемых в соседних максимумах и минимумах, с восхождением звезды над горизонтом?

При решении задачи морскую поверхность считать гладкой.

Экспериментальная задача

Имеется в распоряжении упругий резиновый шнур, вертикально подвешенный на штативе. Начальная длина шнура 150 мм, а масса чашки весов 5 г. Помимо этого даны набор грузов массой от 10 до 100 г, секундомер, измерительная линейка, лекало и миллиметровая бумага. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2. Массой шнура можно пренебречь.

а) Нагрузите резиновый шнур последовательно грузами массой от 15 до 105 г. Занесите в таблицу и изобразите графически в подходящем масштабе экспериментально полученную зависимость удлинения Δl шнура от модуля силы натяжения F.

б) Используя результаты измерений, проведенных в пункте а), вычислите и составьте таблицу значений объема шнура при нагрузках от 35 до 95 г. Вычисления выполните последовательно для каждых двух соседних значений нагрузки из указанного интервала. Напишите формулы, которыми вы пользовались при вычислениях. Выразите аналитически ваше предположение о зависимости объема от нагрузки.

Примите значение модуля Юнга постоянным и равным $E=2\cdot10^6$ Н/м^2. При обсуждении результатов следует иметь в виду, что для указанных нагрузок закон Гука для резины имеет приблизительный характер, поэтому отклонения от него могут доходить до 10%.

в) Определите объем резинового шнура, используя секундомер и положив на чашку весов груз массой 60 г. Укажите использованные формулы.

Очень хорошо была организована проверка работ. Сразу же после окончания тура все работы копировались, и копии раздавались руководителям команд. Кроме того, руководитель каждой команды получал официальные решения задач, предлагавшиеся жюри, и нормативы оценок решений в баллах. Поэтому руководители вместе с ребятами сами могли проверить все работы и убедиться в правильности оценок жюри.

Отбор победителей проводился по следующему принципу. Сначала выявлялся победитель — участник, получивший максимальное число очков. Им оказался советский школьник А. Гутин, набравший 47 очков из 50 возможных. Первый приз, кроме абсолютного победителя, был также присужден участникам, набравшим не менее 90% очков от лучшего результата. Таких оказалось шестеро: А. Уиренбах (ФРГ), В. Тудосе (Румыния), И. Солодовников (СССР), М. Лен (ФРГ), В. Деревянко (СССР) и В. Лерц (Польша). Второй приз завоевали участники, набравшие не менее 80% очков от лучшего результата; среди них — советский школьник А. Мушинский. Третий приз получили школьники, набравшие не менее 65% очков от лучшего показателя; в их числе — член нашей сборной И. Шубенин. И, наконец, поощрительными грамотами были награждены все те участники, которые набрали не менее 50% очков от лучшего результата. Кроме того, были вручены специальные призы за лучшие решения теоретических задач: от Академии наук НРБ — С. Мюллеру (ФРГ), от журнала «Физика» — А. Гутину (СССР), от Общества физиков — А. Клумперу (ФРГ). Специальный приз за лучшее решение экспериментальной задачи получил советский участник А. Мушинский.

Во время олимпиады в одном из залов Международного Дома ученых имени Фредерика Жолио-Кюри состоялась беседа за круглым столом на тему «Роль физических олимпиад в развитии интересов и творческих способностей молодежи». В беседе приняли участие представители всех стран, присутствующих на олимпиаде, а также — представитель ЮНЕСКО доктор Самади.

Д-р Самади рассказал о работе, проводимой ЮНЕСКО в связи с проблемами преподавания естественных

наук, в частности, — на школьном уровне. Большинство участников в своих выступлениях говорили об организации и целях национальных соревнований школьников в представляемых ими странах. Наиболее важными целями олимпиад во всех странах являются повышение интереса учащихся к физике и технике, развитие творческих способностей и выявление наиболее одаренных школьников. Дополнительная цель международного соревнования — установление дружеских связей между школьниками разных стран. Было внесено предложение с помощью ЮНЕСКО организовать международный обмен делегациями школьников и учителей, принимающих участие в соревнованиях.

Многие выступавшие касались типов задач, предлагавшихся на олимпиадах. Подчеркивалось, что решения задач должны требовать углубленного и творческого понимания физики и что необходимо приблизить содержание задач к современной физике. В то же время отмечалось, что отбор задач на международные соревнования затруднен ввиду различий в учебных программах разных стран.

С большим интересом были выслушаны доклады советских участни-

Идет экспериментальный тур.

Во время заседания Международной комиссии олимпиады. Выступает председатель комиссии А. Раев.

Приветствие А. Раева читателям нашего журнала.

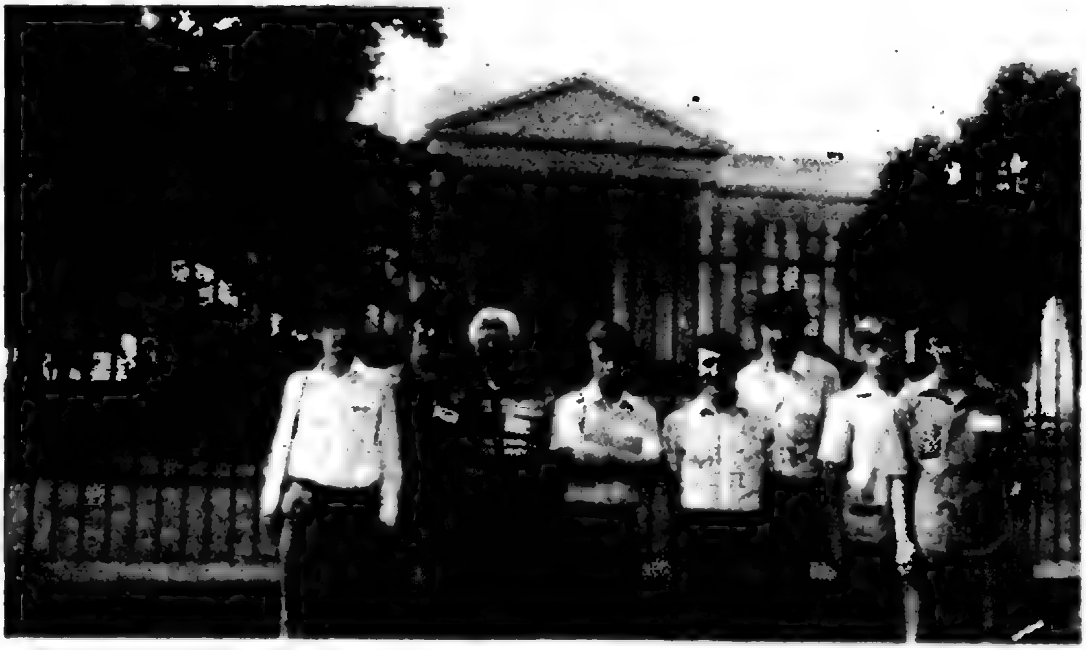
Всем читателям «Кванта»
желаю успехов и достижений

ков О. Ф. Кабардина и Г. С. Тарасюк. Предложенный Г. С. Тарасюк способ оценки трудности олимпиадных задач был сразу же использован жюри олимпиады, и расчет показал, что коэффициент трудности задач этой олимпиады находится в пределах нормы.

Участники беседы за круглым столом говорили также о важной роли физико-математических журналов для школьников. Профессор Кунфалви, один из основателей Международных физических олимпиад, подробно рассказал о венгерском физико-математическом журнале для школьников. Он подчеркнул, что в таких журналах обязательно нужно публиковать трудные задачи, которые школьники могли бы решать дома, так как не всякий творческий человек способен быстро решать задачи и побеждать на олимпиадах. В выступлении болгарской участницы П. Бозаровой говорилось о роли журнала «Квант» для подготовки к олимпиадам и развития творческих способностей болгарских школьников. Об истории создания «Кванта» и опыте его работы со школьниками в СССР рассказал Л. Г. Асламазов. Представитель Югославии Д. Гружик сообщил об издаваемом в его стране журнале для школьников «Юный физик».

На заключительном заседании Международной комиссии был принят план проведения следующих Международных физических олимпиад. XIII Олимпиаду намечено провести в конце июня 1982 года в ФРГ, XIV — в Румынии в 1983 году, XV — в Швеции в 1984 году, XVI — в ГДР в 1985 году. Было высказано предложение привлечь к проведению олимпиад такие международные организации, как Европейское физическое общество, Международный союз чистой и прикладной физики, ЮНЕСКО.

В заключение от имени всей советской делегации хочется поблагодарить болгарский оргкомитет олимпиады за теплый, дружественный прием, который мы ощущали буквально на каждом шагу.



Команда СССР: слева направо — Ю. Екишев, Ю. Чеканов, В. И. Мишин (педагогический руководитель), В. Алексеев, А. М. Абрамов (научный руководитель), А. Чанышев, А. Аралкин, М. Гринчук.

А. Абрамов, В. Мишин

XXII Международная математическая олимпиада

XXII Олимпиада собрала рекордное число стран-участниц — 27. Это Австралия (8)[*], Австрия (8), Бельгия (8), Болгария (8), Бразилия (8), Великобритания (8), Венгрия (4), Венесуэла (8), Греция (8), Израиль (6), Канада (8), Колумбия (8), Куба (8), Люксембург (1), Мексика (5), Нидерланды (8), Польша (8), Румыния (4), СССР (6), США (8), Тунис (2), Финляндия (8), Франция (8), ФРГ (8), Швеция (8), Чехословакия (5), Югославия (8).

Впервые олимпиада проходила не на европейском континенте: в этом году участники встретились в Соединенных Штатах Америки.

Членами команды СССР стали выпускники десятого класса, победители и призеры Всесоюзных математических олимпиад последних лет *Валерий Алексеев, Михаил Гринчук, Айрат Чанышев* (все из ФМШ № 18 при МГУ), *Андрей Аралкин* (Новокузнецк, с. ш. № 11), *Юрий Екишев* (Сыктывкар, с. ш. № 1) и *Юрий Чеканов* (Москва, с. ш. № 91).

Как и ранее, месячный тренировочный сбор нашей команды проходил в поселке Черноголовка Московской области на базе экспериментальной школы АПН СССР. На сборах, потребовавших от участников довольно интенсивной работы, решались олимпиадные задачи, в том числе и задачи, предлагавшиеся на международных олимпиадах. Многие из преподавателей, работавших на сборах, раньше сами участвовали в международных олимпиадах (И. Захаревич, Б. Ивлев, С. Конягин, В. Ляшко, А. Разборов). Большое внимание уделялось спорту — футбол, плавание, баскетбол, настольный теннис и даже прыжки в воду с пятиметровой вышки (для самых смелых) помогали поддерживать хорошую физическую форму членов команды; это оказалось очень важным: в США стояла тридцатиградусная жара при стопроцентной влажности.

Поэтические и музыкальные вечера, проводившиеся руководителем сборов А. Н. Земляковым, стали существенной частью культурной программы.

---

[*] В скобках указано количество участников в команде.

Советская команда вылетела в США 7 июля. Рабочее расписание олимпиады было таким:

7—8 июля — сбор команд в Рутгерском университете (г. Нью-Брунсвик в окрестностях Нью-Йорка).

9—12 июля — подготовительная работа международного жюри: отбор задач олимпиады, оценка задач в баллах, согласование переводов с английского на другие языки.

Работа жюри проходила в колледже Мэри Вашингтон во Фредериксберге (под Вашингтоном). В это время школьники и педагогические руководители команд оставались в Рутгерском университете, а 12 июля переехали в Джорджтаунский университет (Вашинтгон).

13—14 июля — решение задач олимпиады.

В каждый из этих дней предлагалось по три задачи, на решение которых отводилось по 4,5 часа (первые 30 минут — для предварительного знакомства с текстами; в течение этого времени участники могли обращаться в жюри с вопросами по формулировкам). За полное решение каждой задачи давалось 7 баллов.

15—17 июля — проверка работ руководителями команд; координация оценок.

Предварительные оценки, выставленные руководителями, уточнялись при обсуждении работ с координационной комиссией; по каждой задаче в эту комиссию входило три американских математика. Руководители команды СССР (так же, как и руководители команд других стран, представивших задачи, отобраные для олимпиады) координировали работы американских школьников по задаче, предложенной СССР.

18 июля — заключительное заседание жюри.

Было решено при уждать первые премии участникам, набравшим 41 или 42 балла. Вторые премии присуждались за результат от 34 до 40 баллов; наконец, третьи премии получили учащиеся, набравшие от 26 до 33 баллов. Специальный приз «за лучшее решение» жюри решило не присуждать.

21 июля советская команда вылетела на Родину.

Пять задач олимпиады опубликованы в Задачнике «Кванта» этого номера (см. с. 24). Задача М716 предложена Великобританией, М717 — ФРГ, М718 — Нидерландами, М719 — Бельгией, М720 — Финляндией*). Приведем формулировку шестой задачи, предложенной СССР: *Через точку O, лежащую внутри данного треугольника, проведены три окружности равных радиусов, каждая из которых лежит внутри треугольника и касается двух его сторон. Докажите, что точка O, центр окружности, описанной около треугольника, и центр окружности, вписанной в него, лежат на одной прямой.*

Отбор задач для олимпиады осуществляется так: оргкомитет олимпиады (президент олимпиады — профессор Р. Андерсон, председатель оргкомитета — доктор А. Уилкокс) из задач, присланных представителями стран-участниц, отобрал 19 задач. Международное жюри (председатель — профессор С. Грейцер, председатель комиссии по отбору задач — профессор Д. Барлас) из этих задач выбрало 6 задач для олимпиады. При этом жюри стремилось удовлетворить следующие требования: 1) задачи должны отражать различные разделы математики, 2) в числе олимпиадных задач должны быть простые, средней трудности и сложные. Если первое требование было выполнено, то про второе этого сказать нельзя. И дело, по-видимому, не только в том, что, как это часто бывает, предварительная оценка трудности задачи может оказаться довольно далекой от истинной, которая становится известной только при подведении итогов олимпиады. Основная причина того, что, как это признали многие участники олимпиады (и руководители, и школьники), задачи оказались слишком простыми, состоит, на наш взгляд, в следующем.

Эти задачи требовали для своего решения идей, в олимпиадной практике хорошо известных. Учитывая

---

*) Задачи М716 — М718 предлагались в первый день, остальные — во второй

Группа участников олимпиады у памятника Эйнштейну в Вашингтоне.

же, что во многих странах, не раз участвовавших в олимпиадах, в настоящее время подготовка находится на хорошем уровне (и, конечно же, известные задачи давно разобраны), становится понятным, почему необычайно велико число участников, получивших награды (36 первых премий, причем 26 участников набрали 42 балла из 42; 37 вторых и 30 третьих премий).

Все шесть советских участников — в числе призеров: *В. Алексеев, М. Гринчук* и *Ю. Чеканов*, показавшие абсолютный результат, получили золотые медали; *Ю. Екишев* и *А. Чанышев* — серебряные; *А. Аралкин* награжден бронзовой медалью. Всем призерам олимпиады вручены памятные подарки.

Команда СССР, показавшая хороший результат (230 баллов), выступала в неполном составе и, естественно, не могла участвовать в споре за неофициальное командное первенство. Наилучшие результаты показали команды США (314 баллов), ФРГ (312 баллов), Великобритании (301 балл), Австрии (290 баллов) и Болгарии (287 баллов). Очень хорошо выступили команды Венгрии и Чехословакии. Ну, а абсолютным победителем олимпиады стала команда Люксембурга, не потерявшая ни одного очка: ее единственный участник набрал 42 балла из 42!

В целом команда СССР выступила удачно: все наши участники получили от 78 до 100 процентов от возможного количества баллов; по каждой задаче ребята набирали от 86 до 100 процентов баллов. Все же, учитывая возросшую конкуренцию, хочется пожелать будущим участникам международных олимпиад тщательнее готовиться к соревнованиям — работать нужно быстро, но точно — на олимпиаде мелочей нет! Наши «потерянные» 22 балла — результат излишней нервозности участников и обидных ошибок при оформлении уже найденных решений.

Заканчивая обсуждение итогов, вернемся к вопросу об «истинной сложности». Поскольку все задачи оценивались одинаково (7 баллов), мы приведем некоторые цифры, дающие представление о степени трудности задач для участников. 185 участников из возможных 1295 баллов по каждой задаче общими усилиями набрали 695 баллов по первой задаче, 934 — по второй, 504 — по третьей, 821 — по четвертой (это — первые четыре задачи Задачника «Кванта»), 958 — по пятой (это — задача СССР) и 1025 — за решение шестой задачи (задача M720).

Международная математическая олимпиада — это не только задачи и медали. Оргкомитет олимпиады, проведший большую работу и справедливо заслуживший признательность участников олимпиады, предусмотрел обширную культурную программу. Ребята совершили ряд экскурсий (по Нью-Йорку и Вашингтону), посетили Национальный музей аэронавтики и космического пространства, Вашингтонскую национальную галерею, были в Капитолии, присутствовали на театральных постановках.

Олимпиада — это множество интересных встреч и бесед. Правда, словарный запас участника, позволяющий говорить на других языках, во многих случаях был, мягко говоря, ограничен; однако стремление понять друг друга было столь велико, что языковые проблемы при общении отступали на задний план. Каждый участник получил за эти две недели массу интересных впечатлений, приобрел много новых друзей в самых разных концах мира.

Развертки куба

С развертками куба, то есть с плоскими фигурами (образованными целыми гранями куба), из которых можно составить поверхность куба, все вы, вероятно, встречались. Однако мало кто знает, что число различных таких разверток равно одиннадцати. На рисунке 1 изображен сам куб, а на рисунках 2—4 — все его развертки. На гранях куба написаны числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6. На рисунке 1 мы видим только три первых числа, а как расположены на кубе остальные числа, можно понять из рисунка 2, где эти числа изображены на одной из разверток куба. Если мы возьмем другую развертку (рис. 3), то там числа расположены совсем в другом порядке; кроме того, они оказываются повернутыми. Попробуйте теперь на девяти развертках, изображенных на рисунке 4, нарисовать 5 чисел (одно число уже нарисовано) так, чтобы это соответствовало нашему кубу.

А. П.

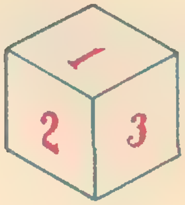


Рис. 1.

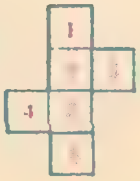


Рис. 2.

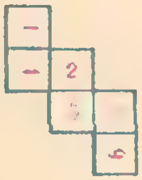


Рис. 3.

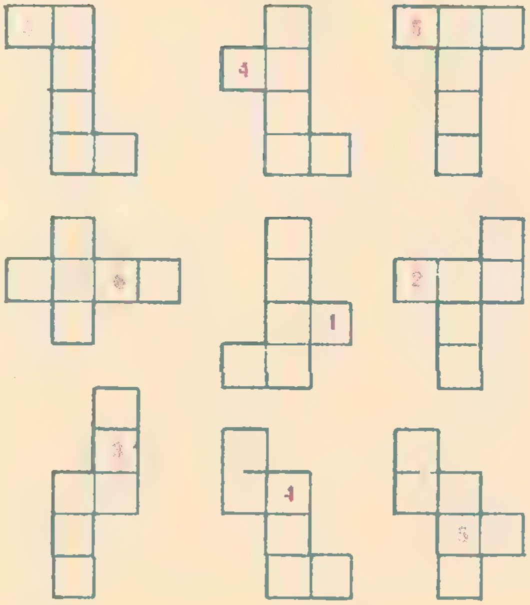


Рис. 4.

Математические олимпиады в ПТУ

Задачу, стоящую сейчас перед системой профтехобразования, можно сформулировать так: в ПТУ все должно быть как в школе, но лучше. Именно поэтому в последние годы все чаще юноши и девушки из профессионально-технических училищ занимаются в кружках НОУ, выступают на олимпиадах, в конкурсах рефератов.

Омское областное управление профтехобразования проводит предметные олимпиады уже ряд лет. Лучше всего получались олимпиады по физике; конкурсы по другим предметам охватывали сравнительно мало учащихся, особой популярностью не пользовались.

С другой стороны, студенты омских вузов, члены лаборатории форм и методов комсомольской работы при ОК ВЛКСМ уже накопили солидный опыт организации различных математических олимпиад для школьников (см. «Квант», 1979, № 12 и 1980, № 8). Было у них и желание расширить сферу своих действий. Поэтому оказалось закономерным, что в 1980 году методический кабинет управления профтехобразования области и члены лаборатории решили провести экспериментальную командную олимпиаду ПТУ области по математике.

Конечно, были сомнения. Справятся ли участники с заданием? Будут ли командные олимпиады интересны учащимся ПТУ? Узнать это можно было только из эксперимента.

В марте 1980 года олимпиада прошла, а ее результаты понравились и участникам, и организаторам. Конечно, первые призеры не смогли бы рассчитывать на выигрыш кубка традиционной олимпиады школ города, но места в первой двадцатке они бы заняли. А самое главное — в олимпиаде приняли участие 160 человек из 30 училищ; сама подготовка к олимпиаде прошла в ПТУ очень живо, активно. Надо было продолжать эксперимент, превращать его в традицию. Поэтому в следующем году студентами под руководством преподавателей педагогического и политехнического институтов были проведены уже шесть предметных командных олимпиад — по математике, химии, черчению, английскому и немецкому языкам, обществоведению. В них приняли участие около 800 юношей и девушек из профтехучилищ.

Особенность всех этих олимпиад — ярко выраженный прикладной характер предлагаемых заданий. В дни олимпиад студенты и преподаватели вузов читали научно-популярные лекции, рассказывали об интересных задачах. А разбор заданий каждой олимпиады проводился дважды — отдельно для участников олимпиады и отдельно для их учителей.

Отношение к олимпиадам видно и из такого факта: ряд училищ выставил на олимпиаду по 3—5 команд, а призеров разделяли десятые доли очка. Наиболее успешно в олимпиадах выступают команды ПТУ №№ 23, 15, 69.

Для многих ребят участие в олимпиаде стало путевкой в кружки НОУ при омских вузах. В кружках им, как правило, подбирались работы, где нужно было применять математику к избранной специальности: составлять номограммы, рассчитывать оптимальную нагрузку станков и т. п. Так, наибольший интерес на традиционной конференции НОУ вызвал доклад В. Шема и В. Ждана из ПТУ № 46. Ребята обобщили задачу о бригаде, предложенную на олимпиаде, после чего решили ее несколькими способами.

Опробованы и новые задумки лаборатории. В том же ПТУ № 46 прошла дискуссия «Математика и современный рабочий», подготовленная членами лаборатории. Две команды из учащихся одной группы отстаивали свои (противоположные) мнения, используя для доказательства и прочитанные книги, и примеры из производственной жизни, и ответы опрошенных ими рабочих, мастеров, инженеров.

Математика нужна будущему рабочему — вот вывод дискуссии. И этим в Омске закладывается новая традиция — система кружков НОУ в профтехобразовании.

Приведем теперь отдельные задачи математических олимпиад ПТУ.

1. На какой линии располагаются центры окружностей, вписанных во всевозможные треугольники с общей стороной AB?

2. У четырех людей, родившихся в разные годы XX века, суммы цифр возрастов одинаковы, а сумма всех четырех возрастов — точный куб. Сколько лет старшему из этих людей?

3. Общее сопротивление двух проводников, соединенных параллельно, равно a Ом, а их же, соединенных последовательно, — b Ом. Можно ли из этих данных найти сопротивление каждого проводника?

4. В технике существуют три типа температурных шкал: Цельсия, Фаренгейта и Реомюра (°C, °F, °R). Температура образования льда принимается равной 0°C, 32°F и 0°R. Интервал от этой точки до точки кипения воды разбивается на 100 (Цельсий), 180 (Фаренгейт) и 80 (Реомюр) частей, которые и называются градусами Цельсия, Фаренгейта и Реомюра соответственно.

Пусть одна и та же температура характеризуется x°C, y°F, z°R. Выведите формулы: $y=f(x)$, $z=\varphi(y)$, $z=\Psi(x)$.

5. В некотором эксперименте находились значения функции $y(x)$. Известно, что она должна быть линейной: $y=kx$, но из-за ошибок эксперимента точки $M_1\ (x_1; y_1)$, $M_2\ (x_2; y_2)$, ..., $M_n\ (x_n; y_n)$ на координатной плоскости xOy не укладываются на одну прямую.

а) Принято угловой коэффициент k подбирать таким образом, чтобы

$$S(k)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-kx_i)^2$$

была наименьшим. Выведите формулу для нахождения k.

б) Предложите другие способы нахождения k и выведите соответствующие формулы.

(Окончание см. на с. 56)

Что может голография?

Нынешние школьники, от первоклассников до выпускников, родились и живут в эпоху спутников и космических полетов, цветных телевизоров и портативных магнитофонов, лазеров и сверхзвуковых самолетов — все это является теперь привычным и естественным. А ведь каких-нибудь три десятилетия назад, в эпоху детства их родителей, не цветной, а черно-белый телевизор с миниатюрным экраном считался чудом техники, к его обладателю стекались соседи и друзья, чтобы насладиться невиданным зрелищем.

В свое время изумление и восторг, настоящее потрясение во всем мире произвели запуск первого советского искусственного спутника Земли, первый орбитальный полет Юрия Гагарина. А сейчас, спустя 20—25 лет (мизерный период в масштабах истории и не столь уж много в жизни человека!) мы спокойно воспринимаем чуть ли не ежедневные сообщения о запуске очередных спутников, привыкли к многомесячным будням космонавтов на орбитальных станциях (хотя, разумеется, и беспокоимся за них), не удивляемся тому, что человек ступил на поверхность Луны, что космические аппараты исследуют Марс, Венеру, Юпитер, пронизывают кольца Сатурна...

А жаль, что привыкаем, перестаем удивляться, воспринимаем как само собой разумеющееся. Ведь, если задуматься, это — поразительные, фантастические достижения человеческого разума, человеческой деятельности. Чудеса, ставшие реальностью. Нет сомнений — подобные чудеса ожидают нас и в дальнейшем. Многие из тех, кто читает сейчас этот номер «Кванта», возможно, сами будут причастны к их сотворению. И очень важно, даже участвуя в открытии новых явлений, в создании новых машин, приборов, устройств, не утратить способности удивляться, восхищаться, поражаться.

Одно из таких «чудес» — тема книги молодого английского физика М. Уиньона «Знакомство с голографией» (М., «Мир», 1980). Я не случайно начал разговор об этой книге с, казалось бы, посторонних рассуждений, хотя проще было бы, что называется, взять быка за рога, с ходу приступить к изложению существа проблемы или к пересказу содержания книги. Дело в том, что сама книга, как справедливо отмечает редактор русского издания доктор физико-математических наук А. И. Ларкин, написана человеком романтичным и увлеченным, причем увлеченным не только внешними проявлениями и широтой применения голографии, но и физическим изяществом метода.

Впрочем, трудно оставаться равнодушным, занимаясь голографией или однажды соприкоснувшись с ней. Помню, когда мне довелось впервые увидеть голограмму — скульптуру из «Эрмитажа», объемную, совсем реальную, которую можно было обойти и осмотреть со всех сторон и очень хотелось потрогать, я был так же зачарован, как, вероятно, неискушенные зрители на заре кинематографа, тогда еще называвшегося иллюзионом.

Так что же такое голография? Автор определяет ее так: «Вероятно, голографию проще всего охарактеризовать как объемную фотографию с использованием лазера». И тут же делает оговорку: «Это не вполне удовлетворительное определение, ибо существует немало других видов трехмерной фотографии, однако в нем отражены многие существенные моменты: голография — это технический метод, позволяющий производить «запись» внешнего вида объекта; она создает трехмерное изображение, которое выглядит столь же материальным, как и реальный объект; использование лазеров имело решающее значение для ее развития».

Прежде чем изложить физические принципы, на которых базируется голография, автор знакомит читателя с волновой теорией света, с такими понятиями, как длина волны, амплитуда, фаза, волновой фронт, с явлением интерференции. Особое внимание уделяется чрезвычайно важной для голографии характеристике — когерентности излучения — и подчеркивается, что высокую степень когерентности, без которой невозможно производить голографирование, обеспечивает только лазер. Этим вопросам посвящена первая глава книги.

Любопытно, что голография была теоретически («на кончике пера») открыта, предсказана еще в 1948 году, но лишь спустя 23 года, в 1971 году ее «изобретатель» Деннис Габор был удостоен Нобелевской премии. Столь запоздалое международное признание объясняется тем, что только в 1960 году, после создания первого лазера, появилась возможность реализовать идеи Габора, убедиться в их практической ценности.

Поэтому неудивительно, что целые две главы — вторая и третья — в общем-то небольшой и лаконично написанной книги Уиньона отведены лазерам. Если в первой главе речь шла об одной стороне «двуликого Януса» — света, а именно о его волновой природе, то здесь свет рассматривается как поток квантов. Рассказывается о том, как «работает» лазер, о различных типах лазеров, их применении в медицине, технике, астрономии, связи, метрологии, упомянуто о перспективах использования лазеров для создания тяги в будущих ракетных двигателях.

Четвертая глава — «Принципы голографии» — основная и, пожалуй, наиболее сложная в книге. Здесь автор вновь обращается к волновым свойствам света и рассказывает о явлении дифракции, поскольку простейшая голограмма — это не что иное, как дифракционная решетка, и действует подобно ей, преобразуя волновой фронт падающего на нее света. Только обычную дифракционную решетку получают нанося на пластинку тончайшие штрихи, а голограмма образуется в результате интерференции двух когерентных лучей, один из которых попадает на пластинку непосредственно от предмета (опорный пучок), второй — предварительно отразившись от какого-то объекта и, следовательно, изменив свой волновой фронт (предметный пучок). На светочувствительной поверхности пластинки как бы застывает интерференционная картина-изображение — создается дифракционная решетка. Если теперь вновь осветить пластинку светом той же длины волны, то, взаимодействуя с голограммой, он даст пространственное изображение записанного на голограмме объекта. Это — простейшее, примитивное объяснение принципа голографии. Существуют разные, достаточно сложные способы получения и воспроизведения голографических изображений. Среди них — плоские пропускающие голограммы, при помощи которых можно видеть изображение как бы через окошко; цилиндрические голограммы, позволяющие рассматривать объект со всех сторон; двойные голограммы, дающие сразу два изображения предмета: мнимое (или точное) и действительное (сопряженное), причем последнее «плавает» в пространстве перед голограммой и будто «вывернуто наизнанку».

Важный шаг в области голографии сделал в 1962 году советский физик Ю. Н. Денисюк. Созданные им объемные отражательные голограммы позволяют восстанавливать записанное изображение при освещении их не когерентным (лазерным) лучом, а обычным белым светом. Очень интересны так называемые фазовые голограммы, в которых для хранения записи вместо фотопластинок используются другие материалы, например термопластичная прозрачная пластмасса (термопласт). Этот материал обладает способностью слегка нагреваться и изменять толщину в соответствующих местах интерференционной картины, «застывая» в таком состоянии. Если затем осветить такую решетку пучком света, то появляется голографическое изображение. Термопласты имеют то преимущество, что позволяют организовать массовое производство голограмм.

В двух следующих главах книги — пятой и шестой — описаны возможные области приложения голографии в науке, технике, изобразительном искусстве, зрелищных мероприятиях, рекламном деле и т. д. Среди них, например, такие: голографическая «память» ЭВМ, обладающая колоссальной емкостью и быстродействием; регистрация быстропротекающих или, наоборот, чрезвычайно медленных процессов; неразрушающие испытания материалов и конструкций; распознавание образов, что, в частности, нужно для обучения ЭВМ чтению рукописных текстов; объемные театральные декорации, мгновенно сменяемые простым нажатием кнопки или вовсе автоматически, по программе; демонстрация музейных экспонатов на расстоянии...

Для получения голограмм можно использовать не только видимый свет и вообще не только электромагнитное излучение, но и любые другие, обладающие необходимой когерентностью волны, скажем, звуковые или ультразвуковые. На этом принципе базируется акустическая голография, активно развивающаяся в последние годы. Хотя, как отмечает автор, это — самостоятельная область исследований, в книге ей все же отведен один из параграфов.

Глава седьмая посвящена перспективам развития голографии, о которых кратко говорилось выше.

Наконец, восьмая глава книги — «Делайте голограммы сами» — содержит конкретные рекомендации тем, кто пожелает изготовить голограмму в домашней или школьной лаборатории. Делать голограммы, утверждает М. Уиньон, просто и увлекательно, причем для этого достаточно технических навыков и мастерства фотографа-любителя. В этой главе изложены требования к помещению, в котором осуществляется голографирование, к лазеру, оптической системе, фотопластинкам и пленкам. Описана последовательность операций при получении различных голограмм. Акцентируется внимание на мерах предосторожности при работе с лазером.

Можно с уверенностью сказать, что книга М. Уиньона не оставит равнодушными своих читателей: она не просто знакомит с одним из замечательных достижений современной физики, но и позволяет непосредственно приобщиться к этому методу, задуматься над будущим голографии.

И. Зорич

Математические олимпиады в ПТУ

(Начало см. на с. 54)

6. Кубическая парабола $y=x^3+px+q$ касается оси Ox. Как связаны параметры p и q?

7. На станции технического обслуживания находятся n баллонов одинакового объема, заполненные газом под давлениями $p_1, p_2, \dots, p_n$, причем $p_1 < p_2 < \dots < p_n$. Баллоны можно соединить друг с другом, при этом давление в них становится одинаковым и равным среднему арифметическому давлений газа в баллонах до соединения. Баллоны можно разъединять и вновь соединять в любом желаемом порядке и количестве.

Придумайте процедуру, в результате которой в первом баллоне газ окажется под максимально возможным давлением. Чему оно равно?

8. Бригаде из 10 человек поручено изготовить и смонтировать 50 деталей, причем один рабочий может изготовить деталь за 15 минут, а смонтировать ее за 10.

а) Распределите рабочих на «слесарей» и «монтажников» так, чтобы выполнить задание за кратчайший срок.

б) Допустив, что в бригаде собрались «универсалы», придумайте, как им работать, чтобы еще более сократить время выполнения задания.

В. Сергеев, А. Криворучко,
М. Немиченцер

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку — мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

КАПАБЛАНКА ИГРАЕТ ЭНДШПИЛЬ

Эндшпиль — очень тонкая стадия шахматной партии. Хорошо известно, что класс игры шахматиста определяется, в первую очередь, мастерством владения эндшпилем. В то же время ограниченность материала позволяет сформулировать четкие, можно сказать, математические принципы игры в эндшпиле и даже, как рассказывалось в прошлом номере журнала, провести анализ эндшпиля на ЭВМ.

Среди выдающихся шахматистов прошлого лучшим специалистом эндшпиля признан третий чемпион мира Х. Р. Капабланка.

Гроссмейстер оставил потомкам не только блестящие образцы разыгрывания окончаний, но и, что не менее важно, свои теоретические изыскания в этой области. Следующие девять правил игры в эндшпиле Капабланка сформулировал в «Последних шахматных лекциях» (книге, вышедшей после смерти великого кубинского шахматиста).

1. Время имеет в эндшпиле исключительно большое значение. Судьба партии часто решается жертвой, дающей возможность провести пешку в ферзи, или тем обстоятельством, что ваша пешка проходит в ферзи на один ход раньше неприятельской.

2. Два слона сильнее двух коней.

3. Слон, вообще говоря, сильнее коня.

4. Ладья и слон, вообще говоря, сильнее ладьи и коня.

5. Ферзь и конь сильнее ферзя и слона.

6. Пешки сильнее, когда они стоят рядом.

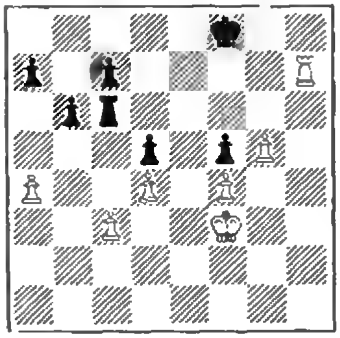
7. Если у противника есть слон, наиболее правильная политика обычно состоит в том, чтобы ставить пешки на поля того цвета, по которым ходит слон. Имея слона, нужно ставить пешки на поля противоположного цвета, не обращая внимания на наличие слона у противника.

8. Король, являясь в дебюте и миттельшпиле только объектом защиты, в эндшпиле часто становится атакующей фигурой. Агрессивный король часто приносит победу своей армии.

9. В эндшпиле без ферзей, с малым количеством фигур, король должен идти в центр доски. В пешечных эндшпилях этому правилу нужно следовать безоговорочно.

Конечно, эти правила не следует воспринимать как абсолютный закон, но использование их, по мнению Капабланки, должно резко улучшить игру в эндшпиле.

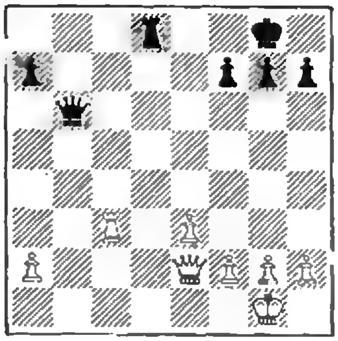
Приведем только несколько практических примеров игры Капабланки в эндшпиле.



Капабланка — Тартаковер (Нью-Йорк, 1924 г.)

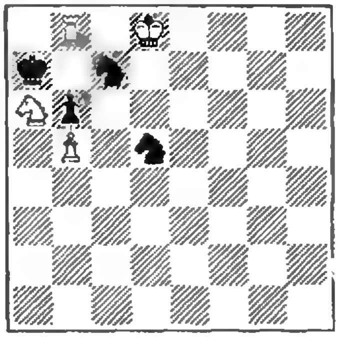
Кажется, что черные выигрывают пешку и им нечего опасаться. **35. Крg3!!** Иллюстрация восьмого правила игры в эндшпиле. Активизация белого короля решает судьбу партии. **35...Л:с3+ 36. Крh4 Лf3 37. g6 Л:f4+ 38. Крg5 Лe4 39. Крf6.** Черных губит собственная пешка f5, из-за которой они не могут согнать белого короля с его грозной позиции. **39...Крg8 40. Лg7+ Крh8 41. Л:с7 Лe8 42. Кр:f5 Лe4 43. Крf6 Лf4+ 44. Крe5 Лg4 45. g7+ Крg8 46. Л:a7 Лg1 47. Кр:d5 Лс1 48. Крd6 Лс2 49. d5 Лс1 50. Лс7 Лa1 51. Крс6 Л:a4 52. d6. Черные сдались.**

Следующие два примера демонстрируют тактическое решение эндшпильных позиций.



Бернштейн — Капабланка (Москва, 1914 г.)

Возможно, белые ожидали 29...Фb1+ 30. Фf1 Ф:a2 и проходную пешку «а» вряд ли удастся реализовать. **29...Фb2!** Уникальный ход, после которого белые немедленно сдались. Присмотритесь к позиции и вы обнаружите, что выигрывающая идея носит чисто геометрический характер.



Капабланка — Ласкер (Берлин, 1914 г.)

Знаменитая концовка партии из блиц-матча, в котором Капабланка победил со счетом 6,5:3,5. Последовало **1. К:с7 К:с7 2. Лa8+!!** (единственный ход, который ведет к победе) **2...К:a8** (2...Кр:a8 3. Кр:с7 Крa7 4. Крс6 и т. д.) **3. Крс8! Черные сдались,** после 3...Кс7 4. Кр:с7 у них безнадежный пешечный эндшпиль

---

21 ноября 1981 года после победы в 30-м матче на первенство мира по шахматам со счетом 6:2 Анатолий Карпов был в третий раз провозглашен чемпионом мира по шахматам. Журнал «Квант» от имени всех своих читателей и любителей шахмат поздравляет Анатолия Карпова с великолепной победой.

Геометрический подарок

1. Пусть $(AD) \perp a$ и $(BD) \perp a$. Из прямоугольного треугольника ADK

$$|AK|^2 = |AD|^2 + |DK|^2$$

Из прямоугольного треугольника ADB

$$|AD|^2 = |AB|^2 - |BD|^2$$

Из прямоугольного треугольника BDK

$$|DK|^2 = |BD|^2 + |BK|^2$$

Подставив эти выражения в первое равенство, получим

$$|AK|^2 = |AB|^2 + |BK|^2$$

Значит, $\widehat{ABK} = 90°$, то есть $(AB) \perp (BK)$. Аналогично доказывается вторая часть теоремы о трех перпендикулярах.

2. Пусть на прямой b ($b \parallel a$) нашлась такая точка Y, что $|AD| > |AY|$. Возьмем на плоскости α вне прямой b такую точку X, что

$$|XY| < |AD| - |AY|$$

В силу неравенства треугольника $|AX| < |AY| + |XY|$, и по выбору точки X $|AX| < |AY| + |AD| - |AY| = |AD|$. Но точка X лежит на прямой, проходящей через точку D и пересекающей прямую a, поэтому $|AD| < |AX|$. Полученное противоречие доказывает нужную нам перпендикулярность.

3. При произвольном выборе прямой a на плоскости α может оказаться, что точки B и D совпадают. Тогда прямая AD перпендикулярна двум перпендикулярным прямым плоскости α: a и BC. Для доказательства перпендикулярности ее к плоскости α и понадобится признак перпендикулярности прямой и плоскости.

Диаграмма состояния

1. Из принципа Ле Шателье — Брауна следует, что температура плавления галлия с ростом давления падает.

Нетрудно догадаться, что твердый висмут, твердый чугун плавают в своих расплавах. Общеизвестно, что лед плавает в воде, и температура плавления льда при умеренных давлениях с ростом давления падает.

2. Так как при высоких давлениях температура плавления льда с ростом давления растет, можно сделать вывод, что в этих условиях лед плотнее воды. И действительно, при давлении 2115 атм кристаллическая структура льда меняется, и он оказывается плотнее находящейся в равновесии с ним воды.

3. Отношение плотностей насыщенных паров воды $\varrho_\text{в}$ и масла $\varrho_\text{м}$ равно

$$\frac{\varrho_\text{в}}{\varrho_\text{м}} = \frac{M_\text{в}}{M_\text{м}} \frac{p_\text{в}}{p_\text{м}} = \frac{18 \cdot 10^{-3} \cdot 760}{80 \cdot 10^{-3} \cdot 1} \approx 170$$

($p_\text{в} = 760$ мм рт. ст. $= 10^5$ Па — давление насыщенных паров воды при 100 °C).

4. В условиях задачи 2 ($T = 373$ К, $V = 22{,}4$ л) 1 моль водяного пара создавал бы давление $p = \frac{373}{273}$ атм. Но давление насыщенных паров воды при $T = 373$ К равно $p_\text{н} = 1$ атм. Такое давление (в условиях задачи) создают $\nu = \frac{273}{373}$ моль пара. Испарение будет продолжаться до тех пор, пока не образуются эти ν молей пара, то есть испарятся $m = \nu M_\text{в} = 13$ г воды.

XII Международная физическая олимпиада

Теоретические задачи

1. Для нахождения скорости пробирки u_1 в момент вылета перегородки (до истечения газа) воспользуемся законами сохранения импульса и энергии:

$$(n\mu + M)u_1 = mw\text{*)},$$

$$\frac{(n\mu + M)u_1^2}{2} + \frac{mw^2}{2} = \frac{3}{2} nR(T - T_\text{к}),$$

где w — скорость перегородки в момент ее вылета из пробирки, T_x — температура газа в тот же момент, правая часть второго уравнения — изменение внутренней энергии газа. Конечная температура газа $T_\text{к}$ находится из уравнения адиабаты**)

$$TV^{\varkappa - 1} = T_\text{к} V_\text{к}^{\varkappa - 1}.$$

Здесь $V_\text{к} = 2V$, а $\varkappa = 5/3$ (для одноатомного газа), поэтому $T_\text{к} = 2^{-2/3} T$. Тогда из первых двух уравнений получаем

$$u_1 = \left(\frac{3(2^{2/3} - 1)}{2^{2/3}} \frac{mnRT}{(n\mu + M)(m + M + n\mu)}\right)^{1/2}$$

Найдем теперь скорость пробирки u_2, которую она приобретает вследствие вытекания газа. В системе отсчета, движущейся со скоростью u_1, каждый атом при упругом ударе о дно пробирки передает ей импульс***)

$$p = 2 \frac{\mu}{N_\text{А}} (v^2/3)^{1/2},$$

где $N_\text{А}$ — число Авогадро, $\mu/N_\text{А}$ — масса одного атома, v^2 — средний квадрат скорости атомов ($v^2 = 3RT_\text{к}/\mu$). Так как в среднем о дно пробирки ударяется половина всех атомов, полный импульс, полученный пробиркой, равен

$$P = \frac{nN_\text{А}}{2} p = n(\mu R T_\text{к})^{1/2} \text{****)},$$

а ее скорость

$$u_2 = \frac{P}{M} = 2^{-1/3} \frac{n}{M} (\mu RT)^{1/2}.$$

Конечная скорость пробирки

$$u = u_1 + u_2 = \left(\frac{3(2^{2/3} - 1)}{2^{2/3}} \frac{nmRT}{(n\mu + M)(n\mu + m + M)}\right)^{1/2} + 2^{-1/3} \frac{n}{M} (\mu RT)^{1/2}$$

---

*) По условию, в неподвижной системе отсчета импульс газа до вылета перегородки равен нулю.

**) Уравнение адиабаты не входит в программу нашей школы.

***) Предполагается, что тепловая скорость атомов велика по сравнению со скоростью пробирки.

****) Точное решение дает, что $P = \frac{35}{16\sqrt{\varkappa}} \times n(\mu R T_\text{к})^{1/2}$

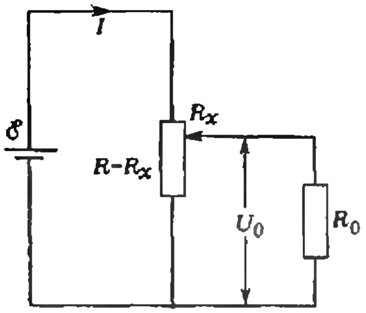


Рис. 1.

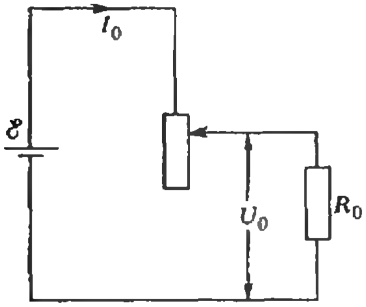


Рис. 2.

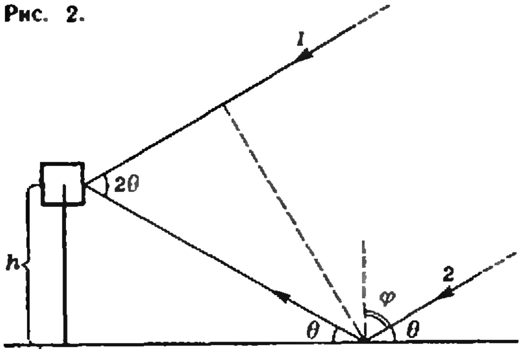


Рис. 3.

2. Используя схему, показанную на рисунке 1, составим уравнения:

$$I=\frac{U_0}{R_0}+\frac{U_0}{R-R_x}. \qquad (1)$$

$$\mathcal{E}=IR_x+U_0, \qquad (2)$$

$$\eta=\frac{W_{\text{полез}}}{W_{\text{источ}}}=\frac{U_0^2}{R_0\mathcal{E}I}. \qquad (3)$$

Для полного тока I из (3) получаем

$$I=\frac{U_0^2}{\mathcal{E}R_0\eta}; \qquad (4)$$

следовательно, максимальное значение тока будет при минимальном значении КПД:

$$I_{\max}=\frac{U_0^2}{\mathcal{E}R_0\eta_0}\approx 2{,}8\ \text{А}.$$

Подставляя выражение (4) в (1) и (2), найдем полное сопротивление реостата:

$$R=R_0\frac{\eta\mathcal{E}^2}{U_0}\,\frac{1+\eta(1-\mathcal{E}/U_0)}{U_0-\eta\mathcal{E}}. \qquad (5)$$

Вычисляя производную функции $R(\eta)$, легко убедиться, что она положительна; следовательно, $R(\eta)$ — возрастающая функция, и минимальное значение сопротивления R получается при подстановке в формулу (5) минимального значения КПД ($\eta_0=0{,}6$). Таким образом,

$$R>R_{\min}\approx 8{,}5\ \text{Ом}.$$

Из формулы (3) видно, что максимальное значение КПД достигается при минимальном полном токе I (все остальные параметры в этой формуле фиксированы). Это получается при таком соединении, когда весь ток I проходит через нагрузку: $I=I_0=U_0/R_0$ (рис. 2). Тогда,

$$\eta_{\max}=\frac{U_0}{\mathcal{E}}=0{,}75.$$

3. Регистрируемый сигнал определяется интерференцией двух лучей: прямого луча *1* и луча *2*, отраженного от морской поверхности (рис. 3). Разность хода этих лучей Δ определяется формулой

$$\Delta=\left(\frac{\lambda}{2}\right)+\left(\frac{h}{\sin\theta}\right)-\left(\frac{h}{\sin\theta}\right)\cos 2\theta=$$
$$=\left(\frac{\lambda}{2}\right)+2h\sin\theta$$

(слагаемое $\lambda/2$ добавилось потому, что луч *2* отражается от оптически более плотной среды; при этом фаза колебаний изменяется на противоположную). Максимумам соответствует разность хода, равная целому числу длин волн $k\lambda$, откуда

$$\sin\theta_{k\,\max}=\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\lambda}{2h}\right),\quad k=1,2,\ldots,$$

а минимумам — разность хода, равная нечетному числу полуволн $(2k+1)\lambda/2$, откуда

$$\sin\theta_{k\,\min}=\frac{k\lambda}{2h};\quad k=0,1,2,\ldots$$

Непосредственно при восходе звезды $\theta=0$, и выполняется условие минимума. Поэтому вначале интенсивность принимаемого сигнала будет возрастать.

Складывая в максимумах амплитуды интерферирующих волн и учитывая закон изменения амплитуды при отражении, заданный в условии, для результирующего поля $E_{k\,\max}$ получаем

$$E_{k\,\max}=E_{\text{пад}}\frac{2n}{n+\sin\theta_{k\,\max}}.$$

Для минимумов результирующая волна имеет амплитуду, равную разности амплитуд падающей и отраженной волн:

$$E_{k\,\min}=E_{\text{пад}}\frac{2\sin\theta_{k\,\min}}{n+\sin\theta_{k\,\min}}.$$

Отношение интенсивностей в соседних максимумах и минимумах равно

$$p_k=\frac{4n^2h^2}{k^2\lambda^2}\left(\frac{n+(k\lambda/2h)}{n+(k-1/2)(\lambda/2h)}\right)^2.$$

При $k=1$ имеем $p_1\approx 30\,000$. С ростом k (по мере восхождения звезды над горизонтом) величина p_k убывает.

Экспериментальная задача

Объем шнура оказывается не зависящим от нагрузки.

«Квант» для младших школьников

1. $a=6$, $b=3$, $c=2$, $d=7$, $e=9$, $f=1$, $g=8$, $h=5$, $i=4$, $j=0$.

2. Нужно разрезать любое желтое кольцо. Тогда коврик распадается на желтое кольцо и два зацепления, которые математики называют *кольцами Борромео* (см. «Квант», 1980, № 7 и 1981, № 9).

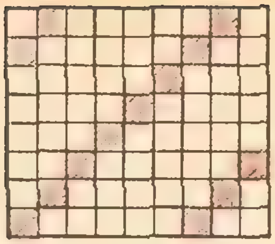


Рис. 4.

3. Количество диагоналей выпуклого семиугольника равно 14 (докажите!). Если какие-то две диагонали параллельны, то угол между ними 0°, что меньше 13°. Пусть теперь не так.

Выберем на плоскости некоторую точку O и проведем через нее 14 прямых, параллельных диагоналям семиугольника. Эти прямые разобьют плоскость на 28 углов, в сумме составляющих 360°. Предположим, что каждый из этих углов не меньше, чем 13°, тогда их сумма будет не меньше $28 \cdot 13^\circ = 364^\circ$, а на самом деле она равна 360°. Противоречие!

4. Не сможет. Допустим противное. Заштрихуем некоторые квадраты сетки (см. рисунок 4). При вырезании любой прямоугольной полоски 1×6 в нее попадет одна и только одна заштрихованная клетка. Из большого прямоугольника должно получиться 12 прямоугольных полосок 1×6. Но эти полоски будут содержать 12 заштрихованных клеток, а таких клеток 13. Противоречие.

5. В восьмой строчке будут записаны числа $27(b-a)$, $27(c-b)$, $27(a-c)$. Следовательно, числа восьмой строчки и все последующие числа должны делиться на 27. Число же 279 на 27 не делится.

Вторая страница обложки

Одно ушко можно снять так, как показано на рисунке 5. К виду 8 можно привести и «заузленную» фигуру, помещенную на обложке справа снизу; это объясняется в «Кванте», 1981, № 3 на с. 14.

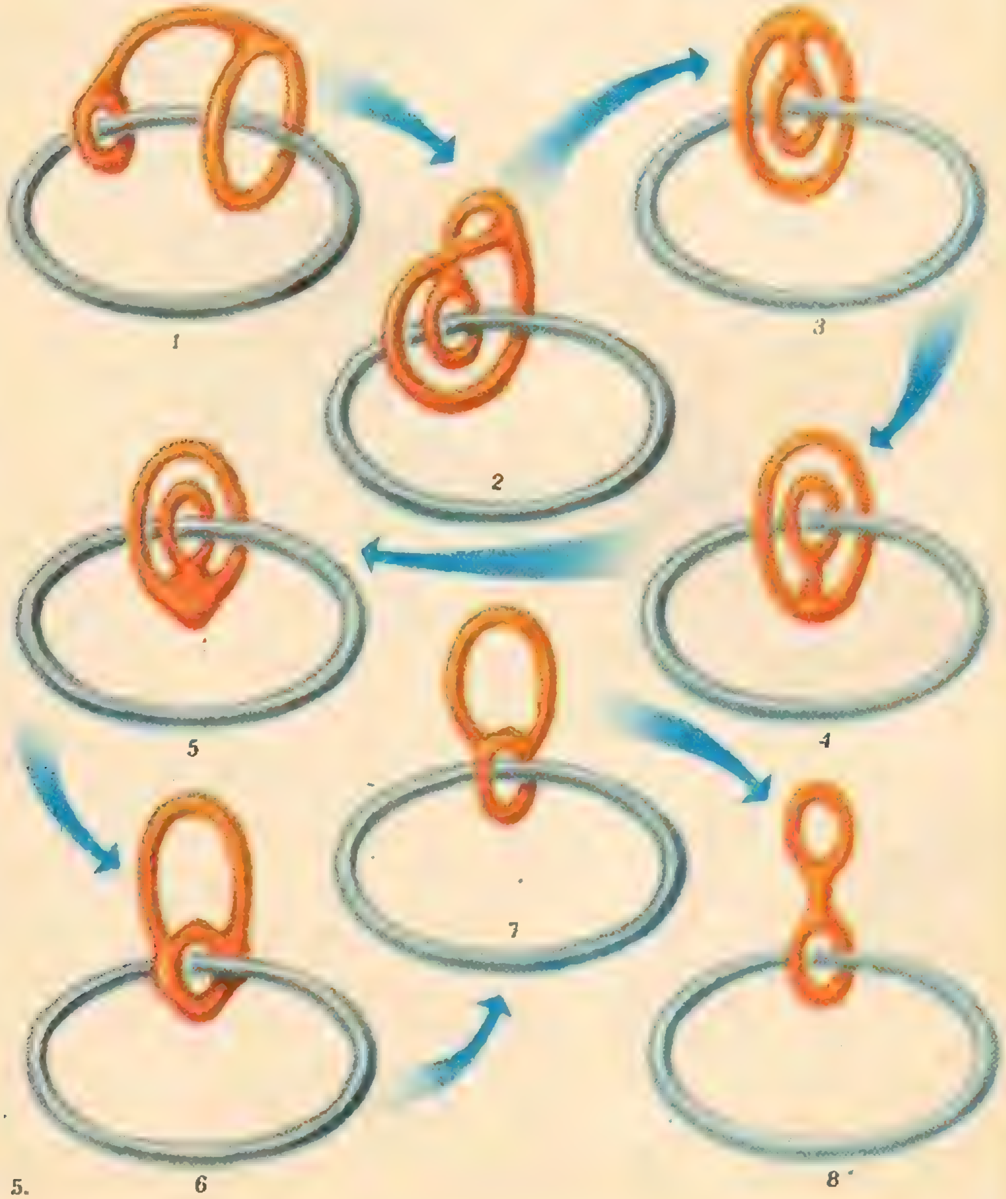


Рис. 5.

BeatriceGloria_personal library

Развертки куба

(см. с. 53)

См. рисунок 6.

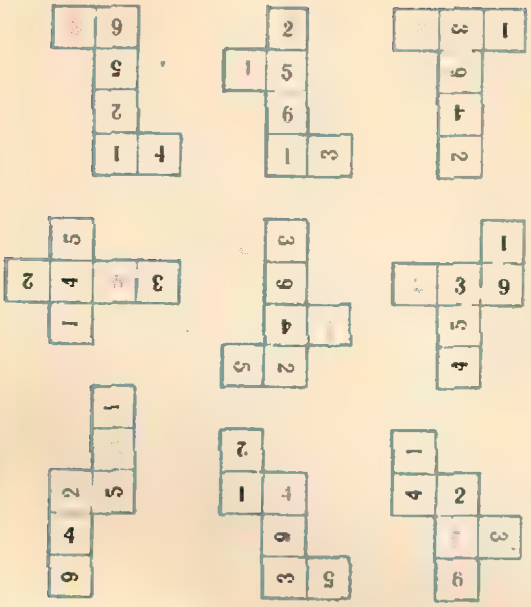


Рис. 6.

Почти простые числа

(см. «Квант» № 9, с. 16)

Для решения упражнений **1—6** воспользуйтесь следующими разложениями:

$(n^2-n=n(n-1)$; $n^3-n=(n-1)n(n+1)$; $n^5-n=(n-1)n(n+1)(n^2+1)$; $n^7-n=(n-1)n(n+1)(n^2+n+1)(n^2-n+1)$; $n^{13}-n=(n-1)n(n+1)(n^2+n+1)(n^2-n+1)\times(n^2+1)(n^4-n^2+1)$; $n^{17}-n=(n-1)n\times(n+1)(n^2+1)(n^4+1)(n^8+1)$; $n^{19}-n=(n-1)n(n+1)(n^2+n+1)(n^2-n+1)(n^6+n^3+1)(n^6-n^3+1)$.

Для решения первой части упражнения 5 воспользуйтесь тем, что квадрат любого целого числа $n\geqslant 1$, не делящегося на 11, имеет вид $11k+c$, где $c=1$, 3, 4, 5 или -2, а для всех этих значений c число c^5 при делении на 11 дает в остатке 1.

7. $56786730=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 31\cdot 61$; проверьте делимость на каждый из этих сомножителей.

8. *б)* $2^{2047}-2$ делится на $2047=2^{11}-1$; *в)* $2^{161038}-2$ делится на 2, 73, 1103, притом $161038=2\cdot 73\cdot 1103$; делимость на 1103 вытекает из того, что $2^{161037}-1$ делится на $2^{29}-1=1103\cdot 486737$.

9. а) и г) — не существует; б) и в) — существует.

10. а) нет; б) да, ибо $2047=23\cdot 89$.

11. В противном случае оба числа $2^{2n-1}-1$, $2^{n-1}-1$ делились бы на n, что невозможно.

12. Да, например 341.

Шахматный конкурс

(см. «Квант» № 10)

1. 1. Крg2 Крe1 2. Кg1 e2 3. Кh3 e3 4. Крg1 e4 5. Кf4 e5 6. Кg2×.

2. 1. Сf1! Лb2 2. Фb5+!! Л : b5 3. Лc2+ Лc4 4. Л : c4×; 1...Лe4+ 2. Ф : e4 Крc6 3. Лf7! Л : d5+ 4. Ф : d5×; 3...Лa5 4. Лc7×.

3. 1. Кa6! Кр : b7 2. Фb1+ Кр : a6 3. Фb5×; 2...Крc8 3. Фb8×; 1...Крd8 2. Ф : e4 и 3. Лb8×; не проходит 1. Ф : e4? d5! 2. Ф : d5 d6!

4. 1. 0—0—0! a8К 2. Сb7! Кb6×.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 11)

1. Не может. В самом деле, всего получается $2n+2$ сумм, которые могут принимать только $2n+1$ разных значений: n, $-n+1$, ..., -1, 0, 1, ..., $n-1$, n.

2. 120 треугольников.

3. 366 оборотов.

4. $y=\alpha-\beta=50°$, $z=\gamma-y=30°$, $x=\beta-z=30°$.

5. Пусть $n=10a+b=kab$. Тогда $b=la\Rightarrow 10a+la=kla^2\Rightarrow 10+l=kla$, то есть 10 делится на l; значит, $l\in\{1, 2, 5\}$:

1) $l=1\Rightarrow 11=ka$, $k=11$, $a=1$, $b=1$, $n=11$.

2) $l=2\Rightarrow 12=2ka$, $6=ka$.

а) $k=1$, $a=6$, $b=12$ — не может быть;

б) $k=2$, $a=3$, $b=6$, $n=36$;

в) $k=3$, $a=2$, $b=4$, $n=24$;

г) $k=6$, $a=1$, $b=2$, $n=12$.

3) $l=5\Rightarrow 15=5ka\Rightarrow 3=ka$.

а) $k=1$, $a=3$, $b=15$ — не может быть;

б) $k=3$, $a=1$, $b=5$, $n=15$.

Ответ: $n=11$, 12, 15, 24, 36.

6. Фотопленка реагирует на красный свет так же, как на темноту, то есть «не отличает» красного от черного. Поэтому красный череп на белом флаге получится черным (на позитиве), и череп на черном флаге на снимке виден не будет.

Напечатано в 1981 г.

К нашим читателям 1 2
Навстречу XXVI съезду КПСС 2 2
Подвиг Гагарина бессмертен 4 2
Международные космические экипажи 4 6
С новым учебным годом! 9 2

Ученые обращаются к молодежи

Александров А. Речь на XVIII съезде Всесоюзного Ленинского Коммунистического Союза Молодежи 1 3
Амбарцумян В. Во имя расцвета науки нашей Родины 6 2
Велихов Е. Задача все та же — учиться! 12 2
Капица П. Профессор и студент 11 [illegible]
Лаврентьев М. Приглашение в науку 5 2
Марчук Г. Слово к научной молодежи 8 2
Прохоров А. О становлении молодого ученого 4 3
Седов Л. Будьте готовы к новым условиям жизни людей 7 2
Семенов Н. Смелее, не отступайте перед трудностями! 9 4
Соболев С. На школьной парте будь исследователем 3 2

Франк И. Путь в науку	2	4
Эмануэль Н. Думать и искать	10	2

Статьи по математике

Бабичев А. Об одной задаче Колмогорова	5	14
Битман А., Гик Е. ЭВМ за шахматной доской	1	11
Болтянский В. Топология графов	6	5
Болтянский В. Плоские графы	7	11
Вертгейм Б. Игры с квадратичными функциями	11	6
Виро О. Раскрашенные узлы	3	8
Демков Ю. Поворачиваем кубики	12	11
Коэн Д. Метрика коня	10	13
Крейн М., Нудельман А. Замечательные пределы, порождаемые классическими средними	9	13
Раухман А. Группоиды	2	14
Фукс Д. О раскрытии скобок, об Эйлере, Гауссе, Макдональде и об упущенных возможностях	8	12
Яглом И. Соединим две точки отрезком	4	12
Амеба ... в пиджаке	3	14

Статьи по физике

Асламазов Л. Что такое СКВИД?	10	5
Ашкинази Л. Как получают сильные постоянные магнитные поля	1	6
Боровинский Л. Почему не лежится Ваньке-Встаньке?	7	17
Брук Ю., Стасенко А. Метод размерностей помогает решать задачи	6	11
Вавилов С. «Теплый свет» и тепловое излучение	12	17
Варламов А. О снежках, орехах, пузырьках и... жидком гелии	3	4
Гиндикин С. Медичейские звезды	8	21
Иоффе А. Полупроводниковые термоэлементы и холодильники	2	6
Кавендиш Г. Экспериментальное определение закона электрической силы	10	22
Капица П. Научная деятельность Бенджамина Франклина	7	4
Ланге В., Ланге Т. Об удельной мощности человека и Солнца (или почему у комара «холодная кровь»)	4	9
Михайлов А. О солнечных затмениях вообще и конкретно о затмении 31 июля 1981 года	6	20
Пикин С. Жидкие кристаллы	8	5
Пикин С. Снова о жидких кристаллах	9	6
Смородинский Я. Джеймс Клерк Максвелл	11	11
Филонович С. Генри Кавендиш	10	17
Чернин А. Звездная динамика	12	4
Эдельман В. Металлы	5	5

Лаборатория «Кванта»

Боровой А., Климов Ю. Маятник Максвелла	11	18
Боровой А., Херувимов А. Колебания и маятники	8	30
Григорьев Г. Телевизор — стробоскоп	5	17
Канаев П. Несколько опытов с пустотелым прозрачным шариком	6	25
Колмаков А., Смирнов Р. Необычные свойства обычной струи	1	19
Майер В., Мамаева Е. Псевдолинза Роберта Вуда	2	18
Ростовцев Н. Сделать опыт Юнга? Это не так сложно	3	16

Математический кружок

Апресян М. Бесконечные суммы и... прямоугольник	2	20
Вагутен Н. Формула площади	4	17
Васильев Н., Маликов Т. Рассмотрим разность	6	27
Евстигнеев В. Графы и программы	3	18
Курляндчик Л. Приближение к экстремуму	1	21
Переславский В. Игра «Определитель»	10	27
Сефибеков С. О площади многоугольника	4	20
Шарыгин И., Ягубьянц А. Окружность девяти точек и прямая Эйлера	8	34
Яглом И. Почти простые числа	9	16

Искусство программирования

Заочная школа программирования

Урок 12	1	53
Урок 13	2	54
Урок 14	3	57
Урок 15	10	51
Урок 16	11	40
Конкурс работ по программированию	1	52
Конкурс машинных рисунков	9	55
Бабаян Б. Многопроцессорный вычислительный комплекс «Эльбрус»	8	54
Звенигородский Г., Кузнецов Е. Что такое мини-ЭВМ?	5	53
Первин Ю. Зачем и как детей учат программированию?	1	49
Первин Ю. Трехадресные, одноадресные и ... безадресные машины	4	51
Рар А. Какие бывают языки программирования	9	50
Салтовский А. ЕС ЭВМ — семейство универсальных вычислительных машин	7	51

«Квант» для младших школьников

Задачи	1—12

• • •

Бартенев Ф., Никольская И. О пользе нелепостей	3	38
Гальперин Г. Бильярд	4	34
Гервер М. Как сделать из мухи слона?	7	36
Дворянинов С. Узоры и... арифметика	1	34
Калинин А. Эта удивительная вязь колец	9	32
Касаткин В. Пригодны ли счеты?	2	34
Рубинов Р. По следам теоремы Пифагора	11	32
Савин А. Циркулем и линейкой	5	34
Тавридов С. Пентамино на плоскости и в пространстве	12	38
Топадзе Г. В волшебном мире чисел	6	44
Юфанова И. Интервью с бароном Мюнхаузеном	10	42

Задачник «Кванта»

Задачи М661 — М720; Ф673 — Ф732	1—12
Решения задач М545, М604, М611 — М624, М626 — М680; Ф618 — Ф691	1—12

* * *

Васильев Н. К центру тяжести 3 33
Гальперин В., Гальперин Г. Освещение плоскости прожекторами 11 28
Гуревич Г. Системы разновесов 12 34

* * *

Зильберман А. Модели, которые мы выбираем 8 47
Кротов С. Математический маятник в неинерциальной системе отсчета 7 32

* * *

Фамилии решивших 3, 6, 9, 12
Победители конкурса «Кванта» 3 23
Премии «Кванта» 9 30

По страницам школьных учебников

Гельфанд М., Берман В. Десять задач на применение производной 1 37
Гордин Р. Что такое степень? 2 36
Кучеров В. Геометрические аналогии 10 44
Перевалов Г. Можно и без производной 9 36
Рыжик В. Задача как задача 4 38
Рыжик В. Геометрический подарок 12 40

* * *

Овчинников О. Что же покажет динамометр? 3 43

Практикум абитуриента

Габович И. Вспомогательные отрезки и углы 9 46
Егоров А. Показательные уравнения 1 40
Егоров А. Логарифмические уравнения 2 40
Кордемский Б. Семнадцать задач на смекалку 7 44
Розов Н. Читатели советуют 4 43
Суконник Я., Горнштейн П. Можно решить проще! 5 42

* * *

Баканина Л. Задачи о спутниках 1 43
4 37
Белонучкин В. Диаграмма состояния 12 42
Берюлева Н. Интерференция света 6 45
Буздин А., Тугушев В. Закон сохранения энергии для тепловых процессов 2 44
Данилин В. Электроизмерительные приборы 7 39
Ерицпохов Б. Построение изображений наклонных предметов 5 37
Коршунов С. Закон Дальтона 11 36
Можаев В. Колебания 3 46
Нахшин В. Уравнения думают за нас 9 42
Ростовцев Н. Приближенные вычисления при решении задач по физике 4 40
Шеронов А. Криволинейное движение 10 47

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1980 году

Азербайджанский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина 6 51
Волгоградский политехнический институт 6 55
Воронежский государственный университет им. Ленинского комсомола 6 50
Горьковский государственный университет им. Н. И. Лобачевского 5 47
Киевский государственный педагогический институт им. А. М. Горького 6 52
Красноярский государственный университет 5 48
Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена 6 53
Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина 6 56
Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова 5 49
Московский автомеханический институт 7 45
Московский архитектурный институт 6 57
Московский гидромелиоративный институт 7 46
Московский инженерно-физический институт 1 46
Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии 7 47
Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина 6 53
Московский институт стали и сплавов 7 47
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова 3 51
Московский физико-технический институт 2 48
Московский институт электронного машиностроения 7 49
Московский энергетический институт 7 49
Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола 4 48
Одесский государственный педагогический институт им. К. Д. Ушинского (физико-математический факультет) 6 54
Уральский государственный университет им. А. М. Горького 5 52

Рецензии, библиография

Письмо в редакцию 2 35
Аринштейн А. Мир глазами инженера 8 58
Гервер М. Веселая мозаика Сэма Лойда 9 57
11 60
Зорич И. История одного заблуждения 9 61
Зорич И. Что может голография? 12 55
Левитан Е. Книга о прошлом и будущем Вселенной 2 58
Лешковцев В. Путешествие в мир кристаллов 1 60
Лишевский В. Ученый и революционер 2 57
Фалин Г. Алгебра без чисел 8 59

* * *

Новые книги 11 56

Информация

Курляндчик Л. Математические соревнования в ФМШ при ЛГУ 7 56
Николаев А., Тяхт В. Турнир имени М. В. Ломоносова 8 51

* * *

Гороховик В., Рабинович О., Фисенко Т. 10-летие летней ФМШ в Белоруссии 7 54
Комаров В. Отдых и занятия наукой 3 60
Ломакин Ю., Горбунова В. «Математику» — 10 лет 8 49

* * *

Орлов В. VII Всероссийский слет юных рационализаторов и конструкторов 4 55
Яковлев А. С углубленным изучением 5 58

* * *

Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу 1 56
Новый прием на малый мехмат 1 59
Заочная физико-техническая школа 1 57
Заочная физическая школа 5 56
Вечерняя физическая школа 7 57
О приеме на биологическое отделение ВЗМШ 2 59

* * *

Малый интеркосмос 4 8
К конкурсу «Малый интеркосмос» 5 30

Олимпиады

Международные математические соревнования 6 59
XXII Международная математическая олимпиада 12 50
XII Международная физическая олимпиада 12 46

XV Всесоюзная олимпиада

Олимпиада по математике 11 44
Олимпиада по физике 11 50
Призеры олимпиады 11 54

* * *

Всероссийская олимпиада 10 58
Московская городская олимпиада по физике 5 57
Математические олимпиады в ПТУ 12 54

Наша обложка

Гамаюнов В. Полуоктаэдры ... и драпировка потолков 1 18
Гамаюнов В. Модели звездчатых многогранников 2 39
Кривошеев Е. Магическая спираль 1 18
Котов Ю. 5 16
Двойственность 9 41

Новости науки

Буздин А. Органический сверхпроводник 10 31
Смородинский Я. Отрицательный ион позитрония 12 23
Распадается ли протон? 6 19
Нейтрон → антинейтрон? 9 40

Спрашивайте — отвечаем 7 58

Физики о физиках

Малов Н. Задача Дирака 9 40

Уголок коллекционера 2 13
7 10
7 64

Шахматная страничка —6, 8—12

Шахматный конкурс —5, 8—12

Анкета 11 39

Смесь

Александров Н., Смирнов П. В чем дело? 6 10
Зурабишвили З. Еще раз о пифагоровых тройках 4 39
Искендеров А. Геометрические доказательства теорем о средних 2 17
Сапич В., Чванов В. Задача для исследования 10 50
Селицер С. Сила Архимеда и диффузия в жидкостях 5 13
Чванов В. Играют полифигуры 2 32
Хлобыстов В. В пересечении — одна точка 12 41
Хлобыстов В. 7 34
Юрашев А. Снова о пифагоровых тройках 12 41
Рассказывает «Фотон» 2 53
Легкое решение трудной проблемы 5 16
Как экзаменуют по физике в МФТИ 5 41
Говорят студенты 11 39
Развертки куба 12 53

Номер подготовили:
А. Виленкин, А. Егоров, И. Клумова, Т. Петрова,
А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
Л. Денисенко, М. Дубах, Г. Красиков,
Н. Кузьмина, С. Лухин, Э. Назаров,
А. Прокофьев, И. Смирнова

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор А. Ипатова

113035, Москва, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 23.10.81.
Подписано в печать 8.12.81
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 7,04 Т-30803
Цена 30 коп. Заказ 2553
Тираж [illegible]32 535 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

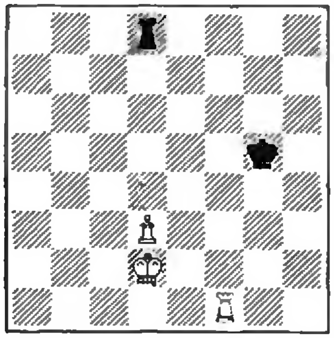
ШАХМАТНЫЙ КОНКУРС

АЛГЕБРА ЛАДЕЙНОГО ЭНДШПИЛЯ

Математические идеи применимы при анализе многих типов эндшпилей.

Так, в пешечных окончаниях есть правила треугольника, квадрата и даже целая теория соответственных полей (см. «Квант», 1980, №№ 10, 11). Здесь мы рассмотрим окончания «ладья с пешкой против ладьи».

На следующей диаграмме у белых лишняя пешка, но выиграть они не могут.



Для оценки таких положений, в которых король черных отрезан от белой пешки, а ладья атакует пешку «с фронта», существует следующее простое арифметическое правило.

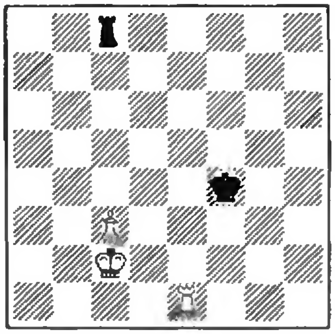
Правило пяти. Если номер горизонтали, которую занимает белая пешка, и количество вертикалей, отделяющих от нее короля черных, дают в сумме число, меньшее или равное пяти, то позиция ничейна; если же это число больше пяти, то белые выигрывают.

По этому правилу приведенная позиция ничейна. Действительно, пешка стоит на третьей горизонтали, а король отрезан на две вертикали, $3+2=5$. Игра может проходить так: **1.Крс3 Лс8+ 2.Крb4 Лd8 3.Крс4 Лс8+ 4.Крb5 Лd8 5.Лd1 Крf6 6.d4** (6.Крс6 Кре5) **6...Кре7 7.Крс6 Лс8+** и черный король успевает занять место перед пешкой.

Если на той же диаграмме сдвинуть белую пешку и короля на одну горизонталь вверх (Кр d3, п.d4), то белые уже выигрывают $(4+2=6>5)$: **1.Крс4 Лс8+ 2.Крb5 Лd8 3.Крс5 Лс8+ 4.Крb6 Лd8 5.Лd1 Крf6 6.Крс7! Лd5 7.Крс6 Лd8 8.d5** и пешка беспрепятственно следует до последней горизонтали.

Если на исходной диаграмме черного короля и белую ладью сдвинуть на одну вертикаль вправо, то вновь белые выигрывают $(3+3=6>5)$. Решает **1.Крс3 Лс8+ 2.Крd4 Лd8+ 3.Кре4 Ле8+ 4.Крf5 Лf8+ 5.Кре6 Лd8 6.Лd1 Лd4 7.Кре5 Лd8 8.d4** и т. д.

В наших позициях пешка белых была центральной. Однако правило пяти применимо и в случае слоновой или коневой пешки.



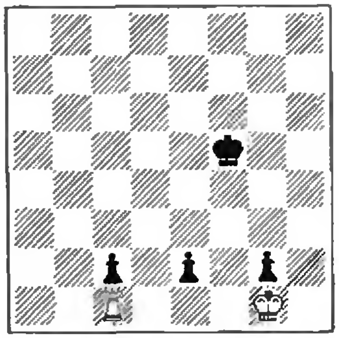
В этой позиции по правилу пяти должна быть ничья. Она достигается путем 1.Крb3 Лb8+ 2.Кра4 Лс8 3.Крb4 Лb8+ 4.Кра5 Лс8 5.Лс1 Кре3 6.с4 Крd2 или 1.Ле6 Крf5 2.Лb6 Кре5 3.Крb3 Крd5. Результат не изменится при смещении последней позиции на одну вертикаль как вправо, так и влево.

Но шахматные законы все-таки не математические теоремы, и поэтому даже самые надежные правила имеют исключения. Это замечание относится и к правилу пяти. Переставим на первой диаграмме черного короля с g5 на g7.

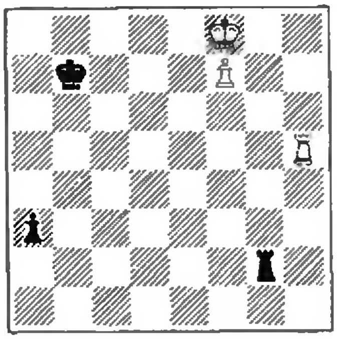
Интересующая нас сумма опять равна пяти, однако такое перемещение короля уже гибельно для черных. Любопытно, что ряд крупнейших теоретиков ладейного эндшпиля, в том числе экс-чемпион мира В. Смыслов, считали эту позицию ничейной. Однако потом был найден четкий путь к выигрышу.

1. Крс3 Лс8+ 2.Крb4 Лd8 3.Крс4 Лс8+ 4.Крb5 Лd8 5.Лf3! Как и раньше, белая ладья защищает пешку, однако на этот раз черный король остается отрезанным от основного места событий. Он должен потратить три хода, чтобы напасть на ладью, а за это время белый король успевает прорваться на территорию противника. **5...Крg6 6.Крс5 Лс8+ 7.Крd6 Лd8+ 8.Кре6! Крg5** (8...Крg7 9.Кре7 Лd5 10.Лg3+ Крh6 11.Кре6 Лd8 12.Кре5 Ле8+ 13.Крf6 и т. д.) **9.Лf5+! Крg6** (после 9...Крg4 10.Лd5 Ле8+ 11.Крd7 Ла8 12.d4 Крf4 13.Лh5 Крg4 14.Ле5 белая пешка неудержимо мчится вперед) **10.Лd5 Ле8+ 11.Крd7 Ла8 12.d4 Крf6 13.Лс5 Ла7+ 14.Крd6 Ла6+ 15.Лс6 Ла8 16.d5 Крf7** (16...Ла7 17.Лс1 Ла6+ 18.Крс7 Кре5 19.d6 с простым выигрышем) **17.Крd7 Ла7+ 18.Лс7 Ла5 19.d6 Ла8 20.Лс8 Ла7+ 21.Крс6 Ла6+ 22.Крс7 Ла7+ 23.Крb6 Лd7 24.Крс6** и пешку не удержать.

В качестве последних конкурсных заданий этого года предлагаются два этюда.

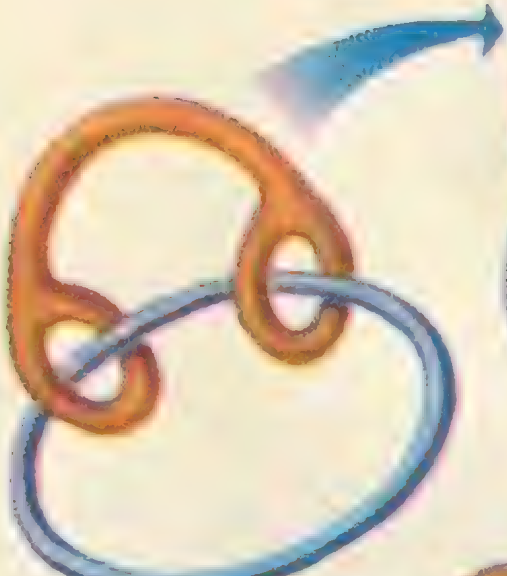


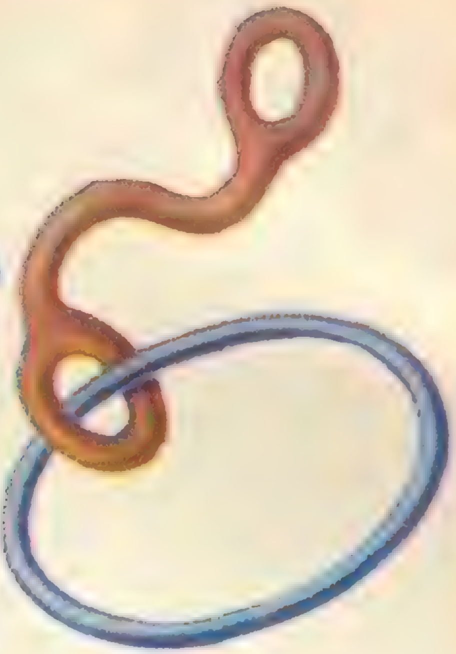
1. Белые начинают и выигрывают.

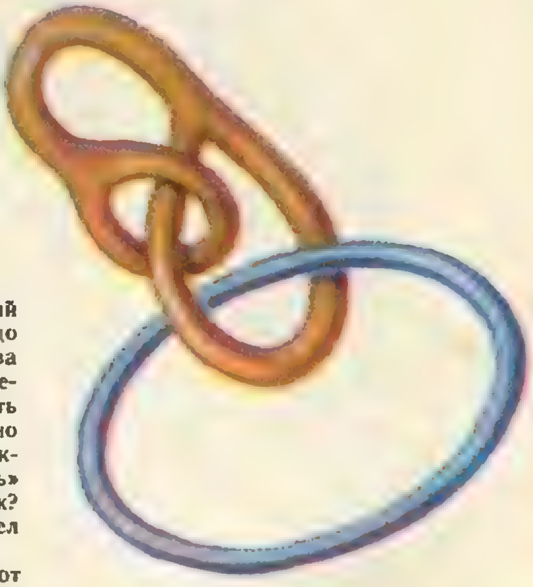


2. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 31 января 1982 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс № 12—81»)







Трудно поверить, что оранжевый резиновый «крендель», охватывающий железное кольцо обеими своими «ушками» (рисунок слева сверху), можно так деформировать, не разрезая и не склеивая, что он будет охватывать кольцо лишь одним ушком (как показано сверху справа). Но это действительно можно сделать, если разрешается «крендель» сжимать, раздувать и растягивать. Как? Если не сообразите сами, посмотрите раздел «Ответы, указания, решения».

Естественно возникает желание отцепить от кольца и второе ушко — ведь они равноправны! Однако отцепить оба ушка нельзя.

А теперь подумайте, можно ли распутать крендель с одним ушком, зацепленным за другое (рисунок внизу).

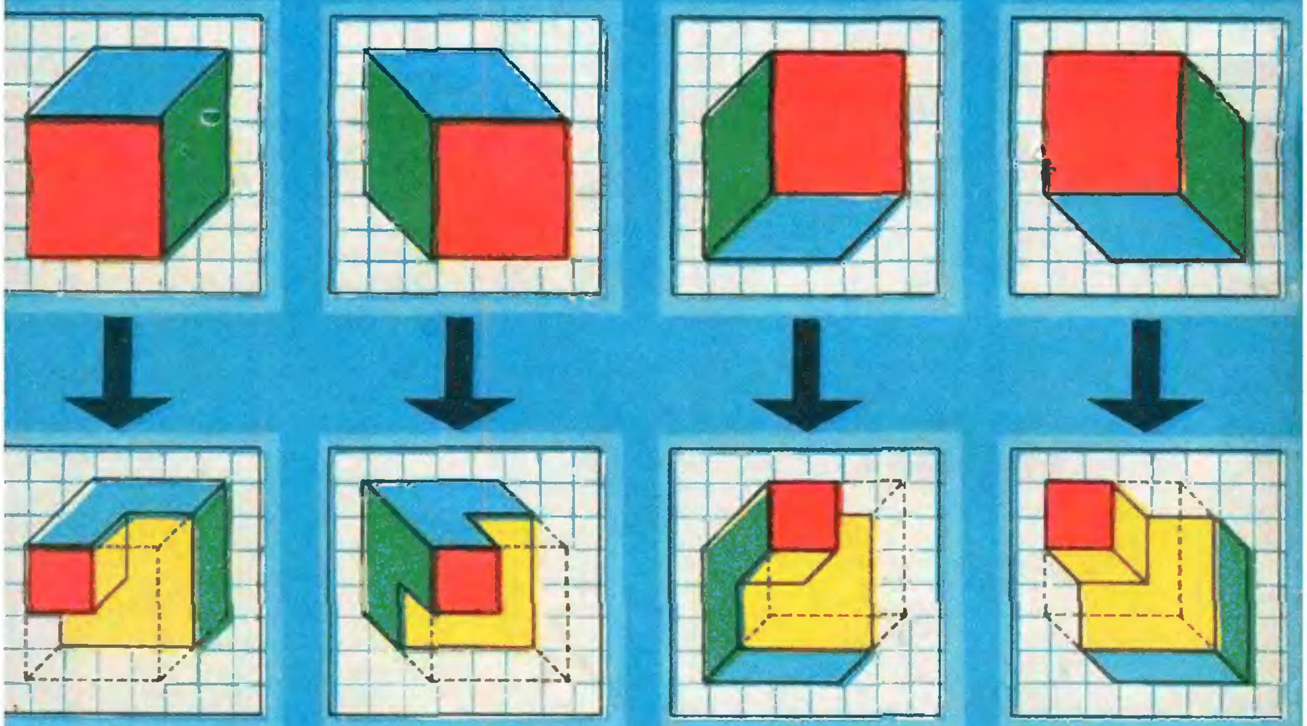
А. П.

Цена 30 коп.
Индекс 70465

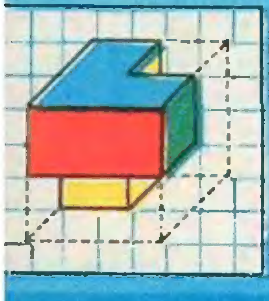
Противоположные грани куба, сделанного из желтого, легкорежущегося материала, окрашены в синий, зеленый и красный цвет. В верхнем ряду куб показан в четырех ракурсах. На первом рисунке второго ряда куб показан после того, как из него вырезали целый кусок. На других рисунках второго ряда показано, как этот разрезанный куб будет выглядеть в остальных ракурсах.

Мы предлагаем вам проверить свое пространственное воображение: на клетчатой бумаге нарисуйте и раскрасьте остальные двенадцать ракурсов четырех разрезанных кубов А, Б, В, Г, изображенных в нижнем ряду.

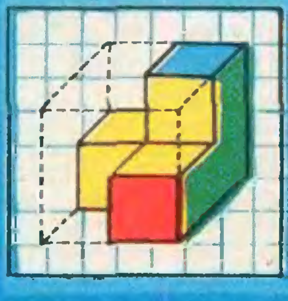
В. Канев



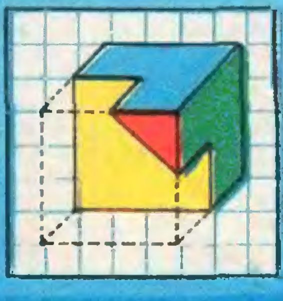
А ?

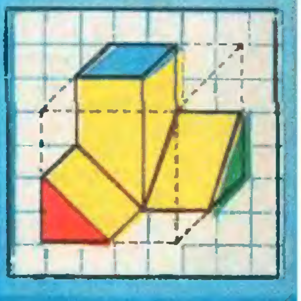
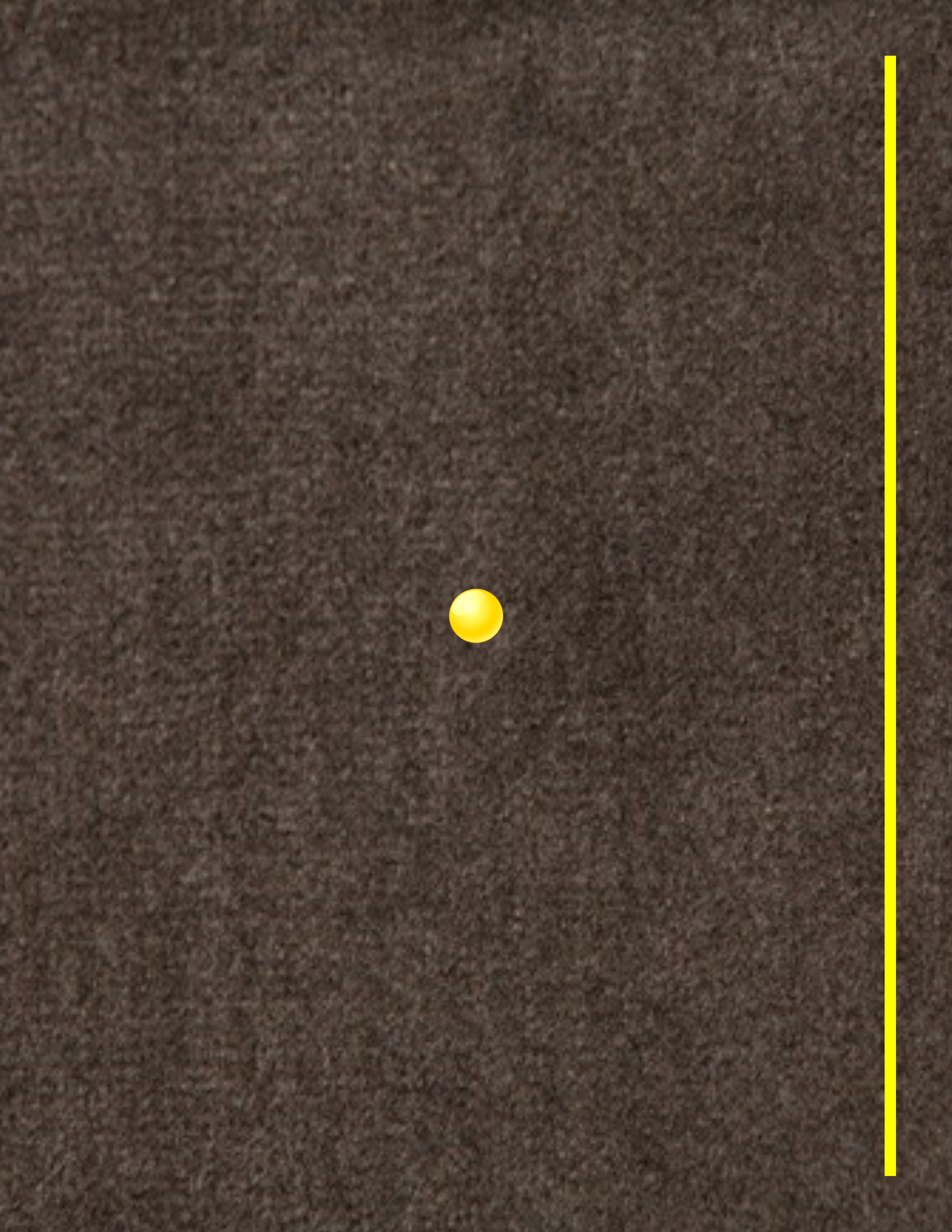


Б ?



В ?



Г ?